

ANDERSON ARMANDO DE SOUZA RODRIGUES

**EMPARELHAMENTOS DE ARESTAS DO POLÍGONO
HIPERBÓLICO ASSOCIADO À TESSELAÇÃO $\{8g - 4, 4\}$**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2017

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

R696e
2017
Rodrigues, Anderson Armando de Souza, 1989-
Emparelhamentos de arestas do polígono hiperbólico
associado à tesselação {8g-4;4} / Anderson Armando de Souza
Rodrigues. – Viçosa, MG, 2017.
x,101f. : il. ; 29 cm.

Orientador: Mercio Botelho Faria.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Inclui bibliografia.

1. Geometria hiperbólica. 2. Polígonos. 3. Álgebra abstrata.
4. Teoria dos números. I. Universidade Federal de Viçosa.
Departamento de Matemática. Programa de Pós-graduação em
Matemática. II. Título.

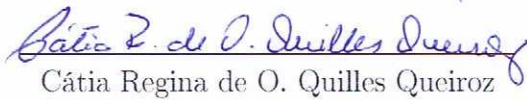
CDD 22 ed. 516.9

ANDERSON ARMANDO DE SOUZA RODRIGUES

EMPARELHAMENTOS DE ARESTAS DO POLÍGONO
HIPERBÓLICO ASSOCIADO À TESSELAÇÃO $\{8g - 4, 4\}$

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 21 de Fevereiro de 2017


Cátia Regina de O. Quilles Queiroz


Catarina Mendes de Jesus Sánchez


Mercio Botelho Faria
(Orientador)

*Dedico este trabalho aos meus pais,
Armando e Maria de Fátima.*

"A felicidade não é uma constante matemática, mas pode alcançar o infinito em um dado momento."

Fabício Britto

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus. Sou muitíssimo grato aos meus pais, Armando e Maria de Fátima, por sua criação, carinho e motivação, vocês me ensinaram a seguir meus sonhos e objetivos, nossa história de lutas e vitórias começa bem antes daqui.

Agradeço ao meu orientador, Mércio Botelho Faria, pela paciência, aprendizado valioso, pelas suas correções, incentivo e palavras amigas durante sua orientação. Enfim, agradeço pela pessoa maravilhosa que é.

Agradeço aos meus queridos irmãos, Scheila, Diego, Felipe e Henrique, pelo apoio, companheirismo, força e alegria. Agradeço também a minha namorada Laiane pelos anos de convivência e paciência com meus estudos e por todo amor dado a mim nessa caminhada acadêmica.

Agradeço aos meus amigos e colegas de curso, tanto na graduação quanto na pós-graduação pela amizade, momentos de descontração e ajuda com os estudos. Vocês fizeram parte da minha formação durante esses anos e vão continuar presentes em minha vida.

Aos professores e funcionários do DMA-UFV, por colaborarem com a minha formação e pelos eficientes serviços prestados.

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

Sumário

Lista de Figuras	vii
Resumo	ix
Abstract	x
Introdução	1
1 Geometria Hiperbólica Bi-Dimensional	4
1.1 Transformações de Möbius	4
1.1.1 Inversões	5
1.1.2 Reflexões	6
1.1.3 O Grupo de Möbius	7
1.1.4 O Grupo $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$	8
1.2 Modelos Hiperbólicos	10
1.2.1 O Modelo \mathbb{H}^2	10
1.2.2 O Modelo \mathbb{D}^2	14
1.3 Polígonos Hiperbólicos	16
1.3.1 Triângulos Hiperbólicos	16
1.3.2 Área Hiperbólica	17
2 Grupos Fuchsianos e Domínios de Dirichlet	20
2.1 Grupos Fuchsianos	20
2.1.1 Isometrias Hiperbólicas	20
2.1.2 Subgrupos Discretos	22

2.2	Domínios de Dirichlet	26
2.2.1	Domínios Fundamentais	26
2.2.2	Domínios de Dirichlet	28
3	Emparelhamentos de Arestas, Teorema de Poincaré e Tesselacões Hiperbólicas	32
3.1	Emparelhamentos de Arestas	32
3.2	O Teorema de Poincaré e Grupos Fuchsianos Co-compactos	34
3.2.1	Teorema de Poincaré	34
3.2.2	Grupos Fuchsianos Co-compactos	41
3.3	Tesselacões no plano	42
3.3.1	Tesselacões no plano euclidiano.	42
3.3.2	Tesselacões regulares no plano Hiperbólico	44
3.4	Emparelhamentos Generalizados $\{12\eta - 8, 4\}$ e $\{12\mu - 12, 4\}$. . .	45
3.4.1	Emparelhamentos Generalizados $\{12\eta - 8, 4\}$	45
3.4.2	Emparelhamentos Generalizados $\{12\mu - 12, 4\}$	49
3.5	Emparelhamento do Polígono \mathcal{P}_{8g-4}	51
4	Emparelhamentos de Arestas Construídos	55
4.1	Emparelhamento Generalizado $\{12\beta - 16, 4\}$	56
4.2	Emparelhamento Generalizado $\{8\alpha - 4, 4\}$	67
4.3	Novo Emparelhamento Generalizado $\{8g - 4, 4\}$	73
4.4	Outros Casos de Emparelhamentos Generalizados $\{8g - 4, 4\}$. . .	78
4.4.1	Emparelhamentos Generalizados $\{8\alpha - 4, 4\}$	78
4.4.2	Emparelhamento Generalizado $\{8\lambda - 4, 4\}$	85
4.4.3	Emparelhamentos Generalizados $\{8g - 4, 4\}$	88
	Considerações Finais	99
	Referências Bibliográficas	100

Lista de Figuras

1.1	Projeção estereográfica.	6
1.2	Geodesicas em \mathbb{H}^2	13
1.3	Geodesicas em \mathbb{D}^2	16
1.4	Triângulos hiperbólicos em \mathbb{H}^2 com 0, 1, 2, 3 vértices ideais. Figura observada na referência [17]	17
1.5	Triângulos hiperbólicos em \mathbb{D}^2 com 0, 1, 2, 3 vértices ideais.	17
1.6	Triângulo hiperbólico prolongado	19
2.1	Domínio Fundamental \mathcal{D}_k	28
3.1	Emparelhamento Φ	34
3.2	Exemplos de tesselações em \mathbb{R}^2	43
3.3	Os favos das abelhas tem formato de hexágono	43
3.4	Tesselação hiperbólica $\{8, 8\}$ em \mathbb{D}^2	44
3.5	Tesselação hiperbólica $\{10, 5\}$ em \mathbb{D}^2	45
3.6	Polígono hiperbólico de 52 arestas com emparelhamento Φ_{52}	48
3.7	Polígono hiperbólico com 36 arestas e emparelhamento Φ_{36}	50
3.8	Emparelhamento Φ_{12}^1 , para $g=2$	52
3.9	Emparelhamento Φ_{20}^1 para $g=3$	54
4.1	Polígono hiperbólico de 20 arestas com emparelhamento Φ_{20}	59
4.2	Polígono hiperbólico de 44 arestas com emparelhamento Φ_{44}	61
4.3	Polígono hiperbólico de 12 arestas com emparelhamento Φ_{12}^2	64
4.4	Polígono hiperbólico de 20 arestas com emparelhamento Φ_{20}^2	65
4.5	Polígono hiperbólico de 28 arestas com emparelhamento Φ_{28}^2	66

4.6	Polígono hiperbólico de 20 arestas com emparelhamento Φ_{20}^3	69
4.7	Polígono hiperbólico de 36 arestas com emparelhamento Φ_{36}^3	71
4.8	Polígono hiperbólico de 52 arestas com emparelhamento Φ_{52}^3	72
4.9	Polígono hiperbólico de 20 arestas com emparelhamento Φ_{20}^4	75
4.10	Polígono hiperbólico de 28 arestas com emparelhamento Φ_{28}^4	76
4.11	Polígono hiperbólico de 36 arestas com emparelhamento Φ_{36}^4	77
4.12	Polígono hiperbólico de 20 arestas com emparelhamento Φ_{20}^5	80
4.13	Polígono hiperbólico de 36 arestas com emparelhamento Φ_{36}^5	81
4.14	Polígono hiperbólico de 20 arestas com emparelhamento Φ_{20}^6	83
4.15	Polígono hiperbólico de 36 arestas com emparelhamento Φ_{36}^6	84
4.16	Polígono hiperbólico de 28 arestas com emparelhamento Φ_{28}^7	86
4.17	Polígono hiperbólico de 44 arestas com emparelhamento Φ_{44}^7	88
4.18	Polígono hiperbólico de 12 arestas com emparelhamento Φ_{12}^8	90
4.19	Polígono hiperbólico de 20 arestas com emparelhamento Φ_{20}^8	91
4.20	Polígono hiperbólico de 28 arestas com emparelhamento Φ_{28}^8	93
4.21	Polígono hiperbólico de 20 arestas com emparelhamento Φ_{20}^9	94
4.22	Polígono hiperbólico de 28 arestas com emparelhamento Φ_{28}^9	96
4.23	Polígono hiperbólico de 36 arestas com emparelhamento Φ_{36}^9	97

Resumo

RODRIGUES, Anderson Armando de Souza, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2017. **Emparelhamentos de Arestas do Polígono Hiperbólico Associado à Tesselação $\{8g - 4, 4\}$** . Orientador: Mercio Botelho Faria.

Este estudo aborda novas construções de emparelhamentos de arestas generalizados de polígonos hiperbólicos associados à tesselação hiperbólica $\{8g - 4, 4\}$ (Capítulo 4). Aos quais, mediante o Teorema de Poincaré construímos superfícies compactas pelo quociente $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$, onde \mathbb{H}^2 é o plano hiperbólico, Γ é um grupo discreto de isometrias gerado pelos emparelhamentos e $g \geq 2$ representa o gênero da superfície. Essa tesselação apresenta propriedades geométricas interessantes, e os resultados ligados à essa teoria têm aplicações na teoria de códigos. Um desses emparelhamentos é obtido ao unir o emparelhamento $\Phi_{12\beta-16}$ que construímos associado à tesselação $\{12\beta - 16, 4\}$ com emparelhamentos $\Phi_{12\eta-8}$ e $\Phi_{12\mu-12}$ construídos em [19] associados às tesselações $\{12\eta - 8, 4\}$ e $\{12\mu - 12, 4\}$. Construímos quatro maneiras distintas de emparelhar as arestas do polígono hiperbólico \mathcal{P}_{8g-4} , com $8g - 4$ arestas, associados à tesselação hiperbólica regular $\{8g - 4, 4\}$ e quatro casos particulares de emparelhar as arestas de \mathcal{P}_{8g-4} , onde em três desses casos $g \geq 3$ é ímpar e em um caso $g \geq 4$ é par.

Abstract

RODRIGUES, Anderson Armando de Souza, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2017. **Pairing the edges of the hyperbolic polygon associated with the tessellation $\{8g - 4, 4\}$.** Advisor: Mercio Botelho Faria.

This study deals with new constructions of generalized edge pairing of hyperbolic polygons associated with hyperbolic tessellation $\{8g - 4, 4\}$ (Chapter 4). To which, through the Poincaré Theorem we construct compact surfaces by the quotient $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$, where \mathbb{H}^2 is the hyperbolic plane, Γ is a discrete group of isometries generated by pairings of the edges and $g \geq 2$ represents the surface genre. This tessellation presents interesting geometric properties, and the results connected with this theory have applications in code theory. One of these pairings is obtained by joining the $\Phi_{12\beta-16}$ pairing we construct associated with the tessellation $\{12\beta - 16, 4\}$ with pairings $\Phi_{12\eta-8}$ and $\Phi_{12\mu-12}$ constructed in [19] associated with the tessellations $\{12\eta - 8, 4\}$ and $\{12\mu - 12, 4\}$. We construct four distinct ways of pairing the edges of the hyperbolic polygon \mathcal{P}_{8g-4} , with $8g - 4$ edges, associated with regular hyperbolic tessellating $\{8g - 4, 4\}$ e Four particular cases of pairing the edges of \mathcal{P}_{8g-4} , where in three of these cases $g \geq 3$ and in one case $g \geq 4$ pair.

Introdução

É conhecido que qualquer grupo Fuchsiano Γ agindo sobre o plano hiperbólico \mathbb{H}^2 tem um polígono fundamental convexo P e que o emparelhamento Φ de um polígono hiperbólico P gera um grupo Γ . Com este grupo podemos obter superfícies de Riemann R de um dado gênero g através do quociente de \mathbb{H}^2 por Γ , denotado por $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$, onde \mathbb{H}^2 é o plano hiperbólico conhecido como plano de Lobachevsky e Γ é um grupo discreto de isometrias de \mathbb{H}^2 . Ainda, a soma dos ângulos internos de P nos pontos que fecham um ciclo é um certo múltiplo de 2π . O teorema de Poincaré nos permite fazer o processo inverso e portanto dá um método para construir grupos fuchsianos.

Neste trabalho, estudamos certos tipos de emparelhamentos de arestas de polígonos hiperbólicos. Emparelhamentos originalmente feitos por Oliveira Junior e Faria na referência [19], os quais, nos fornecem superfícies compactas orientáveis pelo quociente $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$. Esses emparelhamentos através do teorema de Poincaré (Capítulo 3) nos fornecem regiões fundamentais e grupos Fuchsianos gerados pelos emparelhamentos de arestas de polígonos hiperbólicos. Construímos, nesse trabalho, novos emparelhamentos e, portanto, novos grupos, que estão expostos no Capítulo 4, os quais, estão associados à tesselação hiperbólica $\{8g - 4, 4\}$.

Os emparelhamentos de polígonos hiperbólicos tem relevância na construção de reticulados hiperbólicos [21], que são utilizados no processo de construção de constelações de sinais, a partir de grupos Fuchsianos aritméticos e da superfície de Riemann associada (Veja [1] e [2]). O interesse pela teoria dos reticulados é devido também ao fato de ser uma ferramenta para o problema de empacotamentos de esferas, que auxilia na construção de boas constelações de sinais ou códigos ótimos. Isto nos motiva ao estudo de emparelhamentos de arestas de polígonos hiperbólicos associados à tesselação $\{p, q\}$, em que $\{p, q\}$ denota uma tesselação regular por um polígono regular de p arestas, de tal forma que cada vértice, q desses polígonos regulares se encontram. Tais tesselações fornecem empacotamentos de esferas com densidade máxima [6] e portanto, estão relacionadas com a construção de códigos ótimos, cuja a probabilidade de erro é mínima.

O problema de empacotamento de esferas tem como principal objetivo a busca pela maior densidade possível de empacotamento. Em [24], Toth apresentou o limitante máximo para a densidade de empacotamento no plano hiperbólico. Segundo ele, a densidade de empacotamento é limitada superiormente por $\frac{3}{\pi}$, ($\frac{3}{\pi} \approx 0,95492965855137201461$).

Em [6] foram feitos estudos assintóticos para reticulados do tipo $\{p, q\}$. Demonstrou-se que assintoticamente, a densidade de empacotamento não atinge o valor $\frac{3}{\pi}$. Assintoticamente no sentido de p e q tenderem a infinito, onde p e q determinam uma tesselação $\{p, q\}$. Porém, temos que $\frac{3}{\pi}$ é atingido em empacotamentos por horobolas $\{\infty, 3\}$.

A relevância de tais resultados, para empacotamento de esferas, está no fato que reticulados hiperbólicos dos tipos $\{12\eta - 8, 4\}$ e $\{12\mu - 12, 4\}$ fornecem empacotamentos com densidades próximas ao empacotamento ótimo em relação a densidade de empacotamento no plano hiperbólico, [19]. Daí, nosso interesse em explorar os emparelhamentos de arestas de polígonos hiperbólicos, em particular os polígonos com $8g - 4$ arestas com $g \geq 2$, pois as tesselações $\{12\eta - 8, 4\}$ e $\{12\mu - 12, 4\}$ são casos particulares da tesselação $\{8g - 4, 4\}$.

Antes de iniciarmos o trabalho, apresentamos abaixo um breve resumo dos capítulos.

No Capítulo 1, estudaremos a Geometria Hiperbólica no caso bi-dimensional, estudando os modelos para o plano hiperbólico que são o plano de Lobachevsky e o disco de Poincaré. Nesses modelos apresentaremos o comprimento hiperbólico e a distância hiperbólica, veremos também que estes são espaços métricos relacionados. Veremos as transformações que mantêm o plano hiperbólico invariante, assim chamadas de transformações de Möbius, onde identificamos o conjunto dessas transformações pelo conjunto de matrizes quadradas. Uma vez tendo definido geodésicas nos modelos hiperbólicos, definimos polígonos hiperbólicos e propriedades importantes como área hiperbólica e condição de existência de polígonos hiperbólicos.

No Capítulo 2, apresentaremos os Grupos Fuchsianos e os Domínios de Dirichlet. Faremos as classificações de isometrias de \mathbb{H}^2 e definiremos os grupos discretos dessas isometrias chamados de Grupos Fuchsianos, onde são utilizadas noções básicas de topologia geral, variedades riemanniana, teoria de grupos e noções de topologia algébrica. Apresentaremos as regiões fundamentais ou domínios fundamentais, onde a partir desses domínios podemos tesselar o plano hiperbólico.

No Capítulo 3, apresentaremos a definição de emparelhamentos de arestas e o teorema de Poincaré que nos dá condições para um polígono hiperbólico ser uma região fundamental e o emparelhamento das arestas desse polígono gerar um grupo Fuchsiano. Apresentamos os grupos Fuchsianos co-compactos, que nos dão condições de obter superfícies compactas orientáveis a partir do quociente $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$, onde Γ é um grupo Fuchsiano. Estudaremos as tesselações hiperbólicas $\{p, q\}$ e condições para que uma tesselação regular no plano hiperbólico exista. Por fim, apresentamos os emparelhamentos de polígonos hiperbólicos associados as tesselações $\{12\eta - 8, 4\}$ e $\{12\mu - 12, 4\}$, construídos na referência [19], os quais nos fornecem superfícies compactas orientáveis. Apresentamos também, um emparelhamento associado à tesselação $\{8g - 4, 4\}$.

Finalmente no Capítulo 4, construímos emparelhamentos de arestas para o polígono hiperbólico, com $12\beta - 16$ arestas, associados à tesselação $\{12\beta - 16, 4\}$,

com $\beta \geq 3$ ímpar. Observamos que este emparelhamento junto com os emparelhamentos feitos em [19] associados às tesselações $\{12\eta - 8, 4\}$, com $\eta \geq 3$ ímpar e $\{12\mu - 8, 4\}$, com $\mu \geq 2$ par, fornecem um emparelhamento de polígonos, com $8g - 4$ arestas, associados à tesselação $\{8g - 4, 4\}$ e $g \geq 2$ natural. Construímos também, novas identificações de arestas que emparelham o polígono hiperbólico com $8\alpha - 4$ arestas, neste caso $\alpha = g \geq 3$ é ímpar e uma nova identificação de arestas que emparelha o polígono hiperbólico, com $8\lambda - 4$ arestas e neste caso $\lambda = g \geq 4$ é par. Por fim, construímos novos emparelhamentos de arestas associados à tesselação $\{8g - 4, 4\}$.

Capítulo 1

Geometria Hiperbólica Bi-Dimensional

Neste capítulo, veremos alguns conceitos e resultados necessários ao estudo dos capítulos seguintes. A Geometria Hiperbólica é o nosso ponto de partida para o desenvolvimento dos demais capítulos desse trabalho. Uma das possíveis maneiras de estudar a geometria hiperbólica é através da adoção de um modelo, e aqui utilizaremos dois modelos para essa geometria. A primeira seção deste capítulo trata-se das transformações de Möbius para o caso $(n+1)$ -dimensional do espaço hiperbólico, mas o nosso interesse maior é o caso bi-dimensional da geometria hiperbólica. Apresentamos os dois tipos de transformações de Möbius, as inversões e as reflexões, o grupo de Möbius, o grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ e sua relação com o grupo das transformações de Möbius. Em seguida na segunda seção, apresentamos dois modelos de geometria hiperbólica plana, conhecidos como semi-plano superior ou plano de Lobachevsk \mathbb{H}^2 e o disco de Poincaré \mathbb{D}^2 , bem como as isometrias em cada modelo. Por fim, na terceira seção faremos a construção dos polígonos hiperbólicos e definiremos e demonstramos resultados sobre Área Hiperbólica. Pretendemos simplesmente nos situar com respeito a esse estudo, de modo que não faremos todas as demonstrações dos resultados apresentados. O presente capítulo baseia-se nas seguintes referências [3], [11] [13], [17], [20] e [22].

1.1 Transformações de Möbius

Com o intuito de estudar a geometria hiperbólica através da ação de um grupo de transformações que preserva a distância, retas hiperbólicas e que mantêm invariante os modelos euclidianos para a geometria hiperbólica que estudaremos mais adiante, nesta seção, introduziremos os dois tipos de transformações de Möbius, as reflexões e as inversões, o grupo de Möbius e o grupo $PSL(2, \mathbb{R})$.

Apresentamos resultados que explicitam, tanto inversões como reflexões e que ambas são aplicações conformes, ou seja, preservam ângulos entre curvas. Uma vez tendo definido inversões e reflexões, definiremos transformações de Möbius e apresentamos o grupo formado pelas transformações de Möbius, com interesse

maior no caso bi-dimensional, pois é a dimensão de estudo neste trabalho, assim definimos transformações de Möbius para o plano estendido \mathbb{C}_∞ . Por fim, estudamos o grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ e sua relação com o grupo das transformações de Möbius.

1.1.1 Inversões

Considere o espaço euclidiano n -dimensional \mathbb{R}^n e sua compactificação por um ponto $\widehat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, chamamos o ponto ∞ de ponto ideal e seus abertos são os conjuntos da forma $(\mathbb{R}^n \setminus A) \cup \{\infty\}$ em que A é um compacto arbitrário de \mathbb{R}^n . Estes abertos definem uma topologia em $\widehat{\mathbb{R}}^n$. Com essa topologia $\widehat{\mathbb{R}}^n$ é homeomorfo à esfera

$$S^n = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} ; \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1 \right\}.$$

De fato, consideremos a imersão $i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dado por $i(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0)$ onde o ponto $N = (0, \dots, 0, 1)$ é o "Polo Norte" da esfera. Podemos definir a projeção estereográfica

$$\pi_N = S^n \setminus \{N\} \rightarrow i(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n.$$

Essa projeção é definida do seguinte modo (ver Figura 1.1):

Dado um ponto $x \in S^n \setminus \{N\}$, existe uma única reta determinada por x e por N . Sendo $x \neq N$, sua última coordenada é diferente de 1, logo a reta determinada por x e por N interceptará o hiperplano $i(\mathbb{R}^n)$ em um único ponto que denotaremos por $\pi_N(x) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n, 0)$. Mais ainda, podemos verificar que π_N é um homeomorfismo.

E, se $(x^n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência em S^n , constatamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = N \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |\pi_N(x^n)| = \infty.$$

Portanto, ao adicionarmos um ponto ideal a \mathbb{R}^n e definirmos suas vizinhanças como acima, a projeção estereográfica se estende a um homeomorfismo $\pi : S^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$. Denotaremos por $S_r(a)$ a esfera de \mathbb{R}^n de centro a e raio r .

Se consideramos o plano complexo $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, para cada $z \in \mathbb{C}$ e a reta em \mathbb{R}^3 que passa por z e N intercepta a esfera em um ponto $P \neq N$. Então, para $|z| < 1$, P se encontra no hemisfério sul, para $|z| = 1$, temos $P = z$ e para $|z| > 1$, P esta no hemisfério sul da esfera. À medida que z tende ao ∞ P tende a N . Deste modo, identificamos $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ com S^2 e denotaremos por \mathbb{C}_∞ .

Podemos proceder a seguinte definição.

Definição 1.1. *Dada uma esfera $S = S_r(a)$ no espaço euclidiano, a **inversão** $i_S : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$ em torno de S é a aplicação tal que $i_S(a) = \infty, i_S(\infty) = a$ e para cada $x \notin \{a, \infty\}$, $i_S(x)$ é o único ponto da reta \overleftrightarrow{ax} tal que $|a - x||a - i_S(x)| = r^2$.*

Com esta definição podemos enunciar e demonstrar a seguinte proposição.

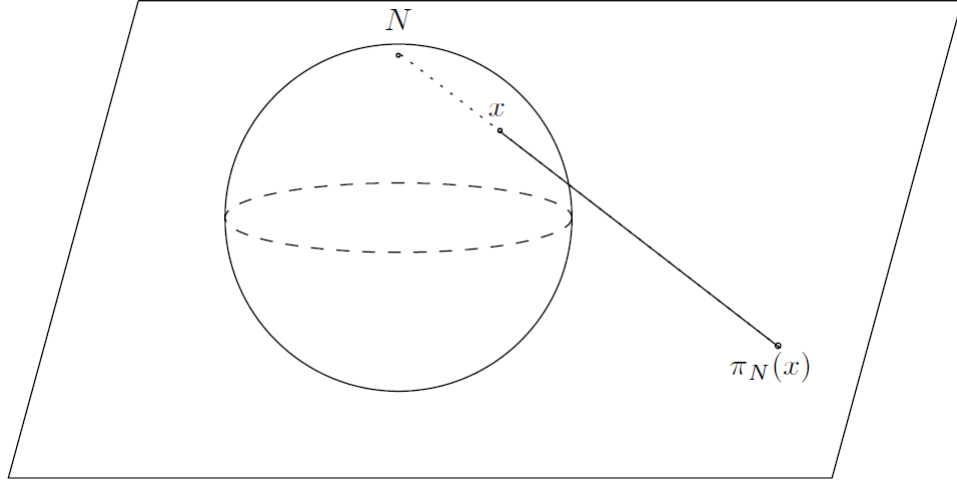


Figura 1.1: Projeção estereográfica.

Proposição 1.2. *Dada a esfera $S = S_r(a)$, temos que para todo $x \neq a, \infty$,*

$$i_S(x) = a + r^2 \frac{x - a}{|x - a|^2}.$$

Demonstração: De fato, os pontos x, a e $a + r^2 \frac{x - a}{|x - a|^2}$ são colineares e

$$|a - x| \left| a - \left(a + r^2 \frac{x - a}{|x - a|^2} \right) \right| = r^2 |a - x| \left| \frac{x - a}{|x - a|^2} \right| = r^2.$$

■

Definição 1.3. *Uma aplicação diferenciável $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita **conforme** se Φ preserva ângulos entre curvas continuamente diferenciáveis.*

Proposição 1.4. *Para toda esfera $S = S_r(a)$, a inversão i_S é uma aplicação conforme de $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$.*

1.1.2 Reflexões

Nesta seção por diante trataremos por esferas tanto as esferas $S_r(a)$ quanto os hiperplanos compactificados $P_t(a) \cup \{\infty\}$, onde $P_t(a) = \{x \in \mathbb{R}^n / \langle x, a \rangle = t\}$ é um subespaço afim de \mathbb{R}^n . Neste caso, denotaremos a esfera Σ e manteremos a notação S e P_t para os casos em que a distinção tiver relevância. Consideremos um hiperplano compactificado $P_t = P_t(a) \cup \{\infty\}$.

Definição 1.5. *A **reflexão** i_P em P_t é a aplicação que a cada ponto $x \in \mathbb{R}^n$ associa um ponto $i_P(x)$ tal que o segmento de reta dado por x e $i_P(x)$ é ortogonal a P_t e intercepta o plano P_t em seu ponto médio.*

Em particular, i_P mantém fixos os pontos de $P_t(a)$ e por definição $i_P(\infty) = \infty$.

Proposição 1.6. *Dado o hiperplano P_t , a reflexão i_P é dada por*

$$i_P(x) = x - 2 \frac{\langle x, a \rangle - t}{|a|^2} a.$$

Demonstração: Se considerarmos π_P a projeção ortogonal em $P_t(a)$, temos que $\pi_P(x)$ satisfaz as equações $x - \pi_P(x) = \varepsilon a$, ou seja,

$$\pi_P(x) = x - \varepsilon a \tag{1.1}$$

e

$$\langle \pi_P(x), a \rangle = t \tag{1.2}$$

pois $x - \pi_P(x)$ é ortogonal ao hiperplano $P_0(a)$ e $\pi_P(x)$ pertence a $P_t(a)$. Substituindo (1.1) em (1.2) obtemos que $\langle x - \varepsilon a, a \rangle = t$, ou seja, $\langle x, a \rangle - \varepsilon |a|^2 = t$, assim $\varepsilon = \frac{\langle x, a \rangle - t}{|a|^2}$. Logo,

$$i_P(x) = x - 2(x - \pi_P(x)) = x - 2\varepsilon a = x - 2 \frac{\langle x, a \rangle - t}{|a|^2} a$$

e assim obtemos o resultado. ■

Essa proposição deixa de forma explícita a reflexão em hiperplanos donde, obtemos assim os seguintes resultados, que nos garantem que a reflexão preserva a distância, esferas e ângulos entre curvas continuamente diferenciáveis.

Teorema 1.7. *Dados hiperplanos P e pontos quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, temos $|x - y| = |i_P(x) - i_P(y)|$.*

Teorema 1.8. *Seja i_P uma reflexão em um hiperplano P . Então, para toda esfera Σ , $i_P(\Sigma)$ é uma esfera.*

Teorema 1.9. *Para todo hiperplano $P = P_t(a)$ a reflexão i_P é conforme.*

As demonstrações destes 3 resultados podem ser vistas na referência [13].

1.1.3 O Grupo de Möbius

Agora apresentaremos as **Transformações de Möbius** e seu grupo geral e veremos sua particularização para o plano complexo.

Definição 1.10. *Uma **Transformação de Möbius** de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ é uma composição de um número finito de reflexões em hiperplanos e inversões em esferas. O conjunto das transformações de Möbius de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ é chamado de **Grupo Geral de Möbius** e é denotado por $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$.*

Definição 1.11. *O **Grupo de Möbius** $M(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ é o subgrupo de $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ formado pelas transformações de \mathbb{R}^n que preservam a orientação.*

Consideremos o plano complexo estendido $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ e as transformações $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ dada por $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, onde os coeficientes $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ satisfazendo $ad - bc \neq 0$. Caso $ad - bc = 0$ teríamos T constante igual a a/c . Além disso, se $c \neq 0$, definimos $T(-d/c) = \infty$ o ponto no infinito, $T(\infty) = a/c$. Por fim, se $c = 0$ definimos $T(\infty) = \infty$. Assim, podemos definir

Definição 1.12. *Uma Transformação de Möbius de \mathbb{C}_∞ em \mathbb{C}_∞ é uma aplicação da forma*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e $ad - bc \neq 0$.

Na definição 1.11 o conjunto dessas transformações é um grupo não abeliano com a operação usual de composição de transformações e o denotaremos daqui em diante simplesmente por G .

1.1.4 O Grupo $PSL(2, \mathbb{R})$

Para o desenvolvimento dessa subseção consideremos o grupo das matrizes 2×2 , $M(2, \mathbb{R})$, e seja,

$$GL(2, \mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } ad - bc \neq 0 \right\}$$

o grupo com a operação usual de multiplicação das matrizes 2×2 inversíveis. Considere o grupo

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } ad - bc = 1 \right\},$$

que é subgrupo de $GL(2, \mathbb{R})$ de matrizes reais 2×2 e determinante igual a 1. Agora, para cada matriz de $A \in SL(2, \mathbb{R})$ associamos uma transformação $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$.

Denote por $H = \left\{ S(z) = \frac{az + b}{cz + d} \in G, \text{ tal que } ad - bc = 1, \text{ onde } a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ o conjunto destas transformações. Podemos relacionar os elementos de H com os elementos de $SL(2, \mathbb{R})$ da seguinte maneira: Dados $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ e $S_{A_1}(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}$, $S_{A_2}(z) = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2} \in H$. Verifica-se que $S_{A_1} \circ S_{A_2} = S_{A_1A_2}$. De fato, como

$$A_1A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix},$$

então

$$S_{A_1}(S_{A_2}(z)) = \frac{a_1 \left(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} \right) + b_1}{c_1 \left(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} \right) + d_1} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2)z + (b_1 d_2 + a_1 b_2)}{(c_1 a_2 + d_1 c_2)z + (d_1 d_2 + c_1 b_2)} = S_{A_1 A_2}(z).$$

E também, para cada transformação $S_A \in H$ existe uma transformação $S_{A^{-1}}$, tal que $S_A \circ S_{A^{-1}} = Id$. Basta observarmos, que

$$S_A \circ S_{A^{-1}}(z) = S_{AA^{-1}}(z) = S_{ID}(z) = \frac{1z + 0}{0z + 1} = z,$$

onde ID é a matriz identidade de $SL(2, \mathbb{R})$, ou seja, a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Com isso temos o seguinte teorema:

Teorema 1.13. *Sabemos que $\{ID, -ID\}$ é subgrupo normal de $SL(2, \mathbb{R})$, onde ID é matriz identidade. Então, $\frac{SL(2, \mathbb{R})}{\{ID, -ID\}} \simeq H$.*

Demonstração: Para $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$. Defina $\varphi : SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow H$ dada por $\varphi(A) = S_A(z)$, φ está bem definida pois, dadas matrizes $A, B \in SL(2, \mathbb{R})$ se temos que $A = B$, então temos que $S_A(z) = S_B(z)$, com $S_A(z), S_B(z) \in H$, ou seja, $\varphi(A) = \varphi(B)$. Além disso, φ é um homomorfismo. De fato, sejam $A, B \in SL(2, \mathbb{R})$ temos,

$$\varphi(AB) = S_{AB}(z) = S_A \circ S_B(z) = \varphi(A) \circ \varphi(B).$$

Assim, pelo teorema dos isomorfismos, $\frac{SL(2, \mathbb{R})}{Ker\varphi} \simeq H$, pois φ é sobrejetora. Agora, temos que $Ker\varphi = \{A \in SL(2, \mathbb{R}); \varphi(A) = Id(z) = z\}$ e note que,

$$\frac{az + b}{cz + d} = z \Leftrightarrow cz^2 + (d - a)z - b = 0$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Mas essa equação tem no máximo duas raízes complexas, assim os coeficientes tem que serem todos nulos, ou seja, $c = 0$, $d - a = 0$, $b = 0$. Logo, $a = d$ e como $ad - bc = 1$, temos que $a = d = \pm 1$. Portanto, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ou seja, $ker\varphi = \{ID, -ID\}$ ■

Denotaremos $\frac{SL(2, \mathbb{R})}{\{ID, -ID\}}$ por $PSL(2, \mathbb{R})$, conhecido como **Grupo Linear Projetivo Especial**.

1.2 Modelos Hiperbólicos

Nesta seção estudamos dois modelos euclidianos da geometria hiperbólica, o plano de Lobachevsk \mathbb{H}^2 e o disco de Poincaré \mathbb{D}^2 , onde determinamos relações entre estes espaços e seus elementos.

No modelo \mathbb{H}^2 com o objetivo de obtermos todas as suas geodésicas, definimos comprimento hiperbólico, distância hiperbólica e isometrias de \mathbb{H}^2 . Apresentamos e demonstramos alguns resultados que nos permitem verificar que todas as geodésicas de \mathbb{H}^2 são as semi-retas e semi-circunferências ortogonais a sua fronteira. No modelo \mathbb{D}^2 apresentamos a sua relação com \mathbb{H}^2 , através de uma aplicação bijetora entre esses dois conjuntos. Assim, definimos isometria, comprimento hiperbólico, distância hiperbólica e obtemos as geodésicas que são os diâmetros e os círculos ortogonais a sua fronteira.

1.2.1 O Modelo \mathbb{H}^2

Consideremos o conjunto

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z) > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$$

Dotado da métrica riemanniana $ds = \frac{|dz|}{\operatorname{Im}(z)} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$, onde $z = x + iy$ e assumindo que sua fronteira é dada por

$$\partial_\infty \mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = 0\} \cup \{\infty\},$$

\mathbb{H}^2 é chamado **Semiplano Superior** ou **Plano de Lobachevsky**. Observe que podemos trabalhar com os elementos de \mathbb{H}^2 como número complexo ou como um ponto de \mathbb{R}^2 . Introduzindo uma estrutura riemanniana nos permite definir curvas, geodésicas e distância entre pontos.

Seja $I = [a, b]$ um intervalo fechado e $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma curva continuamente diferenciável por partes, onde $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$. Então, definimos o comprimento hiperbólico $\|\gamma\|_{\mathbb{H}^2}$ da curva $\gamma(I)$ por

$$\|\gamma\| = \int_a^b \frac{\sqrt{\left(\frac{dx_1(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2(t)}{dt}\right)^2}}{x_2(t)} dt.$$

De modo geral, se considerarmos a aplicação $\phi : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ definida por $\phi(t) = a + bt$ e o caminho $\tilde{\gamma}(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ dado por $\tilde{\gamma}(t) = \gamma \circ \phi(t) = \gamma(a + bt)$ obtemos

pela regra da cadeia que

$$\begin{aligned}\|\gamma\|_{\mathbb{H}^2} &= \int_a^b \frac{\sqrt{\left(\frac{dx_1(\phi)}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2(\phi)}{d\phi}\right)^2}}{x_2(\phi)} dt. \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx_1(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2(t)}{dt}\right)^2}}{x_2(t)} dt = \|\tilde{\gamma}\|_{\mathbb{H}^2}.\end{aligned}$$

Definição 1.14. *Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ um caminho diferenciável no semi-plano superior. Então o **comprimento hiperbólico** de γ em \mathbb{H}^2 é dado por*

$$\|\gamma\|_{\mathbb{H}^2} = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx_1(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2(t)}{dt}\right)^2}}{x_2(t)} dt.$$

Definição 1.15. *Dados dois pontos $p, q \in \mathbb{H}^2$, a **distância hiperbólica** entre p e q é definida por*

$$d(p, q) = \inf \|\gamma\|_{\mathbb{H}^2}$$

onde o \inf é o ínfimo considerado sobre o conjunto das curvas continuamente diferenciáveis por partes $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$, com $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$.

Denotaremos distância hiperbólica em \mathbb{H}^2 entre p e q por $d_{\mathbb{H}^2}$.

Proposição 1.16. *O Plano de Lobachevsky \mathbb{H}^2 com a distância é um espaço métrico $(\mathbb{H}^2, d_{\mathbb{H}^2})$.*

Demonstração: Sejam p, q e $w \in \mathbb{H}^2$.

- i) $d(p, q) \geq 0$ pois, temos que $\frac{\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2}}{x_2} \geq 0$. A igualdade é válida para todo $t \in I$ se, e somente se, $\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = 0$, ou seja, se a curva é um único ponto $p = q$. Logo, $d(p, q) \geq 0$, valendo a igualdade se, e somente se, $p = q$.
- ii) $d(p, q) = d(q, p)$. De fato, se $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ é tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$ então $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ definida por $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(1 - t)$ é tal que $\tilde{\gamma}(0) = \gamma(1) = q$ e $\tilde{\gamma}(1) = \gamma(0) = p$ de modo que $d(p, q) = d(q, p)$.
- iii) $d(p, w) \leq d(p, q) + d(q, w)$. De fato, sejam os caminhos $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ com $\gamma_1(0) = p$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(0) = q$ e $\gamma_2(1) = w$, então o caminho $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ definido por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

é um caminho tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = w$ e $\|\gamma\| = \|\gamma_1\| + \|\gamma_2\|$, de modo que

$$d(p, w) \leq d(p, q) + d(q, w),$$

ou seja, a desigualdade triangular é satisfeita. ■

Exemplo 1.17. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}^2$ dada por $\gamma(t) = (t^2, 2)$ uma curva diferenciável, então seu comprimento hiperbólico é

$$\|\gamma\|_{\mathbb{H}^2} = \int_0^1 \frac{\sqrt{4t^2 + 0}}{2} dt = \int_0^1 t dt = 1/2.$$

Tendo definido a distância induzida por uma métrica riemanniana, podemos definir as isometrias de \mathbb{H}^2 e as curvas chamadas geodésicas.

Definição 1.18. Uma *isometria* em (\mathbb{H}^2, d) é uma transformação de \mathbb{H}^2 em \mathbb{H}^2 que preserva a distância hiperbólica. O grupo formado por todas isometrias em \mathbb{H}^2 é denotado por $Isom(\mathbb{H}^2)$.

Definição 1.19. Uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$ é dita *geodésica* se para quaisquer pontos $s, t \in [a, b]$, com $s \neq t$ tivermos

$$d(\gamma(s), \gamma(t)) = \int_s^t \frac{\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2}}{x_2} dt,$$

ou seja, se γ minimizar a distâncias entre os pontos de seu traçado.

Lema 1.20. As semi-retas ortogonais a fronteira $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ são geodésicas de \mathbb{H}^2 .

Demonstração: Consideremos dois pontos $x = (x_1, a)$, $y = (x_1, b) \in \mathbb{H}^2$ com $0 < a < b$ e seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ uma curva continuamente diferenciável por partes ligando estes dois pontos. Então, supondo $\gamma(t) = (x_1, a + t(b - a))$, temos que $\frac{dx_1}{dt} = 0$ e $\frac{dx_2(t)}{dt} = b - a$. Logo

$$\|\gamma\|_{\mathbb{H}^2} = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2}}{x_2(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{\left|\frac{dx_2}{dt}\right|}{a + t(b - a)} dt = \int_0^1 \frac{b - a}{a + t(b - a)} dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Como $\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ é justamente o comprimento hiperbólico do eixo y no plano, ligando x em y , segue o resultado. ■

Para determinarmos todas as geodésicas de \mathbb{H}^2 , usaremos o grupo de isometrias de \mathbb{H}^2 , enunciando os próximos resultados o primeiro nos garante que a métrica riemanniana de \mathbb{H}^2 é invariante por elementos do grupo geral de Möbius e o segundo nos diz que o grupo das transformações de Möbius age transitivamente sobre o conjunto de todas semi-circunferências e semi-retas.

Teorema 1.21. A métrica riemanniana

$$ds^2 = \frac{(dx_1)^2 + (dx_2)^2}{x_2}$$

de \mathbb{H}^2 é invariante pela ação de elementos de $\Phi \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^2)$, ou seja,

$$GM(\widehat{\mathbb{R}}^2) \subset Isom(\mathbb{H}^2).$$

Proposição 1.22. *Seja \mathcal{G} o conjunto formado por todas as semi-circunferências e semi-retas de \mathbb{H}^2 ortogonais ao eixo real. Então, o grupo das transformações de Möbius $GM(\widehat{\mathbb{R}}^2)$ age transitivamente sobre \mathcal{G} . Isto quer dizer que dadas duas curvas $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{G}$, então existe uma transformação $\Phi \in G$ tal que $\Phi(\alpha_1) = \alpha_2$.*

Com esses dois resultados, cujas demonstrações encontra-se na referência [13], podemos determinar todas as geodésicas em \mathbb{H}^2 pelo seguinte teorema.

Teorema 1.23. *As geodésicas de \mathbb{H}^2 são as semi-retas e as semi-circunferências ortogonais a $\partial_\infty \mathbb{H}^2$.*

Demonstração: Como foi visto no Lema 1.20, as semi-retas ortogonais a $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ são geodésicas. Agora, seja γ uma semi-circunferência ortogonal a $\partial_\infty \mathbb{H}^2$, então pela Proposição 1.22 é possível encontrar uma transformação que leva γ no eixo imaginário, isto é, existe um $\Phi \in G$ tal que $\Phi(\gamma)$ é uma semi-reta ortogonal a $\partial_\infty \mathbb{H}^2$, ou seja, uma geodésica. Mas pelo Teorema 1.21 Φ age como isometria de \mathbb{H}^2 , temos então que γ também é uma geodésica.

Para provarmos que estas são de fato, todas as geodésicas, tomemos dois pontos $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ e uma curva ϑ ligando estes dois pontos. Seja γ o semi-circulo ou semi-reta ortogonais a $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ ligando estes dois pontos. Sem perda de generalidade supomos γ uma semi-reta (caso contrario pela Proposição 1.22 podemos levar γ a uma semi-reta). Nesta condição, se observarmos a demonstração do Lema 1.20, podemos constatar que $\gamma = \vartheta$. (ver Figura 1.2) ■

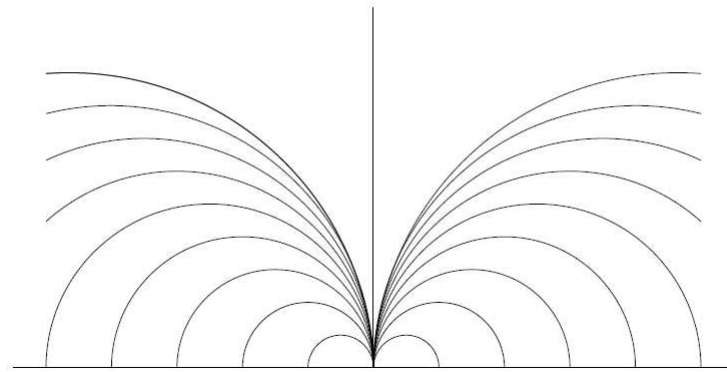


Figura 1.2: Geodesicas em \mathbb{H}^2 .

O conhecimento das geodésicas em \mathbb{H}^2 nos permite explicitar a função distância em \mathbb{H}^2 .

Teorema 1.24. *Dados $z, w \in \mathbb{H}^2$, são válidas as seguintes igualdades:*

1. $d(z, w) = \ln \left(\frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} \right)$.
2. $\cosh(d(z, w)) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}$.
3. $\sinh\left(\frac{1}{2}d(z, w)\right) = \frac{|z - w|}{2(\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w))^{1/2}}$.
4. $\sinh\left(\frac{1}{2}d(z, w)\right) = \frac{|z - \bar{w}|}{2(\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w))^{1/2}}$.
5. $\tanh\left(\frac{1}{2}d(z, w)\right) = \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|}$.

A equivalência entre as cinco igualdades decorre por manipulações de igualdades trigonométricas hiperbólicas e a demonstração de uma delas é feita na referência [17]. Lembrando que $\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ e $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$.

1.2.2 O Modelo \mathbb{D}^2

Considere o conjunto $\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |(x, y)| < 1\} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ chamado de **Disco unitário** ou **Disco de Poincaré**, dotado da métrica riemanniana $ds = \sqrt{\frac{4((dx)^2 + (dy)^2)}{1 - (x^2 + y^2)}}$ e com sua fronteira sendo $\partial_\infty \mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |(x, y)| = 1\}$.

Consideremos a aplicação $\eta : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ dada por $\eta(z) = \frac{z - i}{z + i}$. Se considerarmos a aplicação $\mu : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ dada por $\mu(z) = \frac{zi + i}{1 - z}$, então temos que estas são inversas uma da outra, ou seja, $\mu = \eta^{-1}$. De fato, temos que

$$(\mu \circ \eta)(z) = \mu(\eta(z)) = \frac{i\left(\frac{z-i}{z+i}\right) + i}{1 - \left(\frac{z-i}{z+i}\right)} = \frac{\frac{iz+1+zi-1}{z+i}}{\frac{z+i-z+i}{z+i}} = \frac{2iz}{2i} = z$$

e

$$(\eta \circ \mu)(z) = \eta(\mu(z)) = \frac{\left(\frac{iz+i}{1-z}\right) - i}{\left(\frac{iz+i}{1-z}\right) + i} = \frac{\frac{iz+i-i+zi}{1-z}}{\frac{iz+i+i-iz}{1-z}} = \frac{2iz}{2i} = z,$$

ou seja, $\mu \circ \eta(z) = \eta \circ \mu(z) = Id(z)$, onde Id é a identidade.

Portanto, a aplicação η é uma bijeção de \mathbb{H}^2 em \mathbb{D}^2 , isto é, η transforma \mathbb{H}^2 em \mathbb{D}^2 .

Seja $\rho : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}^2$ um caminho diferenciável no disco de Poincaré. Então, a curva $\mu \circ \rho : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ é um caminho diferenciável em \mathbb{H}^2 . Calculando a

derivada da μ , temos $\mu'(z) = \frac{2i}{(1-z)^2} = \frac{-2}{((1-z)(\sqrt{i}))^2}$ e como $Im(\mu(z)) = \frac{1-|z|^2}{|((1-z)(\sqrt{i}))|^2}$. Assim,

$$|(\mu \circ \rho)'(t)| = |\mu'(\rho(t))||\rho'(t)| = \frac{2|\rho'(t)|}{|((1-\rho(t))(\sqrt{i}))|^2}$$

e

$$Im((\mu \circ \rho)(t)) = \frac{1-|\rho(t)|^2}{|((1-\rho(t))(\sqrt{i}))|^2}.$$

Logo, obtemos as seguintes definições.

Definição 1.25. O *comprimento hiperbólico* em \mathbb{D}^2 é dado como

$$\|\rho\|_{\mathbb{D}^2} = \|\mu \circ \rho\|_{\mathbb{H}^2} = \int_0^1 \frac{|(\mu \circ \rho)'(t)|}{Im((\mu \circ \rho)(t))} dt = \int_0^1 \frac{|\mu'(\rho(t))||\rho'(t)|}{Im(\mu(\rho(t)))} dt = \int_0^1 \frac{2|\rho'(t)|}{1-|\rho(t)|^2} dt.$$

Definição 1.26. Definimos a distância entre dois pontos z, w em \mathbb{D}^2 por

$$d_{\mathbb{D}^2}(z, w) = d_{\mathbb{H}^2}(\eta^{-1}(z), \eta^{-1}(w)).$$

Por essa definição de distância que vimos em \mathbb{D}^2 , que está diretamente associada a que vimos em \mathbb{H}^2 , também podemos enunciar as seguintes proposições.

Proposição 1.27. O Disco de Poincaré com a métrica $d_{\mathbb{D}^2}$ é um espaço métrico $(\mathbb{H}^2, d_{\mathbb{D}^2})$.

Demonstração: Basta notarmos que pela Definição 1.26, a distância em \mathbb{D}^2 pode ser vista como em \mathbb{H}^2 . Assim a demonstração se torna análoga a Proposição 1.16. ■

Proposição 1.28. Seja γ uma isometria de \mathbb{H}^2 . Então, $\eta \circ \gamma \circ \eta^{-1}$ é uma isometria em \mathbb{D}^2 .

Demonstração: Para mostrarmos que $\eta \circ \gamma \circ \eta^{-1}$ é de fato uma isometria temos que provar que esta, preserva a distância hiperbólica em \mathbb{D}^2 . Assim, sejam $z, w \in \mathbb{D}^2$, e como por hipótese γ é uma isometria de \mathbb{H}^2 , então $d_{\mathbb{H}^2}(\gamma(z), \gamma(w)) = d_{\mathbb{H}^2}(z, w)$. Logo,

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{D}^2}(\eta \circ \gamma \circ \eta^{-1}(z), \eta \circ \gamma \circ \eta^{-1}(w)) &= d_{\mathbb{H}^2}(\eta^{-1} \circ \eta \circ \gamma \circ \eta^{-1}(z), \eta^{-1} \circ \eta \circ \gamma \circ \eta^{-1}(w)) \\ &= d_{\mathbb{H}^2}(\gamma \circ \eta^{-1}(z), \gamma \circ \eta^{-1}(w)) \\ &= d_{\mathbb{H}^2}(\eta^{-1}(z), \eta^{-1}(w)) \\ &= d_{\mathbb{D}^2}(z, w). \end{aligned}$$

■

Assim, enunciamos o seguinte teorema:

Teorema 1.29. As geodésicas de \mathbb{D}^2 são os seus diâmetros e os arcos de círculos que intersectam perpendicularmente a fronteira $\partial_{\infty} \mathbb{D}^2$.

Demonstração: A aplicação η é conforme em \mathbb{D}^2 , ou seja, η preserva ângulos entre curvas, isso pois $d_{\mathbb{D}^2}(\eta(z), \eta(w)) = d_{\mathbb{D}^2}(z, w)$. Como η aplica a fronteira de \mathbb{H}^2 , $\partial_{\infty}\mathbb{H}^2$ na fronteira de \mathbb{D}^2 , $\partial_{\infty}\mathbb{D}^2$ e as geodésicas de \mathbb{H}^2 são os semi-arcos e semi-retas ortogonais a sua fronteira, a imagem dos semi-arcos e semi-retas por η serão ortogonais a fronteira de \mathbb{D}^2 , ou seja, as geodésicas de \mathbb{D}^2 serão os diâmetros e os arcos de círculos que intersectam perpendicularmente a fronteira $\partial_{\infty}\mathbb{D}^2$. (Veja a Figura 1.3). ■

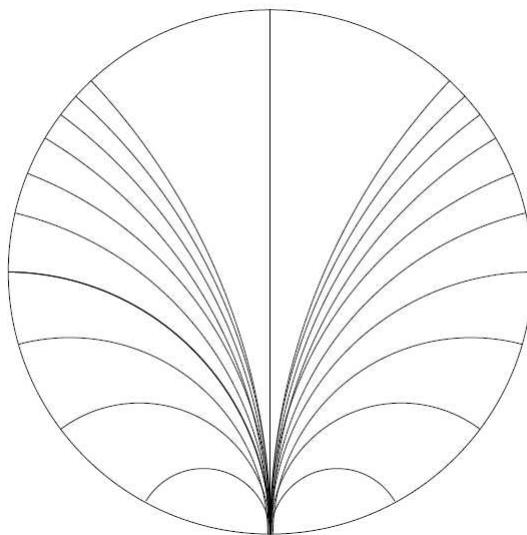


Figura 1.3: Geodesicas em \mathbb{D}^2 .

1.3 Polígonos Hiperbólicos

Na seção anterior mostramos como são construídas as geodésicas e nesta trabalharemos com os polígonos formados pelas geodésicas. Começamos o estudo com triângulos hiperbólicos, ressaltando a possibilidade de termos vértices na fronteira (vértices ideais) e em seguida definimos polígono hiperbólico. Definimos a área hiperbólica, demonstramos um versão simplificada do Teorema de Gauss-Boonet e em seguida apresentamos teoremas que garantem a existência de polígonos hiperbólicos e a convexidade de um polígono hiperbólico.

1.3.1 Triângulos Hiperbólicos

Dados três pontos $v_a, v_b, v_c \in \overline{\mathbb{H}^2}$, consideramos as geodésicas ou segmentos geodésicos que ligam estes pontos e obtemos assim um triângulo geodésico \triangle . Notemos que estamos considerando o fato de termos um ou mais de um vértice na fronteira $\partial_{\infty}\mathbb{H}^2$, por isso admitimos a possibilidade de termos arestas formadas por geodésicas completas, esses vértices da fronteira são chamados de **vértices ideais**. A mesma construção pode ser feita em \mathbb{D}^2 . (vejam as Figura 1.4 e Figura 1.5).

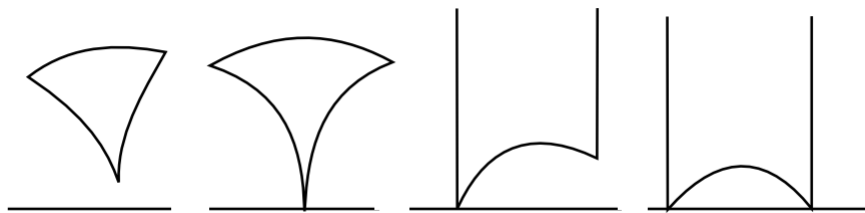


Figura 1.4: Triângulos hiperbólicos em \mathbb{H}^2 com 0, 1, 2, 3 vértices ideais. Figura observada na referência [17]

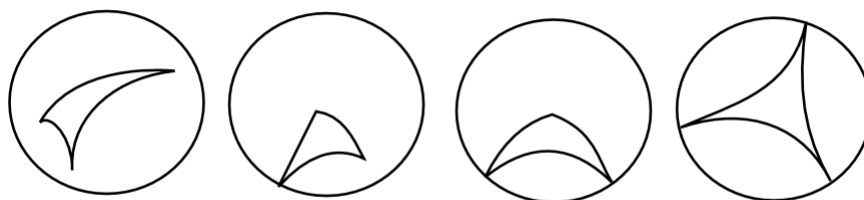


Figura 1.5: Triângulos hiperbólicos em \mathbb{D}^2 com 0, 1, 2, 3 vértices ideais.

A ideia de construirmos polígonos nos modelos hiperbólicos que estamos estudando é a mesma que é feita no caso euclidiano, onde os polígonos no plano são obtidos por intercessões de segmentos geodésicos (as retas), o mesmo é feito no caso hiperbólico.

Definição 1.30. Um *polígono hiperbólico* em $\mathbb{H}^2 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^2$ ou $\mathbb{D}^2 \cup \partial_\infty \mathbb{D}^2$ de n -arestas é um conjunto fechado convexo delimitado por n segmentos geodésicos hiperbólicos

$$\overline{z_1 z_2}, \dots, \overline{z_{n-1} z_n}, \overline{z_n z_1}.$$

1.3.2 Área Hiperbólica

Definição 1.31. A área hiperbólica $A_{\mathbb{H}^2}(X)$ de um subconjunto X de \mathbb{H}^2 é dada pela integral

$$A_{\mathbb{H}^2}(X) = \int_X \frac{1}{(\text{Im}(z))^2} dx dy,$$

onde $z = x + iy \in \mathbb{H}^2$.

Exemplo 1.32. Consideremos a região X de \mathbb{H}^2 delimitada pela três retas $L_1 = \{z \in \mathbb{H}^2 / \text{Re}(z) = -b\}$, $L_2 = \{z \in \mathbb{H}^2 / \text{Re}(z) = b\}$, onde b é uma constante real positiva e $L_3 = \{z \in \mathbb{H}^2 / \text{Im}(z) = 1\}$. Observe que a terceira reta euclidiana não é uma geodésica hiperbólica, portanto esta região não é um polígono hiperbólico. Como temos os intervalos $x \in [-b, b]$ e $y \in [1, \infty)$, a área hiperbólica dessa região é

$$\int_X \frac{1}{y^2} dx dy = \int_{-b}^b \int_1^\infty \frac{1}{y^2} dy dx = 2b.$$

Teorema 1.33. *A área hiperbólica em \mathbb{H}^2 é invariante sob a ação do grupo de Möbius G .*

O fato da área hiperbólica em \mathbb{H}^2 ser invariante sob a ação do grupo de Möbius G nos diz que dada uma transformação $T \in G$ temos que a área $A_{\mathbb{H}^2}(T(X)) = A_{\mathbb{H}^2}(X)$. Este fato, nos ajuda a demonstrar uma versão simplificada do Teorema de Gauss-Bonnet, visto na referencia [13].

Teorema 1.34. *Seja Δ um triângulo hiperbólico em $\mathbb{H}^2 \cup \partial_{\infty}\mathbb{H}^2$ e sejam α, φ, γ seus ângulos internos. Então,*

$$A_{\mathbb{H}^2}(\Delta) = \pi - (\alpha + \varphi + \gamma).$$

Demonstração: Consideremos inicialmente, que um dos vértices de Δ seja um vértice ideal v_1 , de modo que o ângulo γ neste vértice é nulo e outros dois vértices v_2 e v_3 podendo ser ou não ideais. Sejam l_{jk} as retas hiperbólicas ligando v_j e v_k . Utilizando as propriedades transitivas do grupo de isometrias de \mathbb{H}^2 , podemos considerar um transformação T do grupo de Möbius que leva v_1 em ∞ e a reta l_{23} na semi-circunferência contida no círculo unitário $|z| = 1$ de modo que $v_2 = e^{i\alpha}$ e $v_3 = e^{i\beta}$, onde $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$ (se temos $\alpha = 0$ e $\beta = \pi$, v_2 também é um vértice ideal).

Como as isometrias preservam áreas, podemos assumir que Δ é um triângulo hiperbólico com um vértice ideal ∞ e os outros dois em $e^{i\alpha}$ e $e^{i\beta}$, onde $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$. Como Δ , tem pelo menos um vértice ideal, então Δ não é compacto. Então

$$A_{\mathbb{H}^2}(\Delta) = \int_{\Delta} \frac{dx dy}{y^2} = \int_{\cos\alpha}^{\cos\beta} \int_{\sqrt{x^2-1}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy dx = \int_{\cos\alpha}^{\cos\beta} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx.$$

Fazendo $x = \cos(\theta)$, então $dx = -\text{sen}(\theta)d\theta$. Portanto, obtemos

$$A_{\mathbb{H}^2}(\Delta) = \int_{\cos\alpha}^{\cos\beta} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{-\text{sen}(\theta)}{\text{sen}(\theta)} d\theta = \alpha - \beta.$$

Como o ângulo interno do vértice $v_2 = e^{i\alpha}$ é $\varphi = \pi - \alpha$ e o ângulo interno do vértice $v_3 = e^{i\beta}$ é β , logo,

$$A_{\mathbb{H}^2}(\Delta) = \pi - (\varphi + \beta).$$

Agora, consideremos que nenhum dos vértices seja ideal. Prolongamos uma das arestas do triângulo Δ em uma das direções, digamos a aresta contendo os vértices v_1 e v_2 , sendo prolongada na direção de v_2 . (Figura 1.6)

Se considerarmos o ponto ideal v_4 deste raio geodésico, obtemos então dois novos triângulos, que denotaremos por Δ_1 e Δ_2 , determinado pelos vértices $\{v_2, v_3, v_4\}$ e $\{v_1, v_3, v_4\}$ respectivamente. O ângulo de Δ_1 em v_2 é $\pi - \beta$ e o ângulo de ambos os triângulos no vértice ideal v_4 é 0. Denotemos por θ o ângulo de Δ_1 em v_3 . Temos então que $\Delta_2 = \Delta \cup \Delta_1$, e esta união é disjunta, a menos

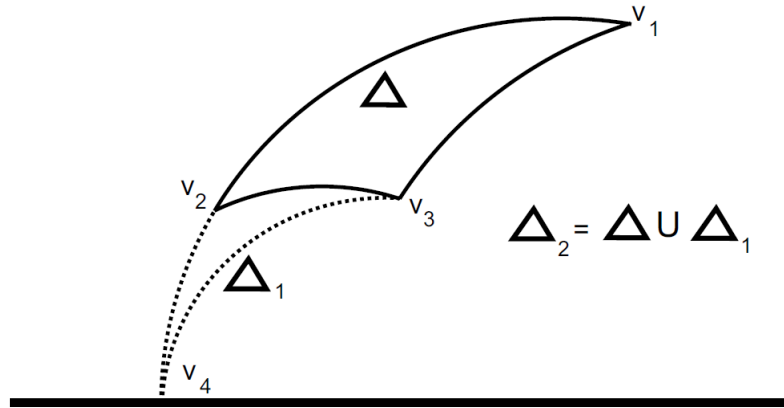


Figura 1.6: Triângulo hiperbólico prolongado

de arestas e vértices, de modo que

$$A_{\mathbb{H}^2}(\Delta) = A_{\mathbb{H}^2}(\Delta_2) - A_{\mathbb{H}^2}(\Delta_1).$$

Pela primeira parte do teorema, obtemos que

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{H}^2}(\Delta) &= A_{\mathbb{H}^2}(\Delta_2) - A_{\mathbb{H}^2}(\Delta_1) \\ &= \pi - \alpha - (\gamma + \theta) - (\pi - \theta - (\pi - \varphi)) \\ &= \pi - \alpha - \gamma - \varphi \\ &= \pi - (\alpha + \varphi + \gamma). \end{aligned}$$

■

Teorema 1.35. *Seja \mathcal{P} um polígono hiperbólico com um número finito de arestas e vértices (ideais ou não) v_1, \dots, v_n e ângulos internos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ respectivamente. Então,*

$$A_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{P}) = (n - 2)\pi - \sum_{k=1}^n \alpha_k.$$

A ideia central para demonstração desse teorema é o fato que podemos decompor o polígono em triângulos e em seguida utilizar o Teorema 1.34 em cada triângulo.

Agora, enunciaremos dois teoremas importantes para o desenvolvimento futuro deste trabalho. Não apresentaremos suas demonstrações que podem ser encontradas na referência [3].

Teorema 1.36. *Seja \mathcal{P} um polígono hiperbólico com seus ângulos internos $\theta_1, \dots, \theta_n$. Então \mathcal{P} é convexo se, e somente se, para todo $k = 1, \dots, n$, temos $0 \leq \theta_k \leq \pi$.*

Teorema 1.37. *Sejam $\theta_1, \dots, \theta_n$ ângulos ordenados por alguma n -upla e $0 \leq \theta_k \leq \pi$, para todo $k = 1, \dots, n$. Então existe um polígono hiperbólico \mathcal{P} com ângulos internos $\theta_1, \dots, \theta_n$ formados nesta ordem ao redor da $\partial\mathcal{P}$ se, e somente se,*

$$(n - 2)\pi > \sum_{k=1}^n \theta_k.$$

Capítulo 2

Grupos Fuchsianos e Domínios de Dirichlet

Neste capítulo, apresentaremos resultados que serão utilizados no restante desse trabalho e em alguns momentos omitiremos as demonstrações de alguns resultados. Na primeira seção, iniciamos falando sobre grupos Fuchsianos, que são grupos discretos de isometrias de \mathbb{H}^2 , podemos classificar essas isometrias pelos seus pontos fixos. Depois apresentaremos resultados e condições para que um grupo de isometrias Γ seja discreto em $PSL(2, \mathbb{R})$. Na segunda seção estudamos os domínios fundamentais que nos ajudam a ver como um grupo de isometrias age nesses domínios. Em seguida, estabelecemos a existência de polígonos para grupos Fuchsianos, conhecidos como domínios de Dirichlet.

As principais referências desse capítulo são [4], [13] e [17].

2.1 Grupos Fuchsianos

Aqui estudaremos os diferentes tipos de transformações, classificadas de acordo com o valor do traço das matrizes associadas a elas e também pela quantidade de pontos fixos da transformação, onde as classificamos por isometrias elípticas, parabólicas ou hiperbólicas. Em seguida, apresentaremos os grupos Fuchsianos (subgrupos discretos de $PSL(2, \mathbb{R})$) título dessa seção e principal objetivo de estudo. Nesta seção, apresentaremos definições e resultados que nos dão as condições para um grupo ser discreto em $PSL(2, \mathbb{R})$.

2.1.1 Isometrias Hiperbólicas

O grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ visto no capítulo anterior na seção 1.1.4, tem seus elementos associados a uma matriz de $SL(2, \mathbb{R})$. Estudaremos agora as classificações dessas transformações $T_A \in PSL(2, \mathbb{R})$ associadas a matriz $A \in SL(2, \mathbb{R})$.

Essa classificação é feita em três diferentes tipos, de acordo com o valor da função $Tr : PSL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$, dada por $Tr(T_A) = |\text{traço}(A)|$, onde

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) \text{ e } \text{traço}(A) = a + d.$$

Definição 2.1. Dada $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$, dizemos que a transformação $T_A \in PSL(2, \mathbb{R})$, onde $T_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, é:

1. *Elíptica* se $Tr(T_A) < 2$.
2. *Parabólica* se $Tr(T_A) = 2$.
3. *Hiperbólica* se $Tr(T_A) > 2$.

O traço de uma matriz é invariante por conjugação, isto é, $\text{traço}(BAB^{-1}) = \text{traço}(A)$, para toda matriz $A_{n \times n}$ e para toda matriz $B \in GL(n, \mathbb{R})$. Assim, temos que a classificação acima é invariante por conjugação. Dizemos que duas transformações de Möbius T_{A_1}, T_{A_2} são conjugadas se existir uma outra transformação de Möbius T_B , onde $T_{A_1} = T_B^{-1}T_{A_2}T_B = T_{B^{-1}A_2B}$.

Podemos classificar essas transformações pelo número de pontos fixos de $T_A(z)$. Observe que um ponto fixo de T_A é obtido quando $T_A(z) = z$, ou seja, $\frac{az + b}{cz + d} = z$ se, e somente se, $cz^2 + (d - a)z - b = 0$. Esta equação é quadrática e tem no máximo duas soluções, as quais são obtidas pela expressão $z = \frac{a - d}{2c} \pm \frac{1}{2c} \sqrt{(d - a)^2 + 4bc}$. Mas se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$, temos que $ad - bc = 1$, e com isso obtemos que

$$z = \frac{a - d}{2c} \pm \frac{1}{2c} \sqrt{(Tr(T_A))^2 - 4}.$$

Observação 2.2. Uma isometria de $\mathbb{H}^2 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^2$ com um ponto fixo ordinário, ou seja, um ponto que não é ideal, é uma isometria **Elíptica**. Esta isometria é conjugada com a transformação $T_{A_\theta}(z) = \frac{\cos\theta z + \text{sen}\theta}{-\text{sen}\theta z + \cos\theta}$, para $0 < \theta < 2\pi$ (Rotações), associada a matriz $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$, com ponto fixo $T_{A_\theta}(i) = i$.

Exemplo 2.3. A transformação $T_A(z) = \frac{(\cos\theta - \text{sen}\theta)z + 2\text{sen}\theta}{-\text{sen}\theta z + (\text{sen}\theta + \cos\theta)}$, com $0 < \theta < 2\pi$, associado a matriz $A = \begin{pmatrix} \cos\theta - \text{sen}\theta & 2\text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \text{sen}\theta + \cos\theta \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ é Elíptica. De fato,

$$Tr(T_A) = |\cos\theta - \text{sen}\theta + \text{sen}\theta + \cos\theta| = 2|\cos\theta| < 2.$$

E temos que T_A é conjugada a transformação T_{A_θ} pela transformação $T_B(z) =$

$z + 1$, pois

$$BA_\theta B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sen\theta \\ -\sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta - \sen\theta & 2\sen\theta \\ -\sen\theta & \sen\theta + \cos\theta \end{pmatrix} = A.$$

Com ponto fixo ordinário $z = 1 + i \in \mathbb{H}^2$.

Observação 2.4. Uma isometria com exatamente um ponto fixo ideal, ou seja, ponto fixo na fronteira de \mathbb{H}^2 , é uma isometria **Parabólica** e essa isometria é conjugada com a transformação da forma $T_{A_t}(z) = z + t, 0 \neq t \in \mathbb{R}$, (Translações), associada a matriz $A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ e com ponto fixo $T_{A_t}(\infty) = \infty$.

Exemplo 2.5. A transformação $T_A(z) = \frac{\sqrt{2}z + 1}{(\sqrt{2} - 3)z + (2 - \sqrt{2})}$, associado a matriz $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ (\sqrt{2} - 3) & (2 - \sqrt{2}) \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$, é uma isometria parabólica. De fato, temos que, $Tr(T_A) = |\text{traço}(A)| = |\sqrt{2} + (2 - \sqrt{2})| = 2$ com ponto fixo $z = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 3} \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$.

Observação 2.6. Uma isometria com dois pontos fixos ideais, é uma isometria **Hiperbólica**. Esta isometria é conjugada a uma transformação do forma $T_{A_k}(z) = e^k z, k \neq 0$, (Dilatações), associada a matriz, $A_k = \begin{pmatrix} \sqrt{e^k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{e^k}} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ e pontos fixos $T_{A_k}(0) = 0$ e $T_{A_k}(\infty) = \infty$.

Exemplo 2.7. A transformação $T_A(z) = \frac{z + 1}{z + 3}$, associada a matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, é uma isometria hiperbólica. De fato,

$$Tr(T_A) = |\text{traço}(A)| = \left| \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} \right| = 2\sqrt{2} > 2.$$

Com pontos fixos ideais $z = -1 \pm \sqrt{2} \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$.

2.1.2 Subgrupos Discretos

Nesta subseção, apresentaremos algumas definições necessárias para o desenvolvimento do assunto em questão. Uma permutação de um conjunto X é uma bijeção de X em X . Seja G o grupo das permutações de um conjunto $X \neq \emptyset$.

Definição 2.8. Dado um $x \in X$ chamamos de **estabilizador** de x ao subgrupo de G

$$G_x = \{f \in G | f(x) = x\}.$$

Definição 2.9. A **órbita** de um ponto $x \in X$ é o conjunto

$$G(x) = \{f(x) \in X | f \in G\}.$$

Definição 2.10. Um subgrupo Γ de $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ é chamado **discreto** se a topologia induzida em Γ é discreta, isto é, se Γ é um conjunto discreto no espaço topológico de $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$.

As próximas definições nos ajudam a compreender sobre subgrupos discretos em espaços métricos.

Definição 2.11. Uma família $\{X_\alpha | \alpha \in A\}$ (A um conjunto de índices) de subconjuntos de um espaço métrico X é dita **localmente finita** se para todo compacto $K \subseteq X$ o conjunto

$$\{\alpha \in A | X_\alpha \cap K \neq \emptyset\}$$

for finito.

Definição 2.12. Seja Γ um grupo de homeomorfismos de um espaço métrico X . Dizemos que a ação de Γ é **propriamente descontínua** se para todo $x \in X$ a família $\{\{f(x) | f \in \Gamma\}$ for localmente finita.

Mostraremos um resultado válido para qualquer espaço topológico localmente compacto, visto na referência [13]. Notemos apenas que para X localmente compacto a ação de Γ será propriamente descontínua se, e somente se, as órbitas $\Gamma(x)$ forem discretas e os estabilizadores Γ_x forem finitos, com $x \in X$.

Teorema 2.13. Seja Γ um grupo de homeomorfismos de um espaço métrico X localmente compacto. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. A ação de Γ é propriamente descontínua.
2. $\forall x \in X, \exists V_x$ vizinhança de x tal que $g(V_x) \cap V_x \neq \emptyset$ apenas para um número finito de elementos $g \in \Gamma$.
3. Todo ponto $x \in X$ possui um vizinhança U_x tal que $g(U_x) \cap U_x \neq \emptyset$ implica que $g(x) = x$.
4. Dado $K \subseteq X$ compacto, $g(K) \cap K \neq \emptyset$ apenas para um número finito de elementos $g \in \Gamma$.

Demonstração: (1 \Rightarrow 2) Suponha a ação de Γ propriamente descontínua, então a família $\{\{f_i(x) | f_i \in \Gamma\}$ (com $i \in A$ um conjunto de índices qualquer) é localmente finita, ou seja, para qualquer compacto K de X o conjunto $\{i \in A | \{f_i(x)\} \cap K \neq \emptyset\}$ é finito e X sendo localmente compacto, ou seja, para todo $x \in X$ existe um compacto K' com $x \in \text{int}(K')$. Assim, temos que as órbitas $\Gamma(x)$ de cada ponto são discretas e o estabilizador Γ_x de cada ponto é finito. Logo, dado $x \in X$, existe um $\epsilon > 0$, tal que $f_i(x) \notin B(x, \epsilon), \forall i \in A$. Ou seja, não contém outro ponto na órbita $\Gamma(x)$. Assim, se tomarmos $V \subset B(x, \epsilon/2)$ temos que se $f_i(V) \cap V \neq \emptyset$ implica que $f_i(x) = x$, isto é, $f_i \in \Gamma_x$, mas como Γ_x é finito, isto só pode ocorrer para um número finito de elementos de Γ .

(2 \Rightarrow 3) Sejam $x \in X$ e V_x uma vizinhança de x tal que $f(V_x) \cap V_x \neq \emptyset$ apenas para um número finito de elementos $f \in \Gamma$. Sejam $f_1, \dots, f_n \in \Gamma$ os elementos

para os quais $f_i(V_x) \cap V_x \neq \emptyset$. Seja $\{g_1, \dots, g_m\} = \{f_1, \dots, f_n\} - \Gamma_x$ e consideremos o conjunto de pontos $\{g_1(x), \dots, g_m(x)\}$. Assim, seja então $U_x \subset V_x$ tal que $U_x \cap \{g_1(x), \dots, g_m(x)\} = \emptyset$. Temos que $f(U_x) \cap U_x \neq \emptyset$ implica que $f(x) = x$.

(3 \Rightarrow 4) Suponha por absurdo que exista um compacto K e uma sequência $(f_n)_{n=1}^\infty$ de infinitos elementos de Γ tal que $f_n(K) \cap K \neq \emptyset$. Seja então $(x_n)_{n=1}^\infty$ sequência de elementos de X tal que $x_n \in K$ e $x_n f_n \in K$, como x_n é uma sequência de K compacto então ela possui um ponto de acumulação que denotaremos por x . Seja y um ponto de acumulação da sequência $(f_n)_{n=1}^\infty$. Seja então $\epsilon > 0$ e consideremos as bolas $B(x, \epsilon)$ e $B(x, \epsilon/2)$. Existem N_x e N_y inteiros tais que $x_n \in B(x, \epsilon)$ para $n > N_x$ e $f_n(x) \in B(x, \epsilon/2)$ para $n > N_y$. Tomemos então $N = \max\{N_x, N_y\}$ e temos que $f_N^{-1} f_n(x) \in B(x, \epsilon)$, para todo $n \geq N$. Absurdo, pois estamos assumindo 3.

(4 \Rightarrow 1) Supondo 4 devemos demonstrar que as órbitas de Γ são discretas e os estabilizadores finitos. Os estabilizadores são finitos pois os conjuntos $\{x\} = K_x$ são compactos e $f(K_x) \cap K_x \neq \emptyset$ e temos que $f(x) = x$, ou seja, $f \in \Gamma_x$. Para provarmos que as órbitas são discretas, consideremos um ponto $x \in X$ e $\epsilon > 0$ tal que a bola fechada $\overline{B(x, \epsilon)}$ seja compacta. Temos então que existem apenas um número finito de elementos f_1, \dots, f_n de Γ tais que $f_i(\overline{B(x, \epsilon)}) \cap \overline{B(x, \epsilon)} \neq \emptyset$. Em particular existem apenas um número finito de elementos dentre estes, digamos g_1, \dots, g_m para os quais $g_i(x) \in \overline{B(x, \epsilon)}$ e $g_i(x) \neq x$, para $i = 1, \dots, m$. Podemos então separar $x, g_1(x), \dots, g_m(x)$ simultaneamente, ou seja existem vizinhanças V_0, V_1, \dots, V_m disjuntas entre si, cada uma delas contida em $\overline{B(x, \epsilon)}$ tais que $x \in V_0, g_1(x) \in V_1, \dots, g_m(x) \in V_m$. Escolhemos agora $f \in \Gamma$ tal que $f(x) \notin \overline{B(x, \epsilon)}$ e fazemos a mesma construção, tomando o cuidado de escolher a bola fechada centrada em $f(x)$ que seja ao mesmo tempo compacta e não intercepte a bola $\overline{B(x, \epsilon)}$ e assim sucessivamente construímos vizinhanças disjuntas entre si de cada ponto da órbita de x . ■

Observação 2.14. *A equivalência dos itens 1 e 3 do teorema acima implica que Γ age de maneira propriamente descontínua se, e somente se, as órbitas de qualquer ponto forem discretas.*

Agora, podemos apresentar a definição de grupo Fuchsiano.

Definição 2.15. *Um grupo Fuchsiano é um subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$.*

Notemos que, dado um subgrupo discreto Γ de isometrias de \mathbb{H}^2 , temos que o subgrupo

$$\Gamma_0 = \{T \in \Gamma; T \text{ preserva a orientação de } \mathbb{H}^2\}$$

é subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$ de índice 2 em Γ . Assim podemos estudar os subgrupos discretos de $Isom(\mathbb{H}^2)$, o grupo de todas isometrias de \mathbb{H}^2 , a partir dos subgrupos discretos de $PSL(2, \mathbb{R})$ (Grupos Fuchsianos). Podemos estabelecer os subgrupos discretos de $PSL(2, \mathbb{R})$ pelos de $SL(2, \mathbb{R})$. O próximo resultado nos informa condições para um subgrupo de $SL(2, \mathbb{R})$ ser discreto.

Teorema 2.16. *Seja H um subgrupo de $SL(2, \mathbb{R})$. Então H é discreto se, e somente se, não existe uma sequência $A_n \in H$, $n \in \mathbb{N}$, de elementos distintos, tais que $A_n \rightarrow ID$*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que H não seja discreto. Então, dado um $A \in SL(2, \mathbb{R})$, existe uma sequência $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de H tal que A_n converge para A . Assim, obtemos

$$A_{n+1}A_n^{-1} \longrightarrow AA^{-1} = ID$$

Afirmamos que o conjunto $S = \{A_{n+1}A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é infinito. De fato, se S é um conjunto finito, então existe um n_0 tal que $A_{n+1}A_n = ID$, para todo $n > n_0$, o que é impossível, pois $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de elementos distintos em H , assim, S é infinito. Portanto, existe uma subsequência de S que converge para ID , o que é uma contradição. ■

Observação 2.17. $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ é discreto se, e somente se, para qualquer sequência $T_{A_n} \in H$, com $T_{A_n} \rightarrow T_{ID} = Id$, implica que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T_{A_n} = Id$ para $n > n_0$.

Aqui, apresentaremos três resultados cujas suas demonstrações podem ser vistas na referência [13].

Proposição 2.18. *Os subgrupos cíclicos de $PSL(2, \mathbb{R})$ gerados por elementos hiperbólicos ou parabólicos são discretos. Um subgrupo cíclico gerado por elementos elípticos é discreto se, e somente se, se for finito.*

Lema 2.19. *Seja z um ponto de \mathbb{H}^2 e K um subconjunto de \mathbb{H}^2 compacto. Então, o conjunto*

$$H = \{T \in PSL(2, \mathbb{R}); T(z) \in K\}$$

é compacto.

Lema 2.20. *Seja $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ um grupo com ação propriamente descontínua em \mathbb{H}^2 . Então os pontos fixos de Γ , ou seja, o conjunto*

$$\{z \in \mathbb{H}^2; \exists T \in \Gamma, T(z) = z\}$$

é discreto.

Com os dois últimos lemas podemos demonstrar o seguinte e importante teorema:

Teorema 2.21. *Um subgrupo $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ é discreto se, e somente se, sua ação em \mathbb{H}^2 for propriamente descontínua.*

Demonstração: Suponha que Γ é discreto. Então para todo $z \in \mathbb{H}^2$ e para todo $K \subset \mathbb{H}^2$,

$$\{T \in \Gamma; T(z) \in K\} = \{T \in PSL(2, \mathbb{R}); T(z) \in K\} \cap \Gamma.$$

Mas pelo Lema 2.19 temos que $\{T \in PSL(2, \mathbb{R}); T(z) \in K\}$ é compacto, logo $\{T \in \Gamma; T(z) \in K\}$ é finito, pois é interseção de um conjunto compacto com outro discreto o que nos diz que a ação de Γ é propriamente descontínua.

Agora, suponha que Γ age de maneira propriamente descontínua e que Γ não seja discreto em $PSL(2, \mathbb{R})$. Seja z um ponto que não é fixo por qualquer elemento de Γ a não ser é claro a identidade. A existência de tal ponto é garantida pelo segundo Lema 2.20, já que o conjunto de pontos fixos por um elemento de Γ é discreto. Assumindo que Γ não é discreto, então existe uma sequência $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ de distintos elementos de Γ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = Id$. Temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(z) = z$. Como $T_n(z) = z$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos uma sequência de pontos distintos de z convergindo para z , contrariando a hipótese de Γ agir de maneira propriamente descontínua. ■

Exemplo 2.22. O subgrupo $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z}) \subset PSL(2, \mathbb{R})$ é um grupo Fuchsiano.

2.2 Domínios de Dirichlet

Nesta seção estudaremos os domínios fundamentais conhecidos como domínios de Dirichlet de um grupo Fuchsiano Γ . Começamos definindo domínios fundamentais e alguns resultados relacionados à área desses domínios. Em seguida, definimos domínios de Dirichlet, que são regiões poligonais formadas por geodésicas de \mathbb{H}^2 e possivelmente por segmentos no eixo real. Domínios de Dirichlet são construídos a partir de um grupo Fuchsiano. Por fim, apresentamos resultados relacionados as arestas e vértices de um domínio de Dirichlet.

2.2.1 Domínios Fundamentais

Definição 2.23. Seja X espaço métrico e Γ grupo de homeomorfismos agindo em X de maneira propriamente descontínua. Um subconjunto fechado $\mathcal{D} \subset X$ é dito **domínio fundamental** de Γ se satisfazer as seguintes condições:

1. $\bigcup_{T \in \Gamma} T(\mathcal{D}) = X$.
2. $\text{int}\mathcal{D} \cap T(\text{int}\mathcal{D}) = \emptyset$, para todo $Id \neq T \in \Gamma$.
3. $\text{int}\mathcal{D} \neq \emptyset$.

Onde, $\text{int}\mathcal{D}$ é o interior do conjunto \mathcal{D} .

O conjunto $\partial\mathcal{D} = \mathcal{D} - \text{int}\mathcal{D}$ é fronteira de \mathcal{D} e a família

$$\{T(\mathcal{D}); T \in \Gamma\}$$

é dita um **ladrilhamento** (ou **tesselação**) de X .

Exemplo 2.24. Seja $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ o subgrupo cíclico gerado por $T(z) = 2z$. Temos para todo $k > 0$, o semi-anel

$$\mathcal{D}_k = \{z \in \mathbb{H}^2; k \leq |z| \leq 2k\}$$

é um domínio fundamental de Γ e a família $\{\mathcal{D}_{2^n k}; n \in \mathbb{Z}\}$ é o ladrilhamento determinado por este domínio.

De fato, mostraremos que $T^n(\mathcal{D}_k) = \mathcal{D}_{2^n k}$. Temos

$$T^n(\mathcal{D}_k) = \{T^n(z) = 2^n z \in \mathbb{H}^2; k \leq |z| \leq 2k\}$$

e

$$\mathcal{D}_{2^n k} = \{z \in \mathbb{H}^2; 2^n k \leq |z| \leq 2^{n+1} k\}.$$

Seja $x \in T^n(\mathcal{D}_k)$, ou seja, $x = 2^n z \in \mathbb{H}^2$ tal que $k \leq |z| \leq 2k$. Multiplicando essa desigualdade por 2^n obtemos, $2^n k \leq |x| \leq 2^{n+1} k$, o que implica que $x \in \mathcal{D}_{2^n k}$. Logo, $T^n(\mathcal{D}_k) \subset \mathcal{D}_{2^n k}$.

Agora, seja $z \in \mathcal{D}_{2^n k}$ e tomemos $w = 2^{-n} z \in \mathbb{H}^2$, e como $2^n k \leq |z| \leq 2^{n+1} k$ então $w \in \mathcal{D}_k$, pois $k \leq |2^{-n} z| \leq 2k$. Assim $z = T^n(w) \in T^n(\mathcal{D}_k)$, ou seja, $\mathcal{D}_{2^n k} \subset T^n(\mathcal{D}_k)$. Portanto, temos

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(\mathcal{D}_k) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}_{2^n k} = \mathbb{H}^2.$$

Se $n \neq m$ com $n, m \in \mathbb{Z}$ teremos $\text{int}(\mathcal{D}_{2^n k}) \cap \text{int}(\mathcal{D}_{2^m k}) = \emptyset$.

E $\text{int}(\mathcal{D}_{2^n k}) \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{Z}$. (Veja a Figura 2.1)

Os próximos resultados sobre domínios fundamentais dizem respeito a área, onde um deles afirma que dois domínios fundamentais, com área finita, de um mesmo grupo Fuchsiano, possuem mesma área. Suas demonstrações encontram-se na referencia [17].

Teorema 2.25. Sejam \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 domínios fundamentais de um grupo fuchsiano Γ com $A_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{D}_1) < \infty$. Suponha que as fronteiras de \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 tenham áreas $A_{\mathbb{H}^2}(\partial \mathcal{D}_1) = A_{\mathbb{H}^2}(\partial \mathcal{D}_2) = 0$. Então $A_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{D}_1) = A_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{D}_2)$.

Teorema 2.26. Sejam Γ um grupo discreto de isometrias de \mathbb{H}^2 , Γ' um subgrupo de Γ de índice finito n e $T_1, \dots, T_n \in \Gamma$. Se

$$\Gamma = \Gamma' T_1 \cup \dots \cup \Gamma' T_n$$

é uma decomposição de Γ em Γ' -classes laterais e se \mathcal{D} é um domínio fundamental de Γ , então

i) $\mathcal{D}' = T_1(\mathcal{D}) \cup \dots \cup T_n(\mathcal{D})$ é domínio fundamental de Γ' .

ii) Se $A_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{D}) < \infty$ e $A_{\mathbb{H}^2}(\partial \mathcal{D}) = 0$, então $A_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{D}') = n A_{\mathbb{H}^2}(\mathcal{D})$.

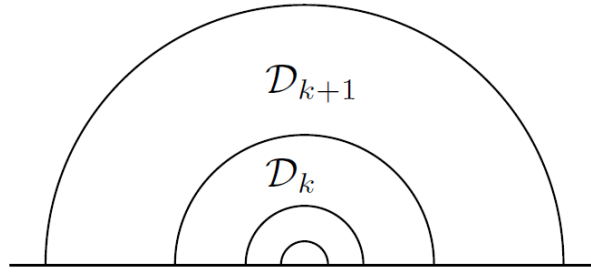


Figura 2.1: Domínio Fundamental \mathcal{D}_k

2.2.2 Domínios de Dirichlet

Através dos grupos Fuchsianos, podemos garantir a existência de domínios fundamentais, estes chamados de **Domínios de Dirichlet**. Seja $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ grupo fuchsiano e $p \in \mathbb{H}^2$, tal que $T(p) \neq p$ para todo $T \in \Gamma$. Este ponto existe pois o conjunto dos pontos fixos por algum elemento de Γ é discreto (Lema 2.20).

Definição 2.27. *Um Domínio de Dirichlet centrado em p é o conjunto da forma*

$$\mathcal{D}_p(\Gamma) = \{z \in \mathbb{H}^2; d(z, p) \leq d(z, T(p)), \forall T \in \Gamma\}.$$

Podemos definir para cada $T \in \Gamma$ ($T \neq Id$) o conjunto

$$L_p(\Gamma) = \{z \in \mathbb{H}^2; d(z, p) = d(z, T(p))\}$$

chamado de bissetor perpendicular de p e $T(p)$ com sua fronteira topológica como sendo o conjunto

$$H_p(T) = \{z \in \mathbb{H}^2; d(z, p) \leq d(z, T(p))\}.$$

Note que $L_p(T)$ é uma geodésica (não contendo p) e $H_p(T)$ é o semi-plano contendo p e delimitado por $L_p(T)$. Assim, podemos definir

Observação 2.28. *O domínio de Dirichlet de Γ centrado em p é dado por*

$$\mathcal{D}_p(\Gamma) = \bigcap_{Id \neq T \in \Gamma} H_p(T).$$

Mostraremos o resultado que a partir de um grupo Fuchsiano temos um domínio fundamental, ou seja, o resultado que garante que um domínio de Dirichlet é um domínio fundamental.

Teorema 2.29. *Seja Γ um grupo Fuchsiano e $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ o domínio de Dirichlet centrado em p . Então $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ é domínio fundamental da ação de Γ .*

Demonstração: Dado $z \in \mathbb{H}^2$, como Γ é um grupo Fuchsiano, a órbita $\Gamma(z)$ é discreta, logo existe (não necessariamente único) um ponto $z_0 \in \Gamma(z)$ mais

próximo de p . Temos então que $d(z_0, p) \leq d(T(z_0), p)$ para todo $T \in \Gamma$, logo $z_0 \in \mathcal{D}_p(\Gamma)$ e obtemos que o domínio de Dirichlet contém ao menos um representante de cada órbita. $\mathcal{D}_p(\Gamma) \neq \emptyset$. De fato, seja

$$\epsilon = \min_{T \in \Gamma} \{d(p, T(p))\}.$$

Então a bola aberta $B(p, \frac{\epsilon}{2}) \subset \mathcal{D}_p(\Gamma)$. Mostraremos que dois pontos interiores de $\mathcal{D}_p(\Gamma)$ não podem pertencer à mesma órbita. Se $d(z, p) = d(T(z), p)$ para algum $T \neq Id \in \Gamma$, então $d(z, p) = d(z, T^{-1}(p))$, de modo que $z \in L_p(T^{-1})$. Assim, caso z pertença a $\mathcal{D}_p(\Gamma)$, z pertence à sua fronteira, não sendo portanto ponto interior. ■

Exemplo 2.30. *Seja Γ o grupo gerado por $T(z) = 2z$. Como vimos anteriormente (Exemplo 2.24),*

$$\mathcal{D}_k = \{z \in \mathbb{H}^2; k \leq |z| \leq 2k\}$$

é domínio fundamental de Γ para todo $k > 0$. Consideremos um ponto no eixo imaginário $p = yi$. Temos então que $T(p) = 2yi$. Sabemos que o ponto médio do seguimento geodésico $\overline{pT(p)}$ deve ser da forma $m = ci$ com $y < c < 2y$. Utilizando a fórmula para distância hiperbólica (Teorema 1.24), obtemos que $d(p, m) =$

$$d(T(p), m) \text{ se, e somente se, } \ln \left(\frac{|i(y+c)| + |i(y-c)|}{|i(y+c)| - |i(y-c)|} \right) = \ln \left(\frac{|i(c+2y)| + |i(c+2y)|}{|i(c+2y)| - |i(c+2y)|} \right)$$

e obtemos $\frac{y}{c} = \frac{c}{2y} \iff c = \sqrt{2y}$. Logo

$$d(p, m) = d(T(p), m) \iff c = \sqrt{2y}.$$

Assim, se escolhermos $k = \frac{c}{2} = \frac{y}{2}$ é imediato constatarmos que

$$\partial \mathcal{D}_k = L_p(T) \cup L_p(T^{-1})$$

de modo que $\mathcal{D}_p(\Gamma) \subset \mathcal{D}$. Mas sendo \mathcal{D}_k domínio fundamental, $\mathcal{D}_k = \mathcal{D}_p(\Gamma)$.

Teorema 2.31. *Seja Γ grupo Fuchsiano e $\mathcal{D} = \mathcal{D}_p(\Gamma)$ domínio de Dirichlet centrado em p . Então o ladrinhamento $\{T(\mathcal{D}); T \in \Gamma\}$ é localmente finito.*

Demonstração: Sejam $q \in \mathbb{H}^2$, K um vizinhança compacta de q e $r = \sup_{z \in K} \{d(z, p)\}$.

Como K é um compacto temos $r < \infty$. Suponhamos que o ladrinhamento $\{T(\mathcal{D}); T \in \Gamma\}$ não seja localmente finito, ou seja, que exista uma sequência $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos distintos de Γ tal que $K \cap T_n(\mathcal{D}) \neq \emptyset$. Então, existe uma sequência de $z_n \in \mathcal{D}$ tal que $w_n = T_n(z_n) \in K \cap T_n(\mathcal{D})$. Como p é o centro \mathcal{D} , então

$$\begin{aligned} d(p, T_n(p)) &\leq d(p, w_n) + d(w_n, T_n(p)) \\ &= d(p, w_n) + d(T^{-1}(w_n), p) \\ &= d(p, w_n) + d(z_n, p) \\ &\leq d(p, w_n) + d(w_n, p) \\ &= 2r. \end{aligned}$$

O ponto p não é fixo por qualquer elemento de Γ , então a sequência $T_n(p)$ é uma sequência de pontos distintos contidos na bola fechada de centro p e raio $2r$. Isto contradiz a hipótese das órbitas de Γ serem discretas. Logo, o ladrinhamento $\{T(\mathcal{D}); T \in \Gamma\}$ é localmente finito. ■

Corolário 2.32. *Dado $z \in \partial(\mathcal{D}_P(\Gamma))$, existe $Id \neq T \in \Gamma$ tal que $T(z) \in \partial(\mathcal{D}_P(\Gamma))$.*

Continuaremos os estudos de domínios de Dirichlet observando que a fronteira de tal domínio é formada pela união de geodésicas, onde estas geodésicas chamaremos de **arestas ordinárias** e um ponto da fronteira do domínio de Dirichlet é chamado de **vértice ordinário** se este for interseção de duas arestas ordinárias distintas de $\mathcal{D}_P(\Gamma)$.

Se w for um ponto fixo por algum elemento elíptico T de ordem 2, podemos ter w contido no interior de uma aresta ordinária τ . Quando for este o caso, temos que as duas componentes conexas de τ e w são comutadas por T . Chamaremos cada uma dessas componentes conexas de **arestas singulares** e ao ponto w de **vértice singular**. Temos que um vértice singular divide uma aresta ordinária em duas singulares. Chamaremos apenas aresta de $\mathcal{D}_P(\Gamma)$ ambas arestas ordinária ou singular e chamaremos de simplesmente vértice de $\mathcal{D}_P(\Gamma)$ a ambos vértice ordinário e singular.

Teorema 2.33. *Seja $\mathcal{D}_P(\Gamma)$ um domínio de Dirichlet de Γ , então*

1. *Se τ é uma aresta de $\mathcal{D}_P(\Gamma)$. Então existe $Id \neq T \in \Gamma$ tal que $\tau \subseteq \mathcal{D}_P(\Gamma) \cap T(\mathcal{D}_P(\Gamma))$.*
2. *Se V é vértice de $\mathcal{D}_P(\Gamma)$. Então V é vértice ordinário se, e somente se, existem elementos distintos $Id \neq T_1, T_2 \in \Gamma$ tais que $V = \mathcal{D}_P(\Gamma) \cap T_1(\mathcal{D}_P(\Gamma)) \cap T_2(\mathcal{D}_P(\Gamma))$.*

Demonstração: Seja $z \in \tau \subset \partial(\mathcal{D}_P(\Gamma)) \subset \mathcal{D}_P(\Gamma)$ tal que z não é vértice. Pelo Corolário 2.32, existe $T^{-1} \neq Id \in \Gamma$ tal que $w = T^{-1}(z) \in \partial(\mathcal{D}_P(\Gamma))$. Temos então, $z = T(w) \in T(\mathcal{D}_P(\Gamma))$. Logo, $\tau \subset T(\mathcal{D}_P(\Gamma))$. Portanto, $\tau \subseteq \mathcal{D}_P(\Gamma) \cap T(\mathcal{D}_P(\Gamma))$. Demonstrando a primeira parte do teorema.

Para demonstrarmos a segunda parte. Consideremos V vértice de $\mathcal{D}_P(\Gamma)$ e sejam τ_1, τ_2 arestas de $\mathcal{D}_P(\Gamma)$ tais que $V = \tau_1 \cap \tau_2$. Pelo item 1 existem $T_1, T_2 \neq Id \in \Gamma$ de modo que podemos ter $\tau_1 = \mathcal{D}_P(\Gamma) \cap T_1(\mathcal{D}_P(\Gamma))$ e $\tau_2 = \mathcal{D}_P(\Gamma) \cap T_2(\mathcal{D}_P(\Gamma))$. Daí, temos que $V = \tau_1 \cap \tau_2 = \mathcal{D}_P(\Gamma) \cap T_1(\mathcal{D}_P(\Gamma)) \cap \mathcal{D}_P(\Gamma) \cap T_2(\mathcal{D}_P(\Gamma)) = \mathcal{D}_P(\Gamma) \cap T_1(\mathcal{D}_P(\Gamma)) \cap T_2(\mathcal{D}_P(\Gamma))$. Além disso, temos que $T_1 = T_2$ se e somente se V for ponto interior de uma aresta ordinária, ou seja, se e somente se, V for vértice singular. ■

Teorema 2.34. *Cada classe de equivalência de arestas de um domínio de Dirichlet $T\mathcal{D}_P(\Gamma)$ contém exatamente dois elementos*

Observe que $\mathcal{D}_P(\Gamma)$ é uma região poligonal com um número finito de arestas, este sendo necessariamente um número par. Temos também que dada um aresta τ_1 existe uma única aresta $\tau_2 \neq \tau_1$ e um único elemento de $T \in \Gamma$ que satisfaz $T(\tau_1) = \tau_2$. Dizemos neste caso que $\{\tau_1, \tau_2\}$ é um par de arestas congruentes e T emparelha as arestas.

Capítulo 3

Emparelhamentos de Arestas, Teorema de Poincaré e Tesselações Hiperbólicas

Nesse capítulo apresentaremos emparelhamentos de arestas generalizados de polígonos hiperbólicos associados a tesselações hiperbólicas. Seja Γ um grupo de isometrias agindo de maneira propriamente descontínua em \mathbb{H}^2 . Podemos representar o espaço quociente $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ por um polígono fundamental, sendo esse polígono construído como domínio de Dirichlet $\mathcal{P} = \mathcal{D}_p(\Gamma)$. Estes domínios fundamentais tessalam o plano hiperbólico, pelas transformações de Γ . Na primeira seção, definimos os emparelhamentos de arestas para estes polígonos e apresentamos um exemplo de um emparelhamento para um polígono hiperbólico. Na segunda seção, fizemos um estudo de resultados que demonstram o Teorema de Poincaré, que nos dá condições necessárias, onde a partir de um emparelhamento de arestas de um polígono \mathcal{P} , obtemos que esse polígono é um domínio fundamental e as transformações que emparelham \mathcal{P} , geram um grupo fuchsiano Γ . Na terceira seção, apresentamos definições de tesselações regulares para o plano euclidiano e o plano hiperbólico e expomos condições para que uma tesselação hiperbólica seja regular. Na quarta seção, mostramos os emparelhamentos construídos na referência [19] para polígonos hiperbólicos $12\eta - 8$ arestas, com $\eta \geq 3$ ímpar e $12\mu - 12$ arestas, $\mu \geq 2$ par. Na última seção, apresentamos um emparelhamento construído para os polígonos hiperbólicos com $8g - 4$ arestas, utilizado na referência [5]. Estes emparelhamentos foram objetos de estudo para a construção dos emparelhamentos generalizados do próximo capítulo. No presente capítulo utilizamos as seguintes referências, [5], [6], [7], [13], [15], [19], [23] e [25].

3.1 Emparelhamentos de Arestas

Seja \mathcal{P} um polígono hiperbólico e \mathcal{A} o conjunto de arestas de \mathcal{P} . A seguir, definimos um emparelhamento de arestas para o polígono hiperbólico.

Definição 3.1. *Um emparelhamento de arestas para o polígono hiperbólico \mathcal{P} é um conjunto $\Phi = \{T_\tau; \tau \in \mathcal{A}\}$ de isometrias que, para toda aresta $\tau \in \mathcal{A}$:*

- 1) *existe uma aresta $\tau' \in \mathcal{A}$ com $T(\tau) = \tau'$.*
- 2) *As isometrias T_τ e $T_{\tau'}$, satisfazem a relação $(T_\tau)^{-1} = T_{\tau'}$.*
- 3) *se τ for aresta de \mathcal{P} então $\tau' = \mathcal{P} \cap (T_\tau)^{-1}(\mathcal{P})$.*

O emparelhamento das arestas do polígono \mathcal{P} nos dá ciclos de vértices.

Definição 3.2. *Seja Γ um grupo Fuchsiano e $D = D_P(\Gamma)$ um domínio de Dirichlet de Γ . Definimos um **ciclo de vértices** como sendo uma classe de equivalência de vértices congruentes, ou seja, como sendo um conjunto da forma*

$$\{T(z); T \in \Gamma, z \text{ e } T(z) \text{ são vértices de } \mathcal{D}_p(\Gamma)\}.$$

O emparelhamento Φ de um polígono hiperbólico \mathcal{P} gera um grupo Fuchsiano Γ , posteriormente veremos que com este grupo podemos obter superfícies de Riemann \mathcal{R} de um dado gênero g através do quociente \mathbb{H}^2 por Γ .

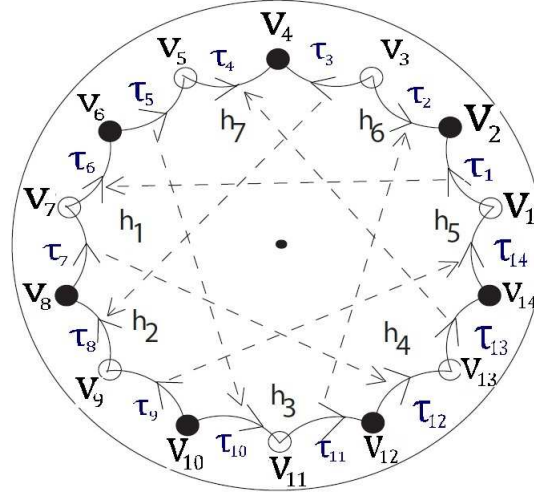
É conhecido que o número n de arestas do polígono \mathcal{P} esta limitado entre $4g$ e $12g - 6$, [4]. Os emparelhamentos dos polígonos com $4g$ arestas são bem investigados nos trabalhos [6], [12], [14], [18] e [25]. E os emparelhamentos para os polígonos com $12g - 6$ arestas são bem explorados nos trabalhos [8], [9], [10], [15].

Exemplo 3.3. *(Figura 3.1) O grupo de isometrias $\Phi = \{h_1, \dots, h_7\}$ é um emparelhamento com dois ciclos de vértices, para o polígono regular de 14 arestas e ângulos internos medindo $\frac{2\pi}{7}$. Temos os seguintes pares de arestas emparelhadas $h_1(\tau_1) = \tau_6$, $h_2(\tau_3) = \tau_8$, $h_3(\tau_5) = \tau_{10}$, $h_4(\tau_7) = \tau_{12}$, $h_5(\tau_9) = \tau_{14}$, $h_6(\tau_{11}) = \tau_2$, $h_7(\tau_{13}) = \tau_4$, onde as arestas do polígono são emparelhadas de modo que as arestas identificadas pelas isometrias h_1, \dots, h_7 tem orientações opostas, cujos vértices ordinários numerado pelos 7 ímpares (bolas vazias) formam um ciclo e os 7 vértices ordinários numerados pelos pares (bolas preenchidas) formam outro ciclo.*

$$C_{V_1} = \{V_1, V_7, V_{13}, V_5, V_{11}, V_3, V_9\} \text{ e } C_{V_2} = \{V_2, V_{12}, V_8, V_4, V_{14}, V_{10}, V_6\}$$

O próximo resultado nos garante que as isometrias que emparelham a região poligonal $\mathcal{D} = \mathcal{D}_p(\Gamma)$ formam um conjunto de geradores de Γ . A demonstração pode ser vista na referência [13].

Teorema 3.4. *Seja $\mathcal{D} = \mathcal{D}_p(\Gamma)$ domínio de Dirichlet de Γ . Considere o conjunto $\{T_i; i \in I\}$ de elementos de Γ que relacionam arestas distintas de \mathcal{D} . Então $\{T_i; i \in I\}$ é um conjunto de geradores de Γ .*

Figura 3.1: Emparelhamento Φ

3.2 O Teorema de Poincaré e Grupos Fuchsianos Co-compactos

Sabemos que qualquer grupo Fuchsiano Γ possui um domínio fundamental \mathcal{D} , em particular, possui um polígono convexo \mathcal{P} . Inicialmente nesta seção, estudaremos o processo inverso pelo Teorema de Poincaré que nos dá condições suficientes para um polígono ser domínio fundamental de um grupo Fuchsiano Γ . Em seguida, buscamos condições para que o quociente $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$, seja compacto.

3.2.1 Teorema de Poincaré

Uma questão que podemos considerar é estabelecer condições para podermos determinar um grupo discreto de isometrias (grupo Fuchsiano) a partir de um domínio dado. Para isto, seja \mathcal{P} um domínio poligonal fechado com $\text{int}\mathcal{P} \neq \emptyset$, em \mathbb{H}^2 , ou seja, estamos supondo que a fronteira $\partial(\mathcal{P}) = \mathcal{P} \setminus \text{int}\mathcal{P}$ seja união de geodésicas chamadas de arestas de \mathcal{P} . Consideremos o conjunto $A = \{\tau; \tau \text{ é aresta de } \mathcal{P}\}$ e supomos que exista um emparelhamento dessas arestas. Denotamos por Γ o grupo gerado pelas isometrias T_τ , buscamos condições sobre \mathcal{P} que possam garantir que Γ seja um grupo discreto com domínio fundamental \mathcal{P} .

Seja X um espaço métrico e $\mathcal{P} = \text{int}\mathcal{P} \cup \partial\mathcal{P} \subset X$ um polígono convexo com interior não vazio e conjunto de arestas A emparelhadas por isometrias de X de modo que $T_\tau(\tau) = \tau'$ e $T_{\tau'} = (T_\tau)^{-1}$. Denotaremos por Γ o grupo de isometrias de X gerado por $\{T_\tau; \tau \in A\}$. Tomando o conjunto $\Gamma \times \mathcal{P}$. Podemos pensar em $\Gamma \times \mathcal{P}$, como uma coleção de cópias disjuntas

$$(T, \mathcal{P}) = \{(T, x); T \in \Gamma \text{ e } x \in \mathcal{P}\}$$

de \mathcal{P} indexadas por Γ e (T, x) como o ponto $T(x)$ visto dentro de $T(\mathcal{P})$. Consi-

deremos sobre $\Gamma \times \mathcal{P}$ a relação \sim definida por

$$(T, x) \sim (S, y) \iff T = S \text{ e } x = y \text{ ou se } x \in \tau, T_\tau(x) = y \text{ e } T = ST_\tau.$$

1. A relação \sim é **reflexiva**, ou seja, $(T, x) \sim (T, x)$ pois $T = T$ e $x = x$.
2. Também temos que \sim é **simétrica**, isto é, sejam $(T, x), (S, y) \in \Gamma \times \mathcal{P}$, se temos que $(T, x) \sim (S, y)$, então $(S, y) \sim (T, x)$, pois temos que se $(T, x) \sim (S, y)$ então, se $T = S$ e $x = y$, temos $S = T$ e $y = x$, logo $(S, y) \sim (T, x)$ ou se $x \in \tau$, $T_\tau(x) = y$ e $T = ST_\tau$, teremos $y \in T_\tau(\tau) = \tau'$, $x \in T_\tau^{-1}(\tau) = T_{\tau'}^{-1}(\tau')$ e $S = TT_\tau^{-1} = TT_{\tau'}$. Logo, $(S, y) \sim (T, x)$. Assim, em ambos os casos $(S, y) \sim (T, x)$.
3. Mas não é **transitiva**. Suponha que seja, e consideremos $(T, x), (S, y), (R, z) \in \Gamma \times \mathcal{P}$ de modo que T, S, R sejam dois a dois disjuntos e x, y, z dois a dois distintos. Suponhamos $(T, x) \sim (S, y)$ e $(S, y) \sim (R, z)$, como estamos supondo \sim transitiva teríamos que ter $(T, x) \sim (R, z)$. Assim, teríamos $T = R$ e $x = z$ um absurdo ou teríamos, $x \in \tau$, $T_\tau(x) = z$ e $T = RT_\tau$. Mas como $(T, x) \sim (S, y)$ temos, se $x \in \tau$, $T_\tau(x) = y$ e $T = ST_\tau$. Daí teríamos $y = T_\tau(x) = z$, ou seja, $y = z$ e $ST_\tau = T = RT_\tau$, isto é, $S = R$ que também é um absurdo.

Para torna-la transitiva, e portanto uma relação de equivalência, devemos definir

$$(T, x) * (S, y)$$

se, e somente se, existir uma sequência finita de elementos satisfazendo

$$(T, x) = (T_1, x_1) \sim \dots \sim (T_n, x_n) = (S, y).$$

De fato, sejam $(T, x), (S, y), (R, z) \in \Gamma \times \mathcal{P}$. Assim, se $(T, x) * (S, y)$ então, existe uma sequência finita (T_j, x_j) , com $j = 1, \dots, n$, tal que

$$(T, x) = (T_1, x_1) \sim \dots \sim (T_n, x_n) = (S, y).$$

E se $(S, y) * (R, z)$ então, existe uma sequência finita (T_k, x_k) , com $k = 1, \dots, m$, tal que

$$(S, y) = (S_1, y_1) \sim \dots \sim (S_m, y_m) = (R, z).$$

Logo,

$$(T, x) = (T_1, x_1) \sim \dots \sim (T_n, x_n) = (S, y) = (S_1, y_1) \sim \dots \sim (S_m, y_m) = (R, z).$$

Portanto, $(T, x) * (R, z)$. A simetria e reflexão em $*$ é herdada por \sim . Assim, $*$ é uma **relação de equivalência**.

Denotaremos por $[T, x]$ a classe de equivalência determinada por (T, x) e X^* o conjunto das classes de equivalência.

Observação 3.5. *Consideremos as aplicações:*

$$\begin{aligned}\Upsilon : \Gamma \times \mathcal{P} &\rightarrow X^* \text{ dada por } \Upsilon(T, x) = [T, x]. \\ \Omega : \Gamma \times \mathcal{P} &\rightarrow X \text{ dada por } \Omega(T, x) = T(x). \\ \Psi : X^* &\rightarrow X \text{ dada por } \Psi([T, x]) = T(x).\end{aligned}$$

Então o diagrama

$$\begin{array}{ccc}\Omega \times \mathcal{P} & \xrightarrow{\Upsilon} & X^* \\ \Omega \downarrow & \swarrow \Psi & \\ X & & \end{array}$$

é comutativo.

A aplicação Ψ está bem definida, pois se tivermos $[T, x] = [S, y]$, então $T = S$ e $x = y$, daí temos que

$$\Psi([T, x]) = T(x) = S(x) = S(y) = \Psi([S, y]).$$

O digrama é comutativo pois, $\Psi \circ \Upsilon(T, x) = \Psi([T, x]) = T(x) = \Omega(T, x)$.

Estamos considerando em Γ a topologia discreta, em $\Gamma \times \mathcal{P}$ a topologia produto e em X^* a topologia quociente. Notemos que, se tivermos $[T, x] = [S, y]$, então $T(x) = S(y)$ e $[RT, x] = [RS, y]$ e se $x \in \text{int}(\mathcal{P})$, então $T = S$ e $x = y$.

Seja $S \in \Gamma$ e consideremos a aplicação

$$S^* : X^* \longrightarrow X^*$$

$$[T, x] \longmapsto [ST, x].$$

Essa aplicação está bem definida, pois se tivermos

$$S^*([T, x]) = [R, x] \text{ e } S^*([T, y]) = [S, y]$$

temos que $R(x) = S(y)$ e se $x \in \text{int}(\mathcal{P})$ temos $R = S$ e $x = y$. Além disso, temos que

$$(S^{-1})^* = (S^*)^{-1} \text{ e } (ST)^* = S^*T^*.$$

De fato, $(S^{-1})^*(S^*([T, x])) = (S^{-1})^*([ST, x]) = [S^{-1}ST, x] = [T, x]$ e também $S^*((S^{-1})^*([T, x])) = S^*([S^{-1}T, x]) = [SS^{-1}T, x] = [T, x]$. Logo,

$$(S^{-1})^* \circ S^* = S^* \circ (S^{-1})^* = Id, \text{ ou seja, } (S^{-1})^* = (S^*)^{-1}.$$

Para a outra igualdade temos

$$S^*(T^*([R, x])) = S^*([TR, x]) = [STR, x] = (ST)^*([R, x]), \text{ isto é, } (ST)^* = S^*T^*.$$

Considere Γ^* o conjunto de todas as aplicações S^* . Pelo fato de $(S^{-1})^* = (S^*)^{-1}$, temos que Γ^* é um grupo de bijeções X^* em si mesmo.

Proposição 3.6. *A aplicação $f : \Gamma \longrightarrow \Gamma^*$ dada por $f(S) = S^*$ é um isomorfismo.*

Demonstração: De fato, $f(TS) = (TS)^* = T^*S^* = f(T)f(S)$, para todo $T, S \in \Gamma$, ou seja, um homomorfismo. E se $f(T) = f(R)$, então $S^*([T, x]) = S^*([R, x])$, com $x \in \mathcal{P}$, ou seja, $[ST, x] = [SR, x]$. Logo $T = S$, isto é, f é injetiva. Como $S^*([T, x]) = [ST, x]$ para todo $T \in \Gamma$ e $x \in \mathcal{P}$, particularmente quando $T = Id$ identidade de Γ , $S^*([Id, x]) = [S, x]$. Assim, dado um $S^* \in \Gamma^*$, existe um $S \in \Gamma$, tal que $f(S) = S^*$. Logo, f é sobrejetora e portanto bijetora. ■

Definindo $[\mathcal{P}] = \{[Id, x]; x \in \mathcal{P}\}$, onde Id é identidade de Γ , temos que a ação de Γ^* sobre $[\mathcal{P}]$, tessela X^* . Assim, enunciamos os seguintes resultados.

Lema 3.7. *As aplicações Ψ, Υ e Ω no diagrama da observação 3.5 são contínuas.*

Demonstração: Observe que da maneira que definimos a aplicação Υ , ela é contínua e aberta, pois Υ induz a topologia quociente de X^* . Consideremos um $A \subset X$ aberto, temos que

$$\Omega^{-1}(A) = \bigcup_{T \in \Gamma} (\{T\} \times (T^{-1}(A) \cap \text{int}\mathcal{P})),$$

e como cada $\{T\} \times (T^{-1}(A) \cap \text{int}\mathcal{P})$ é aberto em $\Gamma \times \mathcal{P}$, pois estamos considerando a topologia discreta em Γ , então $\{T\}$ é aberto, e como T é contínua e A é aberto $T^{-1}(A)$ é aberto, logo $T^{-1}(A) \cap \text{int}\mathcal{P}$ é um aberto de \mathcal{P} . Portanto, $\Omega^{-1}(A) = \bigcup_{T \in \Gamma} (\{T\} \times (T^{-1}(A) \cap \text{int}\mathcal{P}))$ é aberto, ou seja, Ω é contínua. Agora, como $\Omega = \Psi \circ \Upsilon \Rightarrow \Omega^{-1} = \Upsilon^{-1} \circ \Psi^{-1}$, assim $\Omega^{-1}(A) = \Upsilon^{-1}(\Psi^{-1}(A))$. Logo obtemos,

$$\Upsilon(\Omega^{-1}(A)) = \Psi^{-1}(A)$$

e é aberto, pois Υ é uma aplicação aberta e $\Omega^{-1}(A)$ é aberto, pois como vimos Ω é contínua. Logo, Ψ é contínua. ■

Lema 3.8. *Dada a isometria $S \in \Gamma$ temos que $S^* : X^* \rightarrow X^*$ é homeomorfismo.*

Demonstração: Definimos $\tilde{S} : \Gamma \times \mathcal{P} \rightarrow \Gamma \times \mathcal{P}$, dada por $\tilde{S}((T, x)) = (ST, x)$, onde é obviamente contínua. Agora temos que

$$\Upsilon(\tilde{S}((T, x))) = \Upsilon((ST, x)) = [ST, x] = S^*([T, x]) = S^*(\Upsilon(T, x)).$$

Assim, dado um $A \subset X^*$, temos que

$$\Upsilon^{-1} \circ (S^*)^{-1}(A) = (\tilde{S})^{-1} \circ \Upsilon^{-1}(A).$$

Então se A for aberto, $\Upsilon^{-1} \circ (S^*)^{-1}(A)$ também o será, pois Υ e \tilde{S} são contínuas. Logo,

$$(S^*)^{-1}(A) = \Upsilon((\tilde{S})^{-1} \circ \Upsilon^{-1}(A))$$

é aberto, pois Υ é uma aplicação aberta, isso nos dá que S^* é contínua. Mas como $(S^*)^{-1} = (S^{-1})^*$, obtemos que S^* é um homeomorfismo de X^* . ■

Proposição 3.9. *Sejam $X, X^*, \mathcal{P}, \Gamma$ como acima e Ψ visto na observação 3.5. Então,*

$$\bigcup_{T \in \Gamma} T(\mathcal{P}) = X$$

se Ψ for sobrejetora, e para $T, S \in \Gamma$ distintos

$$T(\text{int}(\mathcal{P})) \cap S(\text{int}(\mathcal{P})) = \emptyset.$$

se Ψ for injetora.

Demonstração: O diagrama visto acima comuta e daí temos, $T(\mathcal{P}) = \Omega([T, \mathcal{P}]) = \Psi(\Upsilon((T, \mathcal{P}))) = \Psi([T, \mathcal{P}])$, assim

$$\bigcup_{T \in \Gamma} T(\mathcal{P}) = \bigcup_{T \in \Gamma} \Psi([T, \mathcal{P}]).$$

Mas como, $S^*([\mathcal{P}]) = S^*([Id, \mathcal{P}]) = [S, \mathcal{P}]$, logo,

$$\bigcup_{S^* \in \Gamma^*} S^*([\mathcal{P}]) = \bigcup_{S \in \Gamma} ([S, \mathcal{P}]).$$

Supondo Ψ sobrejetora, obtemos

$$\bigcup_{T \in \Gamma} T(\mathcal{P}) = \bigcup_{T \in \Gamma} \Psi([T, \mathcal{P}]) = \Psi\left(\bigcup_{T \in \Gamma} [T, \mathcal{P}]\right) = \Psi(X^*) = X,$$

demonstrando a primeira igualdade da proposição.

Agora, note que se temos $T^* \neq S^*$, então

$$T^*([\text{int}\mathcal{P}]) \cap S^*([\text{int}\mathcal{P}]) = \emptyset,$$

pois, caso contrario $T^*([\text{int}\mathcal{P}]) \cap S^*([\text{int}\mathcal{P}]) \neq \emptyset$, se, e somente se existem $x, y \in \text{int}\mathcal{P}$, tais que $[T, x] = [S, y]$ se, e somente se, $T = S$ e $x = y$. Mas como a aplicação f definida acima é uma bijeção, em particular injetiva, teríamos $T^* = f(T) = f(S) = S^*$, um absurdo.

Assim, se Ψ for injetiva, então se tivermos $T^* \neq S^*$ em Γ^* temos que $T(\text{int}\mathcal{P}) = \Psi(T^*([\text{int}\mathcal{P}])) \neq \Psi(S^*([\text{int}\mathcal{P}])) = S(\text{int}\mathcal{P})$ em Γ . Assim,

$$T^*(\text{int}\mathcal{P}) \cap S^*(\text{int}\mathcal{P}) = \emptyset \iff [T, \text{int}\mathcal{P}] \cap [S, \text{int}\mathcal{P}] = \emptyset.$$

Logo, obtemos

$$\begin{aligned} T(\text{int}\mathcal{P}) \cap S(\text{int}\mathcal{P}) &= \Psi(T^*([\text{int}\mathcal{P}])) \cap \Psi(S^*([\text{int}\mathcal{P}])) \\ &= \Psi([T, \text{int}\mathcal{P}]) \cap \Psi([S, \text{int}\mathcal{P}]) \\ &= \Psi([T, \text{int}\mathcal{P}]) \cap [S, \text{int}\mathcal{P}] \\ &= \Psi(\emptyset) = \emptyset, \end{aligned}$$

que demonstra a segunda igualdade da proposição. ■

A proposição acima nos fornece uma situação semelhante à existência de um domínio fundamental, ou seja, se Γ for um grupo fuchsiano, a proposição nos

garante que \mathcal{P} é um domínio fundamental, desde que Ψ seja bijetora.

Para que Ψ seja sobrejetora, devemos garantir para pontos na fronteira de \mathcal{P} que alguma vizinhança seja coberta por imagens de \mathcal{P} e que esta cobertura seja consistente com a relação $*$. Se x for ponto interior de alguma aresta τ de \mathcal{P} , podemos constatar que a classe de equivalência $[Id, x]$ contém apenas os elementos (Id, x) e $((T_\tau)^{-1}, T_\tau(x))$ e que $\mathcal{P} \cap (T_\tau)^{-1}(\mathcal{P})$ contém uma vizinhança de x . Se x for vértice de \mathcal{P} deveremos expressar essa situação com a condição:

Condição C_1 : Dado um vértice $x \in \mathcal{P}$, consideremos a classe de equivalência $[Id, x] = \{(T_1, x_1), \dots, (T_n, x_n)\}$. Então, a família $T_j(int(\mathcal{P}))$ é uma família de conjuntos dois a dois disjuntos, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno $B(x, \epsilon) \subset \bigcup_{j=1}^{n+1} T_j(\mathcal{P})$ e $T_{j+1} = T_j \circ T_\tau$, onde τ é aresta de \mathcal{P} .

No caso em que temos $X = \mathbb{H}^2, \mathbb{R}^2, S^2$, onde a noção de ângulo é bem definida, a condição acima pode ser substituída pela condição:

Condição C_1^* : Dado um vértice V de \mathcal{P} , sejam $V = V_1, \dots, V_r$ os vértices de \mathcal{P} tais que $T_i(V_i) = V$, para algum $T_i \in \Gamma$ e sejam $\theta_1, \dots, \theta_r$ os ângulos internos nos respectivos vértices. Então, se denotarmos por m a ordem de Γ_V , $\theta_1 + \dots + \theta_r = \frac{2\pi}{m}$.

Proposição 3.10. *Se \mathcal{P} satisfizer a **Condição C_1** , então X^* será um espaço Hausdorff conexo e $\Psi : X^* \rightarrow X$ um homeomorfismo local.*

Demonstração: Sejam duas classes de equivalência $[T, x]$ e $[S, y]$ distintas de X^* . Obviamente, a situação mais complicada é quando tivermos x, y vértices de \mathcal{P} . Escolhemos assim, ϵ_x e ϵ_y tais que as bolas $B(x, \epsilon_x) \subset \bigcup_{j=1}^{n+1} T_j(\mathcal{P})$ e $B(y, \epsilon_y) \subset \bigcup_{i=1}^{m+1} S_i(\mathcal{P})$. Tomemos $\epsilon = \min\{\epsilon_x, \epsilon_y, \frac{1}{2}d(x, y)\}$, temos que

$$\bigcup_{j=1}^{n+1} T_j^*([\mathcal{P} \cap B(x, \epsilon)]) \text{ e } \bigcup_{i=1}^{m+1} S_i^*([\mathcal{P}, B(x, \epsilon)]),$$

são vizinhanças abertas e disjuntas que separam $[T, x]$ e $[S, y]$, pois, estamos supondo que \mathcal{P} satisfaz a **condição C_1** . Logo X^* é Hausdorff. Observe que se $x \in \tau'$, onde τ' é aresta de \mathcal{P} , então

$$[T, x] = [TT_\tau, (T_\tau)^{-1}],$$

temos que

$$[T, \mathcal{P}] \cap [TT_\tau, \mathcal{P}] \neq \emptyset,$$

de modo que $[T, \mathcal{P}] \cup [TT_\tau, \mathcal{P}]$ é conexo, e consequentemente, X^* também será, pois Γ é gerado pelos elementos T_τ .

Para mostrarmos que Ψ é um homeomorfismo local, consideremos como acima a classe de equivalência $[T, x]$ de X^* , com x um vértice de \mathcal{P} . Seja ϵ escolhido de

modo que temos $B(x, \epsilon) \subset \bigcup_{j=1}^{m+1} T_j(\mathcal{P})$. Definimos então,

$$V = \Upsilon(W), \text{ onde } W = \bigcup_{j=1}^{m+1} (T_j, \mathcal{P} \cap B(x, \epsilon)).$$

Assim temos,

$$\begin{aligned} \Psi(V) &= \Psi(\Upsilon(W)) \\ &= \Omega(W) \\ &= B(x, \epsilon). \end{aligned}$$

De um modo mais geral, obtemos

$$\begin{aligned} \Psi(T^*(V)) &= \Psi(T^*(\Upsilon(W))) \\ &= T(\Omega(W)) \\ &= B(T(x), \epsilon). \end{aligned}$$

Como as bolas geram a topologia de X , logo os elementos da forma $T^*(\bigcup_{i=1}^{m+1} [S_i, \mathcal{P} \cap B(x, \epsilon)])$ geram a topologia de X^* . Dado $[S, y] \in V$, podemos encontrar uma vizinhança aberta de $[S, y]$ da forma $T^*(\bigcup_{i=1}^{m+1} [S_i, \mathcal{P} \cap B(x, \epsilon)])$ contida em V . Assim, Ψ restrito a $T^*(V)$ é um homeomorfismo sobre $T(\Omega(W))$, ou seja, Ψ é um homeomorfismo local. ■

Estamos interessados em tornar a aplicação $\Psi : X^* \rightarrow X$ uma aplicação de recobrimento. Feito isso, considerando o caso em que $X = \mathbb{H}^2, \mathbb{R}^2, S^2$, todos simplesmente conexos, sendo X^* conexo, obteremos Ψ bijetora. Considerando a Proposição 3.7, obteremos que o par (Γ, \mathcal{P}) é tal que $\bigcup_{T \in \Gamma} T(\mathcal{P}) = \mathbb{H}^2$ e $T(\text{int}(\mathcal{P})) \cap S(\text{int}(\mathcal{P})) \neq \emptyset \Rightarrow T = Id$. Neste caso temos Γ um grupo Fuchsiano e \mathcal{P} um domínio fundamental de Γ .

O motivo que Ψ possa deixar de ser uma aplicação de recobrimento reside no fato das constantes ϵ_x vistas na demonstração da Proposição 3.8 não serem necessariamente limitadas inferiormente. Para garantirmos que Ψ é uma aplicação de recobrimento impomos uma outra condição:

Condição \mathbf{C}_2 : A constante $\epsilon > 0$ da **Condição \mathbf{C}_1** pode ser escolhida independentemente do ponto x .

Esta condição é satisfeita se o polígono \mathcal{P} tiver um número finito de arestas e vértices, bastando tomar ϵ como o mínimo do comprimento das arestas de \mathcal{P} .

E com este estudo temos demonstrado o seguinte teorema:

Teorema 3.11. (TEOREMA DE POINCARÉ) *Seja \mathcal{P} um polígono hiperbólico com um emparelhamento Φ satisfazendo as condições \mathbf{C}_1^* e \mathbf{C}_2 :. Então o grupo Γ gerado pelas isometrias de emparelhamento é um grupo discreto de $\text{Isom}(X)$ e \mathcal{P} é um domínio fundamental de Γ (onde $X = \mathbb{H}^2, \mathbb{R}^2$ ou S^2).*

3.2.2 Grupos Fuchsianos Co-compactos

Aqui, nosso objetivo é buscar condições necessárias e suficientes para que o quociente $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ seja compacto. Para isso, estudamos os seguintes resultados.

Definição 3.12. Um grupo Fuchsiano Γ é dito **co-compacto** se o espaço quociente $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ for compacto.

Teorema 3.13. Seja Γ um grupo Fuchsiano e suponha que Γ possua domínio fundamental convexo e não compacto. Então, $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ não é compacto.

Corolário 3.14. Um grupo Fuchsiano Γ é co-compacto se, e somente se, todo domínio de Dirichlet de Γ for compacto.

Demostrações são vistas na referência [17].

Teorema 3.15. Seja Γ um grupo Fuchsiano co-compacto. Então Γ não possui elementos parabólicos.

Demonstração: Seja a função $g(z) = \inf\{d_T(z); Id \neq T \in \Gamma, Tr(T) \geq 2\}$, onde $d_T(z) = d(z, T(z))$. Como Γ é um grupo Fuchsiano, suas órbitas são discretas e cada transformação T é contínua, então temos que $g(z)$ é uma função contínua de z . Mais ainda, como estamos impondo que $Tr(T) \geq 2$, não estamos considerando transformações elípticas, temos então que $g(z) > 0$, para todo $z \in \mathbb{H}^2$.

Se Γ for co-compacto, temos que \mathcal{P} é compacto, logo o $\inf\{g(z); z \in \mathcal{P}\}$ é atingido e assim sendo este é estritamente positivo. Mas dado $z \in \mathbb{H}^2$, existe $S \in \Gamma$ tal que $g(z) = g(S(z)) = g(w)$ o que nos dá também, $S^{-1}(w) = z$ e para todo $T \in \Gamma$, temos

$$\begin{aligned} d_T(z) &= d(z, T(z)) \\ &= d(S(z), ST(z)) \\ &= d(w, STS^{-1}(w)) \\ &= d_{STS^{-1}}(z) \end{aligned}$$

de modo que $g(z) = g(S(z))$ e temos $\inf\{g(z); z \in \mathbb{H}^2\} > 0$. Assim sendo, Γ não pode possuir elementos parabólicos, pois $0 < g(z) \leq d_T(z)$ para todo $z \in \mathbb{H}^2$ e para todo elemento não elíptico $T \in \Gamma$, mas dado T parabólico, $\inf_{z \in \mathbb{H}^2} d_T(z) = 0$. Uma contradição. ■

Teorema 3.16. Seja Γ um grupo Fuchsiano e $\mathcal{D} = \mathcal{D}_p(\Gamma)$ domínio de Dirichlet não compacto mas com área finita. Então:

(i) Cada ponto $\xi \in \partial_\infty \mathcal{D}$ é ponto fixo de algum elemento parabólico $T \in \Gamma$.

(ii) Se $\eta \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$ é ponto fixo por algum elemento parabólico de Γ , existe $S \in \Gamma$ tal que $S(\eta) \in \partial_\infty \mathcal{D}$.

Demonstração vista na referência [13].

Teorema 3.17. *Um grupo Fuchsiano é co-compacto se, e somente se, não possui elementos parabólicos e $A_{\mathbb{H}^2}(\mathbb{H}^2/\Gamma) < \infty$.*

Demonstração: Se Γ for co-compacto então o quociente $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ é compacto. Temos que $A_{\mathbb{H}^2}(\mathbb{H}^2/\Gamma) < \infty$ e pelo Teorema 3.15, Γ não possui elementos parabólicos. Suponha agora que Γ não possui elementos parabólicos e $A_{\mathbb{H}^2}(\mathbb{H}^2/\Gamma) < \infty$, então o Teorema 3.16 nos garante que qualquer domínio de Dirichlet \mathcal{D} não possuirá pontos ideais. Mas sendo \mathcal{D} um domínio fundamental convexo, temos que \mathcal{D} é fechado e limitado, ou seja, compacto. Logo, o Corolário 3.14 nos garante que Γ é co-compacto. ■

Uma consequência destes resultados é que $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ será uma superfície compacta se, e somente se, Γ não possuir elementos parabólicos e $A_{\mathbb{H}^2}(\mathbb{H}^2/\Gamma) < \infty$. $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma}$ também será orientável, pois Γ é um grupo Fuchsiano, ou seja, pertence ao grupo das transformações de Möbius que preservam a orientação.

O gênero da superfície é obtido pela **característica de Euler** de uma superfície dada por

$$\chi(S) = V - A + F,$$

onde A é o número de arestas, V o número de vértices e F o número de faces da superfície. Onde, se S for uma superfície orientável e compacta a característica de Euler é dada por

$$\chi(S) = 2 - 2g. \tag{3.1}$$

3.3 Tesselações no plano

Vimos que um domínio fundamental ladrilha (ou tessela) o plano hiperbólico e nesta seção apresentaremos as tesselações regulares hiperbólicas e euclidianas. Veremos que existem infinitas tesselações regulares hiperbólicas, já no caso euclidiano quando os polígonos são regulares existem apenas três tesselações. Apresentaremos condições para que uma tesselação regular hiperbólica exista.

3.3.1 Tesselações no plano euclidiano.

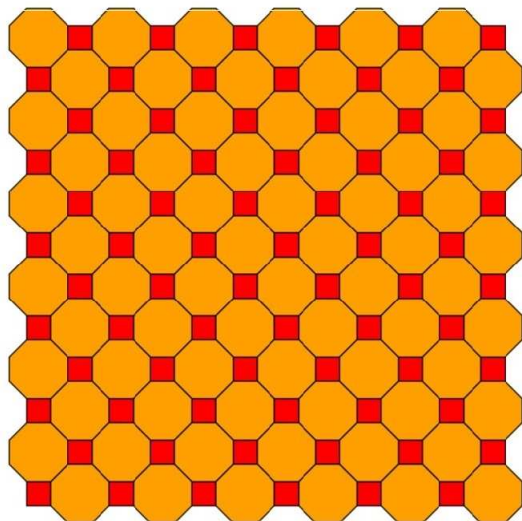
Começamos definindo tesselações no plano euclidiano.

Definição 3.18. *Uma tesselação ou ladrilhamento em \mathbb{R}^2 é uma cobertura do plano por regiões poligonais congruentes de tal modo que todo ponto do plano é coberto por pelo menos uma região, onde duas regiões distintas quaisquer não se interceptam exceto, eventualmente no bordo.*

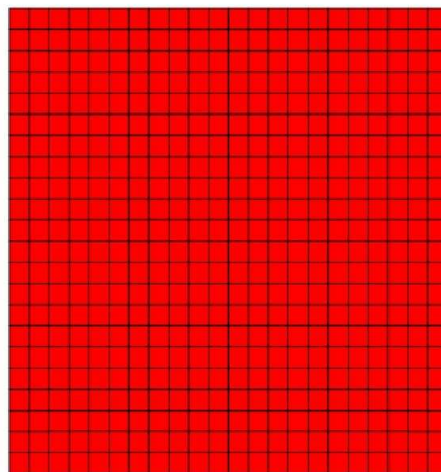
A região poligonal é chamada de **Ladrilho**, denotada por L . Se plano é coberto por polígonos regulares a tesselação é chamada de regular. Quando os

polígonos são regulares há apenas três maneiras de tesselar o plano Euclidiano: Por triângulos equiláteros, quadrados e Hexágonos regulares.

A Figura 3.2 ilustra dois tipos de tesselações em \mathbb{R}^2 , uma regular por quadrados e outra por quadrados ou hexágonos.



Tesselação por quadrados e octógonos regulares



Tesselação por quadrados regulares

Figura 3.2: Exemplos de tesselações em \mathbb{R}^2

Observe na Figura 3.3 que os favos das abelhas fazem uma ilustração interessante de uma tesselação regular por hexágonos.



Figura 3.3: Os favos das abelhas tem formato de hexágono

3.3.2 Tesselações regulares no plano Hiperbólico

Definição 3.19. *Uma tesselação regular no plano hiperbólico é uma partição deste plano em polígonos regulares isométricos não sobrepostos, todos congruentes, sujeitos a restrição de se interceptarem somente em suas arestas ou vértices, de modo a termos o mesmo número de polígonos partilhando um mesmo vértice, independente do vértice.*

Observação 3.20. *Se os polígonos de uma determinada tesselação de \mathbb{H}^2 contém p arestas, onde cada vértice é recoberto por q desses polígonos, então a tesselação será denotada por $\{p, q\}$. Em particular se temos que $p = q$, a tesselação será chamada de auto-dual.*

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico é menor do que π , então a tesselação regular existe, se e somente se,

$$\frac{2\pi}{p} + \frac{2\pi}{q} < \pi$$

ou seja,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}. \quad (3.2)$$

Desta segue que existem infinitas tesselações hiperbólicas regulares em \mathbb{H}^2 . Enquanto em \mathbb{R}^2 existem apenas 3 possíveis, que são $\{4, 4\}$, $\{3, 6\}$ e $\{6, 3\}$, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo no plano euclidiano é exatamente π . Vejamos alguns exemplos que foram retirados da referência [23].

Exemplo 3.21. *Na Figura 3.4 temos a tesselação hiperbólica auto-dual $\{8, 8\}$, com todos os polígonos com 8 lados e em cada vértice encontram-se 8 desses polígonos.*

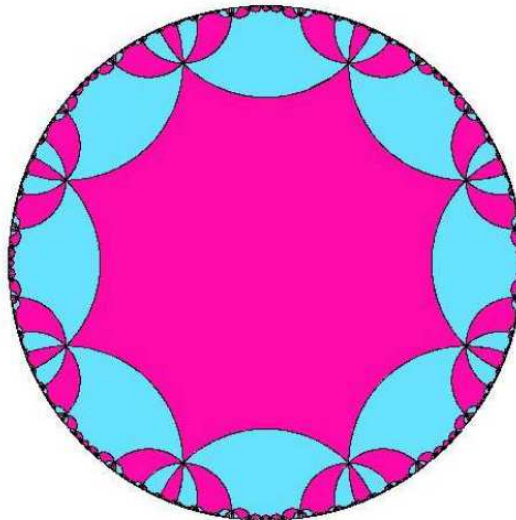


Figura 3.4: Tesselação hiperbólica $\{8, 8\}$ em \mathbb{D}^2 .

Exemplo 3.22. Na Figura 3.5 temos a tesselação hiperbólica $\{10, 5\}$, onde cada polígono possui 10 lados e em cada vértice encontram-se 5 desses polígonos.

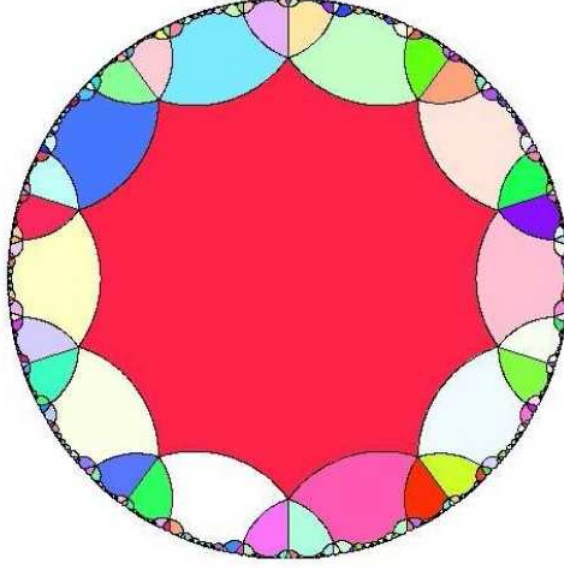


Figura 3.5: Tesselação hiperbólica $\{10, 5\}$ em \mathbb{D}^2 .

3.4 Emparelhamentos Generalizados $\{12\eta - 8, 4\}$ e $\{12\mu - 12, 4\}$

Nesta seção apresentaremos emparelhamentos de arestas generalizados para polígonos hiperbólicos com $12\eta - 8$ e $12\mu - 12$ arestas. Esses emparelhamentos foram construídos na referência [19] e estão relacionados a polígonos que são domínios fundamentais das tesselações hiperbólicas regulares do tipo $\{12\eta - 8, 4\}$ e $\{12\mu - 12, 4\}$. Tomamos estes emparelhamentos como base para construção de novos emparelhamentos que apresentaremos no próximo capítulo.

3.4.1 Emparelhamentos Generalizados $\{12\eta - 8, 4\}$

Seja $\mathcal{P}_{12\eta-8}$, com $\eta \geq 3$ ímpar, um polígono hiperbólico regular com $12\eta - 8$ arestas e com ângulos internos medindo $\pi/2$.

Observação 3.23. $\mathcal{P}_{12\eta-8}$ é possível de ser construído, além disso ele é convexo. De fato, somando todos os ângulos internos de cada vértice, temos

$$(12\eta - 8)\frac{\pi}{2} = (6\eta - 4)\pi < (12\eta - 10)\pi = [(12\eta - 8) - 2]\pi.$$

Pelo Teorema 1.37 $\mathcal{P}_{12\eta-8}$ existe. Além disso, esse polígono é convexo, pois todos os seus ângulos internos medem $\pi/2$ e $0 < \pi/2 < \pi$. Então, pelo Teorema 1.36 $\mathcal{P}_{12\eta-8}$ é convexo.

Para emparelhar as arestas desse polígono foi criada uma regra que identifica as arestas de $\mathcal{P}_{12\eta-8}$, denotada por $\mathfrak{R}_{\{12\eta-8, 4\}}$.

Seja $n = 12\eta - 8$ o número de arestas e $c = (12\eta - 8)/4$ o número de ciclos com 4 vértices a serem obtidos. Então, para $1 \leq i \leq c - 1$ e $j = 1, 2$, definiu-se as seguintes identificações de arestas:

$$\gamma_{\tau_{n-2}}(\tau_{n-2}) = \tau_n \quad \text{e} \quad \gamma_{\tau_c}(\tau_c) = \tau_{n-1}; \quad (3.3)$$

$$\gamma_{\tau_i}(\tau_i) = \tau_{(n-2)-3i}; \quad (3.4)$$

se i for ímpar, então

$$\gamma_{\tau_{(n-2)-3i-j}}(\tau_{(n-2)-3i-j}) = \tau_{(n-2)-3(i-1)-j}. \quad (3.5)$$

A regra $\mathfrak{R}_{\{12\eta-8, 4\}}$ nos fornece um emparelhamento, denotado por $\Phi_{12\eta-8}$. Obtendo assim, o seguinte teorema:

Teorema 3.24. *Seja $\mathcal{P}_{12\eta-8}$ um polígono hiperbólico regular com ângulos internos iguais a $\pi/2$ e $\Phi_{12\eta-8}$ o emparelhamento de arestas do polígono $\mathcal{P}_{12\eta-8}$ obtido pela regra $\mathfrak{R}_{\{12\eta-8, 4\}}$. Então, $\Phi_{12\eta-8}$ gera um grupo Fuchsiano $\Gamma_{12\eta-8}$ tal que $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma_{12\eta-8}}$ é uma superfície compacta orientável de gênero $g = \frac{3\eta - 1}{2}$.*

Demonstração: O emparelhamento $\Phi_{12\eta-8}$ que identifica as arestas do polígono hiperbólico regular $\mathcal{P}_{12\eta-8}$, obtido pela regra $\mathfrak{R}_{\{12\eta-8, 4\}}$, nos dá $c = \frac{12\eta - 8}{4} = 3\eta - 2$ ciclos de vértices. Observando o emparelhamento $\Phi_{12\eta-8}$ vemos que os ciclos de vértices são dados pela seguinte forma.

Para $1 \leq i \leq c - 1$ e $n = 12\eta - 8$ temos:
se i for ímpar, então

$$C_{V_i} = \{V_i, V_{n-1-3i}, V_{n-3(i+1)}, V_{n-2-3(i-1)}\}; \quad (3.6)$$

se i for par, então

$$C_{V_i} = \{V_i, V_{n-1-3i}, V_{n-3(i-1)}, V_{n-2-3(i-1)}\}; \quad (3.7)$$

$$\text{e } C_{V_c} = \{V_c, V_{c+1}, V_{n-1}, V_n\}. \quad (3.8)$$

Note que todos os ciclos são homogêneos com quatro vértices cada. Como cada vértice do polígono possui ângulo interno medindo $\pi/2$, então a soma dos ângulos de cada ciclo de vértices é igual a 2π .

Agora, como estamos usando apenas isometrias hiperbólicas e que $\mathcal{P}_{12\eta-8}$ possui finitas arestas, temos que as condições C_1^* e C_2 do Teorema 3.11 (Teorema de Poincaré) são satisfeitas, nos garantindo que $\Phi_{12\eta-8}$ gera um grupo Fuchsiano

$\Gamma_{12\eta-8}$ e $\mathcal{P}_{12\eta-8}$ é um domínio fundamental de $\Gamma_{12\eta-8}$. Além disso, como não estamos usando isometrias parabólicas e $\mathcal{P}_{12\eta-8}$ é um polígono com área finita (fechado e convexo) sem vértices ideais, então $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma_{12\eta-8}}$ é uma superfície compacta orientável.

Para obtermos o gênero usaremos a expressão (3.1), $V - A + F = 2 - 2g$ daí,

$$\frac{12\eta - 8}{4} - \frac{12\eta - 8}{2} + 1 = 2 - 2g. \text{ Logo, } g = \frac{3\eta - 1}{2}.$$

Assim, o emparelhamento $\Phi_{12\eta-8}$ nos dá uma superfície compacta orientável $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma_{12\eta-8}}$ de gênero $g = \frac{3\eta - 1}{2}$. ■

Vejam agora um exemplo construído na referência [19] para um polígono hiperbólico com 52 arestas.

Exemplo 3.25. ($\eta = 5$). *Seja \mathcal{P}_{52} um polígono hiperbólico em \mathbb{D}^2 com arestas τ_1, \dots, τ_{52} e vértices V_1, \dots, V_{52} . Então o emparelhamento Φ_{52} obtido pela regra $\mathfrak{R}_{\{12\eta-8, 4\}}$, gera uma superfície compacta orientável de gênero 7. De fato, para $\eta = 5$ então $n = 12 \times 5 - 8 = 52$ arestas e a quantidade de ciclos é $c = 52/4 = 13$. Então pelas expressões 3.3, 3.4 e 3.5 na regra de emparelhamento $\mathfrak{R}_{\{12\eta-8, 4\}}$ temos,*

$$\gamma_{\tau_{50}}(\tau_{50}) = \tau_{52} \quad e \quad \gamma_{\tau_{13}}(\tau_{13}) = \tau_{51}, \quad (3.3).$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\tau_1}(\tau_1) &= \tau_{47}, \quad \gamma_{\tau_2}(\tau_2) = \tau_{44}, \quad \gamma_{\tau_3}(\tau_3) = \tau_{41}, \quad \gamma_{\tau_4}(\tau_4) = \tau_{38}, \quad \gamma_{\tau_5}(\tau_5) = \tau_{35}, \\ \gamma_{\tau_6}(\tau_6) &= \tau_{32}, \quad \gamma_{\tau_7}(\tau_7) = \tau_{29}, \quad \gamma_{\tau_8}(\tau_8) = \tau_{26}, \quad \gamma_{\tau_9}(\tau_9) = \tau_{23}, \quad \gamma_{\tau_{10}}(\tau_{10}) = \tau_{20}, \\ \gamma_{\tau_{11}}(\tau_{11}) &= \tau_{17}, \quad \gamma_{\tau_{12}}(\tau_{12}) = \tau_{14}, \quad (3.4). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\tau_{15}}(\tau_{15}) &= \tau_{18}, \quad \gamma_{\tau_{16}}(\tau_{16}) = \tau_{19}, \quad \gamma_{\tau_{21}}(\tau_{21}) = \tau_{24}, \quad \gamma_{\tau_{22}}(\tau_{22}) = \tau_{25}, \\ \gamma_{\tau_{27}}(\tau_{27}) &= \tau_{30}, \quad \gamma_{\tau_{28}}(\tau_{28}) = \tau_{31}, \quad \gamma_{\tau_{33}}(\tau_{33}) = \tau_{36}, \quad \gamma_{\tau_{34}}(\tau_{34}) = \tau_{37}, \\ \gamma_{\tau_{39}}(\tau_{39}) &= \tau_{42}, \quad \gamma_{\tau_{40}}(\tau_{40}) = \tau_{43}, \quad \gamma_{\tau_{45}}(\tau_{45}) = \tau_{48}, \quad \gamma_{\tau_{46}}(\tau_{46}) = \tau_{49}, \quad (3.5). \end{aligned}$$

Logo, temos as seguintes identificações das arestas emparelhadas.

$$\begin{aligned} &\{\tau_1, \tau_{47}\}, \{\tau_2, \tau_{44}\}, \{\tau_3, \tau_{41}\}, \{\tau_4, \tau_{38}\}, \{\tau_5, \tau_{35}\}, \{\tau_6, \tau_{32}\}, \{\tau_7, \tau_{29}\}, \{\tau_8, \tau_{26}\}, \{\tau_9, \tau_{23}\} \\ &\{\tau_{10}, \tau_{20}\}, \{\tau_{11}, \tau_{17}\}, \{\tau_{12}, \tau_{14}\}, \{\tau_{13}, \tau_{51}\}, \{\tau_{15}, \tau_{18}\}, \{\tau_{16}, \tau_{19}\}, \{\tau_{21}, \tau_{24}\}, \{\tau_{22}, \tau_{25}\}, \\ &\{\tau_{27}, \tau_{30}\}, \{\tau_{28}, \tau_{31}\}, \{\tau_{33}, \tau_{36}\}, \{\tau_{34}, \tau_{37}\}, \{\tau_{39}, \tau_{42}\}, \{\tau_{40}, \tau_{43}\}, \{\tau_{45}, \tau_{48}\}, \{\tau_{46}, \tau_{49}\}, \\ &\{\tau_{50}, \tau_{52}\}. \end{aligned}$$

Veja o emparelhamento na Figura 3.6 .

Obtemos o emparelhamento Φ_{52} formado pelas identificações de arestas do polígono \mathcal{P}_{52} , obtidas pela regra $\mathfrak{R}_{\{12\eta-8, 4\}}$.

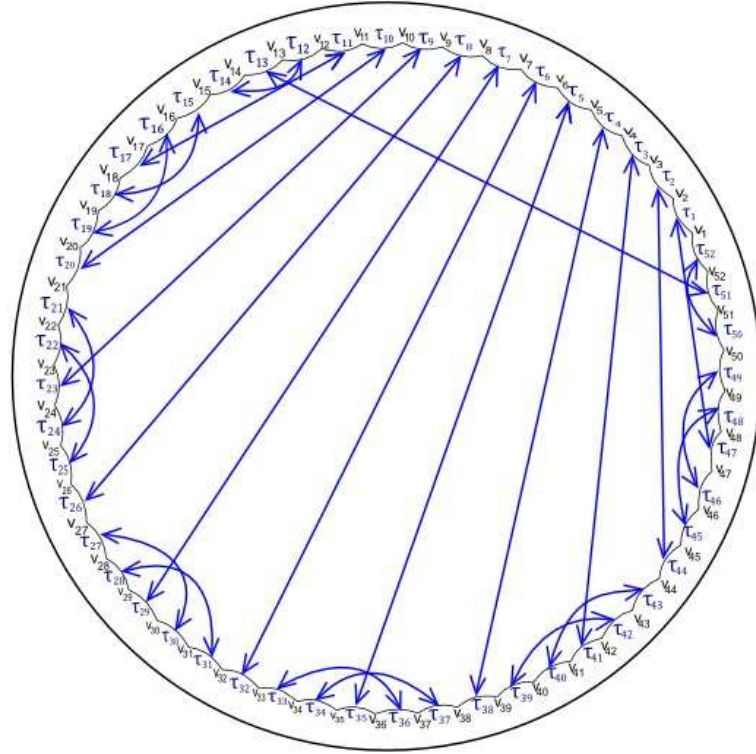


Figura 3.6: Polígono hiperbólico de 52 arestas com emparelhamento Φ_{52} .

Esse emparelhamento nos dá 13 ciclos, com 4 vértices cada, que são os seguintes:

$$\begin{aligned}
 C_{V_1} &= \{V_1, V_{48}, V_{46}, V_{50}\}, & C_{V_2} &= \{V_2, V_{47}, V_{49}, V_{45}\}, & C_{V_3} &= \{V_3, V_{44}, V_{40}, V_{42}\}, \\
 C_{V_4} &= \{V_4, V_{41}, V_{43}, V_{39}\}, & C_{V_5} &= \{V_5, V_{36}, V_{34}, V_{38}\}, & C_{V_6} &= \{V_6, V_{35}, V_{37}, V_{33}\}, \\
 C_{V_7} &= \{V_7, V_{32}, V_{28}, V_{30}\}, & C_{V_8} &= \{V_8, V_{29}, V_{31}, V_{27}\}, & C_{V_9} &= \{V_9, V_{24}, V_{22}, V_{26}\}, \\
 C_{V_{10}} &= \{V_{10}, V_{21}, V_{25}, V_{23}\}, & C_{V_{11}} &= \{V_{11}, V_{18}, V_{16}, V_{20}\}, & C_{V_{12}} &= \{V_{12}, V_{15}, V_{19}, V_{17}\}, \\
 & & & & & e C_{V_{13}} = \{V_{13}, V_{52}, V_{51}, V_{14}\}.
 \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema 3.24, o emparelhamento Φ_{52} gera uma superfície compacta orientável e como $\eta = 5$, seu gênero é dado por,

$$g = \frac{3 \times 5 - 1}{2} = 7.$$

Ou seja, $g = 7$ é o gênero da superfície obtida.

3.4.2 Emparelhamentos Generalizados $\{12\mu - 12, 4\}$

Seja $\mathcal{P}_{12\mu-12}$, com $\mu \geq 2$ par, um polígono hiperbólico regular com $12\mu - 12$ arestas e com ângulos internos medindo $\pi/2$.

Observação 3.26. $\mathcal{P}_{12\mu-12}$ é possível de ser construído, além disso ele é convexo. De fato, se somarmos todos os seus ângulos internos, temos

$$(12\mu - 12)\pi/2 = (6\mu - 6)\pi < (12\mu - 14)\pi = [(12\mu - 12) - 2]\pi.$$

Logo, pelo Teorema 1.37 $\mathcal{P}_{12\mu-12}$ existe, também temos que esse polígono é convexo, pois todos os seus ângulos internos medem $\pi/2$ e $0 < \pi/2 < \pi$. Assim, pelo Teorema 1.36, $\mathcal{P}_{12\mu-12}$ é convexo.

Para emparelhar as arestas do polígono $\mathcal{P}_{12\mu-12}$, com $12\eta - 8$ arestas, construiu-se uma regra de emparelhamento utilizando identificações de arestas análogas às que vimos para o polígono com $12\eta - 8$ arestas. Regra denotada por $\mathfrak{R}_{\{12\mu-12, 4\}}$.

Seja $n = 12\mu - 12$ o número de arestas e $c = (12\mu - 12)/4$ o número de ciclos com 4 vértices a serem obtidos. Então, para $1 \leq i \leq c - 1$ e $j = 1, 2$, definiu-se identificações de arestas análogas as expressões (3.3), (3.4) e (3.5), vistas anteriormente na regra $\mathfrak{R}_{\{12\eta-8, 4\}}$.

A regra $\mathfrak{R}_{\{12\mu-12, 4\}}$ nos fornece um emparelhamento, denotado por $\Phi_{12\mu-12}$, obtendo assim, o seguinte teorema:

Teorema 3.27. *Seja $\mathcal{P}_{12\mu-12}$ um polígono hiperbólico regular com ângulos internos iguais a $\pi/2$ e $\Phi_{12\mu-12}$ o emparelhamento de arestas do polígono $\mathcal{P}_{12\mu-12}$ obtido pela regra $\mathfrak{R}_{\{12\mu-12, 4\}}$. Então, $\Phi_{12\mu-12}$ gera um grupo Fuchsiano $\Gamma_{12\mu-12}$ tal que $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma_{12\mu-12}}$ é uma superfície compacta orientável de gênero $g = \frac{3\mu - 2}{2}$.*

Demonstração: A demonstração é similar à feita no Teorema 3.24 com generalização dos ciclos análogas as expressões (3.6), (3.7) e (3.8). Para calcular o gênero g usamos a expressão (3.1), assim obtemos

$$\frac{12\mu - 12}{4} - \frac{12\mu - 12}{2} + 1 = 2 - 2g. \text{ Logo, } g = \frac{3\mu - 2}{2}.$$

■

Vejamos um exemplo construído para $\mu = 4$, ou seja, um polígono com 36 arestas.

Exemplo 3.28. ($\mu = 4$). *Seja \mathcal{P}_{36} um polígono hiperbólico em \mathbb{D}^2 com as arestas τ_1, \dots, τ_{36} e vértices V_1, \dots, V_{36} . Então o emparelhamento Φ_{36} gera uma superfície compacta orientável de gênero 5. De fato, se $\mu = 4$ temos $n = 12 \times 4 - 12 = 36$ arestas e a quantidade de ciclos é $C = 36/4 = 9$. Pela as expressões 3.3, 3.4 e 3.5 na regra de emparelhamentos $\mathfrak{R}_{\{12\mu-12, 4\}}$ temos,*

$$\gamma_{\tau_{34}}(\tau_{34}) = \tau_{36} \text{ e } \gamma_{\tau_9}(\tau_9) = \tau_{35}, \text{ (3.3).}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\tau_1}(\tau_1) = \tau_{31}, \quad \gamma_{\tau_2}(\tau_2) = \tau_{28}, \quad \gamma_{\tau_3}(\tau_3) = \tau_{25}, \quad \gamma_{\tau_4}(\tau_4) = \tau_{22}, \\ \gamma_{\tau_5}(\tau_5) = \tau_{19}, \quad \gamma_{\tau_6}(\tau_6) = \tau_{16}, \quad \gamma_{\tau_7}(\tau_7) = \tau_{13}, \quad \gamma_{\tau_8}(\tau_8) = \tau_{10}, \end{aligned} \quad (3.4).$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\tau_{11}}(\tau_{11}) = \tau_{14}, \quad \gamma_{\tau_{12}}(\tau_{12}) = \tau_{15}, \quad \gamma_{\tau_{17}}(\tau_{17}) = \tau_{20}, \quad \gamma_{\tau_{18}}(\tau_{18}) = \tau_{21}, \\ \gamma_{\tau_{23}}(\tau_{23}) = \tau_{26}, \quad \gamma_{\tau_{24}}(\tau_{24}) = \tau_{27}, \quad \gamma_{\tau_{29}}(\tau_{29}) = \tau_{32}, \quad \gamma_{\tau_{30}}(\tau_{30}) = \tau_{33}, \end{aligned} \quad (3.5).$$

Logo, temos as seguintes identificações das arestas emparelhadas.

$$\begin{aligned} \{\tau_1, \tau_{31}\}, \{\tau_2, \tau_{28}\}, \{\tau_3, \tau_{25}\}, \{\tau_4, \tau_{22}\}, \{\tau_5, \tau_{19}\}, \{\tau_6, \tau_{16}\}, \{\tau_7, \tau_{13}\}, \{\tau_8, \tau_{10}\}, \{\tau_9, \tau_{35}\} \\ \{\tau_{11}, \tau_{14}\}, \{\tau_{12}, \tau_{15}\}, \{\tau_{17}, \tau_{20}\}, \{\tau_{18}, \tau_{21}\}, \{\tau_{23}, \tau_{26}\}, \{\tau_{24}, \tau_{27}\}, \{\tau_{29}, \tau_{32}\}, \{\tau_{30}, \tau_{33}\}, \\ \{\tau_{34}, \tau_{36}\}. \end{aligned}$$

Veja o emparelhamento na Figura 3.7 .

Obtemos o emparelhamento Φ_{36} formado pelas identificações de arestas do polí-

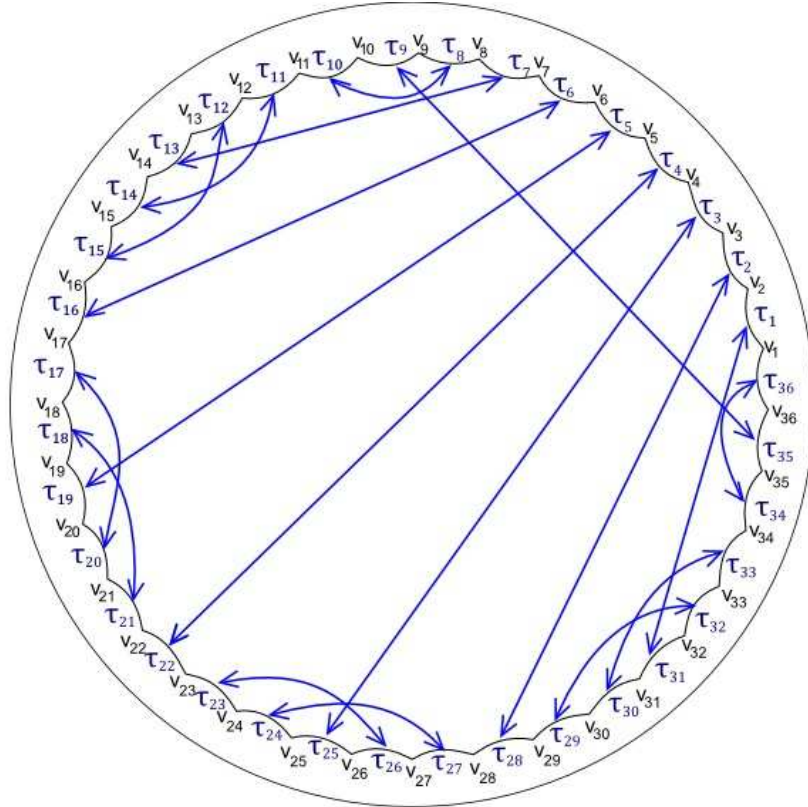


Figura 3.7: Polígono hiperbólico com 36 arestas e emparelhamento Φ_{36} .

gono \mathcal{P}_{36} , que foram obtidas pela regra $\mathfrak{R}_{\{12\mu-12, 4\}}$.

Esse emparelhamento nos dá 9 ciclos com 4 vértices cada, que são os seguintes:

$$\begin{aligned} C_{V_1} = \{V_1, V_{32}, V_{30}, V_{34}\}, \quad C_{V_2} = \{V_2, V_{31}, V_{33}, V_{29}\}, \quad C_{V_3} = \{V_3, V_{28}, V_{24}, V_{26}\}, \\ C_{V_4} = \{V_4, V_{25}, V_{27}, V_{23}\}, \quad C_{V_5} = \{V_5, V_{22}, V_{18}, V_{20}\}, \quad C_{V_6} = \{V_6, V_{19}, V_{21}, V_{17}\}, \end{aligned}$$

$$C_{V_7} = \{V_7, V_{16}, V_{12}, V_{14}\}, C_{V_8} = \{V_8, V_{13}, V_{15}, V_{11}\}, C_{V_9} = \{V_9, V_{10}, V_{35}, V_{36}\},$$

Assim, pelo Teorema 3.27, o emparelhamento Φ_{36} gera uma superfície compacta orientável e como $\eta = 5$, seu gênero é dado por,

$$g = \frac{3 \times 4 - 2}{2} = 5.$$

Ou seja, $g = 5$ é o gênero da superfície obtida.

3.5 Emparelhamento do Polígono \mathcal{P}_{8g-4}

O próximo emparelhamento é construído sobre o polígono hiperbólico com $8g - 4$ arestas, apresentado na referência [5]. Esse emparelhamento é importante para o desenvolvimento do trabalho, pois o estudo dos próximos emparelhamentos que apresentaremos no Capítulo 4, é sobre as arestas desses polígonos.

Seja \mathcal{P}_{8g-4} um polígono hiperbólico com $8g - 4$ arestas e ângulos internos medindo $\pi/2$. Sejam $\tau_1, \dots, \tau_{8g-4}$ as arestas consecutivas de \mathcal{P} orientadas no sentido anti-horário. Seja $\sigma(i)$ uma permutação de ordem 2 com i variando de $1, \dots, 8g-4$, definida da seguinte maneira

$$\sigma(i) \equiv \begin{cases} 4g - i \text{ mod}(8g - 4), & \text{se } i \text{ for ímpar;} \\ 2 - i \text{ mod}(8g - 4), & \text{se } i \text{ for par.} \end{cases}$$

Seja τ_i^{-1} a mesma aresta τ_i , porém com orientação oposta. Então, definimos as identificações das aresta emparelhadas como sendo $T_{\tau_i}(\tau_i) = \tau_{\sigma(i)}^{-1}$. Denotaremos essa regra de identificação das arestas por $\mathfrak{A}_{\{8g-4,4\}}^1$ e o emparelhamento por Φ_{8g-4}^1 .

Esse emparelhamento nos fornece ciclos de vértices com 4 vértices e está relacionado à tesselação regular $\{8g - 4, 4\}$, pois têm como domínio fundamental o polígono hiperbólico \mathcal{P}_{8g-4} .

Vejamos os emparelhamentos para $g=2$ e $g=3$.

1) Quando $g = 2$, temos

$$\sigma(i) = \begin{cases} 8 - i \text{ mod}(12), & \text{se } i \text{ for ímpar;} \\ 2 - i \text{ mod}(12), & \text{se } i \text{ for par.} \end{cases}$$

Então,

$$\sigma(1) \equiv 7 \text{ mod}(12) \Rightarrow \sigma(1) = 7$$

$$\begin{aligned}
\sigma(2) &\equiv 0 \pmod{12} \Rightarrow \sigma(2) = 12 \\
\sigma(3) &\equiv 5 \pmod{12} \Rightarrow \sigma(3) = 5 \\
\sigma(4) &\equiv -2 \pmod{12} = 10 \pmod{12} \Rightarrow \sigma(4) = 10 \\
\sigma(5) &\equiv 3 \pmod{12} \Rightarrow \sigma(5) = 3 \\
\sigma(6) &\equiv -4 \pmod{12} = 8 \pmod{12} \Rightarrow \sigma(6) = 8 \\
\sigma(7) &\equiv 1 \pmod{12} \Rightarrow \sigma(7) = 1 \\
\sigma(8) &\equiv -6 \pmod{12} = 6 \pmod{12} \Rightarrow \sigma(8) = 6 \\
\sigma(9) &\equiv -1 \pmod{12} = 11 \pmod{12} \Rightarrow \sigma(9) = 11 \\
\sigma(10) &\equiv -8 \pmod{12} = 4 \pmod{12} \Rightarrow \sigma(10) = 4 \\
\sigma(11) &\equiv -3 \pmod{12} = 9 \pmod{12} \Rightarrow \sigma(11) = 9 \\
\sigma(12) &\equiv -10 \pmod{12} = 2 \pmod{12} \Rightarrow \sigma(12) = 2.
\end{aligned}$$

Logo, temos as arestas emparelhadas,

$$\begin{aligned}
T_{\tau_1}(\tau_1) &= \tau_7^{-1} \text{ e } T_{\tau_7}(\tau_7) = \tau_1^{-1}, \\
T_{\tau_2}(\tau_2) &= \tau_{12}^{-1} \text{ e } T_{\tau_{12}}(\tau_{12}) = \tau_2^{-1}, \\
T_{\tau_3}(\tau_3) &= \tau_5^{-1} \text{ e } T_{\tau_5}(\tau_5) = \tau_3^{-1}, \\
T_{\tau_4}(\tau_4) &= \tau_{10}^{-1} \text{ e } T_{\tau_{10}}(\tau_{10}) = \tau_4^{-1}, \\
T_{\tau_6}(\tau_6) &= \tau_8^{-1} \text{ e } T_{\tau_8}(\tau_8) = \tau_6^{-1}, \\
T_{\tau_9}(\tau_9) &= \tau_{11}^{-1} \text{ e } T_{\tau_{11}}(\tau_{11}) = \tau_9^{-1}.
\end{aligned}$$

Veja o emparelhamento representado na Figura 3.8.

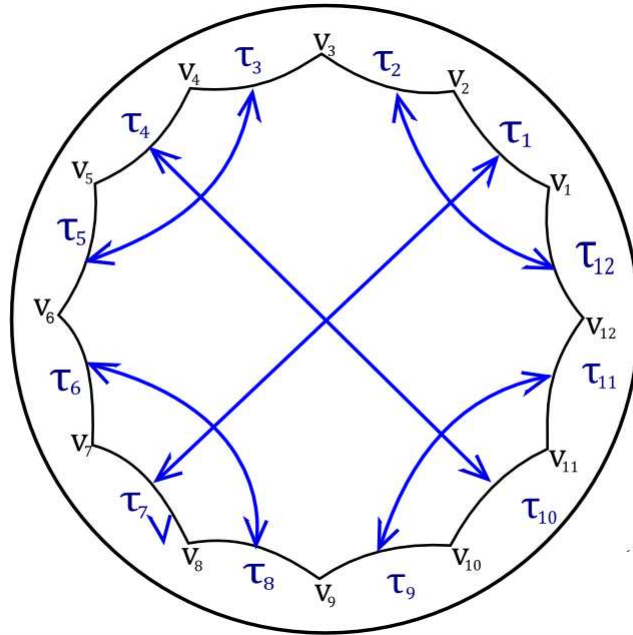


Figura 3.8: Emparelhamento Φ_{12}^1 , para $g=2$.

Os ciclos de vértices são

$$C_1 = \{V_1, V_2, V_7, V_8\}, \quad C_2 = \{V_3, V_6, V_9, V_{12}\} \text{ e } C_3 = \{V_4, V_5, V_{10}, V_{11}\}.$$

2) Quando $g=3$, temos

$$\sigma(i) \equiv \begin{cases} 12 - i \pmod{20}, & \text{se } i \text{ for ímpar;} \\ 2 - i \pmod{20}, & \text{se } i \text{ for par.} \end{cases}$$

Então,

$$\sigma(1) \equiv 11 \pmod{20} \Rightarrow \sigma(1) = 11$$

$$\sigma(2) \equiv 0 \pmod{20} \Rightarrow \sigma(2) = 20$$

$$\sigma(3) \equiv 9 \pmod{20} \Rightarrow \sigma(3) = 9$$

$$\sigma(4) \equiv -2 \pmod{20} = 18 \pmod{12} \Rightarrow \sigma(4) = 18$$

$$\sigma(5) \equiv 7 \pmod{20} \Rightarrow \sigma(5) = 7$$

$$\sigma(6) \equiv -4 \pmod{20} = 16 \pmod{12} \Rightarrow \sigma(6) = 16$$

$$\sigma(7) \equiv 5 \pmod{20} \Rightarrow \sigma(7) = 5$$

$$\sigma(8) \equiv -6 \pmod{20} = 14 \pmod{12} \Rightarrow \sigma(8) = 14$$

$$\sigma(9) \equiv 3 \pmod{20} \Rightarrow \sigma(9) = 3$$

$$\sigma(10) \equiv -8 \pmod{20} \Rightarrow \sigma(10) = 12$$

$$\sigma(11) \equiv 1 \pmod{12} \Rightarrow \sigma(11) = 1$$

$$\sigma(12) \equiv -10 \pmod{12} = 10 \pmod{12} \Rightarrow \sigma(12) = 10.$$

$$\sigma(13) \equiv -1 \pmod{20} = 19 \pmod{20} \Rightarrow \sigma(13) = 19$$

$$\sigma(14) \equiv -12 \pmod{20} = 8 \pmod{12} \Rightarrow \sigma(14) = 8$$

$$\sigma(15) \equiv -3 \pmod{20} = 17 \pmod{20} \Rightarrow \sigma(15) = 17$$

$$\sigma(16) \equiv -14 \pmod{20} = 6 \pmod{20} \Rightarrow \sigma(16) = 6$$

$$\sigma(17) \equiv -5 \pmod{12} = 15 \pmod{20} \Rightarrow \sigma(17) = 1$$

$$\sigma(18) \equiv -16 \pmod{12} = 4 \pmod{12} \Rightarrow \sigma(18) = 4.$$

$$\sigma(19) \equiv -7 \pmod{12} = 13 \pmod{20} \Rightarrow \sigma(19) = 13$$

$\sigma(20) \equiv -18 \pmod{12} = 2 \pmod{12} \Rightarrow \sigma(20) = 2$. Logo, temos as arestas emparelhadas,

$$\begin{aligned} T_{\tau_1}(\tau_1) &= \tau_{11}^{-1} \text{ e } T_{\tau_{11}}(\tau_{11}) = \tau_1^{-1}, \\ T_{\tau_2}(\tau_2) &= \tau_{20}^{-1} \text{ e } T_{\tau_{20}}(\tau_{20}) = \tau_2^{-1}, \\ T_{\tau_3}(\tau_3) &= \tau_9^{-1} \text{ e } T_{\tau_9}(\tau_9) = \tau_3^{-1}, \\ T_{\tau_4}(\tau_4) &= \tau_{18}^{-1} \text{ e } T_{\tau_{18}}(\tau_{18}) = \tau_4^{-1}, \\ T_{\tau_5}(\tau_5) &= \tau_7^{-1} \text{ e } T_{\tau_7}(\tau_7) = \tau_5^{-1}, \\ T_{\tau_6}(\tau_6) &= \tau_{16}^{-1} \text{ e } T_{\tau_{16}}(\tau_{16}) = \tau_6^{-1}, \\ T_{\tau_8}(\tau_8) &= \tau_{14}^{-1} \text{ e } T_{\tau_{14}}(\tau_{14}) = \tau_8^{-1}. \\ T_{\tau_{10}}(\tau_{10}) &= \tau_{12}^{-1} \text{ e } T_{\tau_{12}}(\tau_{12}) = \tau_{10}^{-1}, \\ T_{\tau_{13}}(\tau_{13}) &= \tau_{19}^{-1} \text{ e } T_{\tau_{19}}(\tau_{19}) = \tau_{13}^{-1}, \\ T_{\tau_{15}}(\tau_{15}) &= \tau_{17}^{-1} \text{ e } T_{\tau_{17}}(\tau_{17}) = \tau_{15}^{-1}. \end{aligned}$$

Veja o emparelhamento representado na Figura 3.9.

Os ciclos de vértices são

$$C_1 = \{V_1, V_2, V_{11}, V_{12}\}, C_2 = \{V_3, V_{10}, V_{13}, V_{17}\}, C_3 = \{V_4, V_5, V_{14}, V_{18}\},$$

$$C_4 = \{V_5, V_8, V_{15}, V_{17}\} \text{ e } C_5 = \{V_6, V_7, V_{16}, V_{17}\}.$$

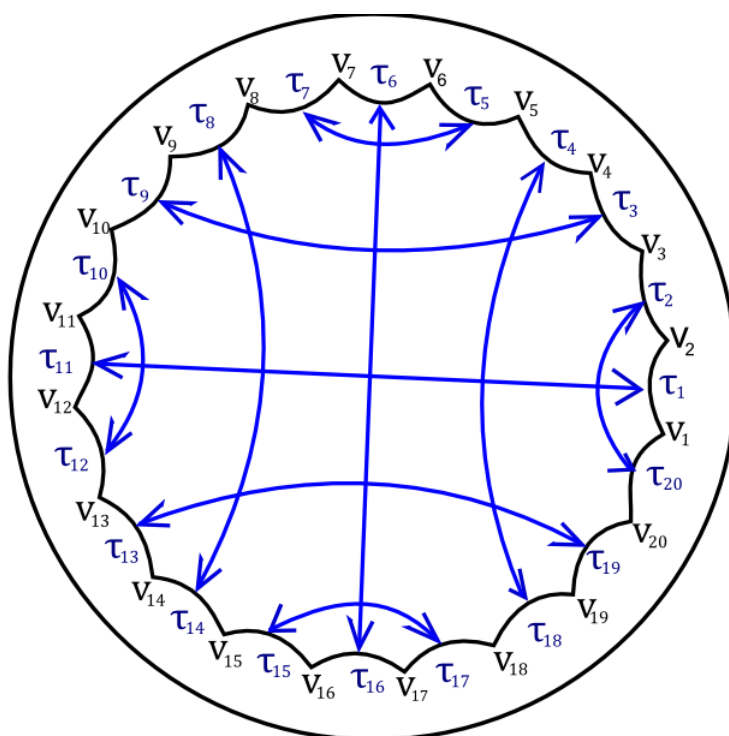


Figura 3.9: Emparelhamento Φ_{20}^1 para $g=3$.

Capítulo 4

Emparelhamentos de Arestas Construídos

Os emparelhamentos de arestas de polígonos hiperbólicos tem relevância na construção de reticulados hiperbólicos [21]. O interesse pela teoria dos reticulados é devido também ao fato de ser uma ferramenta para o problema de empacotamentos de esferas que auxilia na construção de boas constelações de sinais ou códigos ótimos. Isto nos motiva ao estudo de emparelhamentos de arestas de polígonos hiperbólicos associados à tesselação $\{p, q\}$, em que tais tesselações fornecem empacotamentos de esferas com densidade máxima [6] e portanto, estão relacionadas com a construção de códigos ótimos cuja a probabilidade de erro é mínima.

Neste capítulo apresentaremos os emparelhamentos que construímos para o polígono hiperbólico \mathcal{P}_{8g-4} . Estudamos os emparelhamentos associados às tesselações $\{12\eta - 8, 4\}$ e $\{12\mu - 12, 4\}$, o emparelhamento associado à tesselação $\{8g - 4, 4\}$ do Capítulo 3 na Seção 3.4, e construímos um emparelhamento generalizado associado à tesselação $\{12\beta - 16, 4\}$ e novos emparelhamentos generalizados associados à tesselação $\{8g - 4, 4\}$ de forma que g seja o gênero da superfície obtida pelo quociente do plano hiperbólico pelo grupo gerado por isometrias dos emparelhamentos.

O problema de empacotamento de esferas tem como principal objetivo a busca pela maior densidade possível de empacotamento. Em [24], Toth apresentou o limitante máximo para a densidade de empacotamento no plano hiperbólico. Segundo ele, a densidade de empacotamento é limitada superiormente por $\frac{3}{\pi}$. Em [6] foram feitos estudos assintóticos para reticulados do tipo $\{p, q\}$. Demonstrou-se que assintoticamente, a densidade de empacotamento não atinge o valor $\frac{3}{\pi}$. Assintoticamente no sentido de p e q tenderem a infinito, onde p e q determinam um ladrilhamento $\{p, q\}$. Porém, temos que $\frac{3}{\pi}$ é atingido em empacotamentos por horobolas $\{\infty, 3\}$.

A relevância de tais resultados para empacotamento de esferas, está no fato que em reticulados hiperbólicos dos tipos $\{12\eta - 8, 4\}$ e $\{12\mu - 12, 4\}$ temos empacotamentos com densidades próximas ao empacotamento ótimo em relação à densidade de empacotamento no plano hiperbólico, ([19], com 0,89868 o maior

valor apresentado para densidade de empacotamento, quando $\eta = 21$ e $g = 31$). Daí, nosso interesse em explorar os emparelhamentos de arestas de polígonos hiperbólicos associados a tesselações, em particular os polígonos com $8g - 4$ arestas com $g \geq 2$, pois as tesselações $\{12\eta - 8, 4\}$ e $\{12\mu - 12, 4\}$ são casos particulares da tesselação $\{8g - 4, 4\}$.

Dividimos este capítulo em quatro seções, onde construímos novos emparelhamentos para os polígonos hiperbólicos com $8g - 4$ arestas, com $g \geq 2$ natural. Estamos supondo que as arestas emparelhadas, em cada emparelhamento construído, possuem orientação oposta uma da outra.

4.1 Emparelhamento Generalizado $\{12\beta - 16, 4\}$

Nesta seção, começaremos construindo um emparelhamento das arestas de um polígono hiperbólico $\mathcal{P}_{12\beta-16}$, com $12\beta - 16$ arestas, associado a tesselação $\{12\beta - 16, 4\}$. Antes falaremos um pouco da tesselação $\{8g - 4, 4\}$.

Na tesselação hiperbólica $\{8g - 4, 4\}$ para $g \geq 2$ natural, na tabela abaixo, a medida que g cresce obtemos às seguintes tesselações e os polígonos fundamentais associados, com $8g - 4$ arestas.

g	Tesselação $\{8g - 4, 4\}$	Domínio Fundamental \mathcal{P}_{8g-4}	Tipo
2	$\{12, 4\}$	\mathcal{P}_{12}	A
3	$\{20, 4\}$	\mathcal{P}_{20}	B
4	$\{28, 4\}$	\mathcal{P}_{28}	C
5	$\{36, 4\}$	\mathcal{P}_{36}	A
6	$\{44, 4\}$	\mathcal{P}_{44}	B
7	$\{52, 4\}$	\mathcal{P}_{52}	C
8	$\{60, 4\}$	\mathcal{P}_{60}	A
9	$\{68, 4\}$	\mathcal{P}_{68}	B
10	$\{76, 4\}$	\mathcal{P}_{76}	C
11	$\{84, 4\}$	\mathcal{P}_{84}	A
12	$\{92, 4\}$	\mathcal{P}_{92}	B
13	$\{100, 4\}$	\mathcal{P}_{100}	C

Note que as tesselações que marcamos como (A) são tesselações obtidas pela tesselação $\{12\mu - 12, 4\}$, com $\mu \geq 2$ par. As tesselações que foram marcadas por (C) são tesselações obtidas pela tesselação $\{12\eta - 8, 4\}$, com $\eta \geq 3$ ímpar. Estas possuem como domínio fundamental os polígonos hiperbólicos $\mathcal{P}_{12\mu-12}$, com $12\mu - 12$ arestas e $\mathcal{P}_{12\eta-8}$, com $12\eta - 8$ arestas, respectivamente, [19]. Com esses polígonos, foram obtidos emparelhamentos das arestas pelas regras de emparelhamento $\mathfrak{R}_{\{12\mu-12, 4\}}$ e $\mathfrak{R}_{\{12\eta-8, 4\}}$. Agora, as que marcamos com (B) serão obtidas pela tesselação $\{12\beta - 16, 4\}$.

Assim, seja $\mathcal{P}_{12\beta-16}$, com $\beta \geq 3$ ímpar, um polígono hiperbólico com ângulos internos todos medindo $\pi/2$.

Observação 4.1. $\mathcal{P}_{12\beta-16}$ existe e é convexo. De fato, como estamos supondo que todos os ângulos internos de cada vértice é $\pi/2$. Então, somando todos os seus ângulos internos, temos

$$(12\beta - 16)\pi/2 = (6\beta - 8)\pi < (12\beta - 18)\pi = [(12\beta - 16) - 2]\pi$$

satisfazendo o Teorema 1.37. Além disso, é convexo, pois temos que todos os seus ângulos internos medem $\pi/2$ e $0 < \pi/2 < \pi$. Assim, pelo teorema 1.36 $\mathcal{P}_{12\beta-16}$ é convexo.

Para mostrarmos que a tesselação $\{12\beta - 16, 4\}$, com $\beta \geq 3$, de fato existe, usaremos a expressão (3.2) do capítulo anterior, notemos que, como $\beta \geq 3$ ímpar, segue que, $12\beta - 16 \geq 20$ e daí temos, $\frac{1}{12\beta - 16} \leq \frac{1}{20}$. Somando $1/4$ em ambos os lados da desigualdade, obtemos

$$\frac{1}{12\beta - 16} + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{20} + \frac{1}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} < \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\frac{1}{12\beta - 16} + \frac{1}{4} < \frac{1}{2}.$$

Para emparelharmos as arestas de $\mathcal{P}_{12\beta-16}$, utilizaremos a seguinte regra que denotaremos por $\mathfrak{R}_{\{12\beta-16, 4\}}$:

Seja $n = 12\beta - 16$ o número de arestas e $c = (12\beta - 16)/4$ (número de ciclos, com 4 vértices, a ser obtido). Então, para $1 \leq i \leq c - 1$ e $j = 1, 2$, definimos as seguintes identificações de arestas:

$$\gamma_{\tau_{n-2}}(\tau_{n-2}) = \tau_n \quad \text{e} \quad \gamma_{\tau_c}(\tau_c) = \tau_{n-1}; \quad (4.1)$$

$$\gamma_{\tau_i}(\tau_i) = \tau_{(n-2)-3i}; \quad (4.2)$$

se i for ímpar então

$$\gamma_{\tau_{(n-2)-3i-j}}(\tau_{(n-2)-3i-j}) = \tau_{(n-2)-3(i-1)-j}; \quad (4.3)$$

Logo a regra $\mathfrak{R}_{\{12\beta-16, 4\}}$, nos fornece um emparelhamento de arestas do polígono $\mathcal{P}_{12\beta-16}$ que denotaremos por $\Phi_{12\beta-16}$. Aqui, podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 4.2. *Seja $\mathcal{P}_{12\beta-16}$ um polígono hiperbólico regular com ângulos internos iguais a $\pi/2$ e $\Phi_{12\beta-16}$ o emparelhamento de arestas do polígono $\mathcal{P}_{12\beta-16}$ obtido pela regra $\mathfrak{R}_{\{12\beta-16, 4\}}$. Então, $\Phi_{12\beta-16}$ gera um grupo Fuchsiano $\Gamma_{12\beta-16}$ tal que $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma_{12\beta-16}}$ é uma superfície compacta orientável de gênero $g = \frac{3\beta - 3}{2}$.*

Demonstração: O emparelhamento $\Phi_{12\beta-16}$ que identifica as arestas do polígono hiperbólico regular $\mathcal{P}_{12\beta-16}$, obtido pela regra $\mathfrak{R}_{\{12\beta-16, 4\}}$ nos dá $c =$

$\frac{12\beta - 16}{4} = 3\beta - 4$ ciclos de vértices.

Observando o emparelhamento $\Phi_{12\beta-16}$ vemos que os ciclos de vértices são dados da seguinte forma:

Para $1 \leq i \leq c - 1$ e $n = 12\eta - 8$ temos:

se i for ímpar, então

$$C_{V_i} = \{V_i, V_{n-1-3i}, V_{n-3(i+1)}, V_{n-2-3(i-1)}\}; \quad (4.4)$$

se i for par, então

$$C_{V_i} = \{V_i, V_{n-1-3i}, V_{n-3(i-1)}, V_{n-2-3(i-1)}\}; \quad (4.5)$$

e

$$C_{V_c} = \{V_c, V_{c+1}, V_{n-1}, V_n\}. \quad (4.6)$$

Temos ciclos com 4 vértices cada e como cada ângulo em um vértice é igual a $\pi/2$ a soma dos ângulos dos vértices de cada ciclo é igual a 2π . Agora, como estamos usando apenas isometrias hiperbólicas e $\mathcal{P}_{12\beta-16}$ possui finitas arestas, as condições \mathbf{C}_1^* e \mathbf{C}_2 do Teorema 3.11 (Teorema de Poincaré) são satisfeitas, nos garantindo que $\Phi_{12\beta-16}$ gera um grupo Fuchsiano $\Gamma_{12\beta-16}$ e $\mathcal{P}_{12\beta-16}$ é um domínio fundamental de $\Gamma_{12\beta-16}$. Além disso, como não estamos usando isometrias parabólicas e $\mathcal{P}_{12\beta-16}$ é um polígono com área finita (fechado e convexo) sem vértices ideais, então $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma_{12\beta-16}}$ é uma superfície compacta orientável.

Ainda, temos pela expressão (3.1), $V - A + F = 2 - 2g$ e desta equação segue que,

$$\frac{12\beta - 16}{4} - \frac{12\beta - 16}{2} + 1 = 2 - 2g.$$

Logo, $3\beta - 4 - 6\beta + 8 + 1 = 2 - 2g$, ou seja, $-3\beta + 3 = -2g$ e portanto obtemos,

$$g = \frac{3\beta - 3}{2}. \quad (4.7)$$

Assim, o emparelhamento $\Phi_{12\beta-16}$ nos dá uma superfície compacta orientável $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma_{12\beta-16}}$ de gênero $g = \frac{3\beta - 3}{2}$. ■

Vejamos alguns exemplos que construímos para quando $\beta = 3$ e $\beta = 5$, ou seja, para os polígonos com 20 e 44 arestas.

Exemplo 4.3. ($\beta = 3$). Seja \mathcal{P}_{20} um polígono hiperbólico em \mathbb{D}^2 com as arestas τ_1, \dots, τ_{20} e vértices V_1, \dots, V_{20} . Então o emparelhamento Φ_{36} , gera uma superfície compacta orientável de gênero 3. De fato, se $\beta = 3$, temos $n = 12 \times 3 - 16 = 20$ arestas e a quantidade de ciclos é $c = 20/4 = 5$. Então pelas expressões 4.1, 4.2 e 4.3 da regra de emparelhamento $\mathfrak{R}_{\{12\beta-16,4\}}$, temos

$$\gamma_{\tau_{18}}(\tau_{18}) = \tau_{20} \quad e \quad \gamma_{\tau_5}(\tau_5) = \tau_{19} \quad (4.1)$$

$$\gamma_{\tau_1}(\tau_1) = \tau_{15}, \quad \gamma_{\tau_2}(\tau_2) = \tau_{12}, \quad \gamma_{\tau_3}(\tau_3) = \tau_9, \quad \gamma_{\tau_4}(\tau_4) = \tau_6, \quad \gamma_{\tau_{14}}(\tau_{14}) = \tau_{17}, \quad (4.2)$$

$$\gamma_{\tau_{13}}(\tau_{13}) = \tau_{16}, \quad \gamma_{\tau_8}(\tau_8) = \tau_{11}, \quad \gamma_{\tau_7}(\tau_7) = \tau_{10}, \quad (4.3).$$

Dai, os seguintes pares de arestas emparelhadas:

$\{\tau_1, \tau_{15}\}, \{\tau_2, \tau_{12}\}, \{\tau_3, \tau_9\}, \{\tau_4, \tau_6\}, \{\tau_5, \tau_{19}\}, \{\tau_7, \tau_{10}\}, \{\tau_8, \tau_{11}\}, \{\tau_{13}, \tau_{16}\}, \{\tau_{14}, \tau_{17}\},$
 $\{\tau_{18}, \tau_{20}\}$. (Figura 4.1).

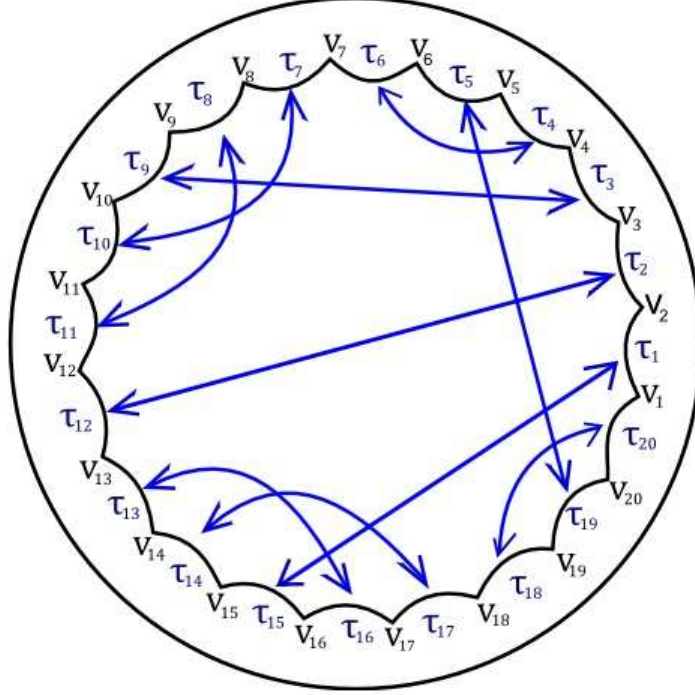


Figura 4.1: Polígono hiperbólico de 20 arestas com emparelhamento Φ_{20} .

Assim, temos o emparelhamento

$$\Phi_{20} = \{\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}, \gamma_{\tau_3}, \gamma_{\tau_4}, \gamma_{\tau_5}, \gamma_{\tau_7}, \gamma_{\tau_8}, \gamma_{\tau_{13}}, \gamma_{\tau_{14}}, \gamma_{\tau_{18}}\},$$

formado pelas identificações de arestas do polígono \mathcal{P}_{20} , que foram obtidas pela regra $\mathfrak{R}_{\{12\beta-16,4\}}$.

Os ciclos que esse emparelhamento nos dá são:

$$C_{V_1} = \{V_1, V_{16}, V_{14}, V_{18}\}, C_{V_2} = \{V_2, V_{13}, V_{17}, V_{15}\}, C_{V_3} = \{V_3, V_{12}, V_{18}, V_{10}\},$$

$$C_{V_4} = \{V_4, V_9, V_{11}, V_7\} \text{ e } C_{V_5} = \{V_5, V_6, V_{19}, V_{20}\}.$$

Portanto, pelo Teorema 4.2, o emparelhamento Φ_{20} gera uma superfície compacta orientável e como $\beta = 3$, seu gênero é dado pela expressão (4.14),

$$g = \frac{3 \times 3 - 3}{2} = 3.$$

Exemplo 4.4. ($\beta = 5$). Seja \mathcal{P}_{44} um polígono hiperbólico em \mathbb{D}^2 com arestas τ_1, \dots, τ_{44} e vértices V_1, \dots, V_{44} . Então o emparelhamento Φ_{44} , gera uma superfície compacta orientável de gênero 6. De fato, para $\beta = 5$ temos $n = 12 \times 5 - 16 = 44$ arestas e a quantidade de ciclos é $c = 44/4 = 11$. Assim, pelas expressões 4.1, 4.2 e 4.3 na regra de emparelhamento $\mathfrak{R}_{\{12\beta-16,4\}}$ temos,

$$\gamma_{\tau_{42}}(\tau_{42}) = \tau_{44} \text{ e } \gamma_{\tau_{11}}(\tau_{11}) = \tau_{43}, \quad (4.1).$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\tau_1}(\tau_1) = \tau_{39}, \quad \gamma_{\tau_2}(\tau_2) = \tau_{36}, \quad \gamma_{\tau_3}(\tau_3) = \tau_{33}, \quad \gamma_{\tau_4}(\tau_4) = \tau_{30}, \quad \gamma_{\tau_5}(\tau_5) = \tau_{27}, \\ \gamma_{\tau_6}(\tau_6) = \tau_{24}, \quad \gamma_{\tau_7}(\tau_7) = \tau_{21}, \quad \gamma_{\tau_8}(\tau_8) = \tau_{18}, \quad \gamma_{\tau_9}(\tau_9) = \tau_{15}, \quad \gamma_{\tau_{10}}(\tau_{10}) = \tau_{12}, \end{aligned} \quad (4.2).$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\tau_{38}}(\tau_{38}) = \tau_{41}, \quad \gamma_{\tau_{37}}(\tau_{37}) = \tau_{40}, \quad \gamma_{\tau_{32}}(\tau_{32}) = \tau_{35}, \quad \gamma_{\tau_{31}}(\tau_{31}) = \tau_{34}, \quad \gamma_{\tau_{26}}(\tau_{26}) = \tau_{29}, \\ \gamma_{\tau_{25}}(\tau_{25}) = \tau_{28}, \quad \gamma_{\tau_{20}}(\tau_{20}) = \tau_{23}, \quad \gamma_{\tau_{19}}(\tau_{19}) = \tau_{22}, \quad \gamma_{\tau_{14}}(\tau_{14}) = \tau_{17}, \\ \gamma_{\tau_{13}}(\tau_{13}) = \tau_{16}, \end{aligned} \quad (4.3).$$

Logo, obtemos as seguintes identificações das arestas emparelhadas.

$$\begin{aligned} \{\tau_1, \tau_{39}\}, \{\tau_2, \tau_{36}\}, \{\tau_3, \tau_{33}\}, \{\tau_4, \tau_{30}\}, \{\tau_5, \tau_{27}\}, \{\tau_6, \tau_{24}\}, \{\tau_7, \tau_{21}\}, \{\tau_8, \tau_{18}\}, \{\tau_9, \tau_{15}\} \\ \{\tau_{10}, \tau_{12}\}, \{\tau_{11}, \tau_{43}\}, \{\tau_{13}, \tau_{16}\}, \{\tau_{14}, \tau_{17}\}, \{\tau_{19}, \tau_{22}\}, \{\tau_{20}, \tau_{23}\}, \{\tau_{25}, \tau_{28}\}, \{\tau_{26}, \tau_{29}\}, \\ \{\tau_{31}, \tau_{34}\}, \{\tau_{32}, \tau_{35}\}, \{\tau_{37}, \tau_{40}\}, \{\tau_{38}, \tau_{41}\}, \{\tau_{42}, \tau_{44}\}, \end{aligned} \quad (\text{Figura 4.2}).$$

Obtemos o emparelhamento

$$\Phi_{44} = \{\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}, \gamma_{\tau_3}, \gamma_{\tau_4}, \gamma_{\tau_5}, \gamma_{\tau_6}, \gamma_{\tau_7}, \gamma_{\tau_8}, \gamma_{\tau_9}, \gamma_{\tau_{10}}, \gamma_{\tau_{11}}, \gamma_{\tau_{13}}, \gamma_{\tau_{14}}, \gamma_{\tau_{19}}, \gamma_{\tau_{20}}, \gamma_{\tau_{25}}, \gamma_{\tau_{26}}, \gamma_{\tau_{31}}, \gamma_{\tau_{32}}, \gamma_{\tau_{37}}, \gamma_{\tau_{38}}, \gamma_{\tau_{42}}\},$$

formado pelas identificações de arestas do polígono \mathcal{P}_{44} , que foram obtidas pela regra $\mathfrak{R}_{\{12\beta-16,4\}}$.

Os ciclos que esse emparelhamento nos dá são:

$$\begin{aligned} C_{V_1} = \{V_1, V_{40}, V_{38}, V_{42}\}, \quad C_{V_2} = \{V_2, V_{37}, V_{41}, V_{39}\}, \quad C_{V_3} = \{V_3, V_{34}, V_{32}, V_{36}\}, \\ C_{V_4} = \{V_4, V_{31}, V_{35}, V_{33}\}, \quad C_{V_5} = \{V_5, V_{28}, V_{26}, V_{30}\}, \quad C_{V_6} = \{V_6, V_{25}, V_{29}, V_{27}\}, \\ C_{V_7} = \{V_7, V_{22}, V_{20}, V_{24}\}, \quad C_{V_8} = \{V_8, V_{19}, V_{23}, V_{21}\}, \quad C_{V_9} = \{V_9, V_{16}, V_{14}, V_{18}\}, \\ C_{V_{10}} = \{V_{10}, V_{13}, V_{17}, V_{15}\} \text{ e } C_{V_{11}} = \{V_{11}, V_{12}, V_{43}, V_{44}\}. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema 4.2 o emparelhamento Φ_{44} gera uma superfície compacta orientável e como $\beta = 5$, seu gênero é dado pela expressão (4.14), temos

$$g = \frac{3 \times 5 - 3}{2} = 6.$$

Resumimos os resultados na tabela abaixo:

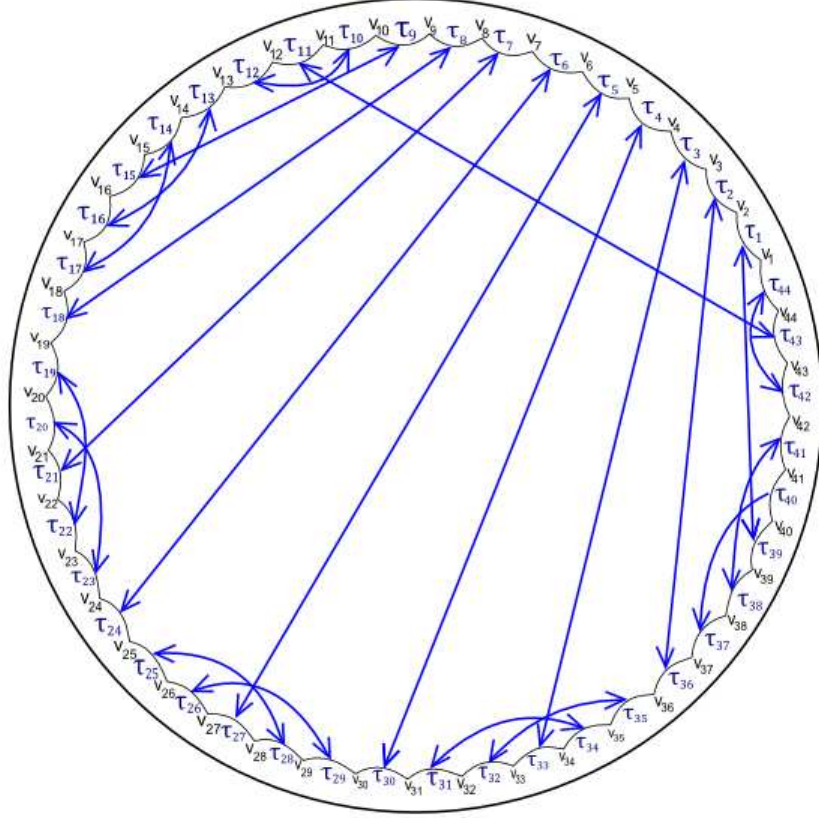


Figura 4.2: Polígono hiperbólico de 44 arestas com emparelhamento Φ_{44} .

Arestas	Emparelhamentos	Gênero
20	Φ_{20}	3
44	Φ_{44}	6

Ao unirmos as tesselações $\{12\eta - 8, 4\}$, com $\eta \geq 3$ ímpar, $\{12\mu - 12, 4\}$, com $\mu \geq 2$ par (ambas no Capítulo 3, Seção 3.4) e $\{12\beta - 16, 4\}$, com $\beta \geq 3$ ímpar, vista anteriormente nessa seção obtemos a tesselação $\{8g - 4, 4\}$, com $g \geq 2$ natural. As regras de emparelhamentos dos polígonos identificadas por $\mathfrak{R}_{\{12\eta-8, 4\}}$, $\mathfrak{R}_{\{12\mu-12, 4\}}$ e $\mathfrak{R}_{\{12\beta-16, 4\}}$, têm identificações análogas de arestas emparelhadas, que é dado por:

$$\gamma_{\tau_{n-2}}(\tau_{n-2}) = \tau_n \quad \text{e} \quad \gamma_{\tau_c}(\tau_c) = \tau_{n-1}; \quad (4.8)$$

$$\gamma_{\tau_i}(\tau_i) = \tau_{(n-2)-3i}; \quad (4.9)$$

se i for ímpar, então

$$\gamma_{\tau_{(n-2)-3i-j}}(\tau_{(n-2)-3i-j}) = \tau_{(n-2)-3(i-1)-j}; \quad (4.10)$$

Então podemos generalizar esse emparelhamento para o polígono hiperbólico \mathcal{P}_{8g-4} , com $8g - 4$ arestas e $g \geq 2$ natural, associado à tesselação $\{8g - 4, 4\}$.

Para isto, seja \mathcal{P}_{8g-4} , com $g \geq 2$ natural, um polígono hiperbólico com ângulos internos todos medindo $\pi/2$.

Observação 4.5. \mathcal{P}_{8g-4} é possível de ser construído, além disso é convexo. De fato, como estamos supondo que todos os ângulos internos de cada vértice é $\pi/2$. Então, somando todos os seus ângulos internos, temos

$$(8g - 4)(\pi/2) = (4g - 2)\pi < (8g - 6)\pi = [(8g - 4) - 2]\pi$$

satisfazendo o Teorema 1.37. Ele é convexo, pois todos os seus ângulos internos medem $\pi/2$ e $0 < \pi/2 < \pi$ e assim pelo Teorema 1.36 \mathcal{P}_{8g-4} é convexo.

Para emparelharmos as arestas de \mathcal{P}_{8g-4} , utilizaremos identificações de arestas análogas as (4.8), (4.9) e (4.10), construídas para os polígonos $\mathcal{P}_{12\eta-8}$, $\mathcal{P}_{12\mu-12}$ e $\mathcal{P}_{12\beta-16}$, com as regras $\mathfrak{R}_{\{12\eta-8,4\}}$, $\mathfrak{R}_{\{12\mu-12,4\}}$ e $\mathfrak{R}_{\{12\beta-16,4\}}$, respectivamente. Feito isso, substituiremos as regras $\mathfrak{R}_{\{12\eta-8,4\}}$, $\mathfrak{R}_{\{12\mu-12,4\}}$ e $\mathfrak{R}_{\{12\beta-16,4\}}$, que emparelham casos particulares de \mathcal{P}_{8g-4} , em uma única regra de emparelhamento das arestas do polígono hiperbólico \mathcal{P}_{8g-4} , com $8g - 4$ arestas e a denotaremos por $\mathfrak{R}_{\{8g-4,4\}}^2$.

Seja $n = 8g - 4$ números de arestas e $c = (8g - 4)/4$ número de ciclos com 4 vértices cada. Então, para $1 \leq i \leq c - 1$ e $j = 1, 2$, definimos as seguintes identificações de arestas:

$$\gamma_{\tau_{n-2}}(\tau_{n-2}) = \tau_n \quad \text{e} \quad \gamma_{\tau_c}(\tau_c) = \tau_{n-1}; \quad (4.11)$$

$$\gamma_{\tau_i}(\tau_i) = \tau_{(n-2)-3i}; \quad (4.12)$$

se i for ímpar, então

$$\gamma_{\tau_{(n-2)-3i-j}}(\tau_{(n-2)-3i-j}) = \tau_{(n-2)-3(i-1)-j}; \quad (4.13)$$

Logo, a regra $\mathfrak{R}_{\{8g-4,4\}}^2$ nos dá um emparelhamento de arestas para o polígono hiperbólico \mathcal{P}_{8g-4} , ao qual o denotaremos por Φ_{8g-4}^2 .

Note que, que os emparelhamentos $\Phi_{12\mu-12}$, $\Phi_{12\beta-16}$ e $\Phi_{12\eta-8}$ é um único emparelhamento Φ_{8g-4}^2 quando consideramos o polígono \mathcal{P}_{8g-4} , com $8g - 4$ arestas. Assim, enunciamos o seguinte resultado.

Teorema 4.6. *Seja \mathcal{P}_{8g-4} um polígono hiperbólico regular com ângulos internos iguais a $\pi/2$ e Φ_{8g-4}^2 o emparelhamento de arestas do polígono \mathcal{P}_{8g-4} obtido pela regra $\mathfrak{R}_{\{8g-4,4\}}^2$. Então, Φ_{8g-4}^2 gera um grupo Fuchsiano Γ_{8g-4}^2 tal que $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma_{8g-4}^2}$ é uma superfície compacta orientável de gênero g .*

Demonstração: A demonstração é similar a que foi feita no Teorema 4.2. O emparelhamento Φ_{8g-4}^2 que identifica as arestas do polígono hiperbólico regular \mathcal{P}_{8g-4} obtido pela regra $\mathfrak{R}_{\{8g-4,4\}}^2$ nos dá $c = \frac{8g - 4}{4} = 2g - 1$ ciclos de vértices.

Por recorrência e observando o emparelhamento Φ_{8g-4}^2 vemos que os ciclos de vértices são generalizados da seguinte forma. Para $1 \leq i \leq c-1$ e $n = 12\eta - 8$ temos:

se i for ímpar, então

$$C_{V_i} = \{V_i, V_{n-1-3i}, V_{n-3(i+1)}, V_{n-2-3(i-1)}\}; \quad (4.14)$$

se i for par, então

$$C_{V_i} = \{V_i, V_{n-1-3i}, V_{n-3(i-1)}, V_{n-2-3(i-1)}\}; \quad (4.15)$$

e

$$C_{V_c} = \{V_c, V_{c+1}, V_{n-1}, V_n\}. \quad (4.16)$$

(Generalização análoga aos dos ciclos de vértices, visto nos emparelhamentos $\Phi_{12\eta-8}$, $\Phi_{12\mu-12}$ e $\Phi_{12\beta-16}$, pois possuem identificações análogas de arestas). Temos ciclos com 4 vértices cada e como cada ângulo em um vértice é igual a $\pi/2$ a soma dos ângulos dos vértices de cada ciclo é igual a 2π .

Agora, como estamos usando apenas isometrias hiperbólicas e \mathcal{P}_{8g-4} possui finitas arestas, temos que as condições \mathbf{C}_1^* e \mathbf{C}_2 do Teorema 3.11 (Teorema de Poincaré) são satisfeitas, nos garantindo que Φ_{8g-4}^2 gera um grupo Fuchsiano Γ_{8g-4}^2 e \mathcal{P}_{8g-4} é um domínio fundamental de Γ_{8g-4}^2 . Além disso, como não estamos utilizando isometrias parabólicas e \mathcal{P}_{8g-4} é um polígono com área finita (fechado e convexo) sem vértices ideais, então $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma_{8g-4}^2}$ é uma superfície compacta orientável.

O gênero é obtido pela expressão (3.1), $V - A + F = 2 - 2g'$ e desta equação segue que,

$$\frac{8g-4}{4} - \frac{8g-4}{2} + 1 = 2 - 2g'.$$

Logo, $2g - 1 - 4g + 2 + 1 = 2 - 2g'$, ou seja, $-2g = -2g'$ e portanto obtemos,

$$g = g'.$$

Assim, o emparelhamento Φ_{8g-4}^2 nos dá uma superfície compacta orientável $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma_{8g-4}^2}$ de gênero g . ■

Vejamos três exemplos de emparelhamentos do polígono \mathcal{P}_{8g-4} associados a tesselação $\{8g-4, 4\}$, que são os primeiros vistos nos emparelhamentos dos polígonos $\mathcal{P}_{12\eta-8}$, $\mathcal{P}_{12\mu-12}$ e $\mathcal{P}_{12\beta-16}$, com esses emparelhamentos associados às tesselações $\{12\eta-8, 4\}$, $\{12\mu-12, 4\}$ e $\{12\beta-16, 4\}$.

Exemplo 4.7. ($g = 2$). *Seja \mathcal{P}_{12} um polígono hiperbólico em \mathbb{D}^2 com arestas τ_1, \dots, τ_{12} e vértices V_1, \dots, V_{12} . Então o emparelhamento Φ_{12}^2 gera uma superfície compacta orientável de gênero 2. De fato, se $g = 2$, temos $n = 8 \times 2 - 4 = 12$ arestas e a quantidade de ciclos é $c = 12/4 = 3$. Assim, pelas expressões 4.11,*

4.12 e 4.13 na regra de emparelhamento $\mathfrak{R}_{\{8g-4,4\}}^2$ obtemos,

$$\gamma_{\tau_{10}}(\tau_{10}) = \tau_{12} \text{ e } \gamma_{\tau_3}(\tau_3) = \tau_{11} \text{ por (4.11),}$$

$$\gamma_{\tau_1}(\tau_1) = \tau_7, \gamma_{\tau_2}(\tau_2) = \tau_4, \text{ por (4.12),}$$

$$\gamma_{\tau_5}(\tau_5) = \tau_8, \gamma_{\tau_6}(\tau_6) = \tau_9, \text{ por (4.13).}$$

Daí, as seguintes identificações das arestas emparelhadas.

$$\{\tau_1, \tau_7\}, \{\tau_2, \tau_4\}, \{\tau_3, \tau_{11}\}, \{\tau_5, \tau_8\}, \{\tau_6, \tau_9\}, \{\tau_{10}, \tau_{12}\} \text{ (Figura 4.3).}$$

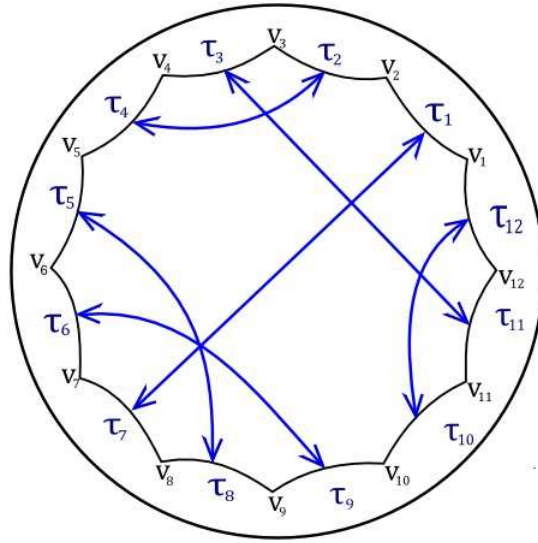


Figura 4.3: Polígono hiperbólico de 12 arestas com emparelhamento Φ_{12}^2 .

Logo, obtemos o emparelhamento

$$\Phi_{12}^2 = \{\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}, \gamma_{\tau_3}, \gamma_{\tau_5}, \gamma_{\tau_6}, \gamma_{\tau_{10}}\},$$

formado pelas identificações de arestas do polígono \mathcal{P}_{12} . Os ciclos que esse emparelhamento nos dá são:

$$C_{V_1} = \{V_1, V_8, V_6, V_{10}\}, C_{V_2} = \{V_2, V_7, V_9, V_5\} \text{ e } C_{V_3} = \{V_3, V_4, V_{10}, V_{12}\}.$$

Assim, pelo Teorema 4.6, o emparelhamento Φ_{12}^2 gera uma superfície compacta orientável de gênero $g = 2$.

Exemplo 4.8. ($g = 3$). Seja \mathcal{P}_{20} um polígono hiperbólico em \mathbb{D}^2 com arestas τ_1, \dots, τ_{20} e vértices V_1, \dots, V_{20} . Então o emparelhamento Φ_{12}^2 gera uma superfície compacta orientável de gênero 2. De fato, se $g = 2$, temos $n = 8 \times 2 - 4 = 12$

arestas e a quantidade de ciclos é $c = 12/4 = 3$. Então pelas expressões 4.11, 4.12 e 4.13 na regra de emparelhamentos $\mathfrak{R}_{\{8g-4, 4\}}^2$ temos,

$$\gamma_{\tau_{18}}(\tau_{18}) = \tau_{20} \text{ e } \gamma_{\tau_5}(\tau_5) = \tau_{19}, \text{ por (4.11)}$$

$\gamma_{\tau_1}(\tau_1) = \tau_{15}$, $\gamma_{\tau_2}(\tau_2) = \tau_{12}$, $\gamma_{\tau_3}(\tau_3) = \tau_9$, $\gamma_{\tau_4}(\tau_4) = \tau_6$, $\gamma_{\tau_{14}}(\tau_{14}) = \tau_{17}$, por 4.12.

$$\gamma_{\tau_{13}}(\tau_{13}) = \tau_{16}, \gamma_{\tau_8}(\tau_8) = \tau_{11}, \gamma_{\tau_7}(\tau_7) = \tau_{10}, \text{ por (4.13)}.$$

Deste modo as seguintes identificações das arestas emparelhadas são obtidas:

$\{\tau_1, \tau_{15}\}$, $\{\tau_2, \tau_{12}\}$, $\{\tau_3, \tau_9\}$, $\{\tau_4, \tau_6\}$, $\{\tau_5, \tau_{19}\}$, $\{\tau_7, \tau_{10}\}$, $\{\tau_8, \tau_{11}\}$, $\{\tau_{13}, \tau_{16}\}$, $\{\tau_{14}, \tau_{17}\}$, $\{\tau_{18}, \tau_{20}\}$ (Figura 4.4).

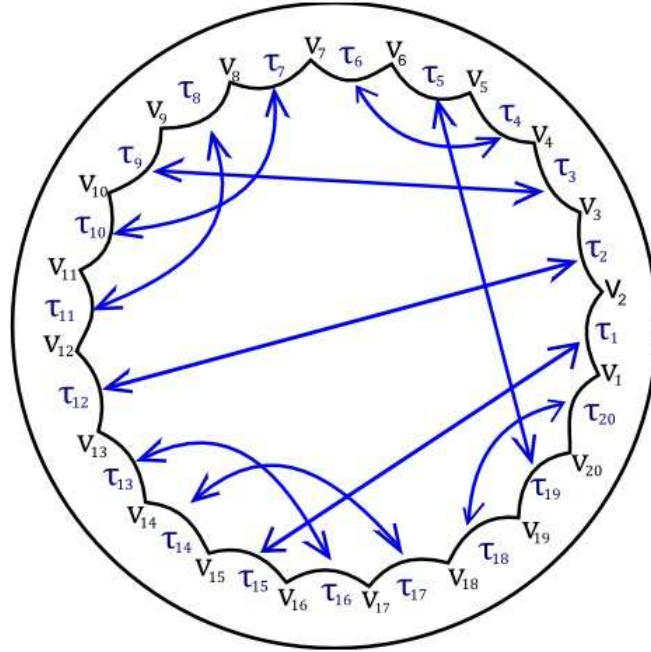


Figura 4.4: Polígono hiperbólico de 20 arestas com emparelhamento Φ_{20}^2 .

O emparelhamento

$$\Phi_{20}^2 = \{\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}, \gamma_{\tau_3}, \gamma_{\tau_4}, \gamma_{\tau_5}, \gamma_{\tau_7}, \gamma_{\tau_8}, \gamma_{\tau_{13}}, \gamma_{\tau_{14}}, \gamma_{\tau_{18}}\}.$$

é formado pelas identificações de arestas do polígono \mathcal{P}_{20} , obtidas pela regra $\mathfrak{R}_{\{8g-4, 4\}}^2$ e nos fornece os seguintes ciclos:

$$C_{V_1} = \{V_1, V_{16}, V_{14}, V_{18}\}, C_{V_2} = \{V_2, V_{13}, V_{17}, V_{15}\}, C_{V_3} = \{V_3, V_{12}, V_{18}, V_{10}\},$$

$$C_{V_4} = \{V_4, V_9, V_{11}, V_7\}, \text{ e } C_{V_5} = \{V_5, V_6, V_{19}, V_{20}\}.$$

Portanto, pelo Teorema 4.6, o emparelhamento Φ_{20}^2 gera uma superfície com-

pacta orientável de gênero $g = 3$.

Exemplo 4.9. ($g = 4$). *Seja \mathcal{P}_{28} um polígono hiperbólico em \mathbb{D}^2 com as arestas τ_1, \dots, τ_{28} e vértices V_1, \dots, V_{28} . Então o emparelhamento Φ_{28}^2 gera uma superfície compacta e orientável de gênero $g = 4$. De fato, se $g = 4$ então, $n = 8 \times 4 - 4 = 28$ é o número de arestas e a quantidade de ciclos é $c = 28/4 = 7$. Assim, pelas expressões 4.11, 4.12 e 4.13 na regra de emparelhamentos $\mathfrak{R}_{\{8g-4,4\}}^2$ obtemos,*

$$\gamma_{\tau_{26}}(\tau_{26}) = \tau_{28} \text{ e } \gamma_{\tau_7}(\tau_7) = \tau_{27}, \text{ por (4.11)}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\tau_1}(\tau_1) = \tau_{23}, \quad \gamma_{\tau_2}(\tau_2) = \tau_{20}, \quad \gamma_{\tau_3}(\tau_3) = \tau_{17}, \quad \gamma_{\tau_4}(\tau_4) = \tau_{14}, \quad \gamma_{\tau_5}(\tau_5) = \tau_{11}, \\ \gamma_{\tau_6}(\tau_6) = \tau_8, \text{ por (4.12)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\tau_{22}}(\tau_{22}) = \tau_{25}, \quad \gamma_{\tau_{21}}(\tau_{21}) = \tau_{14}, \quad \gamma_{\tau_{16}}(\tau_{16}) = \tau_{19}, \quad \gamma_{\tau_{15}}(\tau_{15}) = \tau_{18}, \quad \gamma_{\tau_{10}}(\tau_{10}) = \tau_{13}, \\ \gamma_{\tau_9}(\tau_9) = \tau_{12}, \text{ por (4.13)}. \end{aligned}$$

Donde, temos as seguintes pares de arestas emparelhadas.

$\{\tau_1, \tau_{23}\}, \{\tau_2, \tau_{20}\}, \{\tau_3, \tau_{17}\}, \{\tau_4, \tau_{14}\}, \{\tau_5, \tau_{11}\}, \{\tau_6, \tau_8\}, \{\tau_7, \tau_{27}\}, \{\tau_9, \tau_{12}\}, \{\tau_{10}, \tau_{13}\},$
 $\{\tau_{15}, \tau_{18}\}, \{\tau_{16}, \tau_{19}\}, \{\tau_{21}, \tau_{24}\}, \{\tau_{22}, \tau_{25}\}, \{\tau_{26}, \tau_{28}\}$ (Figura 4.5).

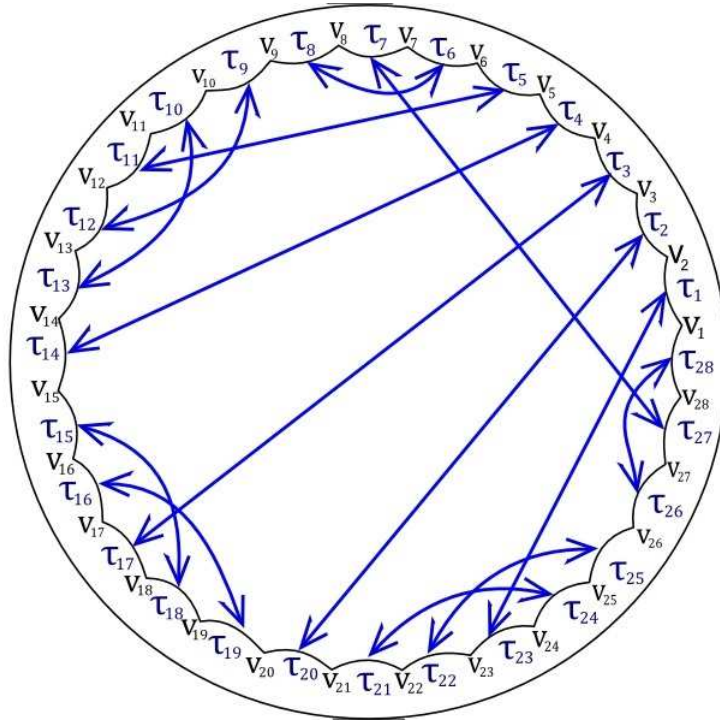


Figura 4.5: Polígono hiperbólico de 28 arestas com emparelhamento Φ_{28}^2 .

Logo, obtemos o emparelhamento

$$\Phi_{28}^2 = \{\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}, \gamma_{\tau_3}, \gamma_{\tau_4}, \gamma_{\tau_5}, \gamma_{\tau_6}, \gamma_{\tau_7}, \gamma_{\tau_8}, \gamma_{\tau_9}, \gamma_{\tau_{10}}, \gamma_{\tau_{15}}, \gamma_{\tau_{16}}, \gamma_{\tau_{21}}, \gamma_{\tau_{22}}\}.$$

formado pelas identificações de arestas do polígono \mathcal{P}_{28} , obtidas pela regra $\mathfrak{R}_{\{8g-4,4\}}^2$

e com os seguintes ciclos de vértices:

$$\begin{aligned} C_{V_1} &= \{V_1, V_{24}, V_{22}, V_{26}\}, C_{V_2} = \{V_2, V_{23}, V_{25}, V_{21}\}, C_{V_3} = \{V_3, V_{18}, V_{16}, V_{20}\}, \\ C_{V_4} &= \{V_4, V_{17}, V_{19}, V_{15}\}, C_{V_5} = \{V_5, V_{12}, V_{10}, V_{14}\}, C_{V_6} = \{V_6, V_{11}, V_{13}, V_9\}, \\ C_{V_7} &= \{V_7, V_8, V_{27}, V_{28}\}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 4.6 o emparelhamento Φ_{28}^2 gera uma superfície compacta orientável de gênero $g = 4$.

Resumimos os resultados na tabela abaixo:

Arestas	Emparelhamentos	Gênero
12	Φ_{12}^2	2
20	Φ_{20}^2	3
28	Φ_{28}^2	4

4.2 Emparelhamento Generalizado $\{8\alpha - 4, 4\}$

Nesta seção, construímos um emparelhamento associado à tesselação $\{8\alpha - 4, 4\}$, que são basicamente da $\{8g - 4, 4\}$, só que aqui, estamos interessados quando $g = \alpha \geq 3$ é ímpar, pois a construção do emparelhamento é feita para um polígono hiperbólico, com $8\alpha - 4$ arestas.

Assim, seja $\mathcal{P}_{8\alpha-4}$ um polígono hiperbólico regular, com $8\alpha - 4$ arestas e ângulos internos medindo $\pi/2$, com $\alpha \geq 3$ ímpar. Este polígono é possível de ser construído, além disso, é convexo, pois como foi justificado na observação 4.5 \mathcal{P}_{8g-4} existe e é convexo, já que estamos usando o caso particular em que $g = \alpha$ ímpar. Construímos uma regra de emparelhamento para as arestas de $\mathcal{P}_{8\alpha-4}$, que denotaremos por $\mathfrak{R}_{\{8\alpha-4,4\}}^3$ e apresentaremos a seguir:

Seja $n = 8\alpha - 4$, com $\alpha \geq 3$, o número de arestas e $c = \frac{8\alpha - 4}{4} = 2\alpha - 1$ (números de ciclos, com 4 vértices cada, a ser obtido). Então, para $1 \leq i \leq c - 1$ e $j = 1, 2$ definimos as identificações das arestas como:

$$\gamma_{\tau_{n-2}}(\tau_{n-2}) = \tau_n \quad \text{e} \quad \gamma_{\tau_c}(\tau_c) = \tau_{n-1} \quad (4.17)$$

$$\gamma_{\tau_i}(\tau_i) = \tau_{(n-2)-3i} \quad (4.18)$$

se $i = c - 4k, c - 4k + 1$, para $1 \leq k \leq \frac{c-1}{4}$, então

$$\gamma_{\tau_{(c-2)+3i+j}}(\tau_{(c-2)+3i+j}) = \tau_{(c+4)+3i+j} \quad (4.19)$$

Logo, a regra $\mathfrak{R}_{\{8\alpha-4,4\}}^3$ nos dá um emparelhamento do polígono hiperbólico $\mathcal{P}_{8\alpha-4}$, que denotaremos por $\Phi_{8\alpha-4}^3$. Assim, enunciamos o seguinte resultado.

Teorema 4.10. *Seja $\mathcal{P}_{8\alpha-4}$ um polígono hiperbólico regular com ângulos internos iguais a $\pi/2$ e $\Phi_{8\alpha-4}^3$ o emparelhamento de arestas do polígono $\mathcal{P}_{8\alpha-4}$ obtido pela regra $\mathfrak{R}_{\{8\alpha-4,4\}}^3$. Então, $\Phi_{8\alpha-4}^3$ gera um grupo Fuchsiano $\Gamma_{8\alpha-4}^3$ tal que $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma_{8\alpha-4}^3}$ é uma superfície compacta orientável de gênero $g = \alpha$.*

Demonstração: O emparelhamento $\Phi_{8\alpha-4}^3$ formado pelas identificações das arestas do polígono hiperbólico regular $\mathcal{P}_{8\alpha-4}$ dado pela regra $\mathfrak{R}_{\{8\alpha-4,4\}}^3$ nos dá $c = \frac{8\alpha - 4}{4} = 2\alpha - 1$ ciclos de vértices. Esses são generalizados da seguinte maneira. Para $1 \leq i \leq c - 1$ e $1 \leq k \leq \frac{c - 1}{4}$, temos:

$$\text{se } i = c - 4k, \text{ então } C_{V_i} = \{V_i, V_{n-1-3i}, V_{n-3(2+i)}, V_{n+1-3i}\};$$

$$\text{se } i = c - 4k + 1, \text{ então } C_{V_i} = \{V_i, V_{n+1-3i}, V_{n-3(2+i)}, V_{n-1-3i}\};$$

$$\text{se } i = c - 4k + 2, \text{ então } C_{V_i} = \{V_i, V_{n-1-3i}, V_{n-3(i-2)}, V_{n+1-3i}\};$$

$$\text{se } i = c - 4k + 3, \text{ então } C_{V_i} = \{V_i, V_{n+1-3i}, V_{n-3(i-2)}, V_{n+1-3i}\};$$

$$\text{e } C_{V_c} = \{V_c, V_{c+1}, V_{n-1}, V_n\}.$$

Note que todos os ciclos são homogêneos com 4 vértices. Como cada vértice possui ângulos internos iguais a $\pi/2$, temos que a soma de todos os ângulos de cada ciclo será igual a 2π .

Agora, como estamos usando apenas isometrias hiperbólicas e $\mathcal{P}_{8\alpha-4}$ possui finitas arestas, temos que as condições \mathbf{C}_1^* e \mathbf{C}_2 do Teorema de Poincaré são satisfeitas, nos garantindo que $\Phi_{8\alpha-4}^3$ gera um grupo Fuchsiano $\Gamma_{8\alpha-4}^3$ e $\mathcal{P}_{8\alpha-4}$ é um domínio fundamental de $\Gamma_{8\alpha-4}^3$. Além disso, como não estamos usando isometrias parabólicas e $\mathcal{P}_{8\alpha-4}$ é um polígono com área finita (fechado e convexo) sem vértices ideais, então $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma_{8\alpha-4}^3}$ é uma superfície compacta orientável. Obtemos o gênero pela expressão (3.1). Daí,

$$\frac{8\alpha - 4}{4} - \frac{8\alpha - 4}{2} + 1 = 2 - 2g.$$

Logo, $2\alpha - 1 - 4\alpha - 2 + 1 = 2 - 2g$, ou seja, $-2\alpha = -2g$ e portanto,

$$g = \alpha.$$

Assim, o emparelhamento $\Phi_{8\alpha-4}^3$ nos dá uma superfície compacta orientável $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma_{8\alpha-4}^3}$ de gênero $g = \alpha$. \blacksquare

Agora, mostraremos 3 exemplos de emparelhamentos para o polígono $\mathcal{P}_{8\alpha-4}$, com $\alpha = 3, 5, 7$.

Exemplo 4.11. ($\alpha = 3$). Seja \mathcal{P}_{20} um polígono hiperbólico em \mathbb{D}^2 com as arestas τ_1, \dots, τ_{20} e vértices V_1, \dots, V_{20} . Então o emparelhamento Φ_{20}^3 gera uma superfície compacta e orientável de gênero 3. De fato, se $\alpha = 3$ temos $n = 8 \times 3 - 4 = 20$ arestas e a quantidade de ciclos é $c = 20/4 = 5$. Pelas expressões (4.17), (4.18) e (4.19) da regra de emparelhamentos $\mathfrak{R}_{\{8\alpha-4, 4\}}^3$ temos as seguintes identificações de arestas. Para $1 \leq i \leq 4$ e $j = 1, 2$ e para $1 \leq k \leq \frac{5-1}{4}$, ou seja, $k = 1$ temos:

$$\gamma_{\tau_{18}}(\tau_{18}) = \tau_{20} \text{ e } \gamma_{\tau_5}(\tau_5) = \tau_{19}, \text{ por (4.17);}$$

$$\gamma_{\tau_1}(\tau_1) = \tau_{15}, \gamma_{\tau_2}(\tau_2) = \tau_{12}, \gamma_{\tau_3}(\tau_3) = \tau_9, \gamma_{\tau_4}(\tau_4) = \tau_6, \text{ por (4.18);}$$

se $i = c - 4k, c - 4k + 1$, com $k = 1, 2$, então

$$\gamma_{\tau_7}(\tau_7) = \tau_{13}, \gamma_{\tau_8}(\tau_8) = \tau_{14}, \gamma_{\tau_{10}}(\tau_{10}) = \tau_{16}, \gamma_{\tau_{11}}(\tau_{11}) = \tau_{17}, \text{ por (4.19).}$$

Em resumo, temos os pares de arestas emparelhadas:

$\{\tau_1, \tau_{15}\}, \{\tau_2, \tau_{12}\}, \{\tau_3, \tau_9\}, \{\tau_4, \tau_6\}, \{\tau_5, \tau_{19}\}, \{\tau_7, \tau_{13}\}, \{\tau_8, \tau_{14}\}, \{\tau_{10}, \tau_{16}\}, \{\tau_{11}, \tau_{17}\}, \{\tau_{18}, \tau_{20}\}$, (Figura 4.6).

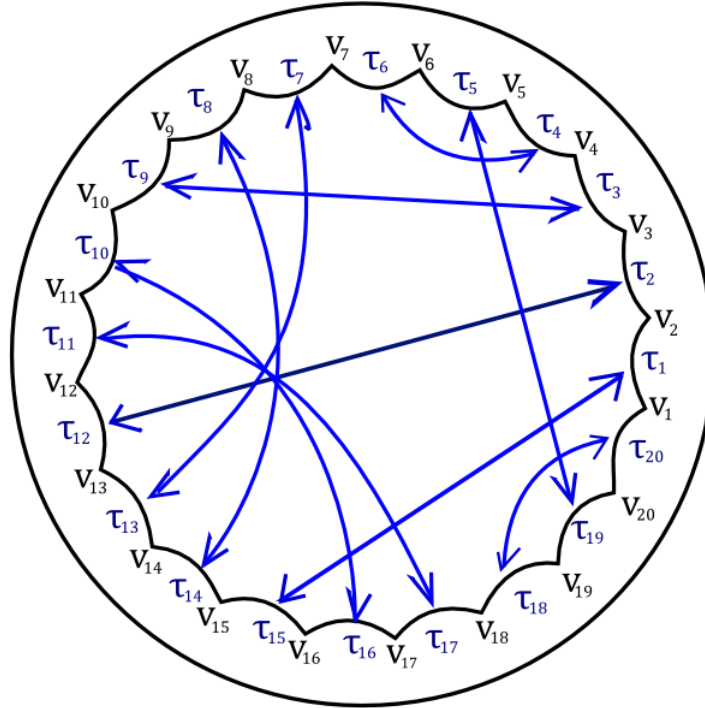


Figura 4.6: Polígono hiperbólico de 20 arestas com emparelhamento Φ_{20}^3 .

Assim, obtemos o emparelhamento

$$\Phi_{20}^3 = \{\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}, \gamma_{\tau_3}, \gamma_{\tau_4}, \gamma_{\tau_5}, \gamma_{\tau_7}, \gamma_{\tau_8}, \gamma_{\tau_{10}}, \gamma_{\tau_{11}}, \gamma_{\tau_{18}}\}.$$

formado pelas identificações de arestas do polígono \mathcal{P}_{20} , gerado pela regra $\mathfrak{R}_{\{8\alpha-4, 4\}}^3$.

Os ciclos que esse emparelhamento nos dá, são:

$$C_{V_1} = \{V_1, V_{16}, V_{11}, V_{18}\}, C_{V_2} = \{V_2, V_{15}, V_8, V_{13}\}, C_{V_3} = \{V_3, V_{10}, V_{17}, V_{12}\},$$

$$C_{V_4} = \{V_4, V_9, V_{14}, V_7\} \text{ e } C_{V_5} = \{V_5, V_6, V_{19}, V_{20}\}.$$

Portanto, pelo Teorema 4.10, o emparelhamento Φ_{20}^3 gera uma superfície compacta orientável de gênero $g = 3$.

Exemplo 4.12. ($\alpha = 5$). Seja \mathcal{P}_{36} um polígono hiperbólico em \mathbb{D}^2 com as arestas τ_1, \dots, τ_{36} e vértices V_1, \dots, V_{36} . Então o emparelhamento Φ_{36}^3 gera uma superfície compacta orientável de gênero 5. De fato, se $\alpha = 5$ temos $n = 8 \times 5 - 4 = 36$ arestas e a quantidade de ciclos é $c = 36/4 = 9$. Assim, pelas expressões (4.17), (4.18) e (4.19) da regra de emparelhamentos $\mathfrak{R}_{\{8\alpha-4,4\}}^3$ temos as seguintes identificações de arestas. Para $1 \leq i \leq 8$ e $j = 1, 2$ e para $1 \leq k \leq \frac{9-1}{4}$, ou seja, $k = 1, 2$ temos:

$$\gamma_{\tau_{34}}(\tau_{34}) = \tau_{36} \text{ e } \gamma_{\tau_9}(\tau_9) = \tau_{35}, \text{ por (4.17);}$$

$$\gamma_{\tau_1}(\tau_1) = \tau_{31}, \gamma_{\tau_2}(\tau_2) = \tau_{28}, \gamma_{\tau_3}(\tau_3) = \tau_{25}, \gamma_{\tau_4}(\tau_4) = \tau_{22}, \gamma_{\tau_5}(\tau_5) = \tau_{19},$$

$$\gamma_{\tau_6}(\tau_6) = \tau_{16}, \gamma_{\tau_7}(\tau_7) = \tau_{13}, \gamma_{\tau_8}(\tau_8) = \tau_{10}, \text{ por (4.18);}$$

se $k = 1$ e $i = c - 4k, c - 4k + 1$, temos $i = 5, 6$, então

$$\gamma_{\tau_{23}}(\tau_{23}) = \tau_{29}, \gamma_{\tau_{24}}(\tau_{24}) = \tau_{30}, \gamma_{\tau_{26}}(\tau_{26}) = \tau_{32}, \gamma_{\tau_{27}}(\tau_{27}) = \tau_{33},$$

se $k = 2$ e $i = c - 4k, c - 4k + 1$, temos $i = 1, 2$, então

$$\gamma_{\tau_{11}}(\tau_{11}) = \tau_{17}, \gamma_{\tau_{12}}(\tau_{12}) = \tau_{18}, \gamma_{\tau_{14}}(\tau_{14}) = \tau_{20}, \gamma_{\tau_{15}}(\tau_{15}) = \tau_{21}, \text{ por (4.19).}$$

Logo, obtemos os seguintes pares das arestas emparelhadas.

$$\{\tau_1, \tau_{31}\}, \{\tau_2, \tau_{28}\}, \{\tau_3, \tau_{25}\}, \{\tau_4, \tau_{22}\}, \{\tau_5, \tau_{19}\}, \{\tau_6, \tau_{16}\}, \{\tau_7, \tau_{13}\}, \{\tau_8, \tau_{10}\}, \{\tau_9, \tau_{35}\},$$

$$\{\tau_{11}, \tau_{17}\}, \{\tau_{12}, \tau_{18}\}, \{\tau_{14}, \tau_{20}\}, \{\tau_{15}, \tau_{21}\}, \{\tau_{23}, \tau_{29}\}, \{\tau_{24}, \tau_{30}\}, \{\tau_{26}, \tau_{32}\}, \{\tau_{27}, \tau_{33}\},$$

$$\{\tau_{34}, \tau_{36}\}.$$

Veja a Figura 4.7 .

O emparelhamento

$$\Phi_{36}^3 = \{\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}, \gamma_{\tau_3}, \gamma_{\tau_4}, \gamma_{\tau_5}, \gamma_{\tau_6}, \gamma_{\tau_7}, \gamma_{\tau_8}, \gamma_{\tau_9}, \gamma_{\tau_{11}}, \gamma_{\tau_{12}}, \gamma_{\tau_{14}}, \gamma_{\tau_{15}}, \gamma_{\tau_{23}}, \gamma_{\tau_{24}}, \gamma_{\tau_{26}}, \gamma_{\tau_{27}}, \gamma_{\tau_{34}}\}.$$

formado pelas identificações de arestas do polígono \mathcal{P}_{36} , foi obtido pela regra $\mathfrak{R}_{\{8\alpha-4,4\}}^3$. Os ciclos de vértices que esse emparelhamento nos dá, são:

$$C_{V_1} = \{V_1, V_{32}, V_{27}, V_{34}\}, C_{V_2} = \{V_2, V_{31}, V_{24}, V_{29}\}, C_{V_3} = \{V_3, V_{26}, V_{33}, V_{28}\},$$

$$C_{V_4} = \{V_4, V_{25}, V_{30}, V_{23}\}, C_{V_5} = \{V_5, V_{20}, V_{15}, V_{22}\}, C_{V_6} = \{V_6, V_{19}, V_{12}, V_{17}\},$$

$$C_{V_7} = \{V_7, V_{14}, V_{21}, V_{16}\}, C_{V_8} = \{V_8, V_{13}, V_{18}, V_{11}\}, C_{V_9} = \{V_9, V_{10}, V_{35}, V_{36}\}.$$

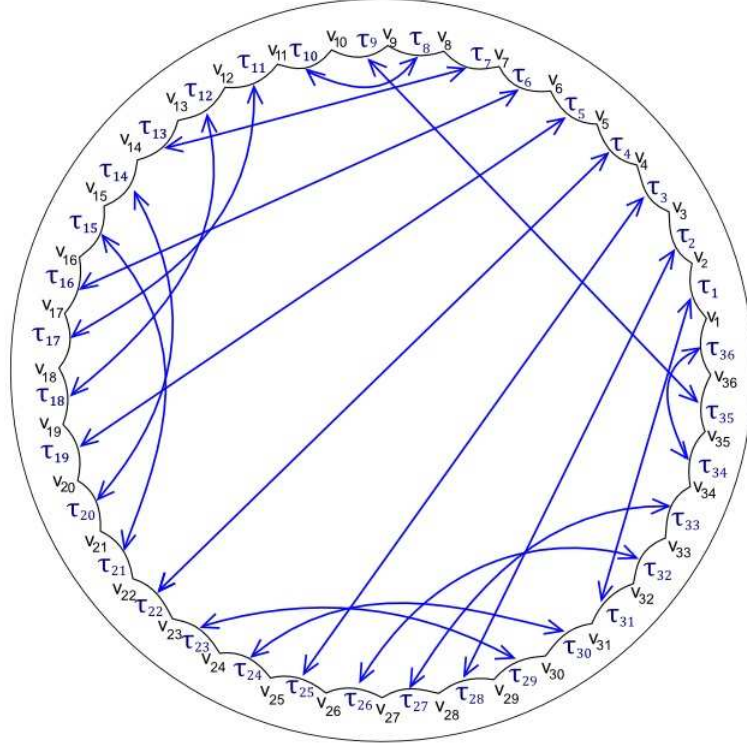


Figura 4.7: Polígono hiperbólico de 36 arestas com emparelhamento Φ_{36}^3 .

Assim, pelo Teorema 4.10, o emparelhamento Φ_{36}^3 gera uma superfície compacta orientável de gênero $g = 5$.

Exemplo 4.13. ($\alpha = 7$). Seja \mathcal{P}_{52} um polígono hiperbólico em \mathbb{D}^2 com as arestas τ_1, \dots, τ_{52} e vértices V_1, \dots, V_{52} . Então, o emparelhamento Φ_{52} gera uma superfície compacta orientável de gênero 7. De fato, se $\alpha = 7$ temos, $n = 8 \times 7 - 4 = 52$ arestas e a quantidade de ciclos é $c = 52/4 = 13$. Assim, usando as expressões (4.17), (4.18) e (4.19) da regra de emparelhamentos $\mathfrak{R}_{\{8\alpha-4, 4\}}^3$ temos as seguintes identificações de arestas. Para $1 \leq i \leq 12$ e $j = 1, 2$ e para $1 \leq k \leq \frac{13-1}{4}$, ou seja, $k = 1, 2, 3$ temos:

$$\gamma_{\tau_{50}}(\tau_{50}) = \tau_{52} \text{ e } \gamma_{\tau_{13}}(\tau_{13}) = \tau_{51}, \text{ por (4.17);}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\tau_1}(\tau_1) &= \tau_{47}, \gamma_{\tau_2}(\tau_2) = \tau_{44}, \gamma_{\tau_3}(\tau_3) = \tau_{41}, \gamma_{\tau_4}(\tau_4) = \tau_{38}, \gamma_{\tau_5}(\tau_5) = \tau_{35}, \\ \gamma_{\tau_6}(\tau_6) &= \tau_{32}, \gamma_{\tau_7}(\tau_7) = \tau_{29}, \gamma_{\tau_8}(\tau_8) = \tau_{26}, \gamma_{\tau_9}(\tau_9) = \tau_{23}, \gamma_{\tau_{10}}(\tau_{10}) = \tau_{20}, \\ \gamma_{\tau_{11}}(\tau_{11}) &= \tau_{17}, \gamma_{\tau_{12}}(\tau_{12}) = \tau_{14}, \text{ por (4.18);} \end{aligned}$$

se $k = 1$ e $i = c - 4k, c - 4k + 1$, temos $i = 9, 10$, então

$$\gamma_{\tau_{39}}(\tau_{39}) = \tau_{45}, \gamma_{\tau_{40}}(\tau_{40}) = \tau_{46}, \gamma_{\tau_{42}}(\tau_{42}) = \tau_{48}, \gamma_{\tau_{43}}(\tau_{43}) = \tau_{49},$$

se $k = 2$ e $i = c - 4k, c - 4k + 1$, temos $i = 5, 6$, então

$$\gamma_{\tau_{27}}(\tau_{27}) = \tau_{33}, \gamma_{\tau_{28}}(\tau_{28}) = \tau_{34}, \gamma_{\tau_{30}}(\tau_{30}) = \tau_{36}, \gamma_{\tau_{31}}(\tau_{31}) = \tau_{37}.$$

se $k = 3$ e $i = c - 4k, c - 4k + 1$, temos $i = 1, 2$, então

$$\gamma_{\tau_{15}}(\tau_{15}) = \tau_{21}, \gamma_{\tau_{16}}(\tau_{16}) = \tau_{22}, \gamma_{\tau_{18}}(\tau_{18}) = \tau_{24}, \gamma_{\tau_{19}}(\tau_{19}) = \tau_{25} \text{ por (4.19)}.$$

Logo, temos os seguintes pares de arestas emparelhadas:

$$\begin{aligned} & \{\tau_1, \tau_{47}\}, \{\tau_2, \tau_{44}\}, \{\tau_3, \tau_{41}\}, \{\tau_4, \tau_{38}\}, \{\tau_5, \tau_{35}\}, \{\tau_6, \tau_{32}\}, \{\tau_7, \tau_{29}\}, \{\tau_8, \tau_{26}\}, \{\tau_9, \tau_{23}\}, \\ & \{\tau_{10}, \tau_{20}\}, \{\tau_{11}, \tau_{17}\}, \{\tau_{12}, \tau_{14}\}, \{\tau_{13}, \tau_{51}\}, \{\tau_{15}, \tau_{21}\}, \{\tau_{16}, \tau_{22}\}, \{\tau_{18}, \tau_{24}\}, \{\tau_{19}, \tau_{25}\}, \\ & \{\tau_{27}, \tau_{33}\}, \{\tau_{28}, \tau_{34}\}, \{\tau_{30}, \tau_{36}\}, \{\tau_{31}, \tau_{37}\}, \{\tau_{39}, \tau_{45}\}, \{\tau_{40}, \tau_{46}\}, \{\tau_{42}, \tau_{48}\}, \{\tau_{43}, \tau_{49}\}, \\ & \{\tau_{50}, \tau_{52}\}. \end{aligned}$$

Veja a Figura 4.8 .

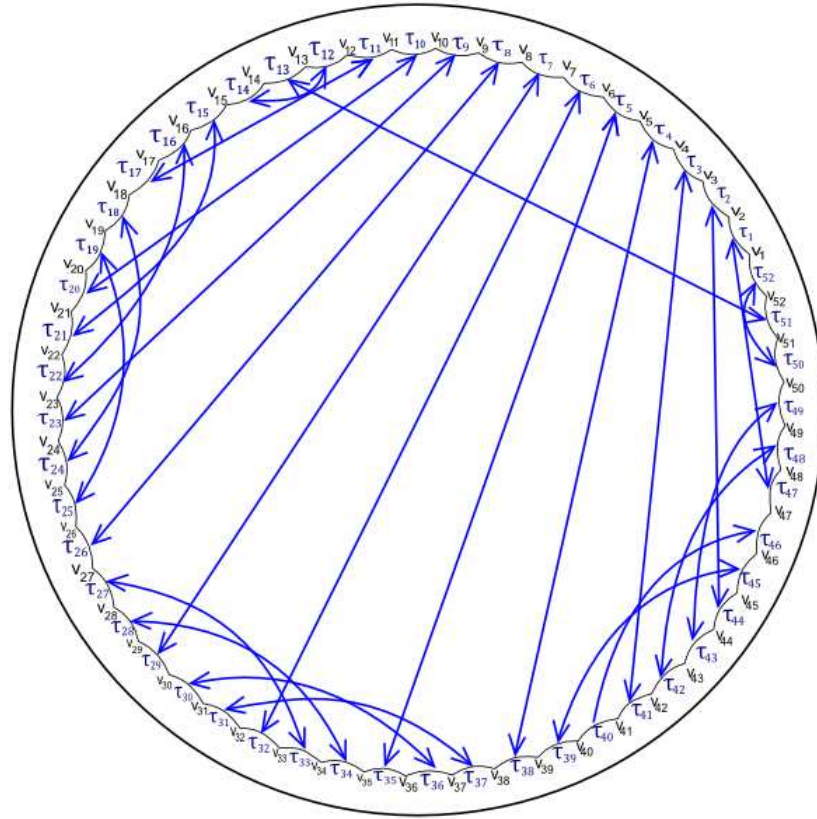


Figura 4.8: Polígono hiperbólico de 52 arestas com emparelhamento Φ_{52}^3 .

O emparelhamento

$\Phi_{52}^3 = \{\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}, \gamma_{\tau_3}, \gamma_{\tau_4}, \gamma_{\tau_5}, \gamma_{\tau_6}, \gamma_{\tau_7}, \gamma_{\tau_8}, \gamma_{\tau_9}, \gamma_{\tau_{10}}, \gamma_{\tau_{11}}, \gamma_{\tau_{12}}, \gamma_{\tau_{13}}, \gamma_{\tau_{15}}, \gamma_{\tau_{16}}, \gamma_{\tau_{18}}, \gamma_{\tau_{19}}, \gamma_{\tau_{27}}, \gamma_{\tau_{28}}, \gamma_{\tau_{30}}, \gamma_{\tau_{31}}, \gamma_{\tau_{39}}, \gamma_{\tau_{40}}, \gamma_{\tau_{42}}, \gamma_{\tau_{43}}, \gamma_{\tau_{50}}\}$, formado pelas identificações de arestas do polígono \mathcal{P}_{52} , foi obtido pela regra $\mathfrak{R}_{\{8\alpha-4, 4\}}^3$. Os ciclos que esse emparelhamento nos dá, são:

$$C_{V_1} = \{V_1, V_{48}, V_{43}, V_{50}\}, C_{V_2} = \{V_2, V_{47}, V_{40}, V_{45}\}, C_{V_3} = \{V_3, V_{42}, V_{49}, V_{44}\},$$

$$C_{V_4} = \{V_4, V_{41}, V_{46}, V_{39}\}, C_{V_5} = \{V_5, V_{35}, V_{28}, V_{33}\}, C_{V_6} = \{V_6, V_{36}, V_{31}, V_{38}\},$$

$$C_{V_7} = \{V_7, V_{30}, V_{37}, V_{32}\}, C_{V_8} = \{V_8, V_{31}, V_{36}, V_{29}\}, C_{V_9} = \{V_9, V_{24}, V_{19}, V_{26}\},$$

$$C_{V_{10}} = \{V_{10}, V_{23}, V_{16}, V_{21}\}, C_{V_{11}} = \{V_{11}, V_{18}, V_{25}, V_{20}\}, C_{V_{12}} = \{V_{12}, V_{17}, V_{22}, V_{15}\}.$$

$$\text{e } C_{V_{13}} = \{V_{13}, V_{14}, V_{51}, V_{52}\}.$$

Assim, pelo Teorema 4.10, o emparelhamento Φ_{52}^3 gera uma superfície compacta orientável de gênero $g = 7$.

Resumimos os resultados na tabela abaixo:

Arestas	Emparelhamentos	Gênero
20	Φ_{20}^3	3
36	Φ_{36}^3	5
52	Φ_{52}^3	7

4.3 Novo Emparelhamento Generalizado $\{8g - 4, 4\}$

Nessa seção, construímos uma nova regra que emparelha as arestas do polígono hiperbólico \mathcal{P}_{8g-4} . A existência e convexidade desse polígono é mostrado na observação 4.5. Observando os emparelhamentos feitos para os polígonos hiperbólicos $\mathcal{P}_{8\alpha-4}$ e \mathcal{P}_{8g-4} associados às tesselações hiperbólicas $\{8\alpha - 4, 4\}$ e $\{8g - 4, 4\}$, construídos nas seções anteriores desse capítulo, através de alguns ajustes nas identificações das arestas, conseguimos um novo emparelhamento de arestas para o polígono hiperbólico \mathcal{P}_{8g-4} associado à tesselação $\{8g - 4, 4\}$ que veremos a seguir:

Seja $n = 8g - 4$, com $g \geq 2$ natural, o número de arestas de \mathcal{P}_{8g-4} e $c = (8g - 4)/4 = 2g - 1$ (números de ciclos, com 4 vértices, a ser obtido). Então, para $1 \leq i \leq c - 1$ e $j = 1, 2$ definimos as identificações das arestas como:

$$\gamma_{\tau_{n-2}}(\tau_{n-2}) = \tau_n \quad \text{e} \quad \gamma_{\tau_c}(\tau_c) = \tau_{n-1}; \quad (4.20)$$

$$\gamma_{\tau_i}(\tau_i) = \tau_{(n-2)-3i}; \quad (4.21)$$

se $1 \leq i \leq \frac{c-1}{2}$, então

$$\gamma_{\tau_{(c-2)+3i+j}}(\tau_{(c-2)+3i+j}) = \tau_{(n+1)-3i-\frac{2}{j}}. \quad (4.22)$$

Denotaremos essa regra por $\mathfrak{R}_{\{8g-4,4\}}^4$.

Logo a regra $\mathfrak{R}_{\{8g-4,4\}}^4$ nos dá um emparelhamento do polígono hiperbólico \mathcal{P}_{8g-4} , que denotaremos por Φ_{8g-4}^4 . Assim, enunciaremos o seguinte resultado.

Teorema 4.14. *Seja \mathcal{P}_{8g-4} um polígono hiperbólico regular com ângulos internos iguais a $\pi/2$ e Φ_{8g-4}^4 o emparelhamento de arestas do polígono \mathcal{P}_{8g-4} obtido pela*

regra $\mathfrak{R}_{\{8g-4, 4\}}^4$. Então, Φ_{8g-4}^4 gera um grupo Fuchsiano Γ_{8g-4}^4 tal que $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma_{8g-4}^4}$ é uma superfície compacta orientável de gênero g .

Demonstração: A demonstração é análoga a do Teorema 4.6, pois se trata do mesmo polígono.

Ao observarmos o emparelhamento Φ_{8g-4}^4 vemos que os ciclos de vértices são generalizados da seguinte forma. Para $1 \leq i \leq C - 1$, temos:

$$\text{se } i \text{ for ímpar, então } C_{V_i} = \{V_i, V_{n-1-3i}, V_{C+3i}, V_{n+1-3i}\},$$

$$\text{se } i \text{ for par, então } C_{V_i} = \{V_i, V_{n+1-3i}, V_{C+3i}, V_{n-1-3i}\},$$

$$\text{e } C_{V_c} = \{V_c, V_{c+1}, V_{n-1}, V_n\}.$$

Todos os ciclos são homogêneos com 4 vértices cada. E como cada vértice possui ângulos internos iguais $\pi/2$, a soma dos ângulos internos de cada vértice em cada ciclo é igual a 2π . Assim, o emparelhamento Φ_{8g-4}^4 nos dá uma superfície compacta orientável $\frac{\mathbb{H}^2}{\Gamma_{8g-4}^4}$ de gênero g . ■

Vejamos alguns exemplos desse emparelhamento. Para $g = 3, 4, 5$.

Exemplo 4.15. ($g = 3$). Considere o polígono hiperbólico \mathcal{P}_{20} em \mathbb{D}^2 com as arestas τ_1, \dots, τ_{20} e vértices V_1, \dots, V_{20} . Então o emparelhamento Φ_{20}^4 gera uma superfície compacta orientável de gênero 3. De fato, se $g = 3$ temos $n = 20$ arestas e a quantidade de ciclos é $c = 5$. Usando as expressões (4.20), (4.21) e (4.22) da regra de emparelhamentos $\mathfrak{R}_{\{8g-4, 4\}}^4$ temos as seguintes identificações de arestas. Para $1 \leq i \leq 4$ e $j = 1, 2$ temos:

$$\gamma_{\tau_{18}}(\tau_{18}) = \tau_{20} \text{ e } \gamma_{\tau_5}(\tau_5) = \tau_{19}, \text{ por (4.20);}$$

$$\gamma_{\tau_1}(\tau_1) = \tau_{15}, \gamma_{\tau_2}(\tau_2) = \tau_{12}, \gamma_{\tau_3}(\tau_3) = \tau_9, \gamma_{\tau_4}(\tau_4) = \tau_6, \text{ por (4.21);}$$

se $1 \leq i \leq \frac{5-1}{2}$, temos $i = 1, 2$, então

$$\gamma_{\tau_7}(\tau_7) = \tau_{16}, \gamma_{\tau_8}(\tau_8) = \tau_{17}, \gamma_{\tau_{10}}(\tau_{10}) = \tau_{13}, \gamma_{\tau_{11}}(\tau_{11}) = \tau_{14}, \text{ por (4.22).}$$

Logo, obtemos os seguintes pares de arestas emparelhadas,

$\{\tau_1, \tau_{15}\}, \{\tau_2, \tau_{12}\}, \{\tau_3, \tau_9\}, \{\tau_4, \tau_6\}, \{\tau_5, \tau_{19}\}, \{\tau_7, \tau_{16}\}, \{\tau_8, \tau_{17}\}, \{\tau_{10}, \tau_{13}\}, \{\tau_{11}, \tau_{14}\}, \{\tau_{18}, \tau_{20}\}$, (Figura 4.9).

Assim, formamos o emparelhamento

$$\Phi_{20}^4 = \{\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}, \gamma_{\tau_3}, \gamma_{\tau_4}, \gamma_{\tau_5}, \gamma_{\tau_7}, \gamma_{\tau_8}, \gamma_{\tau_{10}}, \gamma_{\tau_{11}}, \gamma_{\tau_{18}}\}.$$

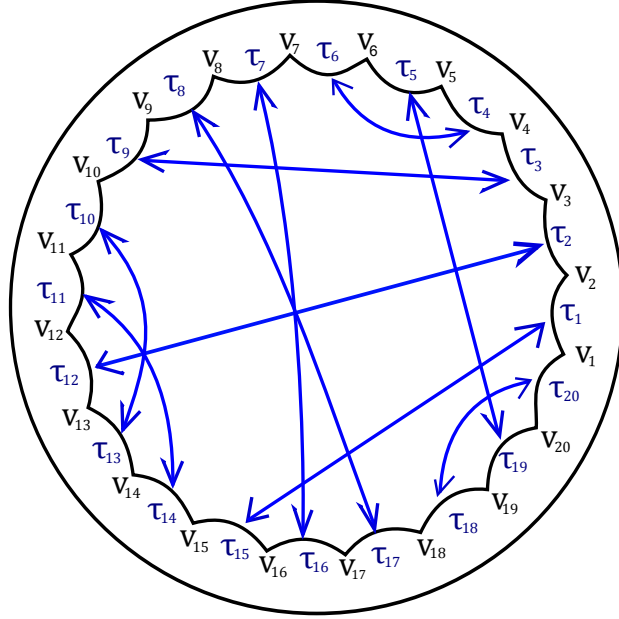


Figura 4.9: Polígono hiperbólico de 20 arestas com emparelhamento Φ_{20}^4 .

obtido pelas identificações de arestas do polígono \mathcal{P}_{20} , pela regra $\mathfrak{R}_{\{8g-4,4\}}^4$.

Os ciclos que esse emparelhamento nos dá, são:

$$C_{V_1} = \{V_1, V_{16}, V_8, V_{18}\}, C_{V_2} = \{V_2, V_{15}, V_{11}, V_{13}\}, C_{V_3} = \{V_3, V_{10}, V_{14}, V_{12}\},$$

$$C_{V_4} = \{V_4, V_9, V_{17}, V_7\} \text{ e } C_{V_5} = \{V_5, V_6, V_{19}, V_{20}\}.$$

Portanto, pelo Teorema 4.14, o emparelhamento Φ_{20}^4 gera uma superfície compacta orientável de gênero $g = 3$.

Exemplo 4.16. ($g = 4$). Considere o polígono hiperbólico \mathcal{P}_{28} em \mathbb{D}^2 com as arestas τ_1, \dots, τ_{28} e vértices V_1, \dots, V_{28} . Então, o emparelhamento Φ_{28}^4 que emparelha as arestas de \mathcal{P}_{28} , gera uma superfície compacta orientável de gênero 4. De fato, como $g = 4$ temos $n = 28$ arestas e a quantidade de ciclos é $c = 7$. Pelas expressões (4.20), (4.21) e (4.22) da regra de emparelhamentos $\mathfrak{R}_{\{8g-4,4\}}^4$ temos as seguintes identificações de arestas. Para $1 \leq i \leq 6$ e $j = 1, 2$ temos:

$$\gamma_{\tau_{26}}(\tau_{26}) = \tau_{28} \text{ e } \gamma_{\tau_7}(\tau_7) = \tau_{27} \text{ por (4.20);}$$

$$\gamma_{\tau_1}(\tau_1) = \tau_{23}, \gamma_{\tau_2}(\tau_2) = \tau_{20}, \gamma_{\tau_3}(\tau_3) = \tau_{17}, \gamma_{\tau_4}(\tau_4) = \tau_{14}, \gamma_{\tau_5}(\tau_5) = \tau_{11}, \\ \gamma_{\tau_6}(\tau_6) = \tau_8 \text{ por (4.21);}$$

se $1 \leq i \leq \frac{7-1}{2}$, temos $i = 1, 2, 3$, então

$$\gamma_{\tau_9}(\tau_9) = \tau_{24}, \gamma_{\tau_{10}}(\tau_{10}) = \tau_{25}, \gamma_{\tau_{12}}(\tau_{12}) = \tau_{21}, \gamma_{\tau_{13}}(\tau_{13}) = \tau_{22}, \gamma_{\tau_{15}}(\tau_{15}) = \tau_{18}, \\ \gamma_{\tau_{16}}(\tau_{16}) = \tau_{19}. \text{ por (4.22).}$$

Ou seja, obtemos as seguintes pares de arestas emparelhadas.

$\{\tau_1, \tau_{23}\}, \{\tau_2, \tau_{20}\}, \{\tau_3, \tau_{17}\}, \{\tau_4, \tau_{14}\}, \{\tau_5, \tau_{11}\}, \{\tau_6, \tau_8\}, \{\tau_7, \tau_{27}\}, \{\tau_9, \tau_{24}\}, \{\tau_{10}, \tau_{25}\},$
 $\{\tau_{12}, \tau_{20}\}, \{\tau_{13}, \tau_{21}\}, \{\tau_{15}, \tau_{18}\}, \{\tau_{16}, \tau_{19}\}, \{\tau_{26}, \tau_{28}\}$. (Figura 4.10).

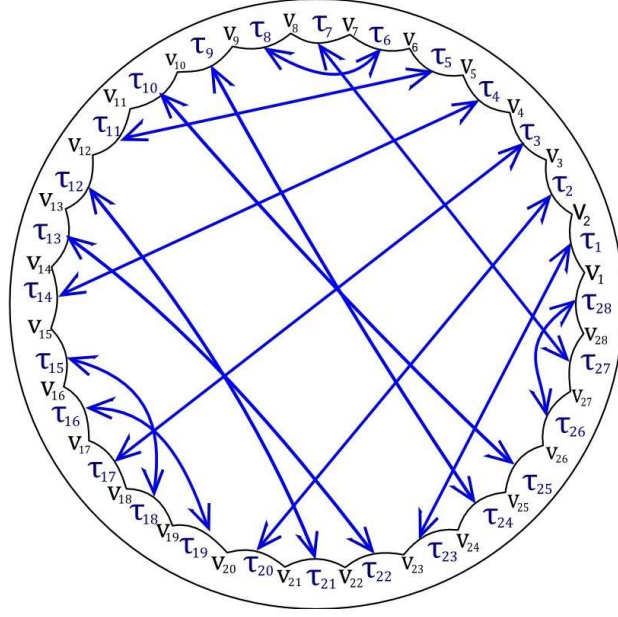


Figura 4.10: Polígono hiperbólico de 28 arestas com emparelhamento Φ_{28}^4 .

O emparelhamento

$$\Phi_{28}^4 = \{\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}, \gamma_{\tau_3}, \gamma_{\tau_4}, \gamma_{\tau_5}, \gamma_{\tau_6}, \gamma_{\tau_7}, \gamma_{\tau_9}, \gamma_{\tau_{10}}, \gamma_{\tau_{12}}, \gamma_{\tau_{13}}, \gamma_{\tau_{15}}, \gamma_{\tau_{16}}, \gamma_{\tau_{26}}\}.$$

formado pelas identificações de arestas do polígono \mathcal{P}_{28} , obtidas pela regra $\mathfrak{R}_{\{8g-4,4\}}^4$, nos dá os seguintes ciclos de vértices:

$$C_{V_1} = \{V_1, V_{24}, V_{10}, V_{26}\}, C_{V_2} = \{V_2, V_{23}, V_{13}, V_{21}\}, C_{V_3} = \{V_3, V_{18}, V_{16}, V_{20}\},$$

$$C_{V_4} = \{V_4, V_{17}, V_{19}, V_{15}\}, C_{V_5} = \{V_5, V_{12}, V_{22}, V_{14}\}, C_{V_5} = \{V_6, V_{11}, V_{25}, V_{19}\}$$

$$\text{e } C_{V_7} = \{V_7, V_8, V_{27}, V_{28}\}.$$

Assim, pelo Teorema 4.14, o emparelhamento $\tilde{\Phi}_{28}$ gera uma superfície compacta orientável de gênero $g = 4$.

Exemplo 4.17. ($g = 5$). Seja \mathcal{P}_{36} um polígono hiperbólico em \mathbb{D}^2 com as arestas τ_1, \dots, τ_{36} e vértices V_1, \dots, V_{36} . Então, o emparelhamento Φ_{36}^4 que emparelha as arestas de \mathcal{P}_{36} , gera uma superfície compacta orientável de gênero 5. De fato, como $g = 5$ temos, $n = 36$ arestas e a quantidade de ciclos é $c = 9$. Usando as expressões (4.20), (4.21) e (4.22) da regra de emparelhamentos $\mathfrak{R}_{\{8g-4,4\}}^4$ temos as seguintes identificações de arestas. Para $1 \leq i \leq 8$ e $j = 1, 2$ temos:

$$\gamma_{\tau_{34}}(\tau_{34}) = \tau_{36} \text{ e } \gamma_{\tau_9}(\tau_9) = \tau_{35}, \text{ por 4.20;}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\tau_1}(\tau_1) = \tau_{31}, \gamma_{\tau_2}(\tau_2) = \tau_{28}, \gamma_{\tau_3}(\tau_3) = \tau_{25}, \gamma_{\tau_4}(\tau_4) = \tau_{22}, \gamma_{\tau_5}(\tau_5) = \tau_{19}, \\ \gamma_{\tau_6}(\tau_6) = \tau_{16}, \gamma_{\tau_7}(\tau_7) = \tau_{13}, \gamma_{\tau_8}(\tau_8) = \tau_{10} \text{ por (4.21);} \end{aligned}$$

se $1 \leq i \leq \frac{7-1}{2}$, temos $i = 1, 2, 3, 4$, então

$$\begin{aligned} \gamma_{\tau_{11}}(\tau_{11}) = \tau_{32}, \gamma_{\tau_{12}}(\tau_{12}) = \tau_{33}, \gamma_{\tau_{14}}(\tau_{14}) = \tau_{29}, \gamma_{\tau_{15}}(\tau_{15}) = \tau_{30}, \gamma_{\tau_{17}}(\tau_{17}) = \tau_{26}, \\ \gamma_{\tau_{18}}(\tau_{18}) = \tau_{27}, \gamma_{\tau_{20}}(\tau_{20}) = \tau_{23}, \gamma_{\tau_{21}}(\tau_{21}) = \tau_{24} \text{ por (4.22).} \end{aligned}$$

Logo, obtemos as seguintes identificações das arestas emparelhadas.

$$\begin{aligned} \{\tau_1, \tau_{31}\}, \{\tau_2, \tau_{28}\}, \{\tau_3, \tau_{25}\}, \{\tau_4, \tau_{22}\}, \{\tau_5, \tau_{19}\}, \{\tau_6, \tau_{16}\}, \{\tau_7, \tau_{13}\}, \{\tau_8, \tau_{10}\}, \{\tau_9, \tau_{35}\}, \\ \{\tau_{11}, \tau_{32}\}, \{\tau_{12}, \tau_{33}\}, \{\tau_{14}, \tau_{29}\}, \{\tau_{15}, \tau_{30}\}, \{\tau_{17}, \tau_{26}\}, \{\tau_{18}, \tau_{27}\}, \{\tau_{20}, \tau_{23}\}, \{\tau_{21}, \tau_{24}\}, \\ \{\tau_{34}, \tau_{36}\} \text{ (Figura 4.11).} \end{aligned}$$

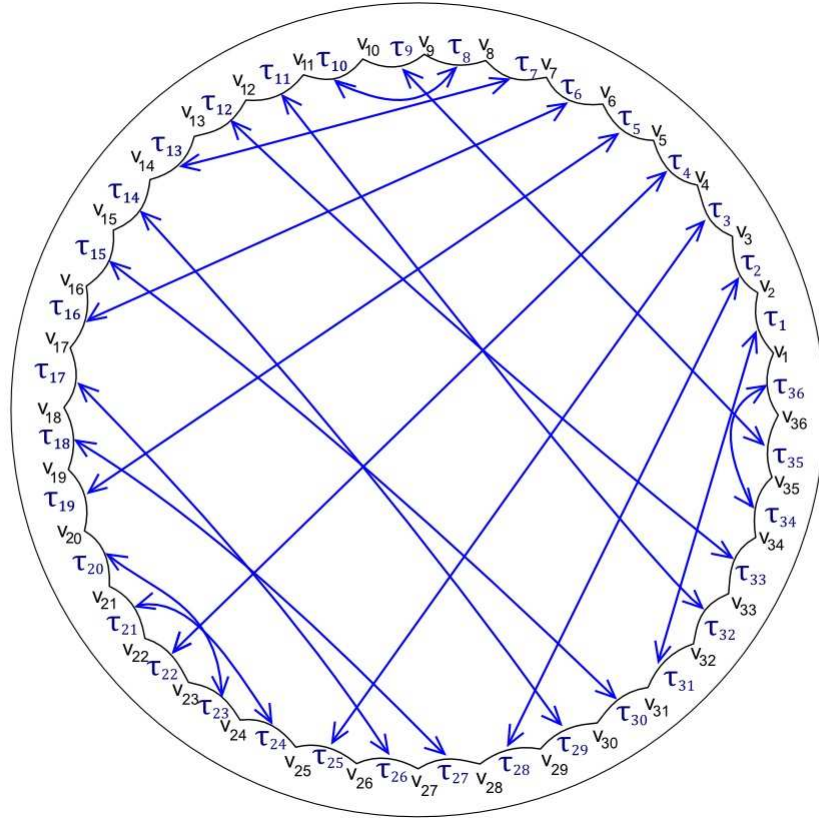


Figura 4.11: Polígono hiperbólico de 36 arestas com emparelhamento Φ_{36}^4 .

O emparelhamento

$$\Phi_{36}^4 = \{\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}, \gamma_{\tau_3}, \gamma_{\tau_4}, \gamma_{\tau_5}, \gamma_{\tau_6}, \gamma_{\tau_7}, \gamma_{\tau_8}, \gamma_{\tau_9}, \gamma_{\tau_{11}}, \gamma_{\tau_{12}}, \gamma_{\tau_{14}}, \gamma_{\tau_{15}}, \gamma_{\tau_{17}}, \gamma_{\tau_{18}}, \gamma_{\tau_{20}}, \gamma_{\tau_{21}}, \gamma_{\tau_{34}}\}.$$

formado pelas identificações de arestas do polígono \mathcal{P}_{36} , obtidas pela regra $\mathfrak{R}_{\{8g-4, 4\}}^4$, nos dá os seguintes ciclos de vértices:

$$C_{V_1} = \{V_1, V_{32}, V_{12}, V_{34}\}, C_{V_2} = \{V_2, V_{31}, V_{15}, V_{29}\}, C_{V_3} = \{V_3, V_{26}, V_{18}, V_{28}\},$$

$$C_{V_4} = \{V_4, V_{25}, V_{21}, V_{23}\}, C_{V_5} = \{V_5, V_{20}, V_{24}, V_{22}\}, C_{V_6} = \{V_6, V_{19}, V_{27}, V_{17}\}, \\ C_{V_7} = \{V_7, V_{14}, V_{30}, V_{16}\}, C_{V_8} = \{V_8, V_{13}, V_{33}, V_{11}\} \text{ e } C_{V_9} = \{V_9, V_{10}, V_{35}, V_{36}\}.$$

Assim, pelo Teorema 4.14, o emparelhamento Φ_{36}^4 gera uma superfície compacta orientável de gênero $g = 5$.

Resumimos os resultados na tabela abaixo:

Arestas	Emparelhamentos	Gênero
20	Φ_{20}^4	3
28	Φ_{36}^4	4
36	Φ_{52}^4	5

4.4 Outros Casos de Emparelhamentos Generalizados $\{8g - 4, 4\}$

Nesta seção os emparelhamentos de arestas, que construiremos, estão associados às tesselações $\{8\alpha - 4, 4\}$, com $\alpha \geq 3$ ímpar, $\{8\lambda - 4, 4\}$, com $\lambda \geq 4$ par e $\{8g - 4, 4\}$, com $g \geq 2$ natural, todos feitos para o polígono hiperbólico \mathcal{P}_{8g-4} , pois α, β são casos particulares de g . Generalizamos as identificações de arestas e os ciclos de vértices gerados pelos emparelhamentos. Apresentaremos exemplos desses emparelhamentos.

Observação 4.18. *Os emparelhamentos construídos nessa seção, também satisfazem as condições do teorema de Poincaré, gerando grupos Fuchsianos Γ e superfícies compactas orientáveis, como foi visto nas seções anteriores, mas o nosso interesse nessa seção é apenas apresentar estes emparelhamentos que construiremos.*

4.4.1 Emparelhamentos Generalizados $\{8\alpha - 4, 4\}$

Apresentaremos dois emparelhamentos construídos associados à tesselação $\{8\alpha - 4, 4\}$ e os denotaremos por $\Phi_{8\alpha-4}^5$ e $\Phi_{8\alpha-4}^6$. Generalizamos as identificações das arestas e dos ciclos de vértices em cada emparelhamento. Começamos por:

Emparelhamento Generalizado $\Phi_{8\alpha-4}^5$

Seja $\mathcal{P}_{8\alpha-4}$, com $\alpha \geq 3$ ímpar, com ângulos internos todos medindo $\pi/2$. Na Seção 4.2, justificamos a existência e convexidade desse polígono. Observando

o emparelhamento feito na Seção 3.5, do capítulo anterior, construímos um emparelhamento para as arestas do polígono hiperbólico $\mathcal{P}_{8\alpha-4}$, que foi gerado pela seguinte regra, que denotaremos por $\mathfrak{R}_{\{8\alpha-4, 4\}}^5$.

Seja $n = 8\alpha - 4$, com $\alpha \geq 3$ ímpar, o número de arestas e $(c = 8\alpha - 4)/4 = 2\alpha - 1$ o número de ciclos com 4 vértices cada a serem obtidos. Então, para $1 \leq i \leq n$, definimos as identificações das arestas como:

Para $1 \leq i < 2c$ ímpar, temos

$$\gamma_{\tau_i}(\tau_i) = \tau_{n-i}; \quad (4.23)$$

Para $1 \leq i < c$, se $i = 2(c - 2k - 1)$, $2(c - 2k - 2)$, onde $1 \leq k < \frac{c-1}{2}$ ímpar temos

$$\gamma_{\tau_i}(\tau_i) = \tau_{i+4} \text{ e } \gamma_{\tau_{2c+i}}(\tau_{2c+i}) = \tau_{2c+i+4}; \quad (4.24)$$

e

$$\gamma_{\tau_{2c}}(\tau_{2c}) = \tau_n. \quad (4.25)$$

A regra $\mathfrak{R}_{\{8\alpha-4, 4\}}^5$ nos fornece um emparelhamento de arestas para o polígono $\mathcal{P}_{8\alpha-4}$, denotada por $\Phi_{8\alpha-4}^5$.

Vejam os dois exemplos para $\alpha = 3$ e $\alpha = 5$.

Exemplo 4.19. ($\alpha = 3$). *Considere o polígono hiperbólico \mathcal{P}_{20} em \mathbb{D}^2 com as arestas τ_1, \dots, τ_{20} e vértices V_1, \dots, V_{20} . Sendo $\alpha = 3$, temos $n = 20$ arestas e a quantidade de ciclos é $c = 5$. Usando a regra de emparelhamentos $\mathfrak{R}_{\{8\alpha-4, 4\}}^5$, temos as seguintes identificações de arestas, obtidas pelas expressões (4.23), (4.24) e (4.25).*

Para $1 \leq i < 10$ ímpar, ou seja, $i = 1, 3, 5, 7, 9$,

$$\gamma_{\tau_1}(\tau_1) = \tau_{19}, \gamma_{\tau_3}(\tau_3) = \tau_{17}, \gamma_{\tau_5}(\tau_5) = \tau_{15}, \gamma_{\tau_7}(\tau_7) = \tau_{13}, \gamma_{\tau_9}(\tau_9) = \tau_{11} \text{ por (4.23)};$$

Para $1 \leq i < 5$ e $1 \leq k < 2$ ímpar, ou seja, $k = 1$, temos $i = 2, 4$, daí

$$\gamma_{\tau_2}(\tau_2) = \tau_6, \gamma_{\tau_4}(\tau_4) = \tau_8, \gamma_{\tau_{12}}(\tau_{12}) = \tau_{16}, \gamma_{\tau_{14}}(\tau_{14}) = \tau_{18} \text{ por (4.24)};$$

$$\text{e } \gamma_{\tau_{10}}(\tau_{10}) = \tau_{20} \text{ por (4.25)}.$$

Logo, temos os seguintes pares de arestas emparelhadas:

$$\{\tau_1, \tau_{19}\}, \{\tau_2, \tau_6\}, \{\tau_3, \tau_{17}\}, \{\tau_4, \tau_8\}, \{\tau_5, \tau_{15}\}, \{\tau_7, \tau_{13}\}, \{\tau_9, \tau_{11}\}, \{\tau_{10}, \tau_{20}\}, \{\tau_{12}, \tau_{16}\}, \{\tau_{14}, \tau_{18}\}, \text{ (Figura 4.12)}.$$

Assim, formamos o emparelhamento

$$\Phi_{20}^5 = \{\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}, \gamma_{\tau_3}, \gamma_{\tau_4}, \gamma_{\tau_5}, \gamma_{\tau_7}, \gamma_{\tau_9}, \gamma_{\tau_{10}}, \gamma_{\tau_{12}}, \gamma_{\tau_{14}}\}.$$

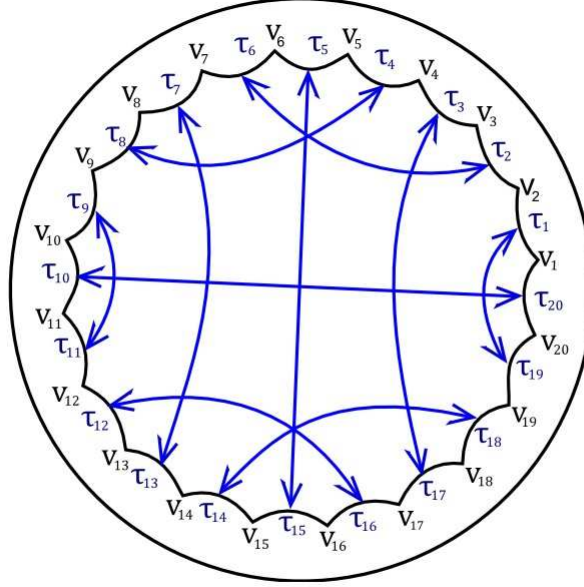


Figura 4.12: Polígono hiperbólico de 20 arestas com emparelhamento Φ_{20}^5 .

Os ciclos que esse emparelhamento nos dá, são:

$$C_{V_1} = \{V_1, V_{10}, V_{11}, V_{20}\}, C_{V_2} = \{V_2, V_7, V_{14}, V_{19}\}, C_{V_3} = \{V_3, V_6, V_{15}, V_{18}\},$$

$$C_{V_4} = \{V_4, V_9, V_{12}, V_{17}\} \text{ e } C_{V_5} = \{V_5, V_8, V_{13}, V_{16}\}.$$

Exemplo 4.20. ($\alpha = 5$). Seja \mathcal{P}_{36} um polígono hiperbólico em \mathbb{D}^2 com as arestas τ_1, \dots, τ_{36} e vértices V_1, \dots, V_{36} . Sendo $\alpha = 5$ então $n = 36$ arestas e a quantidade de ciclos é $c = 9$. Usando a regra de emparelhamentos $\mathfrak{R}_{\{8\alpha-4,4\}}^5$, temos as seguintes identificações de arestas, obtidas pelas expressões (4.23), (4.24) e (4.25). Para $1 \leq i < 18$ ímpar, ou seja, $i = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17$, temos

$$\begin{aligned} \gamma_{\tau_1}(\tau_1) &= \tau_{35}, \gamma_{\tau_3}(\tau_3) = \tau_{33}, \gamma_{\tau_5}(\tau_5) = \tau_{31}, \gamma_{\tau_7}(\tau_7) = \tau_{29}, \gamma_{\tau_9}(\tau_9) = \tau_{27}, \\ \gamma_{\tau_{11}}(\tau_{11}) &= \tau_{25}, \gamma_{\tau_{13}}(\tau_{13}) = \tau_{23}, \gamma_{\tau_{15}}(\tau_{15}) = \tau_{21}, \gamma_{\tau_{17}}(\tau_{17}) = \tau_{19} \text{ por (4.23);} \end{aligned}$$

Para $1 \leq i < 9$ e $1 \leq k < 4$ ímpar, ou seja, $k = 1, 3$. Então, temos $i = 2, 4, 10, 12$, daí

$$\begin{aligned} \gamma_{\tau_2}(\tau_2) &= \tau_6, \gamma_{\tau_4}(\tau_4) = \tau_8, \gamma_{\tau_{10}}(\tau_{10}) = \tau_{14}, \gamma_{\tau_{12}}(\tau_{12}) = \tau_{16}, \gamma_{\tau_{20}}(\tau_{20}) = \tau_{24}, \\ \gamma_{\tau_{22}}(\tau_{22}) &= \tau_{26}, \gamma_{\tau_{28}}(\tau_{28}) = \tau_{32}, \gamma_{\tau_{30}}(\tau_{30}) = \tau_{34} \text{ por (4.24).} \end{aligned}$$

$$\text{e } \gamma_{\tau_{18}}(\tau_{18}) = \tau_{36} \text{ por (4.25)}$$

Logo, temos as seguintes identificações das arestas emparelhadas.

$$\begin{aligned} &\{\tau_1, \tau_{35}\}, \{\tau_2, \tau_6\}, \{\tau_3, \tau_{33}\}, \{\tau_4, \tau_8\}, \{\tau_5, \tau_{31}\}, \{\tau_7, \tau_{29}\}, \{\tau_9, \tau_{27}\}, \{\tau_{10}, \tau_{14}\}, \{\tau_{11}, \tau_{25}\}, \\ &\{\tau_{12}, \tau_{16}\}. \{\tau_{13}, \tau_{23}\}, \{\tau_{15}, \tau_{21}\}, \{\tau_{17}, \tau_{19}\}, \{\tau_{18}, \tau_{36}\}, \{\tau_{20}, \tau_{24}\}, \{\tau_{22}, \tau_{26}\}, \{\tau_{28}, \tau_{32}\}, \\ &\{\tau_{30}, \tau_{34}\}. \text{ (Figura 4.13) .} \end{aligned}$$

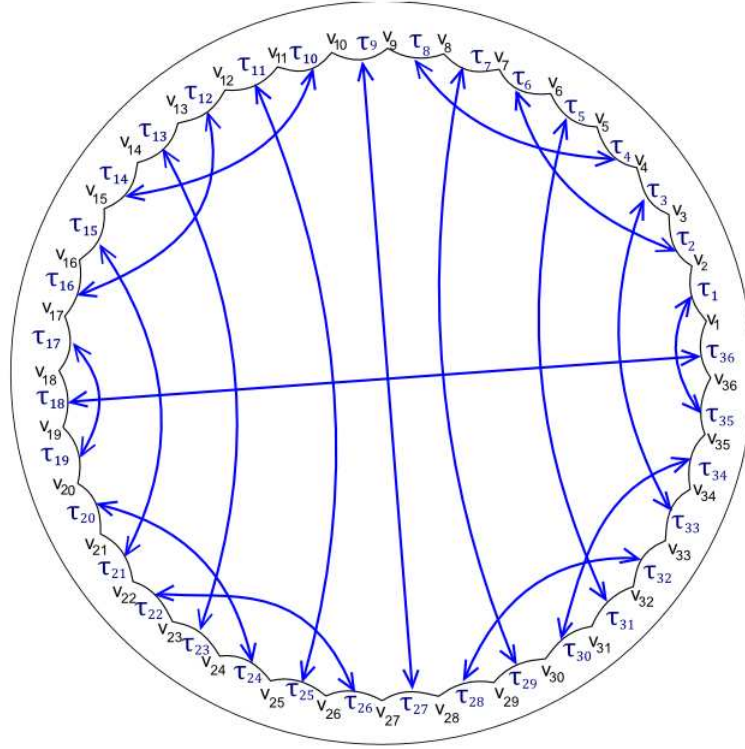


Figura 4.13: Polígono hiperbólico de 36 arestas com emparelhamento Φ_{36}^5 .

Logo, formamos o emparelhamento

$$\Phi_{36}^5 = \{\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}, \gamma_{\tau_3}, \gamma_{\tau_4}, \gamma_{\tau_5}, \gamma_{\tau_7}, \gamma_{\tau_9}, \gamma_{\tau_{10}}, \gamma_{\tau_{11}}, \gamma_{\tau_{12}}, \gamma_{\tau_{13}}, \gamma_{\tau_{15}}, \gamma_{\tau_{17}}, \gamma_{\tau_{18}}, \gamma_{\tau_{20}}, \gamma_{\tau_{22}}, \gamma_{\tau_{28}}, \gamma_{\tau_{30}}\}.$$

Os ciclos que esse emparelhamento nos dá, são:

$$\begin{aligned} C_{V_1} &= \{V_1, V_{18}, V_{19}, V_{36}\}, & C_{V_2} &= \{V_2, V_7, V_{30}, V_{35}\}, & C_{V_3} &= \{V_3, V_6, V_{31}, V_{34}\}, \\ C_{V_4} &= \{V_4, V_9, V_{28}, V_{33}\}, & C_{V_5} &= \{V_5, V_8, V_{29}, V_{32}\}, & C_{V_{10}} &= \{V_{10}, V_{15}, V_{22}, V_{27}\}, \\ C_{V_{11}} &= \{V_{11}, V_{14}, V_{23}, V_{26}\}, & C_{V_{12}} &= \{V_{12}, V_{17}, V_{20}, V_{25}\} & \text{e } C_{V_{13}} &= \{V_{13}, V_{16}, V_{21}, V_{24}\}. \end{aligned}$$

Generalização dos ciclos.

Por recorrência e observando os emparelhamentos, temos a generalização dos ciclos de vértices do emparelhamento $\Phi_{8\alpha-4}^5$, que são dados por:

$$C_{V_i} = \{V_1, V_{2c}, V_{2c+1}, V_n\} \quad (4.26)$$

Para $1 \leq i < c$ par, temos que se $i = 2(c - 2k - 1)$, $2(c - 2k - 2)$, onde

$1 \leq k < \frac{c-1}{2}$ é ímpar temos

$$C_{V_i} = \{V_i, V_{i+5}, V_{n-4-i}, V_{n+1-i}\} \text{ e } C_{V_{i+1}} = \{V_{i+1}, V_{i+4}, V_{n-3-i}, V_{n-i}\} \quad (4.27)$$

Emparelhamento Generalizado $\Phi_{8\alpha-4}^6$

Para este mesmo polígono $\mathcal{P}_{8\alpha-4}$, construímos uma nova regra que emparelha as arestas do polígono $\mathcal{P}_{8\alpha-4}$ e a denotaremos por $\mathfrak{R}_{8\alpha-4}^6$.

Seja $n = 8\alpha - 4$, com $\alpha \geq 3$ ímpar, o número de arestas e $c = \frac{8\alpha - 4}{4} = 2\alpha - 1$ o número de ciclos (com 4 vértices cada, a ser obtido). Então, para $1 \leq i \leq n$, definimos as identificações das arestas como:

para $1 \leq i < 2c$ ímpar, temos

$$\gamma_{\tau_i}(\tau_i) = \tau_{n-i}; \quad (4.28)$$

se $2 < i < c - 2$, par temos

$$\gamma_{\tau_i}(\tau_i) = \tau_{c+i-1} \text{ e } \gamma_{\tau_{(2c+i)}}(\tau_{(2c+i)}) = \tau_{(3c+i-1)}; \quad (4.29)$$

e

$$\begin{aligned} \gamma_{\tau_{2(c-1)}}(\tau_{2(c-1)}) &= \tau_{\tau_{n-2}}, \gamma_{\tau_{2(c+1)}}(\tau_{2(c+1)}) = \tau_2, \\ \gamma_{\tau_{(c-1)}}(\tau_{(c-1)}) &= \tau_{c+1}, \gamma_{\tau_{2c}}(\tau_{2c}) = \tau_n \\ \gamma_{\tau_{(3c-1)}}(\tau_{(3c-1)}) &= \tau_{(3c+1)}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

A regra $\mathfrak{R}_{8\alpha-4}^6$ nos fornece um emparelhamento de arestas para o polígono $\mathcal{P}_{8\alpha-4}$, denotada por $\Phi_{8\alpha-4}^6$.

Vejam os dois exemplos para quando $\alpha = 3$ e $\alpha = 5$.

Exemplo 4.21. ($\alpha = 3$). Considere o polígono hiperbólico \mathcal{P}_{20} em \mathbb{D}^2 com as arestas τ_1, \dots, τ_{20} e vértices V_1, \dots, V_{20} . Sendo $\alpha = 3$, então $n = 20$ é o número de arestas e a quantidade de ciclos é $c = 5$. Usando a regra de emparelhamentos $\mathfrak{R}_{8\alpha-4}^6$ temos as seguintes identificações de arestas, obtidas pelas expressões (4.28), (4.29) e (4.30):

para $1 \leq i < 10$ ímpar, ou seja, $i = 1, 3, 5, 7, 9$,

$$\gamma_{\tau_1}(\tau_1) = \tau_{19}, \gamma_{\tau_3}(\tau_3) = \tau_{17}, \gamma_{\tau_5}(\tau_5) = \tau_{15}, \gamma_{\tau_7}(\tau_7) = \tau_{13}, \gamma_{\tau_9}(\tau_9) = \tau_{11} \text{ por (4.28);}$$

para $2 < i < 3$ par, não há identificações em 4.29;

$$\gamma_{\tau_8}(\tau_8) = \tau_{18}, \gamma_{\tau_{12}}(\tau_{12}) = \tau_2, \gamma_{\tau_4}(\tau_4) = \tau_6, \gamma_{\tau_{10}}(\tau_{10}) = \tau_{20} \text{ e } \gamma_{\tau_{14}}(\tau_{14}) = \tau_{16} \text{ por (4.30).}$$

Logo, temos as seguintes identificações das arestas emparelhadas.

$\{\tau_1, \tau_{19}\}, \{\tau_2, \tau_{12}\}, \{\tau_3, \tau_{17}\}, \{\tau_4, \tau_6\}, \{\tau_5, \tau_{15}\}, \{\tau_7, \tau_{13}\}, \{\tau_8, \tau_{18}\}, \{\tau_9, \tau_{11}\}, \{\tau_{10}, \tau_{20}\},$
 $\{\tau_{14}, \tau_{16}\}$. (Figura 4.14).

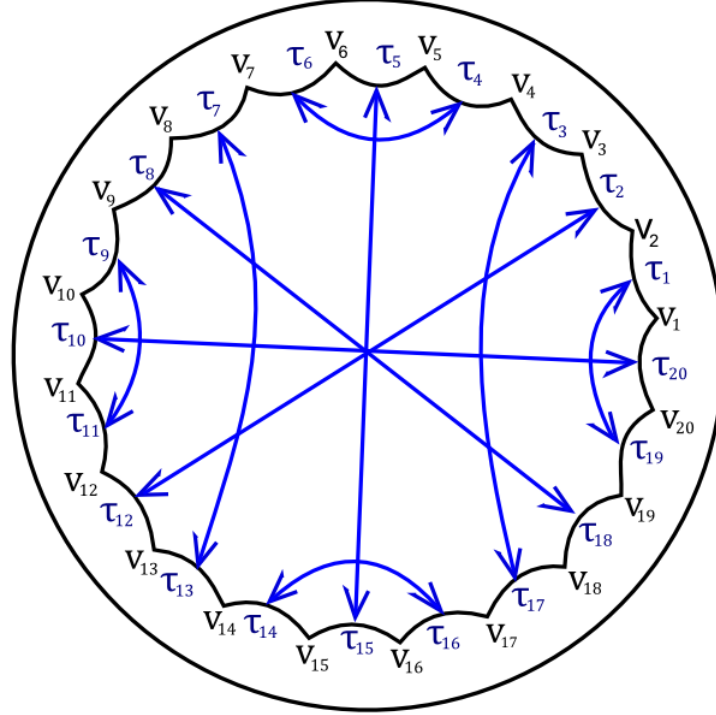


Figura 4.14: Polígono hiperbólico de 20 arestas com emparelhamento Φ_{20}^6 .

Assim, formamos o emparelhamento

$$\Phi_{20}^6 = \{\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_3}, \gamma_{\tau_4}, \gamma_{\tau_5}, \gamma_{\tau_7}, \gamma_{\tau_8}, \gamma_{\tau_9}, \gamma_{\tau_{10}}, \gamma_{\tau_{12}}, \gamma_{\tau_{14}}\},$$

gerado pela regra $\mathfrak{R}_{8\alpha-4}^6$.

Os ciclos que esse emparelhamento nos dá, são:

$$C_{V_1} = \{V_1, V_{10}, V_{11}, V_{20}\}, \quad C_{V_2} = \{V_2, V_{13}, V_8, V_{19}\}, \quad C_{V_3} = \{V_3, V_{12}, V_9, V_{18}\},$$

$$C_{V_4} = \{V_4, V_7, V_{14}, V_{17}\}, \quad e \quad C_{V_5} = \{V_5, V_6, V_{15}, V_{16}\}.$$

Exemplo 4.22. ($\alpha = 5$) Seja \mathcal{P}_{36} um polígono hiperbólico em \mathbb{D}^2 com as arestas τ_1, \dots, τ_{36} e vértices V_1, \dots, V_{36} . Sendo $\alpha = 5$, então $n = 36$ é o número de arestas e a quantidade de ciclos é $c = 9$. Pela regra de emparelhamentos $\mathfrak{R}_{8\alpha-4}^6$ temos as seguintes identificações de arestas, obtidas pelas expressões (4.28), (4.29) e (4.30):

para $1 \leq i < 18$ ímpar, ou seja, $i = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17$, temos

$$\begin{aligned} \gamma_{\tau_1}(\tau_1) &= \tau_{35}, \quad \gamma_{\tau_3}(\tau_3) = \tau_{33}, \quad \gamma_{\tau_5}(\tau_5) = \tau_{31}, \quad \gamma_{\tau_7}(\tau_7) = \tau_{29}, \quad \gamma_{\tau_9}(\tau_9) = \tau_{27}, \\ \gamma_{\tau_{11}}(\tau_{11}) &= \tau_{25}, \quad \gamma_{\tau_{13}}(\tau_{13}) = \tau_{23}, \quad \gamma_{\tau_{15}}(\tau_{15}) = \tau_{21}, \quad \gamma_{\tau_{17}}(\tau_{17}) = \tau_{19} \end{aligned} \text{ por (4.28);}$$

para $2 < i < 7$ par, ou seja, $i = 4, 6$ temos

$$\gamma_{\tau_4}(\tau_4) = \tau_{12}, \gamma_{\tau_6}(\tau_6) = \tau_{14}, \gamma_{\tau_{22}}(\tau_{22}) = \tau_{30}, \gamma_{\tau_{24}}(\tau_{24}) = \tau_{32} \text{ por (4.29);}$$

e

$$\gamma_{\tau_{16}}(\tau_{16}) = \tau_{34}, \gamma_{\tau_{20}}(\tau_{20}) = \tau_2, \gamma_{\tau_{18}}(\tau_{18}) = \tau_{36}, \gamma_{\tau_8}(\tau_8) = \tau_{10}, \gamma_{\tau_{26}}(\tau_{26}) = \tau_{28} \\ \text{por (4.30).}$$

Ou seja, temos os pares de arestas emparelhadas

$\{\tau_1, \tau_{35}\}, \{\tau_2, \tau_{20}\}, \{\tau_3, \tau_{33}\}, \{\tau_4, \tau_{12}\}, \{\tau_5, \tau_{31}\}, \{\tau_6, \tau_{14}\}, \{\tau_7, \tau_{29}\}, \{\tau_8, \tau_{10}\}, \{\tau_9, \tau_{27}\},$
 $\{\tau_{11}, \tau_{25}\}, \{\tau_{13}, \tau_{23}\}, \{\tau_{15}, \tau_{21}\}, \{\tau_{16}, \tau_{34}\}, \{\tau_{17}, \tau_{19}\}, \{\tau_{18}, \tau_{36}\}, \{\tau_{22}, \tau_{30}\}, \{\tau_{24}, \tau_{32}\},$
 $\{\tau_{26}, \tau_{28}\}$. (Figura 4.15).

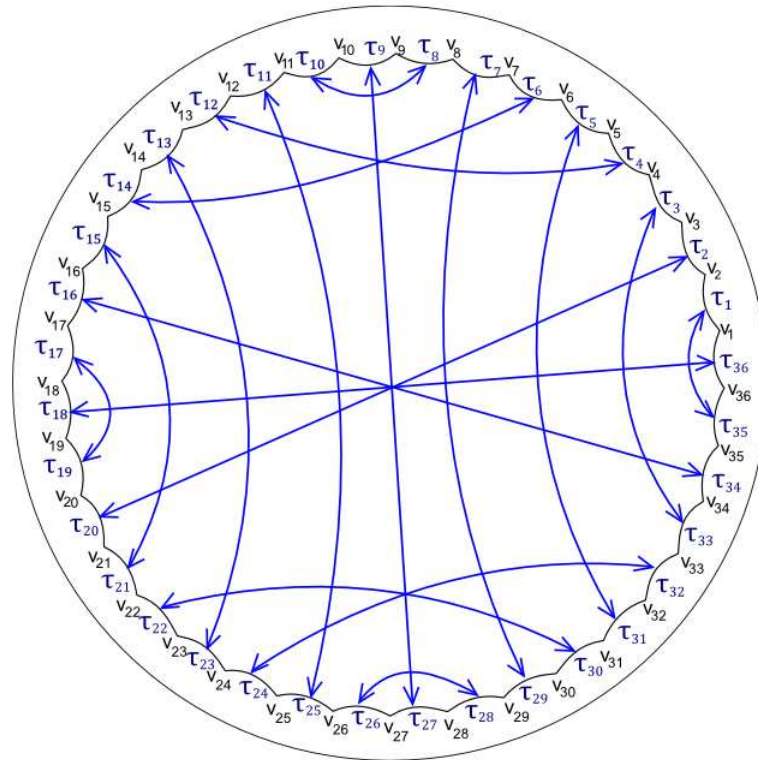


Figura 4.15: Polígono hiperbólico de 36 arestas com emparelhamento Φ_{36}^6 .

Logo, obtemos o emparelhamento

$$\Phi_{36}^6 = \{\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_3}, \gamma_{\tau_4}, \gamma_{\tau_5}, \gamma_{\tau_6}, \gamma_{\tau_7}, \gamma_{\tau_8}, \gamma_{\tau_9}, \gamma_{\tau_{11}}, \gamma_{\tau_{13}}, \gamma_{\tau_{15}}, \gamma_{\tau_{16}}, \gamma_{\tau_{17}}, \gamma_{\tau_{18}}, \gamma_{\tau_{20}}, \gamma_{\tau_{22}}, \gamma_{\tau_{24}}, \gamma_{\tau_{26}}\},$$

gerado pela regra $\mathfrak{R}_{8\alpha-4}^6$ que nos fornece os seguintes ciclos:

$$C_{V_1} = \{V_1, V_{18}, V_{19}, V_{36}\}, C_{V_2} = \{V_2, V_{21}, V_{16}, V_{35}\}, C_{V_3} = \{V_3, V_{20}, V_{17}, V_{34}\},$$

$$C_{V_4} = \{V_4, V_{13}, V_{24}, V_{33}\}, C_{V_5} = \{V_5, V_{12}, V_{25}, V_{32}\}, C_{V_6} = \{V_6, V_{15}, V_{22}, V_{31}\},$$

$$C_{V_7} = \{V_7, V_{14}, V_{23}, V_{30}\}, C_{V_8} = \{V_8, V_{11}, V_{26}, V_{29}\}, \text{ e } C_{V_9} = \{V_9, V_{10}, V_{27}, V_{28}\}.$$

Generalização dos ciclos.

Por recorrência e observando os emparelhamentos, temos a generalização dos ciclos de vértices do emparelhamento $\Phi_{8\alpha-4}^6$, que são dados por:

Seja $n = 8\alpha - 4$, $c = n/4$ e $1 < i < c - 1$, então

$$\begin{aligned} C_{V_1} &= \{V_1, V_{2c}, V_{2c+1}, V_n\}, C_{V_2} = \{V_2, V_{2c+3}, V_{2c-2}, V_{n-1}\}, \\ C_{V_3} &= \{V_3, V_{2c+2}, V_{2c-1}, V_{n-2}\}, C_{V_{c-1}} = \{V_{c-1}, V_{c+2}, V_{3c-1}, V_{3c+2}\} \text{ e} \\ C_{V_c} &= \{V_c, V_{c+1}, V_{3c}, V_{3c+1}\}; \end{aligned} \quad (4.31)$$

se $3 < i < c - 1$ é par, então

$$C_{V_i} = \{V_i, V_{c+i}, V_{3c+1-i}, V_{n+1-i}\}; \quad (4.32)$$

se $3 < i < c - 1$ é ímpar, então

$$C_{V_i} = \{V_i, V_{c-2+i}, V_{3c+3-i}, V_{n+3-i}\}. \quad (4.33)$$

4.4.2 Emparelhamento Generalizado $\{8\lambda - 4, 4\}$

Apresentaremos um emparelhamento associado à tesselação $\{8\lambda - 4, 4\}$ que são tesselações de $\{8g - 4, 4\}$, só que aqui, estamos interessados quando $g = \lambda \geq 4$ é par, pois o emparelhamento é construído para um polígono hiperbólico com $8\lambda - 4$ arestas. Esse emparelhamento será denotado por $\Phi_{8\lambda-4}^7$, generalizamos as identificações das arestas e dos ciclos de vértices.

Seja $\mathcal{P}_{8\lambda-4}$, com $\lambda \geq 4$ par, com ângulos internos todos medindo $\pi/2$. A partir dos emparelhamentos feitos na subseção anterior e o realizado na Seção 3.5, construímos um emparelhamento para as arestas do polígono hiperbólico $\mathcal{P}_{8\lambda-4}$, gerado pela regra que denotaremos por $\mathfrak{R}_{\{8\lambda-4, 4\}}^7$.

Seja $n = 8\lambda - 4$, com $\lambda \geq 3$, o número de arestas e $c = (8\lambda - 4)/4 = 2\lambda - 1$ (número de ciclos, com 4 vértices cada, a ser obtido). Então, para $1 \leq i \leq n$, definimos as identificações das arestas como:

se $1 \leq i < 2c$ ímpar, temos

$$\gamma_{\tau_i}(\tau_i) = \tau_{n-i}; \quad (4.34)$$

se $1 \leq i < c - 1$ par, então

$$\gamma_{\tau_i}(\tau_i) = \tau_{c+i+1} \text{ e } \gamma_{\tau_{2c+i}}(\tau_{2c+i}) = \tau_{3c+1+i}; \quad (4.35)$$

e

$$\gamma_{\tau_{c-1}}(\tau_{c-1}) = \tau_{c+1}, \gamma_{\tau_{2c}}(\tau_{2c}) = \tau_n \text{ e } \gamma_{\tau_{3c-1}}(\tau_{3c-1}) = \tau_{3c+1}. \quad (4.36)$$

A regra $\mathfrak{R}_{\{8\lambda-4, 4\}}^7$ nos fornece um emparelhamento de arestas para o polígono $\mathcal{P}_{8\lambda-4}$, denotada por $\Phi_{8\lambda-4}^7$.

Exemplos para $\lambda = 4$ e $\lambda = 6$.

Exemplo 4.23. ($\lambda = 4$). Considere o polígono hiperbólico \mathcal{P}_{28} em \mathbb{D}^2 com as arestas τ_1, \dots, τ_{28} e vértices V_1, \dots, V_{28} . Sendo $\lambda = 4$, temos $n = 28$ e $c = 7$. Usando a regra de emparelhamentos $\mathfrak{R}_{\{8\lambda-4, 4\}}^7$ temos as seguintes identificações de arestas, obtidas pelas expressões (4.34), (4.35) e (4.36):

se $1 \leq i < 14$ ímpar, ou seja, $i = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13$, temos

$$\begin{aligned} \gamma_{\tau_1}(\tau_1) = \tau_{27}, \gamma_{\tau_3}(\tau_3) = \tau_{25}, \gamma_{\tau_5}(\tau_5) = \tau_{23}, \gamma_{\tau_7}(\tau_7) = \tau_{21}, \gamma_{\tau_9}(\tau_9) = \tau_{19}, \\ \gamma_{\tau_{11}}(\tau_{11}) = \tau_{17}, \gamma_{\tau_{13}}(\tau_{13}) = \tau_{15} \text{ por (4.34);} \end{aligned}$$

se $1 < i < 6$ par, ou seja, $i = 2, 4$ então

$$\gamma_{\tau_2}(\tau_2) = \tau_{10}, \gamma_{\tau_4}(\tau_4) = \tau_{12}, \gamma_{\tau_{16}}(\tau_{16}) = \tau_{24}, \gamma_{\tau_{18}}(\tau_{18}) = \tau_{26}, \text{ por (4.35);}$$

e

$$\gamma_{\tau_6}(\tau_6) = \tau_8, \gamma_{\tau_{14}}(\tau_{14}) = \tau_{28}, \gamma_{\tau_{20}}(\tau_{20}) = \tau_{22} \text{ por (4.36).}$$

Assim, temos os seguintes pares de arestas emparelhadas

$\{\tau_1, \tau_{27}\}, \{\tau_2, \tau_{10}\}, \{\tau_3, \tau_{25}\}, \{\tau_4, \tau_{12}\}, \{\tau_5, \tau_{23}\}, \{\tau_6, \tau_8\}, \{\tau_7, \tau_{21}\}, \{\tau_9, \tau_{19}\}, \{\tau_{11}, \tau_{17}\},$
 $\{\tau_{13}, \tau_{15}\}, \{\tau_{14}, \tau_{28}\}, \{\tau_{16}, \tau_{24}\}, \{\tau_{18}, \tau_{26}\}, \{\tau_{20}, \tau_{22}\}$. (Figura 4.16).

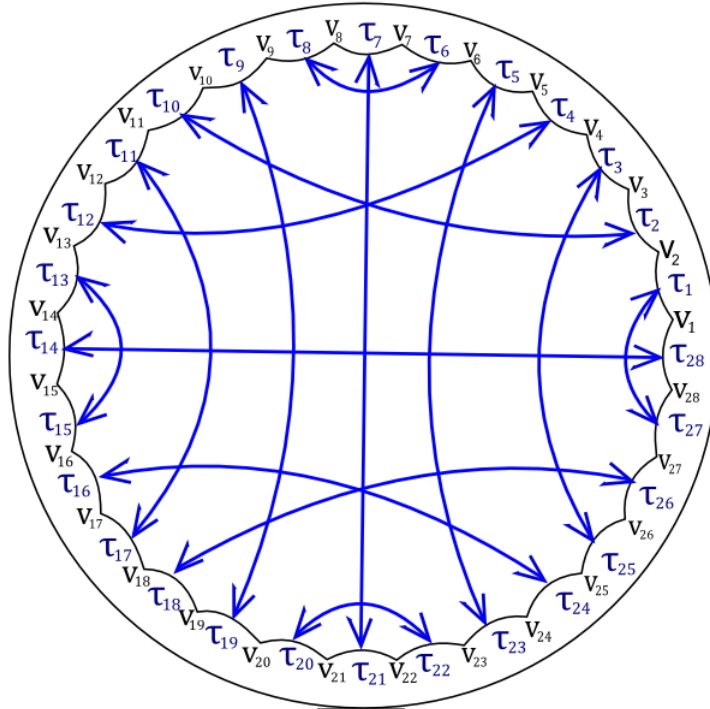


Figura 4.16: Polígono hiperbólico de 28 arestas com emparelhamento Φ_{28}^7 .

Logo formamos o emparelhamento

$$\Phi_{28}^7 = \{\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}, \gamma_{\tau_3}, \gamma_{\tau_4}, \gamma_{\tau_5}, \gamma_{\tau_6}, \gamma_{\tau_7}, \gamma_{\tau_9}, \gamma_{\tau_{11}}, \gamma_{\tau_{13}}, \gamma_{\tau_{14}}, \gamma_{\tau_{16}}, \gamma_{\tau_{18}}, \gamma_{\tau_{20}}\}.$$

formado pela regra $\mathfrak{R}_{\{8\lambda-4, 4\}}^7$.

Os ciclos de vértices desse emparelhamento são:

$$\begin{aligned} C_{V_1} &= \{V_1, V_{14}, V_{15}, V_{28}\}, & C_{V_2} &= \{V_2, V_{11}, V_{18}, V_{27}\}, & C_{V_3} &= \{V_3, V_{10}, V_{19}, V_{26}\}, \\ C_{V_4} &= \{V_4, V_{13}, V_{16}, V_{25}\}, & C_{V_5} &= \{V_5, V_{12}, V_{17}, V_{24}\}, & C_{V_6} &= \{V_6, V_9, V_{20}, V_{23}\}, \\ & & & & e C_{V_7} &= \{V_7, V_8, V_{21}, V_{22}\}. \end{aligned}$$

Exemplo 4.24. ($\lambda = 6$). Considere o polígono hiperbólico \mathcal{P}_{44} em \mathbb{D}^2 com as arestas τ_1, \dots, τ_{44} e vértices V_1, \dots, V_{44} . Sendo $\lambda = 6$, temos $n = 44$ e $c = 11$. Usando a regra de emparelhamentos $\mathfrak{R}_{\{8\lambda-4, 4\}}^7$ temos as seguintes identificações de arestas, obtidas pelas expressões (4.34), (4.35) e (4.36):

se $1 \leq i < 22$ ímpar, ou seja, $i = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21$, temos

$$\begin{aligned} \gamma_{\tau_1}(\tau_1) &= \tau_{43}, & \gamma_{\tau_3}(\tau_3) &= \tau_{41}, & \gamma_{\tau_5}(\tau_5) &= \tau_{39}, & \gamma_{\tau_7}(\tau_7) &= \tau_{37}, & \gamma_{\tau_9}(\tau_9) &= \tau_{35}, \\ \gamma_{\tau_{11}}(\tau_{11}) &= \tau_{33}, & \gamma_{\tau_{13}}(\tau_{13}) &= \tau_{31}, & \gamma_{\tau_{15}}(\tau_{15}) &= \tau_{29}, & \gamma_{\tau_{17}}(\tau_{17}) &= \tau_{27}, & \gamma_{\tau_{19}}(\tau_{19}) &= \tau_{25}, \\ & & & & \gamma_{\tau_{21}}(\tau_{21}) &= \tau_{23} & \text{por (4.34);} \end{aligned}$$

se $1 < i < 10$ par, ou seja, $i = 2, 4, 6, 8$ então

$$\begin{aligned} \gamma_{\tau_2}(\tau_2) &= \tau_{14}, & \gamma_{\tau_4}(\tau_4) &= \tau_{16}, & \gamma_{\tau_6}(\tau_6) &= \tau_{18}, & \gamma_{\tau_8}(\tau_8) &= \tau_{20}, & \gamma_{\tau_{24}}(\tau_{24}) &= \tau_{36}, \\ \gamma_{\tau_{26}}(\tau_{26}) &= \tau_{38}, & \gamma_{\tau_{28}}(\tau_{28}) &= \tau_{40}, & \gamma_{\tau_{30}}(\tau_{30}) &= \tau_{42} & \text{por (4.35);} \end{aligned}$$

e

$$\gamma_{\tau_{10}}(\tau_{10}) = \tau_{12}, \quad \gamma_{\tau_{22}}(\tau_{22}) = \tau_{44}, \quad \gamma_{\tau_{32}}(\tau_{32}) = \tau_{34} \text{ por (4.36).}$$

Logo, obtemos as seguintes arestas emparelhadas:

$$\begin{aligned} &\{\tau_1, \tau_{43}\}, \{\tau_2, \tau_{14}\}, \{\tau_3, \tau_{41}\}, \{\tau_4, \tau_{16}\}, \{\tau_5, \tau_{39}\}, \{\tau_6, \tau_{18}\}, \{\tau_7, \tau_{37}\}, \{\tau_8, \tau_{20}\}, \{\tau_9, \tau_{35}\}, \\ &\{\tau_{10}, \tau_{12}\}, \{\tau_{11}, \tau_{33}\}, \{\tau_{13}, \tau_{31}\}, \{\tau_{15}, \tau_{29}\}, \{\tau_{17}, \tau_{27}\}, \{\tau_{19}, \tau_{25}\}, \{\tau_{21}, \tau_{23}\}, \{\tau_{22}, \tau_{44}\}, \\ &\{\tau_{24}, \tau_{36}\}, \{\tau_{26}, \tau_{38}\}, \{\tau_{28}, \tau_{40}\}, \{\tau_{30}, \tau_{42}\}, \{\tau_{32}, \tau_{34}\}, \text{(Figura 4.17)}. \end{aligned}$$

Geramos o emparelhamento

$$\begin{aligned} \Phi_{44}^7 &= \{\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}, \gamma_{\tau_3}, \gamma_{\tau_4}, \gamma_{\tau_5}, \gamma_{\tau_6}, \gamma_{\tau_7}, \gamma_{\tau_8}, \gamma_{\tau_9}, \gamma_{\tau_{10}}, \gamma_{\tau_{11}}, \gamma_{\tau_{13}}, \gamma_{\tau_{15}}, \gamma_{\tau_{17}}, \gamma_{\tau_{19}}, \gamma_{\tau_{21}}, \gamma_{\tau_{22}}, \gamma_{\tau_{24}}, \\ &\gamma_{\tau_{26}}, \gamma_{\tau_{28}}, \gamma_{\tau_{30}}, \gamma_{\tau_{32}}\} \\ &\text{obtido pela regra } \mathfrak{R}_{\{8\lambda-4, 4\}}^7. \end{aligned}$$

Os ciclos de vértices desse emparelhamento são:

$$\begin{aligned} C_{V_1} &= \{V_1, V_{22}, V_{23}, V_{44}\}, & C_{V_2} &= \{V_2, V_{15}, V_{30}, V_{43}\}, & C_{V_3} &= \{V_3, V_{14}, V_{33}, V_{42}\}, \\ C_{V_4} &= \{V_4, V_{17}, V_{28}, V_{41}\}, & C_{V_5} &= \{V_5, V_{16}, V_{31}, V_{40}\}, & C_{V_6} &= \{V_6, V_{19}, V_{26}, V_{39}\}, \\ C_{V_7} &= \{V_7, V_{18}, V_{27}, V_{38}\}, & C_{V_8} &= \{V_8, V_{21}, V_{24}, V_{37}\}, & C_{V_9} &= \{V_9, V_{20}, V_{25}, V_{36}\}, \\ & & & & C_{V_{10}} &= \{V_{10}, V_{13}, V_{32}, V_{35}\} \text{ e } C_{V_{11}} = \{V_{11}, V_{12}, V_{33}, V_{34}\} \end{aligned}$$

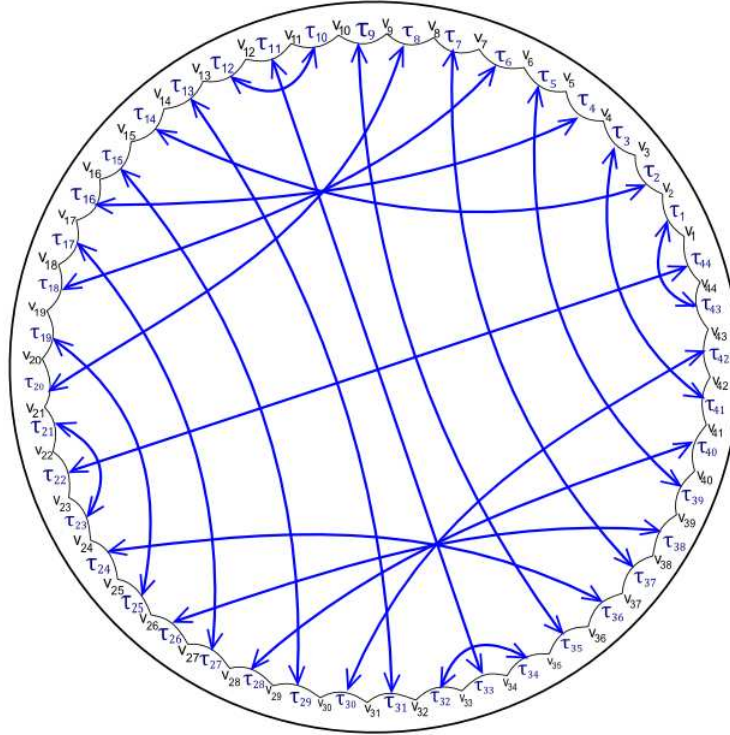


Figura 4.17: Polígono hiperbólico de 44 arestas com emparelhamento Φ_{44}^7 .

Generalização dos ciclos

Por recorrência e observando os emparelhamentos $\Phi_{8\lambda-4}^7$, generalizamos os ciclos desses emparelhamentos, que são dados por:

se $1 < i < c - 1$, é par, então

$$C_{V_i} = \{V_i, V_{c+i+2}, V_{(3c-1)-i}, V_{(n+1)-i}\}; \quad (4.37)$$

Se $1 < i < c - 1$, é ímpar, então

$$C_{V_i} = \{V_i, V_{c+i}, V_{3c+1-i}, V_{n+1-i}\}; \quad (4.38)$$

e

$$\begin{aligned} C_{V_1} &= \{V_1, V_{2c}, V_{2c+1}, V_n\}, C_{V_{c-1}} = \{V_{c-1}, V_{c+2}, V_{3c-1}, V_{3c+2}\}, \\ C_{V_c} &= \{V_c, V_{c+1}, V_{3c}, V_{3c+1}\}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

4.4.3 Emparelhamentos Generalizados $\{8g - 4, 4\}$

Nesta subseção, construímos emparelhamentos de arestas associado à tesselação $\{8g - 4, 4\}$, com $g \geq 2$, para o polígono hiperbólico \mathcal{P}_{8g-4} . Apresentaremos

dois emparelhamentos e os denotamos por Φ_{8g-4}^8 e Φ_{8g-4}^9 . Generalizamos as identificações das arestas e dos ciclos de vértices em cada emparelhamento.

Com os emparelhamentos construídos nas subseções anteriores e com base no emparelhamento da Seção 3.5, construímos duas novas regras de emparelhamento para as arestas do polígono hiperbólico \mathcal{P}_{8g-4} . O primeiro foi gerado pela regra que denotaremos por $\mathfrak{R}_{\{8g-4,4\}}^8$ e o segundo foi gerado pela regra que denotaremos por $\mathfrak{R}_{\{8g-4,4\}}^9$.

Emparelhamento generalizado Φ_{8g-4}^8

Seja \mathcal{P}_{8g-4} , com $g \geq 2$ natural, com ângulos internos todos medindo $\pi/2$. Na Seção 4.1, observação 4.5 justificamos a existência e convexidade desse polígono.

Seja $n = 8g - 4$, com $g \geq 2$, o número de arestas e $c = (8g - 4)/4 = 2g - 1$ (número de ciclos, com 4 vértices cada, a ser obtido). Então, para $1 \leq i \leq n$, definimos as identificações das arestas como:

se $1 \leq i < 2c$ for ímpar, temos

$$\gamma_{\tau_i}(\tau_i) = \tau_{n-i}; \quad (4.40)$$

se $1 \leq i < c$ for ímpar, temos

$$\gamma_{\tau_{2i}}(\tau_{2i}) = \tau_{2i+2} \text{ e } \gamma_{\tau_{2(c+i)}}(\tau_{2(c+i)}) = \tau_{2(c+i+1)}; \quad (4.41)$$

e

$$\gamma_{\tau_{2c}}(\tau_{2c}) = \tau_n. \quad (4.42)$$

A regra $\mathfrak{R}_{\{8g-4,4\}}^8$ nos fornece um emparelhamento de arestas para o polígono \mathcal{P}_{8g-4} , que denotamos por Φ_{8g-4}^8 .

Vejamos três exemplos quando $g = 2$, $g = 3$ e $g = 4$.

Exemplo 4.25. ($g = 2$). Considere o polígono hiperbólico \mathcal{P}_{12} em \mathbb{D}^2 com as arestas τ_1, \dots, τ_{12} e vértices V_1, \dots, V_{12} . Quando $g = 2$, temos $n = 12$ arestas e a quantidade de ciclos é $c = 3$. Usando a regra de emparelhamentos $\mathfrak{R}_{\{8g-4, 4\}}^8$ temos as seguintes identificações de arestas, obtidas pelas expressões (4.40), (4.41) e (4.42):

para $1 \leq i < 6$ ímpar, ou seja, $i = 1, 3, 5$,

$$\gamma_{\tau_1}(\tau_1) = \tau_{11}, \gamma_{\tau_3}(\tau_3) = \tau_9, \gamma_{\tau_5}(\tau_5) = \tau_7 \text{ por (4.40)};$$

para $1 \leq i < 3$ ímpar, ou seja, $i = 1$, então

$$\gamma_{\tau_2}(\tau_2) = \tau_4, \quad \gamma_{\tau_8}(\tau_8) = \tau_{10} \text{ por (4.41);}$$

e

$$\gamma_{\tau_6}(\tau_6) = \tau_{12} \text{ por (4.42).}$$

Assim, temos os pares de arestas emparelhadas:

$\{\tau_1, \tau_{11}\}, \{\tau_2, \tau_4\}, \{\tau_3, \tau_9\}, \{\tau_5, \tau_7\}, \{\tau_6, \tau_{12}\}, \{\tau_8, \tau_{10}\}$, (Figura 4.18).

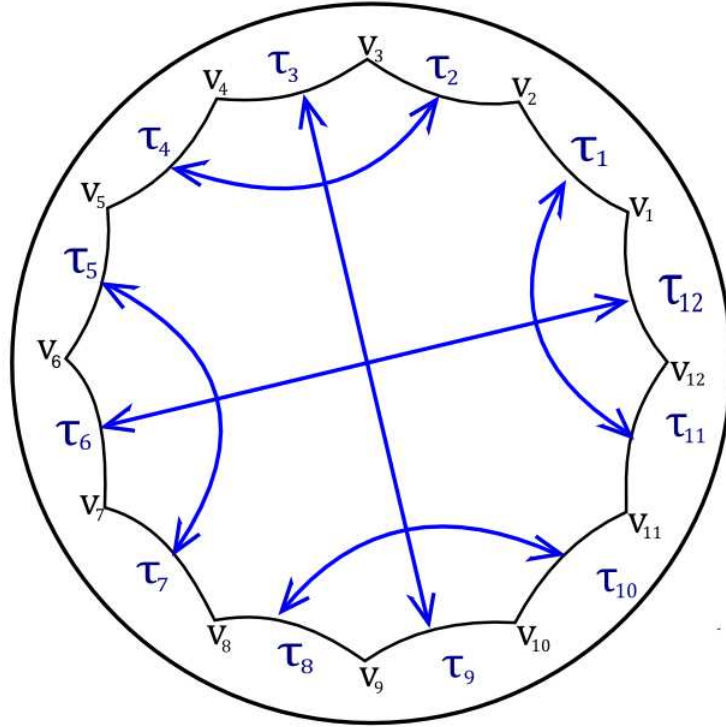


Figura 4.18: Polígono hiperbólico de 12 arestas com emparelhamento Φ_{12}^8 .

Logo, formamos o emparelhamento

$$\Phi_{12}^8 = \{\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}, \gamma_{\tau_3}, \gamma_{\tau_5}, \gamma_{\tau_6}, \gamma_{\tau_8}\}.$$

gerado pela regra $\mathfrak{R}_{\{8g-4, 4\}}^8$.

Os ciclos que esse emparelhamento nos dá, são:

$$C_{V_1} = \{V_1, V_6, V_7, V_{12}\}, \quad C_{V_2} = \{V_2, V_{11}, V_8, V_5\} \text{ e } C_{V_3} = \{V_3, V_4, V_9, V_{10}\},$$

Exemplo 4.26. ($g = 3$). Considere o polígono hiperbólico \mathcal{P}_{20} em \mathbb{D}^2 com as arestas τ_1, \dots, τ_{20} e vértices V_1, \dots, V_{20} . Sendo $g = 3$, temos $n = 20$ arestas e a quantidade de ciclos é $c = 5$. Usando a regra de emparelhamentos $\mathfrak{R}_{\{8g-4, 4\}}^8$ temos as seguintes identificações de arestas, obtidas pelas expressões (4.40), (4.41) e (4.42):

para $1 \leq i < 10$ ímpar, ou seja, $i = 1, 3, 5, 7, 9$, temos

$$\gamma_{\tau_1}(\tau_1) = \tau_{19}, \gamma_{\tau_3}(\tau_3) = \tau_{17}, \gamma_{\tau_5}(\tau_5) = \tau_{15}, \gamma_{\tau_7}(\tau_7) = \tau_{13}, \gamma_{\tau_9}(\tau_9) = \tau_{11} \text{ por (4.40);}$$

para $1 \leq i < 5$ ímpar, ou seja, $i = 1, 3$, então

$$\gamma_{\tau_2}(\tau_2) = \tau_4, \gamma_{\tau_6}(\tau_6) = \tau_8 \text{ e } \gamma_{\tau_{12}}(\tau_{12}) = \tau_{14}, \gamma_{\tau_{16}}(\tau_{16}) = \tau_{18} \text{ por (4.41);}$$

e

$$\gamma_{\tau_{10}}(\tau_{10}) = \tau_{20} \text{ por (4.42).}$$

Obtemos os pares de arestas emparelhados:

$\{\tau_1, \tau_{19}\}, \{\tau_2, \tau_4\}, \{\tau_3, \tau_{17}\}, \{\tau_5, \tau_{15}\}, \{\tau_6, \tau_8\}, \{\tau_7, \tau_{13}\}, \{\tau_9, \tau_{11}\}, \{\tau_{10}, \tau_{20}\}, \{\tau_{12}, \tau_{14}\}, \{\tau_{16}, \tau_{18}\}$. (Figura 4.19).

Assim, formamos o emparelhamento

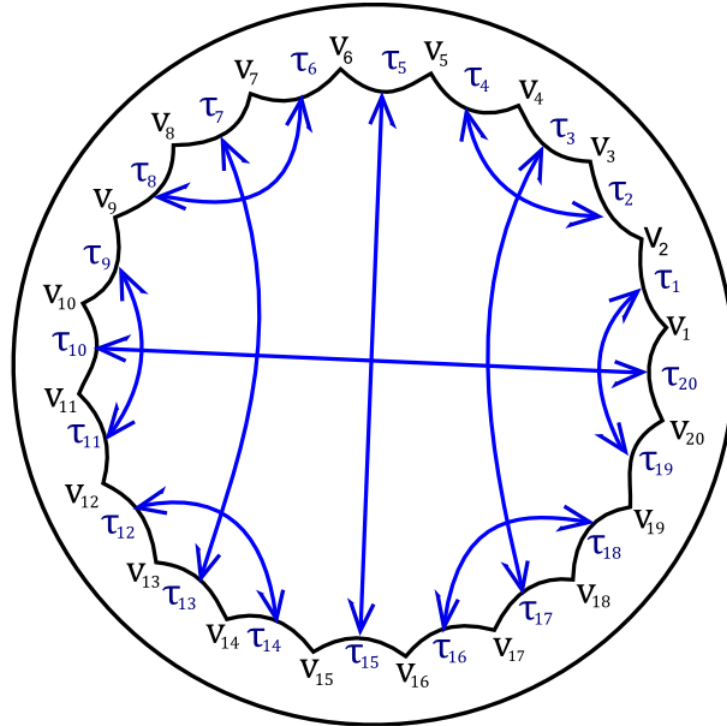


Figura 4.19: Polígono hiperbólico de 20 arestas com emparelhamento Φ_{20}^8 .

$$\Phi_{20}^8 = \{\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}, \gamma_{\tau_3}, \gamma_{\tau_5}, \gamma_{\tau_6}, \gamma_{\tau_7}, \gamma_{\tau_9}, \gamma_{\tau_{10}}, \gamma_{\tau_{12}}, \gamma_{\tau_{16}}\},$$

obtido pela regra $\mathfrak{R}_{\{8g-4, 4\}}^9$.

Os ciclos que esse emparelhamento nos dá, são:

$$C_{V_1} = \{V_1, V_{10}, V_{11}, V_{20}\}, C_{V_2} = \{V_2, V_5, V_{16}, V_{19}\}, C_{V_3} = \{V_3, V_4, V_{17}, V_{18}\},$$

$$C_{V_6} = \{V_6, V_9, V_{12}, V_{15}\} \text{ e } C_{V_7} = \{V_7, V_8, V_{13}, V_{14}\}.$$

Exemplo 4.27. ($g = 4$). Seja \mathcal{P}_{28} um polígono hiperbólico em \mathbb{D}^2 com as arestas τ_1, \dots, τ_{28} e vértices V_1, \dots, V_{28} . Sendo $g = 4$, então $n = 28$ é o número de arestas e a quantidade de ciclos é $c = 7$. Usando a regra de emparelhamentos $\mathfrak{R}_{\{8g-4, 4\}}^8$ temos as seguintes identificações de arestas, obtidas pelas expressões (4.40), (4.41) e (4.42):

para $1 \leq i < 14$ ímpar, ou seja, $i = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13$, temos

$$\begin{aligned} \gamma_{\tau_1}(\tau_1) = \tau_{27}, \gamma_{\tau_3}(\tau_3) = \tau_{25}, \gamma_{\tau_5}(\tau_5) = \tau_{23}, \gamma_{\tau_7}(\tau_7) = \tau_{21}, \gamma_{\tau_9}(\tau_9) = \tau_{19}, \\ \gamma_{\tau_{11}}(\tau_{11}) = \tau_{17}, \gamma_{\tau_{13}}(\tau_{13}) = \tau_{15} \text{ por (4.40);} \end{aligned}$$

para $1 \leq i < 7$ ímpar, ou seja, $i = 1, 3, 5$, então

$$\begin{aligned} \gamma_{\tau_2}(\tau_2) = \tau_4, \gamma_{\tau_6}(\tau_6) = \tau_8, \gamma_{\tau_{10}}(\tau_{10}) = \tau_{12} \text{ e } \gamma_{\tau_{16}}(\tau_{16}) = \tau_{18}, \\ \gamma_{\tau_{20}}(\tau_{20}) = \tau_{22}, \gamma_{\tau_{24}}(\tau_{24}) = \tau_{26} \text{ por (4.41);} \end{aligned}$$

e

$$\gamma_{\tau_{14}}(\tau_{14}) = \tau_{28} \text{ por (4.42).}$$

Logo, temos as seguintes identificações das arestas emparelhadas.

$$\{\tau_1, \tau_{27}\}, \{\tau_2, \tau_4\}, \{\tau_3, \tau_{25}\}, \{\tau_5, \tau_{23}\}, \{\tau_6, \tau_8\}, \{\tau_7, \tau_{21}\}, \{\tau_9, \tau_{19}\}, \{\tau_{10}, \tau_{12}\}, \{\tau_{11}, \tau_{17}\}, \\ \{\tau_{13}, \tau_{15}\}, \{\tau_{14}, \tau_{28}\}, \{\tau_{16}, \tau_{18}\}, \{\tau_{20}, \tau_{22}\}, \{\tau_{24}, \tau_{26}\}. \text{ (Figura 4.20).}$$

Portanto, obtemos o emparelhamento

$$\Phi_{28}^8 = \{\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}, \gamma_{\tau_3}, \gamma_{\tau_5}, \gamma_{\tau_6}, \gamma_{\tau_7}, \gamma_{\tau_9}, \gamma_{\tau_{10}}, \gamma_{\tau_{11}}, \gamma_{\tau_{13}}, \gamma_{\tau_{14}}, \gamma_{\tau_{16}}, \gamma_{\tau_{20}}, \gamma_{\tau_{24}}\},$$

gerado pela regra $\mathfrak{R}_{\{8g-4, 4\}}^8$. Os ciclos que esse emparelhamento nos dá, são:

$$\begin{aligned} C_{V_1} = \{V_1, V_{14}, V_{15}, V_{28}\}, C_{V_2} = \{V_2, V_5, V_{24}, V_{27}\}, C_{V_3} = \{V_3, V_4, V_{25}, V_{26}\}, \\ C_{V_6} = \{V_6, V_9, V_{20}, V_{23}\}, C_{V_7} = \{V_7, V_8, V_{21}, V_{22}\}, C_{V_{10}} = \{V_{10}, V_{13}, V_{16}, V_{19}\} \\ \text{e } C_{V_{11}} = \{V_{11}, V_{12}, V_{17}, V_{18}\}. \end{aligned}$$

Generalização dos ciclos

Por recorrência e observando os emparelhamentos Φ_{8g-4}^8 , generalizamos os ciclos desses emparelhamentos, que são dados por:

se $1 \leq i < c$, ímpar então

$$\begin{aligned} C_{V_i} &= \{V_{2i}, V_{2i+3}, V_{n-2(i+1)}, V_{n-2i+1}\}, \\ C_{V_{2i+1}} &= \{V_{2i+1}, V_{2(i+1)}, V_{n-(2i+1)}, V_{n-2i}\}; \end{aligned} \quad (4.43)$$

e

$$C_{V_1} = \{V_1, V_{2c}, V_{2c+1}, V_n\}. \quad (4.44)$$

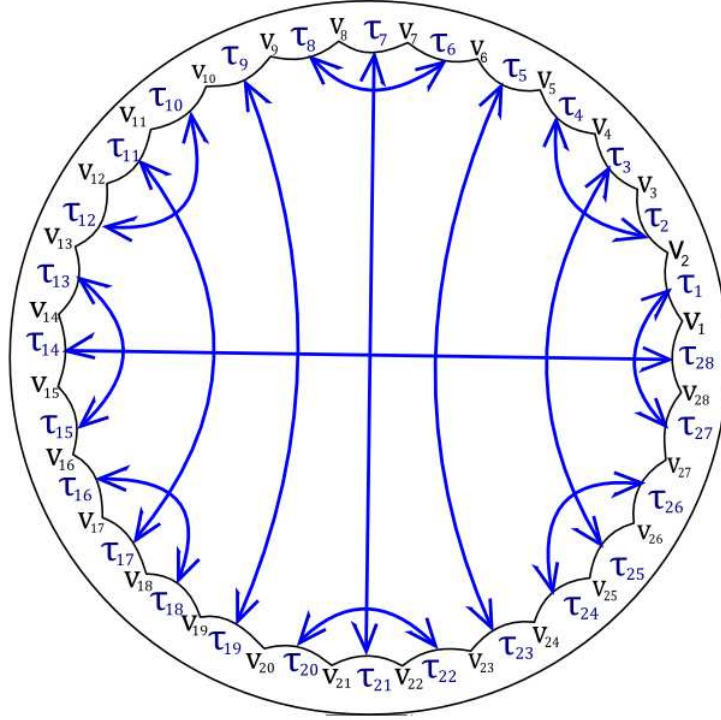


Figura 4.20: Polígono hiperbólico de 28 arestas com emparelhamento Φ_{28}^8 .

Emparelhamento Generalizado Φ_{8g-4}^9

Para este mesmo polígono \mathcal{P}_{8g-4} , construímos mais uma nova regra de emparelhamento de suas arestas, ao qual denotaremos por $\mathfrak{R}_{\{8g-4, 4\}}^9$. Seja $n = 8g - 4$, com $g \geq 2$, o número de arestas e $c = (8g - 4)/4 = 2g - 1$ (números de ciclos com 4 vértices cada, a serem obtidos). Então, para $1 \leq i \leq n$, definimos as identificações das arestas como:

se $1 \leq i < 2c$ ímpar, temos

$$\gamma_{\tau_i}(\tau_i) = \tau_{n-i}; \quad (4.45)$$

se $1 < i < c - 2$ par, temos

$$\gamma_{\tau_i}(\tau_i) = \tau_{2c+i}; \quad (4.46)$$

Se $c + 1 < i < 2c$, par temos

$$\gamma_{\tau_i}(\tau_i) = \tau_{2c+i}; \quad (4.47)$$

e

$$\gamma_{\tau_{c-1}}(\tau_{c-1}) = \tau_{c+1}, \quad \gamma_{\tau_{2c}}(\tau_{2c}) = \tau_n \quad e \quad \gamma_{\tau_{3c-1}}(\tau_{3c-1}) = \tau_{3c+1}. \quad (4.48)$$

A regra de emparelhamento $\mathfrak{R}_{\{8g-4, 4\}}^9$ nos dá um emparelhamento para \mathcal{P}_{8g-4} , denotado por Φ_{8g-4}^9 .

Vejamos alguns exemplos para $g = 3, g = 4$ e $g = 5$.

Exemplo 4.28. ($g = 3$). Seja \mathcal{P}_{20} polígono hiperbólico em \mathbb{D}^2 com as arestas τ_1, \dots, τ_{20} e vértices V_1, \dots, V_{20} . Sendo $g = 3$, temos $n = 20$ arestas e a quantidade de ciclos é $c = 5$. Usando a regra de emparelhamentos $\mathfrak{R}_{\{8g-4, 4\}}^9$ temos as seguintes identificações de arestas, obtidas pelas expressões (4.45), (4.46), (4.47) e (4.48):

se $1 \leq i < 10$ ímpar, ou seja, $i = 1, 3, 5, 7, 9$, temos

$$\gamma_{\tau_1}(\tau_1) = \tau_{19}, \gamma_{\tau_3}(\tau_3) = \tau_{17}, \gamma_{\tau_5}(\tau_5) = \tau_{15}, \gamma_{\tau_7}(\tau_7) = \tau_{13}, \gamma_{\tau_9}(\tau_9) = \tau_{11} \text{ por (4.45);}$$

Se $1 < i < 3$ par, ou seja, $i = 2$, então

$$\gamma_{\tau_2}(\tau_2) = \tau_{12} \text{ por (4.46);}$$

Se $6 < i < 10$ par, ou seja, $i = 8$, então

$$\gamma_{\tau_8}(\tau_8) = \tau_{18} \text{ por (4.47);}$$

e

$$\gamma_{\tau_4}(\tau_4) = \tau_6, \gamma_{\tau_{10}}(\tau_{10}) = \tau_{20}, \gamma_{\tau_{14}}(\tau_{14}) = \tau_{16} \text{ (4.48).}$$

Ou seja, temos os pares de arestas emparelhados:

$\{\tau_1, \tau_{19}\}, \{\tau_2, \tau_{12}\}, \{\tau_3, \tau_{17}\}, \{\tau_4, \tau_6\}, \{\tau_5, \tau_{15}\}, \{\tau_7, \tau_{13}\}, \{\tau_8, \tau_{18}\}, \{\tau_9, \tau_{11}\}, \{\tau_{10}, \tau_{20}\}, \{\tau_{14}, \tau_{16}\}$. (Figura 4.21).

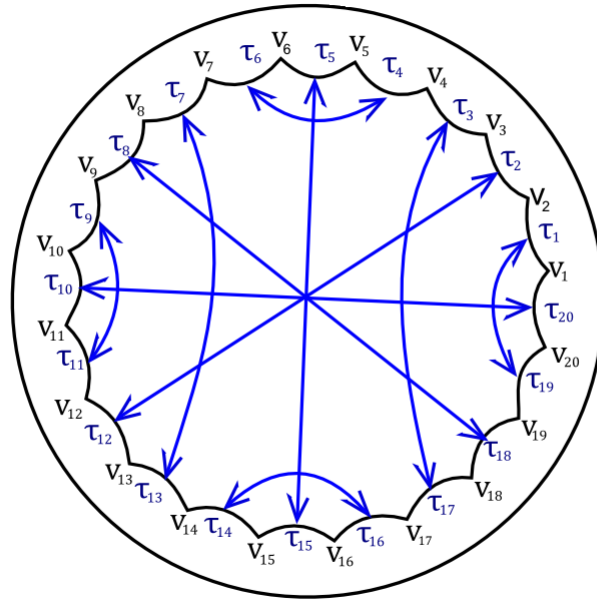


Figura 4.21: Polígono hiperbólico de 20 arestas com emparelhamento Φ_{20}^9 .

Assim, obtemos o emparelhamento

$$\Phi_{20}^9 = \{\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}, \gamma_{\tau_3}, \gamma_{\tau_4}, \gamma_{\tau_5}, \gamma_{\tau_7}, \gamma_{\tau_8}, \gamma_{\tau_9}, \gamma_{\tau_{10}}, \gamma_{\tau_{14}}\}.$$

gerado pela regra $\mathfrak{R}_{\{8g-4,4\}}^9$.

Os ciclos que esse emparelhamento nos dá, são:

$$C_{V_1} = \{V_1, V_{10}, V_{11}, V_{20}\}, C_{V_2} = \{V_2, V_{13}, V_8, V_{19}\}, C_{V_3} = \{V_3, V_{18}, V_9, V_{12}\},$$

$$C_{V_4} = \{V_4, V_7, V_{14}, V_{17}\} \text{ e } C_{V_5} = \{V_5, V_6, V_{15}, V_{16}\},$$

Exemplo 4.29. ($g = 4$). Considere o polígono hiperbólico \mathcal{P}_{28} em \mathbb{D}^2 com as arestas τ_1, \dots, τ_{28} e vértices V_1, \dots, V_{28} . Sendo $g = 4$, temos $n = 28$ arestas e a quantidade de ciclos é $c = 7$. Pela regra de emparelhamentos $\mathfrak{R}_{\{8g-4,4\}}^9$ temos as seguintes identificações de arestas, obtidas pelas expressões (4.45), (4.46), (4.47) e (4.48):

se $1 \leq i < 14$ ímpar, ou seja, $i = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13$, temos

$$\begin{aligned} \gamma_{\tau_1}(\tau_1) = \tau_{27}, \gamma_{\tau_3}(\tau_3) = \tau_{25}, \gamma_{\tau_5}(\tau_5) = \tau_{23}, \gamma_{\tau_7}(\tau_7) = \tau_{21}, \gamma_{\tau_9}(\tau_9) = \tau_{19}, \\ \gamma_{\tau_{11}}(\tau_{11}) = \tau_{17}, \gamma_{\tau_{13}}(\tau_{13}) = \tau_{15} \text{ por (4.45);} \end{aligned}$$

Se $1 < i < 5$ par, ou seja, $i = 2, 4$, então

$$\gamma_{\tau_2}(\tau_2) = \tau_{16}, \gamma_{\tau_4}(\tau_4) = \tau_{18} \text{ por (4.46);}$$

se $8 < i < 14$ par, ou seja, $i = 10, 12$, então

$$\gamma_{\tau_{10}}(\tau_{10}) = \tau_{24}, \gamma_{\tau_{12}}(\tau_{12}) = \tau_{26} \text{ por (4.47)}$$

e

$$\gamma_{\tau_6}(\tau_6) = \tau_8, \gamma_{\tau_{14}}(\tau_{14}) = \tau_{28}, \gamma_{\tau_{20}}(\tau_{20}) = \tau_{22} \text{ por (4.48).}$$

E assim, obtemos os pares de arestas emparelhadas:

$$\{\tau_1, \tau_{27}\}, \{\tau_2, \tau_{16}\}, \{\tau_3, \tau_{25}\}, \{\tau_4, \tau_{18}\}, \{\tau_5, \tau_{23}\}, \{\tau_6, \tau_8\}, \{\tau_7, \tau_{21}\}, \{\tau_9, \tau_{19}\}, \{\tau_{10}, \tau_{24}\}, \\ \{\tau_{11}, \tau_{17}\}, \{\tau_{12}, \tau_{26}\}, \{\tau_{13}, \tau_{15}\}, \{\tau_{14}, \tau_{28}\}, \{\tau_{20}, \tau_{22}\} \text{ (Figura 4.22).}$$

Logo, formamos o emparelhamento

$$\Phi_{28}^9 = \{\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}, \gamma_{\tau_3}, \gamma_{\tau_4}, \gamma_{\tau_5}, \gamma_{\tau_6}, \gamma_{\tau_7}, \gamma_{\tau_9}, \gamma_{\tau_{10}}, \gamma_{\tau_{11}}, \gamma_{\tau_{12}}, \gamma_{\tau_{13}}, \gamma_{\tau_{14}}, \gamma_{\tau_{20}}\},$$

obtido pela regra $\mathfrak{R}_{\{8g-4,4\}}^9$.

Os ciclos que esse emparelhamento nos dá, são:

$$C_{V_1} = \{V_1, V_{14}, V_{15}, V_{28}\}, C_{V_2} = \{V_2, V_{17}, V_{12}, V_{27}\}, C_{V_3} = \{V_3, V_{16}, V_{13}, V_{26}\},$$

$$C_{V_4} = \{V_4, V_{19}, V_{10}, V_{25}\}, C_{V_5} = \{V_5, V_{18}, V_{11}, V_{24}\}, C_{V_6} = \{V_6, V_9, V_{20}, V_{23}\},$$

$$\text{e } C_{V_7} = \{V_7, V_8, V_{21}, V_{22}\}.$$

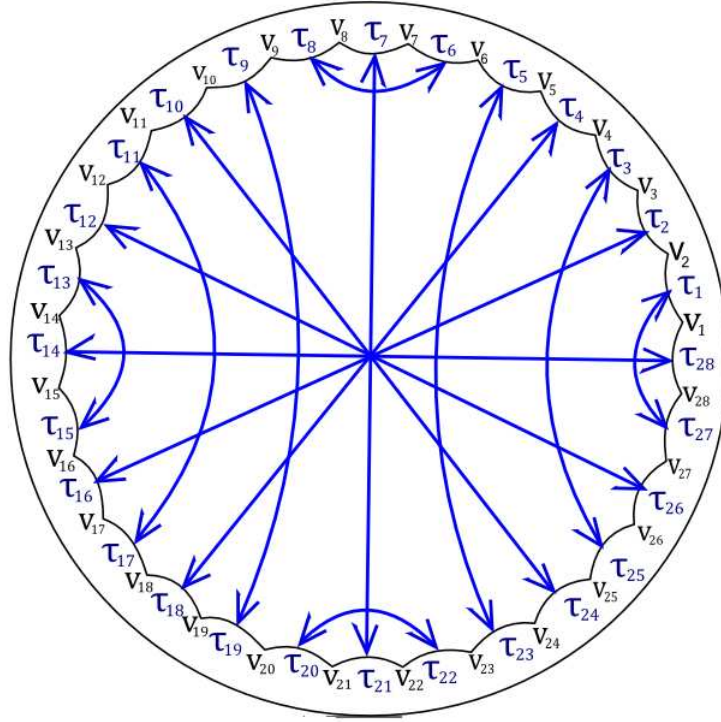


Figura 4.22: Polígono hiperbólico de 28 arestas com emparelhamento Φ_{28}^9 .

Exemplo 4.30. ($g = 5$). Seja \mathcal{P}_{36} um polígono hiperbólico em \mathbb{D}^2 com as arestas τ_1, \dots, τ_{36} e vértices V_1, \dots, V_{36} . Sendo $g = 5$, temos $n = 36$ arestas e a quantidade de ciclos é $c = 9$. Usando a regra de emparelhamentos $\mathfrak{R}_{\{8g-4, 4\}}^9$ temos as seguintes identificações de arestas, obtidas pelas expressões (4.45), (4.46), (4.47) e (4.48):

se $1 \leq i < 18$ ímpar, ou seja, $i = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17$, temos

$$\begin{aligned} \gamma_{\tau_1}(\tau_1) &= \tau_{35}, \gamma_{\tau_3}(\tau_3) = \tau_{33}, \gamma_{\tau_5}(\tau_5) = \tau_{31}, \gamma_{\tau_7}(\tau_7) = \tau_{29}, \gamma_{\tau_9}(\tau_9) = \tau_{27}, \\ \gamma_{\tau_{11}}(\tau_{11}) &= \tau_{25}, \gamma_{\tau_{13}}(\tau_{13}) = \tau_{23}, \gamma_{\tau_{15}}(\tau_{15}) = \tau_{21}, \gamma_{\tau_{17}}(\tau_{17}) = \tau_{19} \text{ por (4.45);} \end{aligned}$$

se $1 < i < 7$ par, ou seja, $i = 2, 4, 6$, então

$$\gamma_{\tau_2}(\tau_2) = \tau_{20}, \gamma_{\tau_4}(\tau_4) = \tau_{22}, \gamma_{\tau_6}(\tau_6) = \tau_{24} \text{ por (4.46);}$$

Se $10 < i < 18$ par, ou seja, $i = 12, 14, 16$, então

$$\gamma_{\tau_{12}}(\tau_{12}) = \tau_{30}, \gamma_{\tau_{14}}(\tau_{14}) = \tau_{32}, \gamma_{\tau_{16}}(\tau_{16}) = \tau_{34} \text{ por (4.47);}$$

e

$$\gamma_{\tau_8}(\tau_8) = \tau_{10}, \gamma_{\tau_{18}}(\tau_{18}) = \tau_{36}, \gamma_{\tau_{26}}(\tau_{26}) = \tau_{28} \text{ por (4.48).}$$

Logo, temos os seguintes pares de arestas emparelhadas:

$$\{\tau_1, \tau_{35}\}, \{\tau_2, \tau_{20}\}, \{\tau_3, \tau_{33}\}, \{\tau_4, \tau_{22}\}, \{\tau_5, \tau_{31}\}, \{\tau_6, \tau_{24}\}, \{\tau_7, \tau_{29}\}, \{\tau_8, \tau_{10}\}, \{\tau_9, \tau_{27}\},$$

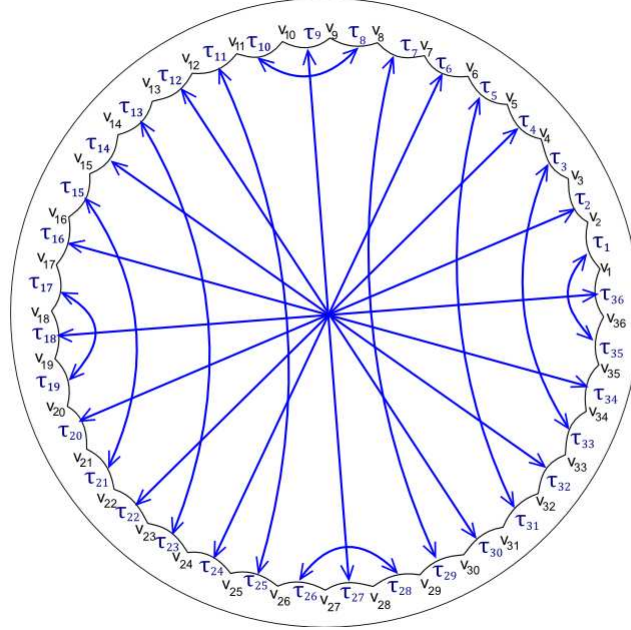


Figura 4.23: Polígono hiperbólico de 36 arestas com emparelhamento Φ_{36}^9 .

$\{\tau_{11}, \tau_{25}\}, \{\tau_{12}, \tau_{30}\}, \{\tau_{13}, \tau_{23}\}, \{\tau_{14}, \tau_{32}\}, \{\tau_{15}, \tau_{21}\}, \{\tau_{16}, \tau_{34}\}, \{\tau_{17}, \tau_{19}\}, \{\tau_{18}, \tau_{36}\},$
 $\{\tau_{26}, \tau_{28}\}$. (Figura 4.23).

Assim, formamos o emparelhamento

$\Phi_{36}^9 = \{\gamma_{\tau_1}, \gamma_{\tau_2}, \gamma_{\tau_3}, \gamma_{\tau_4}, \gamma_{\tau_5}, \gamma_{\tau_6}, \gamma_{\tau_7}, \gamma_{\tau_8}, \gamma_{\tau_9}, \gamma_{\tau_{11}}, \gamma_{\tau_{12}}, \gamma_{\tau_{13}}, \gamma_{\tau_{14}}, \gamma_{\tau_{15}}, \gamma_{\tau_{16}}, \gamma_{\tau_{17}}, \gamma_{\tau_{18}}, \gamma_{\tau_{26}}\}$,
 obtido pela regra $\mathfrak{A}_{\{8g-4,4\}}^9$.

Os ciclos que esse emparelhamento nos dá, são:

$$C_{V_1} = \{V_1, V_{18}, V_{19}, V_{36}\}, C_{V_2} = \{V_2, V_{21}, V_{16}, V_{35}\}, C_{V_3} = \{V_3, V_{20}, V_{17}, V_{34}\},$$

$$C_{V_4} = \{V_4, V_{23}, V_{14}, V_{33}\}, C_{V_5} = \{V_5, V_{22}, V_{15}, V_{32}\}, C_{V_6} = \{V_6, V_{25}, V_{12}, V_{31}\},$$

$$C_{V_7} = \{V_7, V_{24}, V_{13}, V_{30}\}, C_{V_8} = \{V_8, V_{11}, V_{26}, V_{29}\} \text{ e } C_{V_9} = \{V_9, V_{10}, V_{27}, V_{28}\}.$$

Generalização do ciclos

Por recorrência e observando os emparelhamentos Φ_{8g-4}^9 , generalizamos os ciclos desses emparelhamentos, que são dados por:

se $1 \leq i < c - 1$, par então

$$C_{V_i} = \{V_i, V_{2c+i+1}, V_{2c-i}, V_{n+1-i}\}, \quad (4.49)$$

se $1 \leq i < c - 1$, ímpar então

$$C_{V_i} = \{V_i, V_{2c+i+1}, V_{2c-i+2}, V_{n+1-i}\}, \quad (4.50)$$

e

$$\begin{aligned}C_{V_1} &= \{V_1, V_{2c}, V_{2c+1}, V_n\}, \\C_{V_c} &= \{V_c, V_{c+1}, V_{3c}, V_{3c+1}\}, \\C_{V_{c-1}} &= \{V_{c-1}, V_{c+2}, V_{3c-1}, V_{3c+2}\}.\end{aligned}\tag{4.51}$$

Considerações Finais

Ao longo do nosso trabalho, o objetivo foi construir emparelhamentos associados à tesselação $\{8g - 4, 4\}$ que nos fornecem superfícies compactas orientáveis de gênero $g \geq 2$.

Conseguimos quatro maneiras distintas de emparelharmos as arestas do polígono hiperbólico \mathcal{P}_{8g-4} , com $8g - 4$ arestas, associados à tesselação hiperbólica regular $\{8g - 4, 4\}$. Emparelhamentos, aos quais, denotamos por Φ_{8g-4}^2 , Φ_{8g-4}^4 , Φ_{8g-4}^8 e Φ_{8g-4}^9 , obtidos pelas regras de emparelhamento $\mathcal{R}_{\{8g-4, 4\}}^2$, $\mathcal{R}_{\{8g-4, 4\}}^4$, $\mathcal{R}_{\{8g-4, 4\}}^8$ e $\mathcal{R}_{\{8g-4, 4\}}^9$, respectivamente. Apresentamos também, 4 casos particulares de emparelhamentos das arestas de \mathcal{P}_{8g-4} , onde em três desses casos $g = \alpha \geq 3$ é ímpar e em um caso $g = \lambda \geq 4$ é par, representados pelos emparelhamentos $\Phi_{8\alpha-4}^3$, $\Phi_{8\alpha-4}^5$, $\Phi_{8\alpha-4}^6$ e $\Phi_{8\lambda-4}^7$, obtido pelas regras $\mathcal{R}_{\{8\alpha-4, 4\}}^3$, $\mathcal{R}_{\{8\alpha-4, 4\}}^5$, $\mathcal{R}_{\{8\alpha-4, 4\}}^6$ e $\mathcal{R}_{\{8\lambda-4, 4\}}^7$, respectivamente.

Estes emparelhamentos que construímos associados à tesselação $\{8g - 4, 4\}$ geram grupos fuchsianos, ou seja, grupos discretos de isometrias hiperbólicas que é utilizado no processo de construção de constelações de sinais. A relevância dos estudos dos emparelhamentos associados à tesselação $\{8g - 4, 4\}$, também esta no fato, que está tesselação fornece empacotamentos de esferas com densidades de empacotamento ([19], com 0,89868 o maior valor apresentado para densidade de empacotamento, quando $\eta = 21$ e $g = 31$) próximas ao empacotamento ótimo, em relação à densidade de empacotamento no plano hiperbólico, ou seja, empacotamento com densidade máxima, ([6], o valor máximo da densidade de empacotamento é $\frac{3}{\pi} \approx 0,95492965855137201461$) e portanto, estão relacionados com a construção de códigos ótimos cuja a probabilidade de erro é mínima.

Referências Bibliográficas

- [1] AGUSTINI E. *Constelações de Sinais em Espaços Hiperbólicos* Tese de Doutorado , IMECC-UNICAMP, 2002.
- [2] Alves, A. F. e Palazzo Junior, R. *Caracterização dos Emparelhamentos de Arestas de Polígonos hiperbólicos para a Construção de Sinais*, CNMAC, Águas de Lindóia/SP, 2012.
- [3] Anderson, J. W. - *Hyperbolic Geometry*, - Second Edition, Springer Verlag, 2005.
- [4] Beardon, Alan - *The Geometry of Discrete Groups*, - Springer Verlag, 1983.
- [5] Drumond, F. G. A. *Sistoles em Superfícies Geradas Pela Tesselação $\{8g - 4, 4\}$* . Dissertação de Mestrado, UFV 2015.
- [6] Faria, Mércio Botelho. *Empacotamento de esferas em espaços hiperbólicos*, Dissertação de mestrado, Imecc-Unicamp, 2001.
- [7] Faria, Mercio Botelho. *Coordenadas Fricke e Empacotamentos Hiperbólicos de Discos*. Tese de doutorado - Imecc/Unicamp, 2005.
- [8] Faria, M. B. e Palazzo R. *Dois casos de emparelhamentos Generalizados Associados à Tesselação $\{12g - 6, 3\}$* . Anais do XXXII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBRT 2009), UFMT, Cuiabá-MT, 2009.
- [9] Faria, M. B. e Palazzo R. *Emparelhamentos Generalizados Associados a Tesselação $\{12g - 6, 3\}$* . Anais do XXXII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional. Blumenau-SC, 2009.
- [10] Faria, M. B. e Palazzo R. *Generalização de Emparelhamentos de Arestas Relacionados à Tesselação $\{12g - 6, 3\}$* . XXVII Colóquio Brasileiro de Matemática, realizado no IMPA, Rio de Janeiro, 2009.
- [11] FELIPPE, B, Z *Coordenadas no Espaço de Teichmüller* , Dissertação de Mestrado, UFMG, Belo Horizonte-MG (2006)
- [12] Firby, P. A & Gardiner, C.F. *Surface topology*, Ellis Horwood Limited, New York, 1991.
- [13] Firer, M. *Gupos Fuchsianos*. UNICAMP, Notas de aula, 2003.

- [14] Fricke, Robert & Klein, Felix. *Vorlesugen über die theorie der automorphen funktionen*, Teubener, Leipzig, 1897.
- [15] G.F. da Silva, M. B. Faria & C. Mendes de Jesus, *Grafos que Geram Emparelhamento de Arestas Relacionados à Tesselação $\{12g-6, 3\}$* ,TEMA, SBMAC, 2014.
- [16] Girondo, Ernesto & González-Diez, Gabino. *Genus two extremal surfaces: extremal discs, isometries and weierstrass points*, Israel journal of mathematics 132, 221 – 238, 2002.
- [17] Katok, Svetlana. *Fuchsian groups*. The University of Chicago Press, 1991.
- [18] Kinsey, L. Christine. *Topology of surfaces*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [19] OLIVEIRA JR, J. & FARIA, M. B. *Emparelhamentos generalizados associados às tesselações $\{12\eta-8, 4\}$ e $\{12\mu-12, 4\}$* , Anais do CNMAC, Publicação da SBMAC, 2010.
- [20] Ramsay, A. & Richtmeyer, Robert D. *Introduction to hyperbolic geometry*. Springer-Verlag. New York, 1994.
- [21] Rodrigues L. B. *Reticulados Hiperbólicos em Espaços Quocientes Mergulhados Isometricamente em Espaços Euclidianos* Dissertação de Mestrado , Universidade Federal de Uberlândia-UFU, 2010.
- [22] Series, S. & Maloni, S. *Hyperbolic geometry MA 448*, january 4,2013.
- [23] SOUZA, J. P. *Dissertação de Mestrado: O grupo Fuchsiano Γ_{8g-4}* , UFV. Viçosa-MG (2016).
- [24] Tóth, L. Fejes. *Regular Figures*. International series of monographs on Pure and Applied Mathematics, Pergamon press LTDA, Oxford, vol. 48, 1964.
- [25] Weeks, Jeffrey R. *The shape of space*, Marcel Dekker, New York, 1985.