JOSÉ ANTONIO CUETO URETA

SOBRE FLUXOS EXPANSIVOS EM SUPERFÍCIES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2017

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa

T

C965s
2017

Cueto Ureta, José Antonio, 1988-
Sobre fluxos expansivos em superfícies / José Antonio Cueto Ureta. - Viçosa, MG, 2017.
vii, 92f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador : Walter Teófilo Huaraca Vargas.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.91-92.

1. Matemática. 2. Topologia. 3. Sistemas dinâmicos. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de Pós-graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 514

JOSÉ ANTONIO CUETO URETA

SOBRE FLUXOS EXPANSIVOS EM SUPERFÍCIES

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae.*

APROVADA: 17 de fevereiro de 2017

Juan Valentín Mendoza Mogollón

Bulmer Mejía García

Walter Teófilo Huaraca Vargas
(Orientador)

Dedico este trabalho aos meus pais
e a minha esposa.

"O que mais me surpreende na humanidade, são os homens. Porque perdem a saúde para juntar dinheiro. Depois perdem dinheiro para recuperar a saúde. E por pensarem ansiosamente no futuro, esquecem do presente de tal forma que acabam por não viver nem o presente nem o futuro. E vivem como se nunca fossem morrer ... E morrem como se nunca tivessem vivido."

Dalai Lama

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus e sou muitíssimo grato aos meus pais pelo exemplo, pelo carinho e pela motivação; vocês são os maiores de todos os meus professores, são a minha base, e sabemos bem que nossa história de lutas e vitórias começa bem antes daqui.

Agradeço ao meu orientador, Walter Teófilo Huaraca Vargas, pela paciência, aprendizado valioso, pelas correções e pelo seu incentivo. Obrigado por ser essa pessoa maravilhosa que você é.

Agradeço a minha nobre esposa Maruja pelo companheirismo, pela paciência, pela força e pela alegria que tem me dado.

Agradeço aos meus amigos e colegas de curso pela amizade, pelos momentos de descontração e de estudos. Vocês fizeram parte da minha formação e vão continuar presentes em minha vida.

Aos professores e funcionários do DMA-UFV, por colaborarem com a minha formação e pelos eficientes serviços prestados.

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

E finalmente, mas não menos importante, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

Sumário

Resumo **vi**

Abstract **vii**

Introdução **1**

1 Preliminares **2**

1.1 Sistemas dinâmicos discretos 2

1.2 Sistemas dinâmicos contínuos 3

1.3 Classificação de superfícies compactas 10

1.4 Suspensões 11

1.5 Teoria de Poincaré Bendixson 12

2 Definindo Fluxos Expansivos **15**

2.1 Definições intuitivas 15

2.2 Definições Cinemáticas 17

2.3 Definições geométricas 20

2.4 Exemplos 35

2.5 Relações entre as definições 40

3 Sobre fluxos Expansivos em Superfícies **45**

3.1 Fluxos expansivos 45

3.2 Propriedades dos fluxos expansivos 53

3.3 Caracterização de fluxos expansivos sobre superfícies 81

Referências Bibliográficas **91**

Resumo

URETA, José Antonio Cueto, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2017. **Sobre Fluxos Expansivos em Superfícies**. Orientador: Walter Teófilo Huaraca Vargas.

No presente trabalho estudaremos algumas definições de fluxos expansivos, suas relações entre elas e com o auxílio de alguma delas provaremos dois teoremas; um de caracterização de fluxos espansivos sobre superfícies compactas, e um outro sobre a caracterização das superfícies compactas que suportam fluxos expansivos; estes resultados são devidos a A. Artigue.

Abstract

URETA, José Antonio Cueto, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2017. **About Expansive Flows in Surface**. Adviser: Walter Teófilo Huaraca Vargas.

In the present work we will study some definitions of expansive flow, the relations between them and with the help of some of them we will prove two theorems; the first characterize the expansive flows on compact surfaces, and the other is a topological characterization of compact surfaces that support expansive flows; These results are due to A. Artigue.

Introdução

O objetivo principal deste trabalho é estudar algumas possíveis definições para o conceito de fluxos expansivos, bem como suas relações entre si, destacando duas delas (equivalentes em certas condições). A seguir, provaremos os teoremas de classificação de superfícies que suportam fluxos expansivos e a caracterização dos mesmos, obtidos por Artigue em [5].

Teorema A. *Seja ϕ um fluxo sem singularidades de índice 0 zero sobre uma superfície compacta Σ. Então os seguintes enunciados são equivalentes:*

(1.) ϕ é expansivo.

(2.) O conjunto de pontos singulares $\mathrm{Sing}(\phi)$ de ϕ é um conjunto finito e não vazio, ϕ não tem pontos errantes $\Omega(\phi) = \Sigma$ e ϕ não tem pontos periódicos.

(3.) As singularidades são do tipo sela e a união das suas separatrizes é denso na superfície.

Consideremos uma superfície compacta $\Sigma^{h,b,c}$, onde h representa o número de alças, b o número das componentes da fronteira e c o número de crosscaps necessários para obter Σ, então temos o seguinte resultado

Teorema B. *Uma superfície compacta e conexa $\Sigma = \Sigma^{h,b,c}$ admite um fluxo expansivo se e somente se $h > 0$ e $h + b + c > 1$*

No capítulo 1, apresentaremos resultados conhecidos da teoria dos sistemas dinâmicos contínuos sobre espaços métricos. A maioria dos resultados serão apresentados sem prova pois elas são bem conhecidas e podem ser achadas, por exemplo, em [15], [7], [3], [12], [13] e [1].

No capítulo 2 estudaremos algumas definições existentes para fluxo expansivo. Decidimos ordená-las de forma alfabética, estas serão classificadas em três grupos: intuitivas, cinemáticas e geométricas. Na seção 2.2 estudaremos alguns exemplos e observaremos a importância de cada definição e suas implicações dinâmicas; na seção 2.3 mostramos as relações entre algumas destas definições.

No capítulo 3, mostraremos alguns resultados preliminares, com o objetivo de apresentarmos as provas dos Teoremas A e B.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos conceitos básicos, propriedades gerais e resultados conhecidos para sistemas dinâmicos, sempre considerando como nosso conjunto universal um espaço métrico compacto (X, dist).

1.1 Sistemas dinâmicos discretos

Definição 1.1. *Um **sistema dinâmico discreto sobre um espaço métrico X** é um homeomorfismo $f : X \to X$. Onde para $n \in \mathbb{Z}$, a n-enésima iterada de f é a n-enésima composição denotada por: $f^n = f^{n-1} \circ f$, se $n > 0$; $f^n = f^{n+1} \circ f^{-1}$, se $n < 0$; e $f^0 = Id$ a aplicação identidade em X, f^{-1} a aplicação inversa de f.*

Definição 1.2. *Se f é um sistema dinâmico discreto sobre X e $x \in X$, então a **órbita de x com respeito a f** é o conjunto*

$$\mathcal{O}(x) = \{f^n(x) |\ n \in \mathbb{Z}\}$$

*A **órbita positiva de x com respeito a f** é o conjunto*

$$\mathcal{O}^+(x) = \{f^n(x) |\ n \geqslant 0\}$$

*A **órbita negativa de x com respeito a f** é o conjunto*

$$\mathcal{O}^-(x) = \{f^{-n}(x) |\ n > 0\}.$$

***$x \in X$ é um ponto fixo com respeito a f** se $f(x) = x$.*
***$x \in X$ será dito um ponto periódico de período n com respeito a f** se existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $f^n(x) = x$ e $f^k(x) \neq x$ para todo $0 \leqslant k \leqslant n - 1$*

Um dos primeiros exemplos deste tipo de sistemas dinâmicos e que usaremos nesta dissertação são as rotações do círculo.

Exemplo 1.1.1. *Na notação multiplicativa, temos:*

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} = \{e^{2\pi i\phi}; \phi \in \mathbb{R}\}$$

Usando a notação aditiva, a circunferência unitária é:

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

Isto é, o quociente do grupo aditivo dos números reais pelo subgrupo dos inteiros. A transformação

$$e^{2\pi i\phi} \mapsto \phi$$

é um isomorfismo entre estas duas representações. Assim podemos representar com R_α a rotação por um ângulo $2\pi\alpha$. Logo, nestas duas notações temos:

$$R_\alpha(z) = e^{2\pi i\alpha} z$$

e

$$R_\alpha(x) = x + \alpha(\mod 1)$$

em que $(\mod 1)$ significa que números diferindo entre si por um inteiro são identificados. Em [7] prova-se que:

a) Se α é um número racional, então x é um ponto periódico com período q para qualquer $x \in S^1$, onde p e q são primos inteiros relativos tal que $\alpha = \frac{p}{q}$ e $q > 0$.

b) Se α é um número irracional, então $\mathcal{O}^+(x)$, $\mathcal{O}^-(x)$, e $\mathcal{O}(x)$ são densas em S^1 para todo $x \in S^1$.

1.2 Sistemas dinâmicos contínuos

Definição 1.3. *Um* ***sistema dinâmico contínuo de classe*** C^r ***(ou fluxo de classe C^r) sobre um espaço métrico X*** *é uma de aplicação C^r, $\phi : \mathbb{R} \times X \to X$ tal que:*

a) $\phi(0, x) = x$, e

b) $\phi(t + s, x) = \phi(s, \phi(t, x))$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$ e todo $x \in X$.

Definição 1.4. *Se ϕ_t é um fluxo sobre um espaço métrico X e $x \in X$, então a* ***órbita de x com respeito a ϕ*** *é o conjunto*

$$\mathcal{O}(x) = \{\phi_t(x)|\ t \in \mathbb{R}\} = \phi_{\mathbb{R}}(x)$$

A ***órbita positiva de x com respeito a ϕ*** *é o conjunto*

$$\mathcal{O}^+(x) = \{\phi_t(x)|\ t \geqslant 0\} = \phi_{\mathbb{R}_0^+}(x)$$

A ***órbita negativa de x com respeito a ϕ*** *é o conjunto*

$$\mathcal{O}^-(x) = \{\phi_{-t}(x)|\ t < 0\} = \phi_{\mathbb{R}_0^-}(x).$$

Observação 1.2.1. *Em [20], prova-se que se $x, y \in X$, a relação $x \sim y$ se, e somente se, $y \in \mathcal{O}(x)$ é uma relação de equivalência em que $\mathcal{O}(x)$ é homeomorfo :*

a) A um ponto (chamado de ponto singular), neste caso, $\phi_t(p) = p$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ou

b) Ao círculo (chamado de órbita periódica) na qual existe $T \in \mathbb{R}^+$ $\phi_T(p) = p$, para algum $T > 0$ e $\phi_t(p) \neq p$ para $0 \leqslant t < T$, ou

c) À reta.

Denotaremos o conjunto de pontos singulares e periódicos do fluxo ϕ, por $\mathrm{Sing}(\phi)$ e $\mathrm{Per}(\phi)$, respectivamente.

Fluxos topologicamente equivalentes e conjugação topológica

Seja ϕ um fluxo em um espaço métrico compacto X. A seguir estudaremos formas de mudar o sistema sem perder as informações dinâmicas dos mesmos.

Definição 1.5. *Seja X um conjunto,* ***uma função $\rho : \mathbb{R} \times X \to \mathbb{R}$ é uma reparametrização do tempo*** *se*

a) $\rho(\cdot, x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é sobrejetora, e

b) $\rho(\cdot, x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é estritamente crescente

para todo $x \in X$.

Definição 1.6. *Seja X e Y espaços topológicos.* ***Os fluxos $\phi_t : X \to X$ e $\psi_t : Y \to Y$ são topologicamente semi-conjugados*** *se existe uma aplicação sobrejetora $h : X \to Y$ tal que*

$$\psi_t \circ h = h \circ \phi_t$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. ***A função h é uma semi-conjugação topológica do fluxo ϕ_t ao ψ_t.*** *Dizemos que* ***h é uma conjugação topológica***, *se é um homeomorfismo.*

Definição 1.7. *Seja X e Y espaços topológicos.* ***Dois fluxos $\phi_t : X \to X$ e $\psi_t : Y \to Y$ são topologicamente equivalentes*** *se existe um homeomorfismo $h : X \to Y$ e uma reparametrização $\rho : \mathbb{R} \times X \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\psi_t(h(x)) = h(\phi_{\rho(t,x)}(x))$$

para todo $x \in X$ e $t \in \mathbb{R}$. ***O par ordenado (h, ρ) é uma equivalência topológica entre os fluxos ϕ_t e ψ_t.***

Definição 1.8. *Seja ϕ_t um fluxo sobre um espaço métrico compacto X.* ***Uma função $\Phi : \mathbb{R} \times X \to X$ é uma mudança temporal de ϕ_t*** *se existe uma raparametrização $\rho : \mathbb{R} \times X \to \mathbb{R}$ tal que $\Phi(t, x) = \phi_{\rho(t,x)}(x)$ e Φ é um fluxo.*

Conjuntos invariantes

Alguns dos subconjuntos do espaço tem comportamento dinâmico independente de outros subconjuntos, formalmente temos a:

Definição 1.9. *Seja ϕ um fluxo sobre o espaço métrico compacto X.* ***Um subconjunto A de X é invariante com respeito ao fluxo ϕ*** *se $\phi_t(A) = A$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Exemplo 1.2.1. *Se ϕ_t é um fluxo sobre um espaço topológico X, então $\varnothing$ e X são invariantes com respeito a ϕ_t. Se $p \in X$ é um ponto singular ou periódico do fluxo, então eles também são invariantes.*

A seguinte proposição é de fácil verificação e pode ser achada, por exemplo, em [15] e [3].

Proposição 1.2.1. *a) O complemento de um conjunto que é invariante com respeito a um fluxo é invariante com respeito ao fluxo.*

b) A interseção de qualquer coleção de conjuntos que são invariantes com respeito a um fluxo é ainda invariante com respeito ao fluxo.

c) a união de qualquer coleção de conjuntos que são invariantes com respeito a um fluxo é ainda invariante com respeito ao fluxo.

Observação 1.2.2. *Seja X e Y espaços métricos compactos. Seja (h, ρ) uma equivalência topológica entre os fluxos $\phi_t : X \to X$ e $\psi_t : Y \to Y$. A é invariante com respeito a ϕ_t se, e somente se, $h(A)$ é invariante com respeito a ψ_t.*

Conjuntos limites

Os conjuntos α-limite e ω-limite de um ponto x com respeito a um fluxo ϕ, capturam o comportamento de $\phi_t(x)$ no passado e no futuro, respectivamente. Formalmente temos:

Definição 1.10. *Seja ϕ um fluxo no espaço métrico compacto X.* ***Um ponto $y \in X$ é ponto ω-limite de $x \in X$ com respeito a ϕ*** *se existe uma sequência t_n de números reais tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ e*

$$y = \lim_{n\to\infty} \phi_{t_n}(x).$$

O conjunto ω-limite de $x \in X$ com respeito a ϕ, denotado por $\omega(x)$, é o conjunto de todos os pontos ω-limite de x com respeito a ϕ.

Definição 1.11. *Seja ϕ um fluxo no espaço métrico compacto X.* ***Um ponto $y \in X$ é ponto α-limite de $x \in X$ com respeito a ϕ*** *se existe uma sequência t_n de números reais tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ e*

$$y = \lim_{n\to\infty} \phi_{-t_n}(x).$$

O conjunto α-limite de $x \in X$ com respeito a ϕ, denotado por $\alpha(x)$, é o conjunto de todos os pontos α-limite de x com respeito a ϕ.

Exemplo 1.2.2. *Seja p um ponto periódico de um fluxo ϕ. Como $\mathcal{O}(p)$ é fechado pela invariância das órbitas periódicas, $\mathcal{O}(p)$ contém todos os pontos de acumulação. Portanto, $\alpha(p) \subset \mathcal{O}(p)$ e $\omega(p) \subset \mathcal{O}(p)$.*
Por outro lado, se $x \in \mathcal{O}(p)$, então existe um número real τ tal que $x = \phi_\tau(p)$. Se T é o período de p, então

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{\tau+nT}(p) = \lim_{n\to\infty} \phi_\tau(\phi_{nT}(p)) = \phi_\tau(p)(x)$$

ou

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{\tau-nT}(p) = \lim_{n\to\infty} \phi_\tau(\phi_{-nT}(p)) = \phi_\tau(p)(x).$$

Assim, para qualquer n inteiro $\phi_{nT}(p) = p$. Temos $x \in \alpha(p)$, e $x \in \omega(p)$. Consequentemente, $\mathcal{O}(p) \subset \alpha(p)$ e $\mathcal{O}(p) \subset \omega(p)$.
Portanto, se p é um ponto periódico de ϕ, então

$$\alpha(p) = \omega(p) = \mathcal{O}(p).$$

Observação 1.2.3. *a) Seja ϕ um fluxo sobre o espaço métrico compacto X e $x \in X$. Se $y \in \mathcal{O}(x)$, então $\omega(y) = \omega(x)$, e $\alpha(y) = \alpha(x)$.*
De fato, se $y \in \mathcal{O}(x)$, então $y = \phi_\tau(x)$ para algum número real τ. Se $z \in \omega(x)$, então existe uma sequência t_n de números reais tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ e

$$z = \lim_{n\to\infty} \phi_{t_n}(x) = \lim_{n\to\infty} \phi_{t_n}(\phi_{-\tau}(y)) = \lim_{n\to\infty} \phi_{t_n-\tau}(y).$$

Como $t_n - \tau$ convergem ao ∞, obtemos que $z \in \omega(y)$.
Por outro lado, se $z \in \omega(y)$, então existe uma sequência t_n de números reais tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ e $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ e

$$z = \lim_{n\to\infty} \phi_{t_n}(y) = \lim_{n\to\infty} \phi_{t_n}(\phi_{+\tau}(x)) = \lim_{n\to\infty} \phi_{t_n+\tau}(x).$$

Como $t_n + \tau$ converge ao ∞, obtemos $z \in \omega(x)$. Portanto, $\omega(x) = \omega(y)$. A prova para $\alpha(x)$ é similar.

b) Seja X e Y espaços métricos compactos. Se (h, ρ) é uma equivalência topológica de o fluxo $\phi_t : X \to X$ ao fluxo $\psi_t : Y \to Y$, então $\omega(h(x)) = h(\omega(x))$, e $\alpha(h(x)) = h(\alpha(x))$ para todo $x \in X$.
De fato, se $x \in X$ e $z \in \omega(x)$, então existe uma sequência t_n de números reais tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ e

$$z = \lim_{n\to\infty} \phi_{t_n}(x).$$

A sobrejetividade e a monotonia de $\rho(\cdot, x)$ implica que para cada natural n existe um número real s_n tal que $t_n = \rho(s_n, x)$ e $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$. Pois (h, ρ) é *uma equivalência topológica de ϕ ao ψ,*

$$\begin{aligned} h(z) &= h(\lim_{n\to\infty} \phi_{t_n}(x)) \\ &= \lim_{n\to\infty} h(\phi_{t_n}(x)) \\ &= \lim_{n\to\infty} h(\phi_{\rho(s_n,x)}(x)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \psi_{s_n}(h(x)). \end{aligned}$$

Assim, $h(z) \in \omega(h(x))$. Logo $h(\omega(x)) \subset \omega(h(x))$.

Agora mostraremos a inclusão inversa. Lembremos que $(h^{-1}, \overline{\rho})$ é uma equivalência topológica de ψ a ϕ. pelo argumento anterior, $h^{-1}(\omega(h(x))) \subset \omega(x)$. Logo, $\omega(h(x)) \subset h(\omega(x))$. Portanto,

$$\omega(h(x)) = h(\omega(x)).$$

A prova que $\alpha(h(x)) = h(\alpha(x))$ para todo $x \in X$ é similar.

Exemplo 1.2.3. *Seja c_1 e c_2 números reais. Consideremos o sistema de equações diferenciais.*

$$\begin{aligned} x_1' &= c_1 \\ x_2' &= c_2 \end{aligned}$$

sobre o toro $\mathbb{T}^2$. Identificando o toro com $\frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z}^2}$, o correspondente fluxo $\phi_t : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ é

$$\phi_t = (x_1 + c_1 t, x_2 + c_2 t) \mod \mathbb{Z}^2.$$

Se $\frac{c_2}{c_1}$ é racional ou $c_1 = 0$, então a órbita de qualquer ponto de $\mathbb{T}^2$ é periódica com respeito a ϕ (ver figura 1.1(a)).
Se $\frac{c_2}{c_1}$ é irracional, então nos referiremos ao fluxo ϕ como um ***fluxo irracional do toro*** *(ver figura 1.1(b)). Neste caso, demonstraremos que o conjunto ω-limite e α-limite de qualquer ponto é o toro $\mathbb{T}^2$. Consequentemente, as órbitas positivas e as órbitas negativas de qualquer ponto será denso em $\mathbb{T}^2$.*

Assumamos que $\frac{c_2}{c_1}$ é irracional. Sem perda de generalidade, podemos supor que c_1 é positivo. Seja (p_1, p_2) representando um ponto em $\mathbb{T}^2$ tal que $0 \leqslant p_1 < 1$. Consideremos o círculo

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2 |\ x_1 = p_1 \mod \mathbb{Z}.\}$$

Como

$$\phi_{\frac{1}{c_1}}(p_1, x_2) = (p_1 + 1, x_2 + \frac{c_2}{c_1}) \mod \mathbb{Z}^2 \in C$$

existe a função $\Pi : C \to C$ definida por

$$\Pi(p_1, x_2) = \phi_{\frac{1}{c_1}}(p_1, x_2).$$

A função Π é uma rotação no círculo C pelo ângulo $2\pi\frac{c_2}{c_1}$.

Existe um inteiro positivo k *tal que* $\frac{k}{c_1} \geqslant 1$. *Para qualquer inteiro positivo* n *definimos* $\tau_n = n\frac{k}{c_1}$. *Como*

$$\phi_{\tau_n}(p_1, p_2) = (p_1 + nk, p_2 + c_2\tau_n) \mod \mathbb{Z}^2,$$

temos $\phi_{\tau_n}(p_1, p_2) \in C$.

Seja (y_1, y_2) *representando um ponto em* $\mathbb{T}^2$ *tal que* $0 \leqslant y_1 < 1$. *Mostraremos que* $(y_1, y_2) \in \omega(p_1, p_2)$ *Definamos* $\sigma = \frac{(p_1 - y_1)}{c_1}$. *Como*

$$\phi_\sigma(y_1, y_2) = (p_1, y_2 + C_2\sigma) \mod \mathbb{Z}^2,$$

temos $\phi_\sigma(y_1, y_2) \in C$.
Para qualquer inteiro positivo n *seja* B_n, *a bola aberta em* $\mathbb{T}^2$ *de raio* $\frac{1}{n}$ *centrada em* (y_1, y_2). *Pela continuidade de* ϕ_σ *o conjunto* $\phi_\sigma(B_n) \cap C$ *é uma vizinhança de* $\phi_\sigma(y_1, y_2)$ *em* C. *Segundo o exemplo 1.1.1 item b, a órbita positiva de* $\phi_{\tau_n}(p_1, p_2)$ *com respeito a* Π *é densa em* C. *Assim, existe um inteiro positivo* m_n *tal que*

$$\Pi^{m_n}(\phi_{\tau_n}(p_1, p_2)) \in \phi_\sigma(B_n) \cap C.$$

Definimos uma sequência de números reais t_n *por*

$$t_n = \tau_n + \frac{m_n}{c_1} - \sigma.$$

como $\frac{m_n}{c_1} > 0$ *e* $\tau_n = n\frac{k}{c_1} \geqslant n$, *temos* $t_n \geqslant \tau_n - \sigma \geqslant n - \sigma$. *Logo,* $\lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$. *Mostraremos que* $\lim_{n\to\infty} \phi_{t_n}(p_1, p_2) = (y_1, y_2)$.

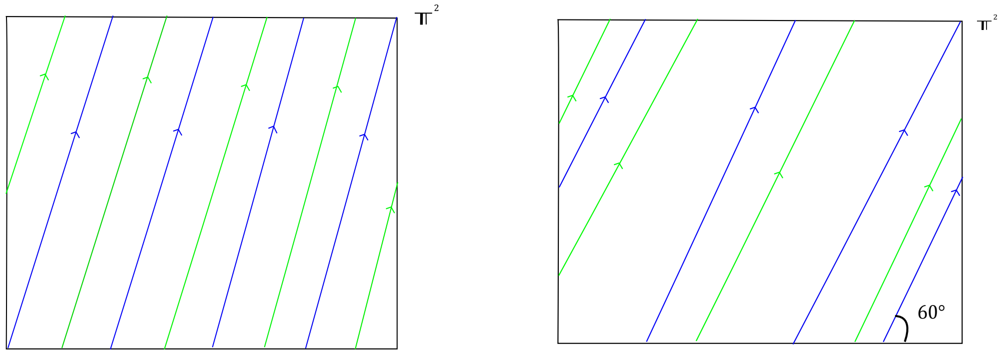
Seja U *uma vizinhança aberta de* (y_1, y_2) *em* $\mathbb{T}^2$. *Existe um inteiro positivo* N *tal que* $B_n \subset U$ *para todo* $n \geqslant N$. *Pela propriedade de grupo de um fluxo e a definição de* Π,

$$\begin{aligned} \phi_{t_n}(p_1, p_2) &= \phi_{\tau_n + \frac{m_n}{c_1} - \sigma}(p_1, p_2) \\ &= \phi_{-\sigma}(\phi_{\frac{m_n}{c_1}}(\phi_{\tau_n}(p_1, p_2))) \\ &= \phi_{-\sigma}(\Pi^{m_n}(\phi_{\tau_n}(p_1, p_2))) \in B_n \subset U \end{aligned}$$

para todo $n \geqslant N$. *Logo,*

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{t_n}(p_1, p_2) = (y_1, y_2).$$

Portanto, $\omega(p_1, p_2) = \mathbb{T}^2$ *para todo* $(p_1, p_2) \in \mathbb{T}^2$. *Similarmente,* $\alpha(p_1, p_2) = \mathbb{T}^2$ *para todo* $(p_1, p_2) \in \mathbb{T}^2$. *Consequentemente, ambas as órbitas positiva e negativa de qualquer ponto são densas em* $\mathbb{T}^2$ *em relação ao fluxo irracional.*



(a) Fluxo racional no toro (b) Fluxo irracional no toro

Figura 1.1: Fluxo no toro $\mathbb{T}^2$

Pontos não errantes

Definição 1.12. *Seja ϕ um fluxo sobre um espaço métrico X.* ***Um ponto $x \in X$ é não errante para ϕ*** *se para qualquer vizinhança aberta U de x e para cada número real positivo $\tau > 0$ existe um número real $t > \tau$ tal que*

$$\phi_t(U) \cap U \neq \varnothing$$

O conjunto não errante de ϕ, denotado por $\Omega(\phi)$, *é o conjunto dos pontos não errantes para ϕ.* ***Um ponto que não é não errante é errante para ϕ.***

Exemplo 1.2.4. *se x é um ponto fixo de um fluxo ϕ, então x é um ponto não errante para ϕ, pois para qualquer vizinhança aberta U de x e qualquer $T > 0$ temos $x \in U \cap \phi_T(U)$.*

Exemplo 1.2.5. *se x é um ponto periódico com período $T > 0$ para um fluxo ϕ, então existe um número natural n tal que $nT > 0$. Assim, x é não errante para ϕ pois $\phi_{nT}(x) = x$, em que para qualquer vizinhança U de x temos $x \in U \cap \phi_{nT}(U)$.*

Exemplo 1.2.6. *Considere um fluxo irracional ϕ sobre o toro $\mathbb{T}^2$. Seja $x \in \mathbb{R}^2$. Pelo exemplo 1.2.3 o ponto x pertence a seu conjunto limite $x \in \omega(x)$. Portanto existe uma sequência t_n de números reais tal que $\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty$ e $\lim_{n\to+\infty} \phi_{t_n}(x) = x$. Se U é uma vizinhança aberta de x, então como $\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty$, para cada $\tau > 0$ existe um inteiro positivo N tal que $\phi_{t_n}(x) \in U$ com $t_n > \tau$ para todo $n \geqslant N$. Portanto, $\Omega(\phi) = \mathbb{T}^2$.*

Observação 1.2.4. *a) O conjunto de pontos não errantes do fluxo é invariante com respeito ao fluxo.*
De fato, seja ϕ um fluxo. Seja $x \in \Omega(\phi)$ e $\tau \in \mathbb{R}$. Seja U uma vizinhança aberta de ϕ_τ. A continuidade de ϕ_τ implica que $V = \phi_{-\tau}(U)$ é uma vizinhança aberta de x. Como $x \in \Omega(\phi)$, existe $T > 0$ tal que $V \cap \phi_T(V) \neq \varnothing$. Consequentemente, $U \cap \phi_T(U) = \phi_T(V \cap \phi_T(V)) \neq \varnothing$. Portanto, $\Omega(\phi)$ é invariante.

b) O conjunto de pontos não errantes de um fluxo é fechado.
De fato, seja ϕ um fluxo. Seja x um ponto limite de $\Omega(\phi)$. Seja U uma vizinhança aberta de x. Como x é um ponto limite de $\Omega(\phi)$, existe $y \in U \cap \Omega(\phi)$. O ponto y é não errante, assim existe $T > 0$ tal que $U \cap \phi_T(U) \neq \emptyset$. logo, $x \in \Omega(\phi)$. Portanto, $\Omega(\phi)$ é fechado.

c) Seja X e Y espaços topológicos. Se $h : X \to Y$ é uma conjugação topológica de um fluxo $\phi_t : X \to X$ ao fluxo $\psi_t : Y \to Y$, então

$$\Omega(\psi) = h(\Omega(\phi)).$$

d) Se ϕ é um fluxo sobre o espaço métrico compacto X, então $\omega(x) \subset \Omega(\phi)$ e $\alpha(x) \subset \Omega(\phi)$ para todo $x \in X$.

1.3 Classificação de superfícies compactas

Nosso objetivo nesta seção é apresentar uma classificação topológica das superfícies compactas e conexas. Para isso, iniciaremos definindo a soma conexa de duas superfícies.

Dadas as superfícies Σ_1, Σ_2, **a soma conexa de Σ_1 e Σ_2**, denotada por $\Sigma_1 \# \Sigma_2$ é obtida da seguinte forma:

Escolha $D_1 \subset \Sigma_1$ e $D_2 \subset \Sigma_2$, onde D_1 e D_2 são discos fechados homeomorfos ao disco fechado $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Denote por Σ_i' o complemento do interior de D_i em Σ_i, $i = 1, 2$. Escolha um homeomorfismo $h : \partial D_1 \to \partial D_2$. Então $\Sigma_1 \# \Sigma_2$ é o espaço quociente de $\Sigma_1' \cup \Sigma_2'$ obtido pela identificação dos pontos x e $h(x)$, $x \in \partial D_1$.

Assim, temos os seguintes teoremas que podem ser encontrados no capítulo 9 de [13].

Teorema 1.1. *Seja Σ uma superfície compacta, sem fronteira e conexa, então:*

a) Σ é a esfera, ou

b) Σ é a soma conexa de h toros para $g \geqslant 1$, ou

c) A soma conexa de c planos projetivos, com $c \geqslant 1$

Observação 1.3.1. *a) Adicionar uma **alça** a Σ, significa retirar dois discos mergulhados em $\Sigma \backslash \partial \Sigma$ e colar com um cilindro $D \times S^1$, identificando cada componente da mesma com os círculos fronteira dos discos substraídos.*

*b) O plano projetivo pode ser entendido como o resultado de colar um disco D e uma faixa de Moebius B ao longo da suas fronteiras. Esse processo é chamado de **crosscap**.*

Corolário 1.2. *Seja Σ uma superfície compacta e conexa então ela é homeomorfa a $\Sigma^{h,b,c}$; onde $\Sigma^{h,b,c}$ é a superfície com h alças, c crosscap e b componentes da fronteira.*

Teorema 1.3. *Adicionar uma alça a uma superfície conexa não orientável é o mesmo que adicionar dois crosscaps. Portanto, adicionando uma alça a uma superfície não orientável de gênero p, se obtém uma superfície não orientável de gênero $p+2$*

Teorema 1.4. *Seja Σ uma superfície orientável de gênero p. Adicionar um crosscap a Σ resulta em uma superfície não orientável de gênero $2p+1$.*

1.4 Suspensões

Existe uma construção natural de um fluxo partindo de um difeomorfismo e uma profunda ligação dinâmica entre estes dois sistemas.

Definição 1.13. *Dados $f : X \to X$ e uma função $c : X \to \mathbb{R}^+$ limitada inferiormente por zero, considere o espaço quociente*

$$X_c = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R}^+ : 0 \leqslant t \leqslant c(x)\}/\sim$$

onde $\sim$ é a relação de equivalência $(x, c(x)) \sim (f(x), 0)$. ***A suspensão de f com teto c é o semi-fluxo $\phi^t : X_c \to X_c$*** *dado por $\phi^t(x,s) = (f^n(x), s')$, onde n e s' satisfazem*

$$\sum_{i=0}^{n-1} c(f^i(x)) + s' = t + s, \quad 0 \leqslant s' \leqslant c(f^n(x)).$$

Se $f : X \to X$ é um homeomorfismo, ϕ é chamado fluxo suspensão de f.

Exemplo 1.4.1. *Seja f um homeomorfismo no círculo S^1. Usamos f para identificar as componentes de fronteiras do cilindro $S^1 \times [0,1]$; isto é, identificar os pontos $(x,1)$ e $(f(x),0)$ em $S^1 \times [0,1]$ para $x \in S^1$. A variedade M_f obtida é o toro se f preserva a orientação do círculo, e a garrafa de Klein se f muda de orientação.*
Da definição 1.13, tomando a função de teto a função constante $c \equiv 1$, M_f é da forma (x,τ), onde $x \in S^1$ e $0 \leqslant < 1$. Para $z = (x,\tau) \in M_f$ e $t \in \mathbb{R}$ temos que o fluxo é

$$\phi_t(z) = (f^{[\![t+\tau]\!]}(x), \{t+\tau\}),$$

onde $\{\alpha\}$ denota a parte fracionária do número α.

As propriedades de f e seu fluxo suspensão estão intimamente relacionados.

Observação 1.4.1. *a) Se f tem uma órbita densa, então o fluxo suspensão ϕ_f tem uma trajetória densa.*

b) Se f não tem órbita densa, então o fluxo suspensão ϕ_f não tem trajetórias densas.

c) Se f tem uma órbita periódica, então o fluxo suspensão ϕ_f tem uma trajetória periódica.

d) Os enunciados recíprocos também são válidos.

Exemplo 1.4.2. *Seja $f = R_\mu$ a rotação do círculo $x^2 + y^2 = (\frac{1}{2\pi})^2$ com ângulo de rotação $2\pi\mu$, $\mu \in \mathbb{R}$. Então ϕ_{R_μ} é um fluxo racional ou irracional no toro, dependendo se μ é racional ou irracional.*

1.5 Teoria de Poincaré Bendixson

Consideremos Σ uma superfície compacta e conexa.

Definição 1.14. *Seja l um segmento mergulhado em Σ, dizemos que **l é uma secção transversal local do tempo $\tau > 0$ para o fluxo ϕ**, se $\phi : [-\tau, \tau] \times l \to \phi_{[-\tau,\tau]}(l)$ é um homeomorfismo e $l \cap \phi_{[-\tau,\tau]}(x) = \{x\}$, para todo $x \in l$. **l será chamado secção transversal local de ϕ**. **Um subconjunto $l \subset \Sigma$ é uma secção transversal global para ϕ** se para cada $x \in l$ existe uma vizinhança U de x tal que $U \cap l$ é uma secção transversal local e toda órbita de ϕ intersecta l. **Uma curva fechada γ** é chamada de transversal fechada se seus arcos são transversais locais.*

Definição 1.15. *Seja l uma secção transversal local, $a, b : l \to (0, \tau)$ aplicações contínuas; **o conjunto $U = \{\phi_t(x) : \ x \in l, \ t \in (-a(x), b(x))\}$ é chamado caixa de fluxo.***

Em [21] prova-se que qualquer ponto regular pertence a uma secção transversal local.

O seguinte teorema é conhecido como Teorema do Fluxo Tubular ou Teorema de Retificação e pode ser encontrado em [3].

Teorema 1.5. *Seja $x \in \Sigma$ um ponto regular de um fluxo ϕ de classe C^r $(r \geqslant 0)$ em uma superfície diferencial Σ. Então existe uma vizinhança U de x e um difeormorfismo de classe C^r de U em $\mathbb{R}^2$ levando trajetórias em U a trajetórias do sistema dinâmico*

$$x' = 1, \ y' = 0$$

sobre $\mathbb{R}^2$ preservando a direção no tempo.

Como consequência deste, temos o Teorema de Fluxo Tubular Longo.

Teorema 1.6. *Seja d um arco compacto de uma trajetória regular de um C^r-fluxo ϕ_t $(r > 0)$, e suponha que d não forma uma curva fechada. Então existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de d e uma C^r-difeomorfismo $\psi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^2$ que leva o arco em $\mathcal{U}$ de trajetórias de um sistema dinâmico $x' = 1, y' = 0$*

Observação 1.5.1. *Seja $[y_1, y_2] = \phi_{[t_1,t_2](y)}$ o segmento de órbita de y com pontos extremos y_1 e y_2, e sejam l_1 e l_2 duas secções transversais passando por y_1 e y_2 respectivamente, tal que $[y_1, y_2] \cap (l_1 \cup l_2) = \{y_1, y_2\}$. É conveniente que $y_2 \in \phi_{\mathbb{R}^+}(y)$; isto é, o ponto y_2 se move ao longo de $\phi_{\mathbb{R}}(y)$ de y_1 com tempo crescente. Pelo teorema 1.6, existe uma vizinhança $l \subset l_1$ de y_1 sobre l_1 tal que para qualquer $x \in l$ a semiórbita positiva $\phi_{\mathbb{R}^+}(x)$ intersecta l_2 sem intersectar primeiro a l_1. Denotemos por $\widehat{x}$ o primeiro ponto onde $\phi_{\mathbb{R}^+}(x)$ intersecta l_2.*

Definição 1.16. ***A aplicação $f = f(x,l) : l_1 \to l_2$ é dita aplicação de Poincaré induzida pelo fluxo ϕ**, se é tal que $f(x) = \widehat{x} \in l_2$, com $x \in l$ de acordo com a observação 1.5.1.*

O seguinte teorema caracteriza os conjuntos limites de um fluxo definido num disco e é conhecido como Teorema de Poincaré-Bendixson.

Teorema 1.7. *Seja um fluxo ϕ de clase C^1 num conjunto aberto $\Delta \subset \mathbb{R}^2$. Se γ é uma órbita fechada de ϕ tal que $int\gamma \subset \Delta$ então existe um ponto singular de ϕ contido em $int\gamma$ relativo a $\mathbb{R}^2$.*

Definição 1.17. *Seja p uma singularidade e x um ponto regular tal que $\lim\limits_{t\to+\infty} \phi_t(x) = p$ (respectivamente $\lim\limits_{t\to-\infty} \phi_t(x) = p$). Dizemos que **a órbita de x, $\phi_{\mathbb{R}}(x)$, é uma separatriz estável do ponto p** (respetivamente instável).*

Definição 1.18. *Seja fluxo $\phi : \mathbb{R} \times \Sigma \to \Sigma$ na superfície compacta Σ, consideremos o conjunto $\mathrm{Sing}(\phi)$ como sendo isolado em Σ; e $p \in \mathrm{Sing}(\phi)$, $D \subset \Sigma$ um disco mergulhado tal que $\mathrm{Sing}(\phi) \cap D = \{p\}$. Além disso consideremos D muito pequeno, supondo que não existe uma separatriz estável ou instável contidas em $\mathrm{clos}(D)$, nem existe órbitas periódicas contidas. Seja*

$$U = \{x \in D : \ \phi_{\mathbb{R}^+}(x) \nsubseteq \mathrm{clos}(D) \ \ e \ \phi_{\mathbb{R}^-}(x) \nsubseteq \mathrm{clos}(D)\},$$

*e p um ponto de acumulação de U. **A componente conexa de U é chamada de setor Hiperbólico em D** (ver figura 1.2).*
***Uma separatriz estável $\gamma = \phi_{\mathbb{R}}(x)$ (ou instável) de p, é separatriz** se para cada vizinhança V de $y \in \gamma \cap D$*

$$V \backslash \gamma \subset U.$$

Com as condições da definição 1.18 e usando o teorema 1.7 de Poincaré-Bendixon temos que se $x \in D$ e $\phi_{\mathbb{R}^+}(x) \subset D$ ou $\phi_{\mathbb{R}^-}(x) \subset D$; então x pertence a uma separatriz estável ou instável de p. Porém se $\phi_{\mathbb{R}}(x) \subset D$, então $x = p$. Assim o conjunto U *é um conjunto aberto.* Para isto tomemos um ponto $x \in U$. Então existem $t_1 < 0$ e $t_2 > 0$ tal que $\phi_{t_1}(x) \notin clos(D)$ e $\phi_{t_2}(x) \notin clos(D)$ agora pelo teorema do fluxo tubular longo existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ do arco de trajetória $\phi_{[t_1,t_2]}(x)$ que é uma caixa de fluxo aberta em que tomando uma bola aberta centrada em x, $B(x) \subset \mathcal{U}$ contida em $\mathcal{U}$ conseguimos que todo ponto $y \in B(x)$ tem pontos de sua órbita no passado e no futuro fora de $clos(D)$, isto é, $B(x) \subset U$. Logo U é um conjunto aberto.

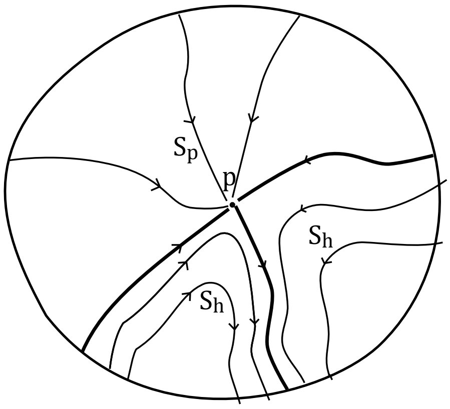


Figura 1.2: Sectores Hiperbólicos: S_h

Definição 1.19. *Seja um fluxo ϕ e $p \in \text{Sing}(\phi)$ que satisfaz as condições da definição 1.18;* ***o ponto singular p é de tipo sela*** *se tem um número finito de separatrizes.*

Definição 1.20. *Seja um ponto singular $p \in \text{Sing}(\phi)$ de tipo sela.* ***O índice da singularidade de tipo sela*** *é $j(p, \phi) = 1 - \frac{n_h}{2}$, onde n_h é o número de setores hiperbólicos em $D_p = D$. Se $p \in \partial\Sigma$ considerações similares tomaremos e definiremos o índice de p como $j(p, \phi) = 1 - n_h$.*

Em [12] (theorema 9.6) prova-se que esta definição 1.20 coincide com a usual noção de índice para pontos singulares. (no entanto, ela não se estende à fronteira da superfície.)

Definição 1.21. *Seja $p \in \text{Sing}(\phi)$ um ponto singular, então* ***os conjuntos estável e instável de p****, são respectivamente:*

$$W^s(p) = \{x \in \Sigma \ \lim_{t \to +\infty} \phi_t(x) = p\}$$
$$W^u(p) = \{x \in \Sigma \ \lim_{t \to -\infty} \phi_t(x) = p\}$$

Lembremos que a característica de Euler $\chi(\Sigma)$ de uma superfície Σ de gênero $p \geqslant 0$ é $\chi(\Sigma) = 2 - 2p$. Se Σ é não orientável, então $\chi(\Sigma) = 2 - p$.

Teorema 1.8. *Seja ϕ um fluxo sobre uma superfície Σ com finitas singularidades $p_1, p_2, \cdots, p_k$. Então $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} j(p_i, \phi) = \chi(\Sigma)$.*

Capítulo 2

Definindo Fluxos Expansivos

Neste capítulo nosso principal objetivo é estudar algumas definições existentes para fluxos expansivos, seguiremos de forma próxima o trabalho [4]. Mostraremos as implicações entre as mesmas e algumas de suas propriedades. No que segue consideramos fluxos ϕ de classe C^1 sobre espaços métricos compactos (X, dist), denotando o conjunto de homeomorfismos crescentes no conjunto de números reais que fixem zero como $\mathcal{H}_0^+(\mathbb{R})$.

2.1 Definições intuitivas

Lembremos que no caso de homeomorfismos sobre espações métricos temos a seguinte definição clássica.

Definição 2.1. *Um homeomorfismo $f : M \to M$, onde M é um espaço métrico compacto, é expansivo se existe $\delta > 0$ tal que se $x; y \in M$ e $dist(f^n(x); f^n(y)) < \delta$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ então, $x = y$.*

A primeira definição é a mais intuitiva, porém a de menor utilidade, em que imita a definição de expansividade para aplicações sobre espaços métricos.

Definição 2.2. *Diz-se que **um fluxo ϕ sobre X é A-expansivo** se existe $\delta > 0$ tal que se $\text{dist}(\phi_t(x), \phi_t(y)) < \delta$, para todo $t \in \mathbb{R}$ então; $x = y$*

A seguir mostraremos que a definição de A-expansividade tem pouco interesse dinâmico, pois ela restringe demasiadamente nosso espaço. De fato temos a seguinte proposição.

Proposição 2.1.1. *se ϕ é A-expansivo então X é um conjunto finito.*

Demonstração. Para provarmos nossa proposição, com $\delta > 0$ constante de expansividade de ϕ, bastará provar as duas seguintes afirmações:

a) *X é um conjunto de pontos singulares.*
Suponha por absurdo que, existe $x \in X \setminus \mathrm{Sing}(\phi)$. Pela continuidade de ϕ existe $T > 0$ tal que se $|t| < T$ então,

$$\mathrm{dist}(\phi_t(y), y) < \delta, \tag{2.1}$$

para todo $y \in X$; pois caso contrário, existiriam sequências convergentes $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tais que:

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = 0,$$
$$\lim_{n\to+\infty} y_n = y_0,$$
$$\mathrm{dist}(\phi_{t_n}(y_n), y_n) \geqslant \delta,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Daqui $0 = \mathrm{dist}(y_0, y_0) \geqslant \delta$, absurdo.
Por outro lado pela continuidade de ϕ, observemos que, existe $s \in (-T, T)$ tal que $\phi_s(x) \neq x$. Caso contrário, para todo $t \in (-T, T)$ teríamos $\phi_t(x) = x$ e daqui por continuidade de ϕ, $\lim_{t\to T^-} \phi_t(x) = \phi_T(x) = x$ logo x é um ponto singular, absurdo pois x e um ponto regular. Assim, fazendo $z = \phi_s(x)$ e como $|s| < T$, temos pelo resultado (2.1) que para cada $t \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{dist}(\phi_s(\phi_t(x)), \phi_t(x)) < \delta$$

e pela propriedade do fluxo $\phi_s(\phi_t(x)) = \phi_{t+s}(x) = \phi_{s+t}(x) = \phi_t(\phi_s(x)) = \phi_t(z)$, de onde

$$\mathrm{dist}(\phi_t(z), \phi_t(x)) < \delta$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, pela A-expansividade $z = x$, absurdo pois $z = \phi_s(x) \neq x$.

b) *X é um conjunto finito.*
Por absurdo, suponhamos que X é infinito. Agora pela afirmação (a), X é um conjunto de pontos singulares, e por hipótese,X é infinito então X tem um subconjunto enumerável. Assim, podemos supor X contável e infinito. Sob tal perspectiva, pela compacidade de X podemos encontrar $p_1, p_2\,\mathrm{Sing}(\phi)$, $p_1 \neq p_2$, em uma bola, centrada em algum ponto singular $p \in \mathrm{Sing}(\phi)$, e de raio $\frac{\delta}{2} > 0$, tal que

$$\mathrm{dist}(\phi_t(p_1), \phi_t(p_2)) < \delta$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, pela A-expansividade do fluxo ϕ temos que $p_1 = p_2$ absurdo pois $p_1 \neq p_2$, contradizendo a expansividade.

□

Observamos na demonstração anterior que a A-expansividade foi quebrada por pontos em uma mesma órbita. Assim, as próximas definições de fluxos expansivos terão que incluir pontos na mesma órbita.

Definição 2.3. *Diz-se que* ***um fluxo ϕ sobre X é B-expansivo*** *se existe $\delta > 0$ tal que se $\operatorname{dist}(\phi_t(x), \phi_t(y)) < \delta$, para todo $t \in \mathbb{R}$; então $x \in \phi_{\mathbb{R}}(y)$*

O exemplo 2.4.1 mostrará que existe um homeomorfismo não expansivo (vide Definição 2.1) cujo fluxo suspensão é B-expansivo. Este exemplo desestimula está definição.

2.2 Definições Cinemáticas

A seguinte definição pode ser encontrada em [9].

Definição 2.4. *Diz-se que* ***um fluxo ϕ sobre X é C-expansivo*** *se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\operatorname{dist}(\phi_t(x), \phi_t(y)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$ então, existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $|s| < \varepsilon$ e $\phi_s(x) = y$.*

Observação 2.2.1. *Se ϕ é C-expansivo, então o conjunto de pontos singulares $\operatorname{Sing}(\phi)$ é um conjunto finito.*

De fato. Provaremos que o conjunto $\operatorname{Sing}(\phi)$ é um conjunto compacto em X. Para isso, considere $\{p_n\} \subset \operatorname{Sing}(\phi)$ uma sequência convergindo para p, pela continuidade de ϕ_t, para $t \in \mathbb{R}$ temos que $\lim\limits_{n \to +\infty} \phi_t(p_n) = \phi_t(p)$. Logo pela unicidade de limite, $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \phi_t(p) = p$, isto é, $p \in \operatorname{Sing}(\phi)$; portanto, $\operatorname{Sing}(\phi)$ é um conjunto compacto. Agora provaremos a finitude de $\operatorname{Sing}(\phi)$. Tomemos $\varepsilon > 0$. Pela expansividade e compacidade de $\operatorname{Sing}(\phi)$ existe uma sub-cobertura finita centrada em pontos singulares $\operatorname{Sing}(\phi) \subset B(p_1, \delta) \cup B(p_2, \delta) \cup \ldots \cup B(p_N, \delta)$. Se $p \in \operatorname{Sing}(\phi) \cap B(p_i, \delta)$ para algum $i \in \{1, \cdots, N\}$, então para cada $t \in \mathbb{R}$ temos $\operatorname{dist}(\phi_t(p), \phi_t(p_i)) < \delta$. Logo pela C-expansividade existe $s \in \mathbb{R}$ com $|s| < \varepsilon$ tal que $p_i = \phi_s(p)$. Assim, $\operatorname{Sing}(\phi) = \{p_1, \ldots, p_N\}$. Portanto $\operatorname{Sing}(\phi)$ é um conjunto finito.

O exemplo 2.4.2 apresenta um homeomorfismo que não é expansivo, mas sua suspensão é C-expansivo. Novamente, este fato descarta a utilidade destá definição.

Um outro fato importante da definição de um fluxo C-expansivo é que a proximidade temporal é equivalente a proximidade espacial, como veremos na seguinte proposição.

Proposição 2.2.1. *Seja ϕ um fluxo em X, os seguintes enunciados são equivalentes:*

a) ϕ é C-expansivo.

b) Para cada $\beta > 0$ existe $\delta' > 0$ tal que se $\operatorname{dist}(\phi_t(x), \phi_t(y)) < \delta'$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então existe um segmento de órbita de diâmetro menor que β que contém x e y.

Demonstração. ***(a) implica (b)***
Dado $\beta > 0$, defina a função $\xi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $\xi(\varepsilon) = \max\{\text{dist}(\phi_t(x), x) : x \in X,\ t \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}$. ξ está bem definida e contínua, pois ϕ é um fluxo contínuo e a função definida como $\max\{\text{dist}(\phi_t(x), x)\}$ é bem definida e contínua sobre $X \times [-\varepsilon, \varepsilon]$. Assim pela continuidade de ξ no zero temos que para $\frac{\beta}{2} > 0$ dado, existe um $\overline{\delta} > 0$ tal que, se $|\varepsilon| < \overline{\delta}$, então $\xi(\varepsilon) < \frac{\beta}{2}$. Daí que podemos tomar um $\varepsilon > 0$ tal que

$$\xi(\varepsilon) = \max\{\text{dist}(\phi_t(x), x) : x \in X,\ t \in [-\varepsilon, \varepsilon]\} < \frac{\beta}{2}. \tag{2.2}$$

Agora, para $\varepsilon > 0$, por hipótese temos que existe $\delta' > 0$ (constante de C-expansividade) tal que para cada $t \in \mathbb{R}$, $\text{dist}(\phi_t(x), \phi_t(y)) < \delta'$ implica que existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $|s| < \varepsilon$ e $\phi_s(x) = y$. Isto é, y pertence ao segmento de órbita de x que denotaremos por $y \in \mathcal{O}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(x) = \{\phi_t(x) : t \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}$. Basta agora provar que $\text{diam}(\mathcal{O}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(x)) < \beta$. Sejam dois pontos $z, w \in \mathcal{O}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(x)$,então existem $s', \tau \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ tais que $\phi_{s'}(x) = w$, $\phi_\tau(x) = z$ e pela desigualdade triangular temos que $\text{dist}(w, z) \leqslant \text{dist}(w, x) + \text{dist}(z, x)$, em que pela desigualdade (2.2), concluímos $\text{dist}(w, z) \leqslant \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = \beta$, ou seja $\text{diam}(\mathcal{O}_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(x)) < \beta$.

(b) implica (a)
Seja $\varepsilon > 0$ e considere também $\beta_1 > 0$, por hipótese, existe $\delta_1 > 0$ tal que para cada $t \in \mathbb{R}$, $\text{dist}(\phi_t(x), \phi_t(y)) < \delta_1$,implica na existência de um segmento de órbita menor que β_1 que contem x, y.
Afirmação 1: Existe um número finito de órbitas com diâmetro menor que $\frac{\delta_1}{2}$. De fato, suponhamos por absurdo que existem infinitas órbitas de com diâmetro menor que $\frac{\delta_1}{2}$. Pela observação 2.2.1 da definição temos que podemos tirar as órbitas singulares, e pelo Axioma de Eleição é possível encontrar uma sequência de pontos de órbitas distintas $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e como X é compacto, existe uma subsequência $\{p_n\}_{n\in N}$, $N \subset \mathbb{N}$ infinito, com $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = p$. Além disso é possível encontrar para n muito grande que as órbitas $\mathcal{O}(p_n) \subset B_{\delta_1}(p)$, pois caso contrário, para cada $n \in \mathbb{N}$ existiria $n_k \in \mathbb{N}$, $n_k > n$ tal que $\mathcal{O}(p_{n_k}) \nsubseteq B_{\delta_1}(p)$, e como $\lim\limits_{k\to+\infty} p_{n_k} = p$, para $\frac{\delta_1}{2}$ existe um número natural $n_{k_0} \in N$ suficientemente grande tal que $\text{dist}(p_{n_{k_0}}, p) < \frac{\delta_1}{2}$ e existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_s(p_{n_{k_0}}) \notin B_{\delta_1}(p)$, assim como $\text{dist}(B_{\frac{\delta_1}{2}}(p), B^C_{\delta_1}(p)) = \frac{\delta_1}{2}$ isto é $\inf_{x\in B_{\frac{\delta_1}{2}}(p), y\in B^C_{\delta_1}(p)} \text{dist}(x, y) = \frac{\delta_1}{2}$, temos que $\text{dist}(p_{n_{k_0}}, \phi_s(p_{n_{k_0}})) \geqslant \frac{\delta_1}{2}$, absurdo pois $\text{diam}(\mathcal{O}(p_{n_{k_0}})) < \frac{\delta_1}{2}$. Agora, se $p \in \text{Sing}(\phi)$, então a partir de n suficientemente grande, para $t \in \mathbb{R}$, $\text{dist}(\phi_t(p_n), \phi_t(p_{n+1})) \leqslant \text{dist}(\phi_t(p_n), p) + \text{dist}(p, \phi_t(p_{n+1}))$, logo, $\text{dist}(\phi_t(p_n), \phi_t(p_{n+1})) \leqslant \text{dist}(\phi_t(p_n), p) + \text{dist}(p, \phi_t(p_{n+1})) \leqslant \frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_1}{2} = \delta_1$, para todo $t \in \mathbb{R}$, assim, por hipótese temos que existe um segmento de órbita de diâmetro menor que β_1 que contém p_n e p_{n+1}, logo, $p_n = p_{n+1}$, em que p_n é singular para n suficientemente grande, logo existem infinitos pontos singulares, o que é um absurdo, pela observação 2.2.1. Se $p \notin \text{Sing}(\phi)$, então da mesma maneira a partir de n suficientemente grande $\text{dist}(\phi_t(p_n), \phi_t(p_{n+1})) \leqslant \text{dist}(\phi_t(p_n), p) + \text{dist}(p, \phi_t(p_{n+1})) \leqslant \frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_1}{2} = \delta_1$, para cada $t \in \mathbb{R}$; o que implica que existe um segmento de órbita de diâmetro menor que β_1, que contém p_n, p_{n+1}. Isto é, existe $s \in \mathbb{R}$ tal que, $p_{n+1} = \phi_s(p_n)$. Logo as órbitas são iguais $\mathcal{O}(p_{n+1}) = \mathcal{O}(p_n)$, o que é um absurdo, pois as órbitas

consideradas são distintas.
Agora temos que existe $\beta_2 > 0$ tal que se $\text{diam}(\mathcal{O}(p)) < \beta_2$ implica que p é ponto singular. Caso contrário, para cada $k \in \mathbb{N}$ existiria $p_k \in X$, $\text{diam}(\mathcal{O}(p)) < \frac{1}{k}$ e p_k não singular. Nesse sentido como $\lim\limits_{k\to+\infty} \text{diam}(\mathcal{O}(p_k)) = 0$, tomando uma subsequência convergente $\{p_n\}_{n\in N}$ para p, pela continuidade do fluxo ϕ, $\lim\limits_{n\to+\infty} \phi_t(p_n) = \phi_t(p)$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Assim $\lim\limits_{n\to+\infty} \text{dist}(\phi_t(p_n), p_n) = \text{dist}(\phi_t(p), p)$ e como $\lim\limits_{n\to+\infty} \text{diam}(\mathcal{O}(p_n)) = 0$ temos que para cada $t \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \text{dist}(\phi_t(p_n), p_n) = 0 = \text{dist}(\phi_t(p), p)$, isto é $\{p_n\}_{n\in N}$ converge para um ponto singular $p \in X$; Agora para n suficientemente grande temos que $\text{diam}(\mathcal{O}(p_n)) < \frac{\delta_1}{2}$, do mesmo modo, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\text{dist}(\phi_t(p_n), \phi_t(p)) = \text{dist}(\phi_t(p_n), p) \leqslant \text{dist}(\phi_t(p_n), p_n) + \text{dist}(p_n, p) < \frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_1}{2} = \delta_1$. Temos que p_n, p estão em um segmento de órbita de diâmetro menor que β_1, isto é, $p = p_n$ absurdo, pois p_n não é singular para cada $n \in N$.
Agora, para β_2, por hipótese (item b), existe $\delta_2 > 0$ tal que $\text{dist}(\phi_t(x), \phi_t(y)) < \delta_2$ para todo $t \in \mathbb{R}$, implica que x, y estão em um segmento de órbita de diâmetro menor que β_2. Tomemos $0 < \rho < \frac{\delta_2}{2}$.
Afirmação 2: para cada $x \in B_\rho(\text{Sing}(\phi))$, $x \notin \text{Sing}(\phi)$ existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_{t_0}(x) \notin B_\rho(\text{Sing}(\phi))$. De fato, suponhamos o contrário, isto é, existe $x \in B_\rho(\text{Sing}(\phi))$ com $x \notin (\text{Sing}(\phi))$ tal que para cada $t \in \mathbb{R}$, $\phi_t(x) \in B_\rho(\text{Sing}(\phi))$; pela observação 2.2.1 temos $B_\rho(\text{Sing}(\phi)) = \bigcup_{p\in\text{Sing}(\phi)} B_\rho(p)$; assim existe $x_0 \in \text{Sing}(\phi)$ com $\text{dist}(x, x_0) < \rho$ e $x \neq x_0$, então para todo $t \in \mathbb{R}$ $\text{dist}(\phi_t(x), x_0) = \text{dist}(\phi_t(x), \phi_t(x_0)) < \rho < \frac{\delta_2}{2} < \delta_2$. Logo, por hipótese, existe um segmento de órbita de diâmetro menor que β_2 que contém x, x_0, isto é, $x \in \mathcal{O}(x_0)$, segue que x é singular, absurdo, pois $x \notin \text{Sing}(\phi)$.
Afirmação 3: Existe $\beta_3 \in (0, \beta_2)$ tal que se $x \notin B_\rho(\text{Sing}(\phi))$ e $\text{diam}(\phi_{[0,t]}(x)) < \beta_3$, então $|t| < \varepsilon$. De fato, suponhamos por absurdo que:

$$\begin{gathered}\text{Para cada } \beta_3 \in (0, \beta_2) \ \text{ existem } x \in X,\ t \in \mathbb{R} \text{ tais que}\\ x \notin B_\rho(\text{Sing}(\phi)),\ \text{diam}(\phi_{[0,t]}(x)) < \beta_3 \text{ e } |t| \geqslant \varepsilon\end{gathered}$$

Com $\varepsilon > 0$ fixado inicialmente temos que:

$$\begin{array}{rc}
\text{Para} & 0 < \frac{1}{k_1} < \beta_2, \text{existem } x_1, t_1 \in \mathbb{R} : x_1 \notin B_\rho(\text{Sing}(\phi)),\\
 & \text{diam}(\phi_{[0,t_1]}) < \frac{1}{k_1} \text{ e } \ |t_1| \geqslant \varepsilon\\
\text{Para} & 0 < \frac{1}{k_2} < \frac{1}{k_1} < \beta_2, \text{ existem } x_2, t_2 \in \mathbb{R} : x_2 \notin B_\rho(\text{Sing}(\phi)),\\
 & \text{diam}(\phi_{[0,t_1]}) < \frac{1}{k_2} e\ |t_2| \geqslant \varepsilon\\
\text{Supondo} & 0 < \frac{1}{k_n} < \frac{1}{k_{n-1}} < \cdots < \beta_2, \{x_i\}_{i=1}^n \subset X,\\
 & \{t_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}, \text{construídos}\\
\text{Para} & 0 < \frac{1}{k_{n+1}} < \frac{1}{k_n} < \beta_2, \text{ existem } x_{n+1}, t_{n+1} \in \mathbb{R} :\\
 & x_{n+1} \notin B_\rho(\text{Sing}(\phi)),\\
 & \text{diam}(\phi_{[0,t_{n+1}]}) < \frac{1}{k_{n+1}} \ e\ |t_{n+1}| \geqslant \varepsilon
\end{array}$$

Assim, pela compacidade de X, existe uma subsequência convergente

$\{x_n\}_{n\in N\subset\mathbb{N}} \subset B^C_\rho(\mathrm{Sing}(\phi))$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = z \in X$, com $\lim\limits_{n\to+\infty} |t_n| = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} |t_n| = \tau \geqslant \varepsilon$ e tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{diam}(\phi_{[0,t_n]}(x_n)) = 0$ (com N infinito). Se $\lim_{n\to+\infty} |t_n| = +\infty$ e $t \in \mathbb{R}$ com $|t| < |t_n|$, para n suficientemente grande, $\mathrm{dist}(\phi_t(z), x_n) \leqslant \mathrm{diam}\,\phi_{[0,t_n]}(x_n)$, logo $\mathrm{dist}(\phi_t(z), z) = 0$, assim para n suficientemente grande, $\phi_t(z) = z$ para todo $|t| < t_n$ e como $\lim\limits_{n\to+\infty} |t_n| = +\infty$, z é um ponto singular, o qual é um absurdo pois, $\{x_n\}_{n\in N} \subset B^C_\rho(\mathrm{Sing}(\phi))$ e portanto $z \in B^C_\rho(\mathrm{Sing}(\phi))$. Se $\lim\limits_{n\to+\infty} |t_n| = \tau$, pela continuidade do fluxo temos, $0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{diam}(\phi_{[0,t_n]}(x_n)) = \phi_{[0,\tau]}(z)$, logo z é um ponto singular o que é um absurdo, pois $\{x_n\}_{n\in N} \subset B^C_\rho(\mathrm{Sing}(\phi))$ e portanto $z \in B^C_\rho(\mathrm{Sing}(\phi))$. Logo $z \notin B_\rho(\mathrm{Sing}(\phi))$.
Por outro lado, para $\beta_3 > 0$ existe por hipótese $\delta_3 > 0$ tal que se $\mathrm{dist}(\phi_t(x), \phi_t(y)) < \delta_3$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se $x \in \mathrm{Sing}(\phi)$ então x, y estão em um segmento de órbita de diâmetro menor que β_3, logo $x = y$ e então satisfaz que existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $|s| < \varepsilon$. Se $x \notin \mathrm{Sing}(\phi)$, então pela afirmação 1, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_{t_0}(x) \notin B_\rho(\mathrm{Sing}(\phi))$ logo se $\mathrm{dist}(\phi_t(\phi_{t_0}(x)), \phi_t(\phi_{t_0}(y))) < \delta_3$ temos que $\phi_{t_0}(x)$, $\phi_{t_0}(y)$ estão em um segmento de órbita de diâmetro menor que β_3. Assim, existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_s(\phi_{t_0}(x)) = \phi_{t_0}(y)$, $\mathrm{diam}\,\phi_{[0,s]}(\phi_{t_0}(x)) < \beta_3$; então, pela afirmação 2, $|s| < \varepsilon$ e $\phi_s(x) = y$, pois ϕ_s é um homeomorfismo. □

Um fato importante da proposição 2.2.1 é a equivalência entre proximidade temporal e proximidade espacial, numa órbita, é um motivo a mais para tentarmos a seguinte definição.

Definição 2.5. *Diz-se que **um fluxo ϕ sobre X é D-expansivo** se todo fluxo topologicamente equivalente é C-expansivo*

Como mostraramos adiante, o exemplo 2.4.2 não é D-expansivo e o exemplo 2.4.3 mostra que o fluxo D-expansivo não é equivalente com um fluxo K-expansivo.

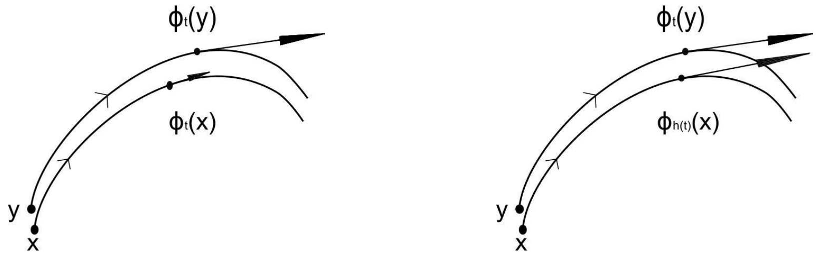
contínuando com a análise das noções de proximidade na mesma órbita, apresentamos uma variante da definição de fluxos C-expansivo. O que muda são os quantificadores, como veremos a contínuação.

Definição 2.6. *Diz-se que **um fluxo ϕ sobre X é E-expansivo** se existem $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ tal que se $\mathrm{dist}(\phi_t(x), \phi_t(y)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Então, existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $|s| < \varepsilon$ e $\phi_s(x) = y$.*

Trivialmente, a E-expansividade é mais fraca que a C-expansividade. Sob esse aspecto, Artigue conjecturou que a recíproca seria verdadeira; lamentavelmente, não encontramos uma prova para tal proposição.

2.3 Definições geométricas

Nestá secção estudaremos definições que estárão relacionadas à análise das velocidades de duas órbitas. Assim, temos os seguintes pontos de vista, supondo que:



(a) cinemática (b) geométrica

Figura 2.1: parametrização

a) As velocidades dos pontos $x, y \in X$, são de tal maneira que não superam uma constante $\delta > 0$. Isto é, para cada $t \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{dist}(\phi_t(x), \phi_t(y)) < \delta.$$

Como na figura 2.1(a).

b) Conseguimos modificar a velocidade de um dos pontos $x, y \in X$. Isto é, parametrizar a órbita de um deles, $x \in X$, com uma aplicação $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que fixe zero, $h(0) = 0$, tal que

$$\operatorname{dist}(\phi_{h(t)}(x), \phi_t(y)) < \delta$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Como na figura 2.1(b).

Definição 2.7. *Diz-se que* ***um fluxo ϕ sobre X é F-expansivo*** *se existem $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ tal que se $\operatorname{dist}(\phi_{h(t)}(x), \phi_t(y)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $h \in \mathcal{H}_0^+(\mathbb{R})$, então existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $|s| < \varepsilon$ e $\phi_s(x) = y$.*

Com está definição (ver figura 2.2) podemos ter a seguinte observação:

Observação 2.3.1. *a) A F-expansividade implica E-expansividade trivialmente tomando como homeomorfismo a identidade $h = Id$.*

b) Pela definição 2.8 de G-expansividade, dada por Bowen e Walters em [6], que começa nos quantificadores para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, temos que

G-expansividade implica F-expansividade.

c) Os exemplos 2.4.1, 2.4.2 e 2.4.3 são fluxos não F-expansivos.

contínuando, temos outra observação do fluxo do exemplo 2.4.3 (ver figura 2.7). O único ponto singular $p \in \operatorname{Sing}(\phi)$ do fluxo ϕ que é D-expansivo não é um ponto isolado. Isto é um fato importante, porque na seguinte proposição mostraremos que para um fluxo F-expansivo os pontos singulares são pontos isolados de X.

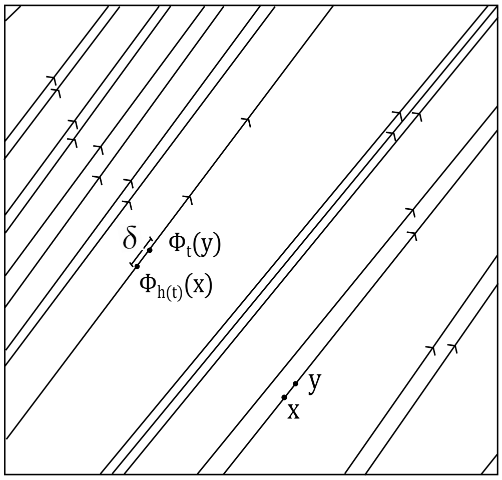


Figura 2.2: Fluxo F-expansivo

Proposição 2.3.1. *Se ϕ é F-expansivo então as singularidades de ϕ são pontos isolados de X.*

Demonstração. Por absurdo, suponhamos que existe $p \in \mathrm{Sing}(\phi)$ tal que para cada vizinhança V_p, $V_p \cap (X \backslash \{p\}) \neq \varnothing$.
Afirmação : *Existe $x \neq p$ tal que para cada $|t| < 3\varepsilon$ temos que* $\mathrm{dist}(\phi_t(x), p) < \frac{\delta}{2}$.
De fato, por absurdo, suponhamos que para cada $x \in X \backslash \{p\}$ existe $|t_x| < 3\varepsilon$ tal que $\mathrm{dist}(\phi_{t_x}(x), p) > \frac{\delta}{2}$. Como $V_p \cap (X \backslash \{p\}) \neq \varnothing$, para cada $V_p = B(p, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in V_p \cap (X \backslash \{p\})$ tal que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = p$, logo para x_n existe $|t_n| < 3\varepsilon$ tal que $\mathrm{dist}(\phi_{t_n}(x_n), p) > \frac{\delta}{2}$, como ϕ é contínua e como $t_n \in (-3\varepsilon, 3\varepsilon) \subset [-3\varepsilon, 3\varepsilon]$ temos que existe uma subsequência convergente com $\lim\limits_{k \to +\infty} t_k = t$, $k \in N \subset \mathbb{N}$, N é um conjunto infinito. Assim, $\mathrm{dist}(\phi_{t_k}(x_k), p) > \frac{\delta}{2}$, para cada $k \in N$, o que implica que $0 = \mathrm{dist}(\phi_t(p), p) \geqslant \frac{\delta}{2}$, absurdo, pois $0 < \frac{\delta}{2}$.
Pela afirmação, definimos $y = \phi_\varepsilon(x)$ e por

$$h(t) := \begin{cases} t + \varepsilon & t \leqslant -2\varepsilon \\ \frac{t}{2} & -2\varepsilon < t \leqslant 0 \\ 2t & 0 \leqslant t < \varepsilon \\ t + \varepsilon & \varepsilon \leqslant t \end{cases}$$

Observamos que

- Se $t \notin (-2\varepsilon, \varepsilon)$, $h(t) = t + \varepsilon$ e $\phi_{h(t)}(x) = \phi_{t+\varepsilon}(x) = \phi_t(\phi_\varepsilon(x)) = \phi_t(y)$
- Se $t \in (-2\varepsilon, \varepsilon)$, $|t + \varepsilon| < 2\varepsilon < 3\varepsilon$, então $\mathrm{dist}(\phi_{h(t)}(x), p) < \frac{\delta}{2}$, isto vem da afirmação. Dessa forma,
  $\mathrm{dist}(\phi_{h(t)}(x), \phi_t(y)) \leqslant \mathrm{dist}(\phi_{h(t)}(x), p) + \mathrm{dist}(\phi_t(y), p) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$
  Portanto $\mathrm{dist}(\phi_{h(t)}(x), \phi_t(y)) < \delta$, para todo $t \in \mathbb{R}$ (ver figura 2.3).

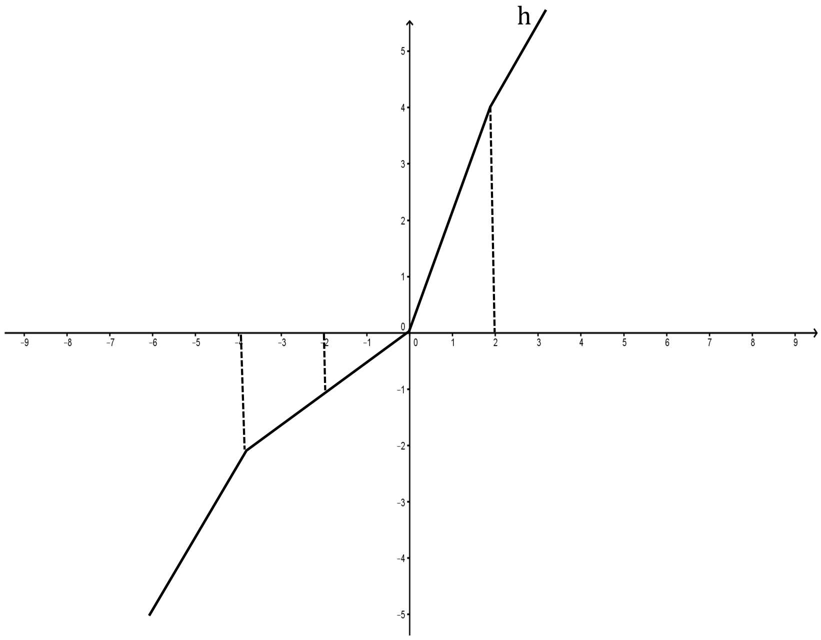


Figura 2.3: gráfica do homeomorfismo h, com $\varepsilon = 2$

Com isto, se para cada $t \in \mathbb{R}$ tal que $|t| < \varepsilon$ e $\phi_t(x) \neq y$, então pela F-expansividade do fluxo e pelos resultados anteriores, temos que existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $|s| < \varepsilon$ e $\phi_s(x) = y$, contradição. Se existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $|s| < \varepsilon$ e $\phi_s(x) = y = \phi_\varepsilon(x)$, então $x = \phi_{\varepsilon-s}(x)$, $0 < |\varepsilon - s| < 2\varepsilon$. Seja $t \in \mathbb{R}$, então existem $k \in \mathbb{Z}, \tau \in \mathbb{R}$ tal que $t = k(\varepsilon - s) + \tau$ onde $0 \leqslant \tau < \varepsilon - s$. Assim temos que

$$\operatorname{dist}(\phi_t(x), p) = \operatorname{dist}(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(p)) = \operatorname{dist}(\phi_\tau(x), p) \leqslant \frac{\delta}{2} < \delta$$

para todo $t \in \mathbb{R}$; logo pela F-expansividade existe $s \in \mathbb{R}$ com $|s| < \varepsilon$ tal que $p = \phi_s(x)$, absurdo, pois $\phi_t(x) \neq p$; para cada $t \in \mathbb{R}$ uma vez que $x \neq p$. conclui-se-se que os pontos singulares são isolados de X. □

A seguir, apresentaremos a definição de Bowen e Walters em [6], que é a mais popular, quando estivermos estudando fluxos sem singularidades ou singularidades isoladas de X.

Definição 2.8. *Diz-se que* ***um fluxo ϕ sobre X é G-expansivo*** *se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\operatorname{dist}(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(y)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$, onde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $h(0) = 0$, então existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $y = \phi_s(x)$ e $|s| < \varepsilon$.*

Como na definição 2.7 de fluxo F-expansivo, um fluxo ϕ que é G-expansivo tem os pontos singulares como sendo pontos isolados do espaço métrico compacto X, demonstrados na seguinte proposição e apresentados em [6].

Proposição 2.3.2. *Os pontos singulares de um fluxo ϕ que é G-expansivo são pontos isolados de X.*

Demonstração. Por absurdo, suponhamos que temos um ponto singular de ϕ, $x \in \mathrm{Sing}(\phi)$ tal que não é isolado. Seja $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, constante de expansividade do fluxo ϕ que por hipótese é G-expansivo. Tomando uma bola centrada em x de raio $\delta > 0$, $B_\delta(x)$; considere $y \in B_\delta(x)$ e a função contínua $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $h(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, assim,

$$\mathrm{dist}(x, y) = \mathrm{dist}(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(y)) < \delta.$$

Logo, pela G-expansividade do fluxo ϕ, existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $|s| < \varepsilon$ e $y = \phi_s(x)$. Daí temos que $x = y$. Como $y \in B_\delta(x)$ é arbitrário, temos que

$$B_\delta(x) \cap X = \{x\}$$

absurdo pois x não é isolado. □

A proposição anterior demonstra que o espaço métrico que suportam as definições de F-expansividade e G-expansividade são ou conexos sem singularidades ou desconexos.

A seguir provaremos uma versão melhorada da G-expansividade. Para isso, iniciaremos com um lema:

Lema 2.3.1. *Se ϕ é um fluxo G-expansivo e não tem pontos singulares, existe $T_0 > 0$ tal que para cada $0 < T < T_0$, existe $\gamma > 0$ tal que* $\mathrm{dist}(\phi_T(x), x) \geqslant \gamma$, *para todo $x \in X$*

Demonstração. Se ϕ não possui pontos periódicos, basta tomar $T_0 = 1$, pois, caso contrário, existe $0 < t < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que existe $x_n \in X$: $\mathrm{dist}(\phi_t(x_n), x_n) < \frac{1}{n}$, e como X é compacto podemos supor que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x \in X$. Dessa forma, pela continuidade de ϕ temos que $\mathrm{dist}(\phi_t(x), x) = 0$; isto é $\phi_t(x) = x$ absurdo, pois ϕ não tem pontos periódicos.
Se ϕ tem algum ponto periódico, provaremos que existe um menor $T_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que $\phi_{T_0}(x) = x$. principalmente porque ϕ não tem pontos singulares. Para isso provaremos a seguinte afirmação,
Afirmação:

$$\boldsymbol{\tau = \{t \in \mathbb{R}^+/\ \phi_t(x) = x\ \ \textit{se}\ \phi_s(x) = x,\ \ s > 0,\ \textit{então}\ t \leqslant s,\ \ \textit{algum}\ x \in X\}}$$

é compacto, de fato, seja $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em τ, convergente para $t \in \mathbb{R}$, em que existem $x_n \in X$ tal que $\phi_{t_n}(x_n) = x_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Podemos supor que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$, dessa forma pela continuidade de ϕ temos $\lim_{n\to+\infty} \phi_{t_n}(x_n) = \phi_t(x)$; se $t = 0$ então existe um n grande, tal que $\mathrm{diam}(\phi_{\mathbb{R}}(x_n)) < \frac{\delta}{2}$, isto é, pela G-expansividade, a partir de n grande, as órbitas tem diâmetro constantes, em que no limite $\mathrm{diam}(\phi_{\mathbb{R}}(x_n)) = t = 0$, o que contradiz que existem pontos singulares, logo $t \in \tau$; e portanto, τ é compacto.

Assim, pela afirmação, podemos tomar $T_0 = \min \tau$, e agora supondo pelo absurdo que existe $0 < T < T_0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ com $\mathrm{dist}(\phi_T(x_n), x_n) < \frac{1}{n}$, e como X é compacto, podemos supor que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \overline{x}$. Desse modo, $\mathrm{dist}(\phi_T(\overline{x}), \overline{x}) = 0$ isto é, $\phi_T(\overline{x}) = \overline{x}$, o que implica que $T \in \tau$; Assim $T_0 \leqslant T < T_0$ absurdo. □

A seguir a demonstração da proposição já antes mencionada. Onde o conjunto $\mathcal{H}_0^+$ foi definido no inicio deste capítulo.

Proposição 2.3.3. *O fluxo ϕ é G-expansivo se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que; se $\mathrm{dist}(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(y)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$, onde $h \in \mathcal{H}_0^+$; então, existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $y = \phi_s(x)$ e $|s| < \varepsilon$.*

Demonstração. De fato, demonstraremos as seguintes equivalências:

a) ϕ é G-expansivo.

b) Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\alpha > 0$ tal que se $\mathrm{dist}(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(y)) < \alpha$, para todo $t \in \mathbb{R}$ para alguns $x, y \in X$ é um homeomorfismo crescente h de $\mathbb{R}$ com $h(0) = 0$, então $y = \phi_t(x)$ para $|t| < \varepsilon$.

c) Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\alpha > 0$ com a seguinte propriedade: se $t = (t_i)_{i=-\infty}^{\infty}$ e $u = (u_i)_{i=-\infty}^{\infty}$ são duas sequências infinitas de números reais com $u_0 = t_0 = 0$, $0 < t_{i+1} - t_i \leqslant \alpha$, $|u_{i+1} - u_i| \leqslant \alpha$, $\lim\limits_{i \to +\infty} t_i = +\infty$ e $\lim\limits_{i \to +\infty} t_{-i} = -\infty$; se $x, y \in X$ satisfaz $\mathrm{dist}(\phi_{t_i}(x), \phi_{u_i}(y)) \leqslant \alpha$ para todo $i \in \mathbb{Z}$; então $y = \phi_t(x)$ para $|t| < \varepsilon$.

Assim:
(b) implica (a)
Pelo lema 2.3.1 temos que existe $T_0 > 0$ e para cada $0 < T < T_0$ existe $\gamma > 0$ tal que $\mathrm{dist}(\phi_T(x), x) \geqslant \gamma$, para todo $x \in X$.
Afirmação: Para cada $0 < T < \frac{T_0}{3}$ existem $\delta_T > 0, \tau_T > 0$ tais que; se $\mathrm{dist}(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(y)) < \delta_T$ para cada $t \in \mathbb{R}$, com $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(0) = 0$ contínua; então $h(t + T) - h(t) \geqslant \tau_T$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
De fato seja T tal que $0 < T < \frac{T_0}{3}$, pelo lema 2.3.1 temos que existe $\gamma_T > 0$ tal que para todo $x \in X$.

$$\mathrm{dist}(\phi_T(x), x) \geqslant \gamma_T \tag{2.3}$$

Agora, para qualquer $t \in \mathbb{R}$, pela desigualdade triangular, temos:

$$\mathrm{dist}(\phi_t(x), \phi_{t+T}(x)) \leqslant$$
$$\mathrm{dist}(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(y)) + \mathrm{dist}(\phi_{h(t)}(y), \phi_{h(t+T)}(y)) + \mathrm{dist}(\phi_{h(t+T)}(y), \phi_{t+T}(x)),$$

logo

$$\mathrm{dist}(\phi_{h(t)}(y), \phi_{h(t+T)}(y)) \geqslant$$
$$\mathrm{dist}(\phi_t(x), \phi_{t+T}(x)) - \mathrm{dist}(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(y)) - \mathrm{dist}(\phi_{h(t+T)}(y), \phi_{t+T}(x))$$

E supondo, que exista $\delta_T > 0$ que satisfaz a afirmação anterior, então pela equação (2.3) temos $\mathrm{dist}(\phi_{h(t)}(y), \phi_{h(t+T)}(y)) \geqslant \gamma_T - 2\delta_T$. Supondo que $\gamma_T - 2\delta_T > 0$ $(\gamma_T > 2\delta)$. Pela continuidade de $\phi_{\{\bullet\}}(y) : \mathbb{R} \to X$ para $\gamma_T - 2\delta > 0$ existe

$\tau_T > 0$ tal que $\operatorname{dist}(\phi_{s(t)}(y), \phi_{s(t+T)}(y)) \geqslant \gamma_T - 2\delta_T$ implica $|h(t+T) - h(t)| \geqslant \tau_T$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Para conclui-ser com a afirmação, e como $s(0) = 0$, basta mostrar $h(T) > 0$, pois a reparametrização da órbita de y tem que ser crescente. Assim, por absurdo, existe um número positivo $T < \frac{T_0}{3}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existem $x_n, y_n \in X$ e uma aplicação contínua h_n de $\mathbb{R}$ com $h_n(0) = 0$ de modo que $\operatorname{dist}(\phi_t(x_n), \phi_{h_n(t)}(y_n)) < \frac{1}{n}$, mas $h_n(T) < 0$. Pela compacidade de X podemos supor que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$, assim $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{dist}(\phi_0(x_n), \phi_{h_n(0)}(y_n)) = \operatorname{dist}(\phi_0(x), \phi_{h_n(0)}(y_n)) = 0$, isto é, $\lim_{n\to+\infty} y_n = x$. Se os $h_n(T) < 0$ tal que $h_n(T) \geqslant -T$ para infinitos naturais , e como $h_n(T) \in [-T, 0) \subset [-T, 0]$ temos que existe uma subsequência convergente $\lim_{i\to+\infty} h_{n_i}(T) = -L$ em $[-T, 0]$ em que $\lim_{i\to+\infty} \operatorname{dist}(\phi_T(x_{n_i}), \phi_{h_{n_i}(T)}(y_{n_i})) = \operatorname{dist}(\phi_T(x), \phi_{-L}(x)) = 0$, logo, $x = \phi_{L+T}(x)$, absurdo, pois contradiz o fato de T_0 ser o menor período de ϕ, pois $0 < T + L \leqslant \frac{2T_0}{3} < T_0$. Se os $h_n(T) < 0$ tal que $h_n(T) < -T < 0$ para infinitos naturais, pela continuidade de h_n existem t_n com $0 \leqslant t_n \leqslant T$ tais que $h_n(t_n) = -T$, tomamos uma subsequência convergente $\lim_{i\to+\infty} t_{n_i} = t \in [0, T]$. Daí temos que $\lim_{i\to+\infty} \operatorname{dist}(\phi_t(x_{n_i}), \phi_{h_{n_i}(t)}(y_{n_i})) = \operatorname{dist}(\phi_t(x), \phi_{-T}(x)) = 0$, logo $x = \phi_{T+t}(x)$, o que contradiz o fato de T_0 ser o menor período de ϕ, pois $0 < T + t \leqslant \frac{2T_0}{3} < T_0$, o que prova a afirmação.

Supondo $\operatorname{dist}(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(y)) < \delta_T$ para $x, y \in X$, onde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $s(0) = 0$, como na afirmação anterior; podemos definir $h_T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $h_T(nT) = s(nT)$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ e linear em cada intervalo $[nT, (n+1)T]$. h_T é um homeomorfismo (ver figura 2.4). Pela afirmação anterior, para cada $t \in \mathbb{R}$, $h(T+t) > h(t)$, daí, se $t \in [nT, (n+1)T]$, existe $t' \in [nT, (n+1)T]$ com $h_T(t) = h(t')$, assim

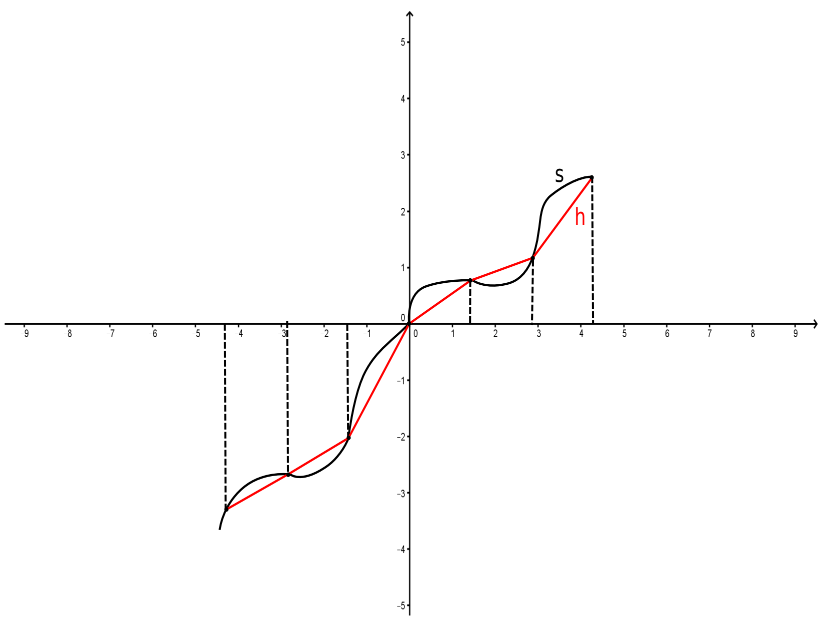


Figura 2.4: gráfica de h_T supondo $T = 1$

$$\begin{gathered}\operatorname{dist}(\phi_t(x), \phi_{h_T(t)}(y)) = \\ \operatorname{dist}(\phi_t(x), \phi_{h(t')}(y)) \leqslant \operatorname{dist}(\phi_t(x), \phi_{t'}(x)) + \operatorname{dist}(\phi_{t'}(x), \phi_{h(t')}(y)) \leqslant \\ \sup\{\operatorname{dist}(x, \phi_u x) : x \in X, u \in [0,T]\} + \operatorname{dist}(\phi_{t'}(x), \phi_{h(t')}(y)).\end{gathered}$$

Seja $\varepsilon > 0$, e pelo item (b) existe $\alpha > 0$ e escolhendo $0 < T < \frac{T_0}{3}$ tal que

$$\sup\{\operatorname{dist}(x, \phi_u x) : x \in X,\ u \in [0,T]\} < \frac{\alpha}{2}$$

Tomemos $\delta < \min\{\delta_T, \frac{\alpha}{2}\}$, se $\operatorname{dist}(\phi_t x, \phi_{h(t)} y) < \delta$, para todo $t \in \mathbb{R}$, então $\operatorname{dist}(\phi_t x, \phi_{h_T(t)} y) = \operatorname{dist}(\phi_t x, \phi_{h(t')} y) \leqslant \sup\{\operatorname{dist}(x, \phi_u x) : x \in X, u \in [0,T]\} + \operatorname{dist}(\phi_{t'} x, \phi_{h(t')} y) \leqslant \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$ para todo $t \in \mathbb{R}$, pelo item (b) temos que $y = \phi_t x$ para $|t| < \varepsilon$. conclui-sendo está parte.

(a) implica (c)

Seja $\varepsilon > 0$, escolhemos $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha + 2\sup\{\operatorname{dist}(z, \phi_u z) : z \in X, |u| \leqslant \alpha\} < \delta,$$

onde $\delta > 0$ corresponde ao $\varepsilon > 0$ dado no item (a). Seja $(t_i)_{-\infty}^{\infty}$, $(u_i)_{-\infty}^{\infty}$, e $x, y \in X$ satisfazem as hipóteses de (c). Definimos $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $s(t_i) = u_i$ e estendemos linearmente sobre o intervalo $[t_i, t_{i+1}]$. Seja $i \in \mathbb{N}$, se $t \in [t_i, t_{i+1})$

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(\phi_t x, \phi_{s(t)} y) &\leqslant \operatorname{dist}(\phi_t x, \phi_{t_i} x) + \operatorname{dist}(\phi_{t_i} x, \phi_{u_i} y) + \operatorname{dist}(\phi_{u_i} y, \phi_{s(t)} y) \\ &\leqslant \alpha + 2 \sup_{z \in X, |u| \leqslant \alpha} \operatorname{dist}(z, \phi_u z) < \delta\end{aligned}$$

assim

$$\operatorname{dist}(\phi_t x, \phi_{s(t)} y) < \delta,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, logo pela G-expansividade do fluxo temos que $y = \phi_t x$ com $|t| < \varepsilon$. conclui-sendo está parte,

(c) implica (b)

Seja $\varepsilon > 0$, pelo item (c), existe $\alpha > 0$. Suponha que para $x, y \in X$ com $\operatorname{dist}(\phi_t x, \phi_{h(t)} y) < \alpha$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e um homeomorfismo crescente h de $\mathbb{R}$ com $h(0) = 0$. Faça $t_0 = 0$ e $t_i \in \mathbb{R}$ tal que $0 < t_{i+1} - t_i \leqslant \alpha$ e $0 < h(t_{i+1}) - h(t_i) \leqslant \alpha$, definindo $u_i = h(t_i)$, pelo item (c), temos que $y = \phi_t x$ com $|t| < \varepsilon$.
concluindo a demonstração. □

Observação 2.3.2. *Em [6], prova-se que todo fluxo de Anosov que tem a propriedade de ser G-expansivo é invariante por conjugação topológica. E mais, a suspensão de um difeomorfismo expansivo também será G-expansivo.*

Novas formulações da definição de expansividade podem ser obtidas modificando a definição da G-expansividade, como demonstra [19].

Definição 2.9. *Diz-se que* ***um fluxo ϕ sobre X é H-expansivo****; se existe $\delta > 0$ tal que se* $\text{dist}(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(y)) < \delta$*, para todo $t \in \mathbb{R}$ onde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e sobrejetora tal que $h(0) = 0$, então x e y estão na mesma órbita.*

Observação 2.3.3. *está definição é mais fraca que a G-expansividade, no sentido de que o exemplo 2.4.1 é B-expansivo e, naturalmente, H-expansivo implica B-expansivo. Além disso, o exemplo 2.4.1 não é G-expansivo, pois dois pontos podem permanecer muito próximos temporariamente, porém muito distantes arbitrariamente. Assim, proximidade temporal não é equivalente a proximidade espacial.*

A próxima definição pode ser encontrada em [8].

Definição 2.10. *Diz-se que* ***um fluxo ϕ sobre X é I-expansivo****; se existem $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que se* $\text{dist}(\phi_t, \phi_{th(t)}) < \delta$*, para todo $t \in \mathbb{R}$ onde h é um homeomorfismo, com $h(0) = 0$; então existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $|s| < \varepsilon$ e $y = \phi_s(x)$.*

Observamos que é mais fraca que a G-expansividade, pois o quantificador universal implica o existencial.

A seguinte definição foi apresentada por Anosov em [2], capítulo 3.

Definição 2.11. *Diz-se que* ***um fluxo ϕ sobre X é J-expansivo*** *se existe $\delta > 0$ tal que se $dist(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(y)) < \delta$ onde h é uma reparametrização. Então existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $|s| < \delta$ e $y = \phi_s(x)$.*

Existem fluxos que têm singularidades, mas se tiramos as singularidades, o fluxo é G-expansivo, como no caso do fluxo que se tem resolvendo o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x' = a(y - x) \\ y' = rx - y - xz \\ z' = xy - bz \end{cases}$$

para $a = 10$, $r = 28$ e $b = \frac{8}{3}$.

Assim, um dos objetivos é encontrar uma definição de expansividade para fluxos onde as singularidades do fluxo não sejam isoladas do espaço métrico compacto, ou melhor, uma definição que inclua as singularidades. Isto foi feito por Komuro em [16].

Definição 2.12. *Diz-se que* ***um fluxo ϕ sobre X é K-expansivo****; se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se* $\text{dist}(\phi_{h(t)}(x), \phi_t(y)) < \delta$*, para todo $t \in \mathbb{R}$, onde h é uma reparametrização, então existem $s, t_0 \in \mathbb{R}$ tais que $|s| < \varepsilon$ e $\phi_{h(t_0)}(x) = \phi_{t_0+s}(y)$.*

O seguinte teorema mostra que está definição coincide com a de Bowen e Walters, se não há singularidades, que foi demonstrado em [18].

Teorema 2.1. *Seja $\phi : \mathbb{R} \times X \to X$ um fluxo contínuo sem singularidades em um espaço métrico compacto X. Então as seguintes afirmações são equivalentes.*

a) ϕ é K-expansivo.

b) ϕ é G-expansivo.

Demonstração. ***(b) implica (a)***
Assumiremos $t_0 = 0$. Isto é, não depende da ausência das singularidades.

(a) implica (b)
Primeiro provaremos que existe $T_0 > 0$ tal que, para cada $T \in (0, T_0)$ existe $\rho_T > 0$ tal que $\operatorname{dist}(x, \phi_T(x)) > \rho_T$ para todo $x \in X$. Por absurdo, isto é, para todo $T_0 > 0$ existe $T \in (0, T_0)$ e para cada $\rho_T > 0$ existe $x \in X$ tal que

$$\operatorname{dist}(x, \phi_T x) \leqslant \rho_T.$$

Assim, considerando $T_0 > 0$, existe $T \in (0, T_0)$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$ existem $x_n \in X$ com

$$\operatorname{dist}(x_n, \phi_T x_n) \leqslant \frac{1}{n}$$

Pela compacidade de X podemos supor que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, e como $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{dist}(x_n, \phi_T(x_n)) = 0$ temos que $\operatorname{dist}(x, \phi_T(x)) = 0$ isto é $\phi_T(x) = x$. Em suma, para cada T_0 existem $T \in (0, T_0)$ e $x \in X$ tal que $\phi_T x = x$. Considerando $\lim\limits_{T_0\to 0} T_0 = 0$, obtemos uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e outra sequência de números positivos, $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \tau$ tais que; $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = 0$, $\phi_{T_n}(y_n) = y_n$. Pela compacidade de X Suponhamos que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.
Afirmação: $\tau\mathbb{Z}$ ***é denso em*** $\mathbb{R}$, *(se e somente se $\mathbb{R} \subset \overline{\tau\mathbb{Z}}$)*
De fato, por absurdo, existem $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ tal que $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \cap \tau\mathbb{Z} = \varnothing$ (equivalentemente $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subset (\tau\mathbb{Z})^C$) que é equivalente á dizer que para cada $T \in \tau$, $z \in \mathbb{Z}$ e $x \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$,

$$x \neq Tz \tag{2.4}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\varepsilon}{T_n} = +\infty$, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant N \Rightarrow \frac{\varepsilon}{T_n} > k$ assim como $|\frac{t}{T_n} - [\![\frac{t}{T_n}]\!]| < 1$ temos que $|\frac{t}{T_n} - [\![\frac{t}{T_n}]\!]| < 1 \leqslant k$, fazendo $z_n = [\![\frac{t}{T_n}]\!]$ temos que $|z_n - \frac{t}{T_n}| < \frac{\varepsilon}{T_n}$ então $|z_n T_n - t| < \varepsilon$ o que implica $z_n T_n \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$. Absurdo, por (2.4).

Pela afirmação anterior, para qualquer $t \in \mathbb{R}$ conseguimos uma sequência em $\tau\mathbb{Z}$ convergindo para t, de fato para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $T_n z_n \in (t - \frac{1}{n}, t + \frac{1}{n})$

daqui $\lim_{n\to\infty} T_n z_n = t$. Observamos que $\phi_{z_n T_n}(y_n) = y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, pela continuidade de ϕ temos que $\phi_t(y) = y$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, y é uma singularidade, o que é um absurdo, pois, hipoteticamente, o fluxo ϕ não tem pontos singulares.

Dado que $\varepsilon' > 0$, tomemos $T \in (0, \varepsilon') \cap (0, T_0)$, $\varepsilon \in (0, T)$, $(T_0 > 0\ ,\ \rho_T > 0)$ pelo raciocino anterior, por hipótese, existe $\delta > 0$ associado a ε. Provaremos que para ε', qualquer $\delta' \in (0, \rho_T) \cap (0, \delta)$ satisfaz a tese. Suponhamos que $\operatorname{dist}(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(y)) < \delta'$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Pelo item (a), existem $s, t_0 \in \mathbb{R}$ tais que $|s| < \varepsilon$ e $\phi_{s+t_0}(x) = \phi_{h(t_0)}(y)$. Então

$$\phi_{-t+s+t_0+h(t)-h(t_0)}(\phi_t(x)) = \phi_{h(t)}(y) \tag{2.5}$$

Para todo $t \in \mathbb{R}$.
Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(t) = |-t + s + t_0 + h(t) - h(t_0)|$ note que g é contínua, pois o valor absoluto $(|\cdot|)$ e h são contínuas. Logo, $g(t_0) = |s| < \varepsilon < T$ e além disso, para todo $t \in \mathbb{R}$, se cumpre:

$$g(t) \neq T \tag{2.6}$$

Para todo $t \in \mathbb{R}$. Caso contrário, existiria $t' \in \mathbb{R}$ tal que $g(t') = T$ e dessa forma, existiria $t \in \mathbb{R}$ tal que $-t + s + t_0 + h(t) + h(t_0) = T$. daí, pela equação (2.5) temos $\phi_T(\phi_t x) = \phi_{-t+s+t_0+h(T)-h_{t_0}}(\phi_t(x)) = \phi_{h(t)}(y)$, assim como $\operatorname{dist}(\phi_t x, \phi_{h(t)} y) < \delta' < \rho_T$. Logo, $\operatorname{dist}(\phi_t x, \phi_T(\phi_t x)) < \delta' < \rho_T$, absurdo, pois $\operatorname{dist}(x, \phi_T x) > \rho_T$ para todo $x \in X$.
Por outro lado, temos que $g(t) \in [0, T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$; pois, caso contrário, existiria $t' \in \mathbb{R}$ tal que $g(t') > T > g(t_0)$ agora, pelo teorema do valor intermediário existe $t \in \mathbb{R}$ $g(t) = T$, absurdo, pois contradiz (2.6). Então, pela equação (2.5), substituindo $t = 0$, temos que $\phi_{s+t_0-h(t_0)}(x) = y$ e $|s + t_0 - h(t_0)| = g(0) < \varepsilon'$.
Concluindo a prova. □

Outra maneira de abordar o conceito de estar espacial-próximos na mesma órbita é dizer que os pontos estão no mesmo segmento de órbita de diâmetro pequeno, assim:

Definição 2.13. *Seja $\beta > 0$, ϕ um fluxo sobre X e $x, y \in X$; dizemos que* ***x e y estão β-conectados,*** *se existe $z \in X$, $t \in \mathbb{R}$ tal que $x, y \in \phi_{[0,t]}(z)$ e $\operatorname{diam}(\phi_{[0,t]} z) < \beta$.*

A seguinte proposição 2.3.4 também responde a uma de nossas perguntas fundamentais: de se os pontos que não se separarem, estárão muito próximos no espaço é satisfatório, porém, antes, mostrarmos um lema.

Observação 2.3.4. *Se $\beta_0 = 0$, em qualquer dos três casos da proposição 2.3.4, conclui-se-se que X é um conjunto finito. Neste caso, é trivial demonstrar as equivalências da proposição 2.3.4. Para tanto, nas demonstrações assumiremos que $\beta_0 > 0$. Onde β_0 é o ínfimo dos diâmetros das órbitas não singulares.*

Lema 2.3.2. *Se ϕ é um fluxo com uma quantidade finita de singularidades, então para todo $\beta \in (0, \beta_0)$ existe $\delta > 0$ tal que se $\operatorname{dist}(\phi_{g(t)}(x), \phi_t(x)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e alguma função contínua $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(0) = 0$. Então para todo $t \in \mathbb{R}$, os pontos $\phi_{g(t)}(x)$ e $\phi_t(x)$ estão β-conectados.*

Demonstração. Por absurdo, suponhamos que exista $\beta \in (0, \beta_0)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, existem $x_n \in X$ e funções contínuas $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $g_n(0) = 0$ tais que

$$\operatorname{dist}(\phi_{g_n(t)}(x_n), \phi_t(x_n)) < \frac{1}{n} \tag{2.7}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, e além disso, existe t_n tal que $\phi_{g_n(t_n)}(x_n)$ e $\phi_{t_n}(x_n)$ não estão β-conectados. Sem perda de generalidade podemos supor que os t_n são positivos e além disso que são minimais, isto é, para todo $t \in [0, t_n)$ os pontos $\phi_{g_n(t)}(x_n)$ e $\phi_t(x_n)$ estão β-conectados. Isto implica que os pontos $a_n = \phi_{g_n(t_n)}(x_n)$ e $b_n = \phi_{t_n}(x_n)$ estão conectados por um segmento de órbita de diâmetro exatamente β, pois, caso contrário, para todo $x \in X,\ t \in \mathbb{R} : \operatorname{diam}(\phi_{[0,t]}x) \geqslant \beta$ e como os t_n são minimais, temos que existem $\overline{x} \in X,\ s \in \mathbb{R}$ tal que $a_t = \phi_t(a_n), b_t = \phi_t(b_n) \in \phi_{[0,s]}\overline{x}$ e $\operatorname{diam}(\phi_{[0,s]}\overline{x}) < \beta$, o que contradiz $\operatorname{diam}(\phi_{[0,s]}\overline{x}) \geqslant \beta$. Pela equação (2.7) temos que $\operatorname{dist}(a_n, b_n) < \frac{1}{n}$, com $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, e pela compacidade de X podemos supor que $\lim_{n\to\infty} a_n = \overline{c}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = c$, nesse sentido, $\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(a_n, b_n) = \operatorname{dist}(\overline{c}, c) = 0$, isto é, $\overline{c} = c$. Novamente, podemos supor que $\phi_{s_n}(a_n) = b_n$, pois como $a_n = \phi_{g(t_n)}(x_n) = \phi_{g_n(t_n)-t_n}(\phi_{t_n}x_n) = \phi_{g_n(t_n)-t_n}(b_n)$, então $b_n = \phi_{t_n - g_n(t_n)}(a_n)$ com $s_n = t_n - g_n(t_n)$.

Se $s_n > 0$ para infinitos valores de n; (o raciocino que segue seria análogo se $s_n < 0$, para valores infinitos de n); além disso como a_n e b_n estão em um segmento de diâmetro igual a β, temos $\operatorname{diam}(\phi_{[0,s_n]}(a_n)) = \beta$.

Se os valores de s_n ficam limitados; isto é, $0 < s_n \leqslant M$ para algum M, então existe $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ e como $\phi_{s_n}a_n = b_n$; concluímos que c é um ponto periódico não singular; pois sendo $t \in \mathbb{R}$, $m = [\![\frac{t}{s}]\!] \leqslant \frac{t}{s} < m+1$, temos que existe $r > 0$, $r \in [0, s)$ tal que $t = ms + r$ então, $\phi_t(c) = \phi_{ms+r}(c) = \phi_r(\phi_{ms}(c)) = \phi_r(c) \in \phi_{[0,s]}(c)$. Portanto $\operatorname{diam}(\phi_{\mathbb{R}}(c)) = \operatorname{diam}(\phi_{[0,s]}(c)) = \beta$, o que contradiz que $\beta < \beta_0$.

Se $0 \leqslant u_n + T \leqslant s_n$ para um número infinito de valores de n, então $\phi_{u_n+T}(a_n) \in \phi[0, s_n](a_n)$ e $\lim_{n\to+\infty} \phi_{u_n+T}(a_n) = \phi_T(z) \in K$.

Se $s_n < u_n+T$ para valores infinitos de n, como $u_n < s_n$, então $0 < u_n+T-S_n < T$ assim existe uma subsequência convergente $\tau_n = u_n + T - s_n$ com $\lim_{n\to+\infty} \tau_n = \tau$, como $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = c$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \phi_{\tau_n}(a_n) = \lim_{n\to+\infty} \phi_{\tau_n}(b_n) &= \lim_{n\to+\infty} \phi_{u_n+T-s_n}(b_n) = \lim_{n\to+\infty} \phi_{u_n+T}(\phi_{-s_n}(b_n)) \\ = \lim_{n\to+\infty} \phi_T(\phi_{u_n}(a_n)) &= \phi_T(z) \end{aligned} \tag{2.8}$$

como $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n > n_0$, $T < s_n$; sem perda de generalidade, podemos supor $\tau \in [0, s_n]$. Logo, a equação(2.8) fica

$$\lim_{n\to+\infty} \phi_{\tau_n}(a_n) = \phi_T(z) \in K.$$

Se $u_n + T < 0$ para infinitos valores de n, então $0 \leqslant u_n < -T$, pois $0 \leqslant u_n$. Nisso, tomando uma subsequência convergente, sem perda de generalidade, temos que $\lim_{n\to+\infty} u_n = u$. Por outro lado, temos que

$$z = \lim_{n\to+\infty} \phi_{u_n}(a_n) = \lim_{n\to+\infty} \phi_{u_n}(b_n) = \phi_u(c). \tag{2.9}$$

Como $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$, temos que $0 \leqslant u_n + T + s_n < s_n$ para valores de n suficientemente grandes; fazendo $\tau_n = u_n + T + s_n$ e a equação (2.9) obtemos que

$$\lim_{n\to+\infty} \phi_{\tau_n}(a_n) = \lim \phi_T(\phi_{u_n}(\phi_{s_n}(a_n))) = \lim \phi_T(\phi_{u_n}(b_n)) = \phi_T(\phi_u(c)) = \phi_T(z) \in K.$$

Como $\operatorname{diam}(K) = \beta$ e K é conexo, segue que K é um conjunto infinito. Pela hipótese o fluxo apresenta um número finito de singularidades, então existe um ponto regular tal que sua órbita tem diâmetro menor que β, contradizendo o fato de β_0 ser o ínfimo dos diâmetros das órbitas, conclui-sendo a veracidade do lema. □

Proposição 2.3.4. *Seja X um espaço métrico compacto, $\phi : \mathbb{R} \times X \to X$ um fluxo contínuo e β_0 o ínfimo dos diâmetros das órbitas não singulares. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

a) ϕ é K-expansivo,

b) Para todo $\beta > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $\operatorname{dist}(\phi_{h(t)}(x), \phi_t(y)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e para um homeomorfismo $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e que fixe o zero, então x e y estão β-conectados.

c) Existem $\beta_1 \in (0, \beta_0)$ e $\delta' > 0$ tais que se $\operatorname{dist}(\phi_{h(t)}(x), \phi_t(y)) < \delta'$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e para um homeomorfismo $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e que fixe o zero, então x e y estão β_1-conectados.

Demonstração. Observe que em qualquer dos três casos o número de singularidades é finita.

(a) implica (b)

Note também que se existe um valor de β tal que satisfaz, então fica provada para todo valor maior de β, pois podemos usar o mesmo δ. Assim, é suficiente supor $\beta \in (0, \beta_0)$. Dessa forma, pelo lema 2.3.2, temos que para $\beta' \in (0, \beta)$ obtemos $\delta' > 0$ tal que *"se os pontos $\phi_{g(t)}x$, $\phi_t x$ sempre estão δ'-próximos por uma função contìnua g que fixe zero, então os pontos da forma $\phi_{g(t)}x$, $\phi_t x$ estão β' conectados "*. Seja $\delta'' \in (0, \delta')$.

Afirmação 1: *existe $\varepsilon > 0$ tal que se $\operatorname{diam}(\phi_{[a,b]}x) < \beta'$, então* $\operatorname{diam}(\phi_{[a-\varepsilon,b+\varepsilon]}x) < \beta$.

Seja $x \in X$ temos $\operatorname{diam}(\mathcal{O}x) < \beta'$ ou $\operatorname{diam}(\mathcal{O}x) \geqslant \beta'$. Se $\operatorname{diam}(\mathcal{O}x) < \beta'$ temos para todo $\varepsilon > 0$ que $\operatorname{diam}(\phi_{[a,b]}x) < \beta'$ implica $\operatorname{diam}(\phi_{[a-\varepsilon,b+\varepsilon]}x) < \beta$. Se $\operatorname{diam}(\mathcal{O}x) \geqslant \beta'$ existe $A, B \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{diam}(\phi_{[A,B]}x) = \beta'$ e $[A, B]$ é o intervalo maximal que satisfaz a igualdade anterior; seja $[a, b] \subset [A, B]$, definamos $\psi(t) = \operatorname{diam}(\phi_{[A-\varepsilon,B+\varepsilon]}x)$ para todo $t \geqslant 0$, de maneira natural $\psi(t) \geqslant \beta'$, como $\beta > \beta'$ pela continuidade de ψ temos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\psi(\varepsilon) < \beta$ isto é

$\mathrm{diam}(\phi_{[a-\varepsilon,b+\varepsilon]}x) < \beta$ pois $[a-\varepsilon, b+\varepsilon] \subset [A-\varepsilon, B+\varepsilon]$.
Pela continuidade de ϕ temos que, se $\mathrm{dist}(x,y) < \delta''$ existe $\varepsilon' > 0$ tal que para cada $s \in \mathbb{R}$ com $|s| < \varepsilon'$ tal que $\mathrm{dist}(\phi_s x, y) < \delta'' < \delta'$. assim sempre será possível tomar ε como satisfazendo

$$\text{se } \mathrm{dist}(x,y) < \delta'' \text{ , então } \mathrm{dist}(\phi_s x, y) < \delta', \tag{2.10}$$

para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$; por hipótese para ε existe uma constante de expansividade $\delta''' > 0$.
Afirmação 2: *$\delta < \min\{\delta', \delta'', \delta'''\}$ é uma constante de expansividade*
De fato, suponhamos

$$\mathrm{dist}(\phi_{h(t)}x, \phi_t y) < \delta, \tag{2.11}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, onde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um homeomorfismo crescente que fixe zero. Assim, pela K-expansividade temos que existem s, $t_0 \in \mathbb{R}$ tais que $\phi_{h(t_0)}(x) = \phi_{t_0+s}(y)$ e $|s| < \varepsilon$, tomando $z = \phi_{h(t_0)}(x)$ e a função contínua $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $g(t) = h(t_0+t) - h(t_0)$. Pela equação (2.11) temos $\mathrm{dist}(\phi_{g(t)}(z), \phi_{t-s}(z)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$, pois

$$\begin{aligned} \phi_{g(t)}(z) = \phi_{h(t_0+t)-h(t_0)}(\phi_{h(t_0)}(x)) = \phi_{h(t_0+t)}(x) \\ \phi_{t-s}(z) = \phi_{t-s}(\phi_{h(t_0)}(x)) = \phi_{t+t_0}(y) \end{aligned}$$

De $|s| < \varepsilon$, $\delta < \delta''$ e pela equação (2.10) temos $\mathrm{dist}(\phi_{g(t)}(z), \phi_t(z)) < \delta'$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, pelo lema 2.3.2 temos que $\phi_{g(-t_0)}(z)$ e $\phi_{-t_0}(z)$ estão β'-conectados, isto é x, $\phi_s(y)$ estão β'-conectados. Logo, pela afirmação 1 temos que x, y são β-conectados, pois $|s| < \varepsilon$. conclui-sendo está parte.

(b) implica (a)
Afirmação 3: *Existe $\gamma > 0$ para todo $x \notin B_\gamma(\mathrm{Sing}(\phi))$ e existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_t(x) \notin B_\gamma(\mathrm{Sing}(\phi))$*
Por absurdo, para todo $\gamma > 0$ existe $x \notin B_\gamma(\mathrm{Sing}(\phi))$ para todo $t \in \mathbb{R}$: $\phi_t(x) \in B_\gamma(x)$. Como $\mathrm{Sing}(\phi)$ é um conjunto finito temos que $B_\gamma(\mathrm{Sing}(\phi)) = \bigcup_{p \in \mathrm{Sing}(\phi)} B_\gamma(p) = B_\gamma(p_1) \cup \ldots \cup B_\gamma(p_N)$, daqui,

$$x \notin B_\gamma(\mathrm{Sing}(\phi)) \text{ é equivalente com } \mathrm{dist}(x, p_i) \geqslant \gamma \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, N\}$$

de $\phi_t(x) \in B_\gamma(\mathrm{Sing}(\phi))$, para todo $t \in \mathbb{R}$ temos que existe $k \in \{1, \ldots, N\}$ tal que $\mathrm{dist}(\phi_t(x), p_k) < \gamma$ para todo $t \in \mathbb{R}$, em particular, para $t = 0$ temos $\mathrm{dist}(x, p_k) < \gamma$ o que contradiz $x \notin B_\gamma(\mathrm{Sing}(\phi))$
Seja $\varepsilon > 0$ pela afirmação 3 existe $\gamma > 0$ que independe de ε.
Afirmação 4: *Existe $\beta > 0$ tal que; se $\big(\mathrm{dist}(x, \mathrm{Sing}(\phi)) \geqslant \gamma,\ \mathrm{diam}(\phi_{[0,s]}(x)) < \beta\big)$; então $|s| < \varepsilon$*
por absurdo, isto é, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$, $t_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_n \notin B_\gamma(\mathrm{Sing}(\phi)),\ t_n \notin (-\varepsilon, \varepsilon), \mathrm{diam}(\phi_{[0,t_n]}) < \frac{1}{n} \tag{2.12}$$

Pela compactidade de X podemos supor que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = z$ onde $z \notin B_\gamma(\mathrm{Sing}(\phi))$,

pois $\lim_{n\to\infty} \text{dist}(x_n, \text{Sing}(\phi)) = \text{dist}(z, \text{Sing}(\phi)) \geqslant \gamma$, assim z não é uma singularidade. Como z não é uma singularidade existe $\varepsilon' \in (0,\varepsilon)$ tal que $\phi_{\varepsilon'}(z) \neq z$. Agora, pela continuidade de ϕ, temos $\lim_{n\to+\infty} \phi_{\varepsilon'}(x_n) = \phi_{\varepsilon'}(z)$, por (2.12) temos que $\lim_{n\to+\infty} \text{diam}(\phi_{[0,t_n]}(x_n)) = 0$ e como $t_n \notin (-\varepsilon,\varepsilon)$ temos $\phi_{\varepsilon'}(x_n) \in \phi_{[0,t_n]}(x_n)$ o que implica $\lim_{n\to+\infty} \phi_{\varepsilon'}(x_n) = \phi_{\varepsilon'}(z)$ logo $\lim_{n\to+\infty} \text{diam}(\phi_{[0,\varepsilon']}(x_n)) = \text{diam}(\phi_{[0,\varepsilon']}(z)) = 0$, daí $z \in \text{Sing}(\phi)$ absurdo, pois $z \notin \text{Sing}(\phi)$.
Pela Afirmação 4 obtemos $\beta > 0$ e assim, por hipótese existe uma constante de expansividade $\delta > 0$ (pelo item (b)) tal que $\text{dist}(\phi_{h(t)}(y), \phi_t(x)) < \delta$ e algum homeomorfismo crescente $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que fixe zero, então x, y estão β-conectados.
Afirmação 5: *Seja ε fixado anteriormente,* $\text{dist}(\phi_{h(t)}(y), \phi_t(x)) < \delta$ *para todo $t \in \mathbb{R}$ e algum homeomorfismo crescente $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que fixe zero, então existe $s, t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $|s| < \varepsilon$ e $\phi_{h(t_0)}(y) = \phi_{t_0+s}(x)$.*
De fato; primeiro observe que não podem existir dois pontos singulares a distância menor que δ, pois caso contrário, todas seriam iguais; assim, um dos pontos não é singular, suponhamos que $x \notin \text{Sing}(\phi)$ e por hipótese temos que x está em um segmento de órbita de raio menor que β. Então, pela Afirmação 3 existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_{t_0}(x) \notin B_\gamma(\text{Sing}(\phi))$. Por outro lado, defina a função $h' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $h'(t) = h(t+t_0) - h(t_0)$. Observe que h' e um homeomorfismo crescente que fixa zero, pois h é; assim, como $\text{dist}(\phi_{h(t)}(y), \phi_t(x)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$ temos que:

$$\begin{aligned}
\text{dist}\left(\phi_{h'(t)}(\phi_{h(t_0)}(y)), \phi_t(\phi_{t_0}(x))\right) &= \text{dist}\left(\phi_{h(t+t_0)-h(t_0)}(\phi_{h(t_0)}(y)), \phi_t(\phi_{t_0}(x))\right) \\
&= \text{dist}\left(\phi_{h(t+t_0)}(y), \phi_{t+t_0}(x)\right) < \delta
\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Por hipótese temos que $\phi_{h(t_0)}(y)$ e $\phi_{t_0}(x)$ estão em um segmento de órbita menor que β (β-conectados) no que existe $s' \in \mathbb{R}$ tal que $\text{diam}(\phi_{[0,s']}(\phi_{t_0}(x))) < \beta$ e $\phi_{h(t_0)}(y) \in \phi_{[0,s']}(\phi_{t_0}(x))$; daí e $\phi_{t_0}(x) \notin B_\gamma(\text{Sing}(\phi))$; pela afirmação 4 implica-se $|s'| < \varepsilon$. Logo, se conclui-se que $\phi_{h(t_0)}(y) = \phi_{t_0+s}(x)$ para algum $s \in \mathbb{R}$ com $|s| < \varepsilon$.

(b) implica (c),
é um caso particular.

(c) implica (b)
Pelo item (c) temos que existem $\beta_1 > 0$ e δ'. Se β é não menor que β_1, é trivial a prova, usando o valor $\delta = \delta'$.
Se $\beta \in (0, \beta_1)$. Suponhamos por absurdo que β não satisfaz o item (b), isto é, nenhum dos valores de δ funciona para β, então existem sequências de números reais e de pontos de X convergentes: $\lim_{n\to+\infty} \delta_n = \dfrac{1}{n} = 0$, $\lim_{n\to+\infty} x_n = z$, $\lim_{n\to+\infty} y_n = z$ e homeomorfismos h_n tais que $\text{dist}(\phi_{h_n(t)}(x_n), \phi_t(y_n)) < \delta_n$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e tal que x_n e y_n estão β_1-conectados, mas não β-conectados. Então, do mesmo modo que na prova do lema 2.3.2, concluímos que se $\phi_{s_n}(x_n) = y_n$ e $\text{diam}(\phi_{[0,s_n]}(x_n)) \in [\beta, \beta_1]$, então um ponto de acumulação (na topologia de Hausdorff) da sequência $\{\phi_{[0,s_n]}(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ contem uma órbita não singular de diâmetro menor que β_0, o que é um absurdo. conclui-sendo a prova. $\square$

Proposição 2.3.5. *Seja ϕ um fluxo K-expansivo sobre X, então qualquer fluxo ψ em um espaço métrico compacto Y que seja topologicamente conjugado a ϕ é K-expansivo.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$, então existe $\overline{\delta} > 0$ constante de K-expansividade de ϕ, Seja $g : X \to Y$ uma conjugação; pela continuidade uniforme de g^{-1}, existe $\delta > 0$ (para $\overline{\delta}$), provaremos que é uma constante de expansividade de ψ. De fato se

$$\operatorname{dist}(\psi_{h(t)}(g(x)), \psi_t(g(y))) < \delta,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $h \in \mathcal{H}_0^+(\mathbb{R})$. Nisso temos que existe $s, t_0 \in \mathbb{R}$ com $|s| < \varepsilon$ tal que $\phi_{h(t_0)}(x) = \phi_{t_0+s}(y)$, logo $\psi_{h(t_0)}(g(x)) = \psi_{t_0+s}(g(y))$. conclui-sendo a prova. □

2.4 Exemplos

Nestá secção apresentaremos alguns exemplos que, pelo comportamento dinâmico que apresentam, sugerem as melhores definições de expansividade a serem usadas.

Exemplo 2.4.1. *Seja $X \subset S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ dado por*

$$X = \{\infty\} \cup \{(n, 0) : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(n, \pm\frac{1}{m}) : n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^+, |n| \leqslant m\}$$

e a aplicação $f : X \to X$ definida como

$$f \;:\; \begin{cases} f(\infty) = \infty & \\ f(n,0) = (n+1,0) & se\ n \in \mathbb{Z} \\ f(n, \pm\frac{1}{m}) = (n+1, \pm\frac{1}{m}) & se\ n < m,\ m \in \mathbb{Z}^+ \\ f(m, \pm\frac{1}{m}) = (-m, \mp\frac{1}{m}) & se\ m \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

Mostraremos duas propriedades:

a) *O homeomorfismo f não é expansivo.*
Isto é, para cada $\varepsilon > 0$, existem distintos pontos, da forma $(0, x); (0, -x) \in X \backslash \{0\}$ (como na figura 2.5), que contradiz o comportamento de um homeomorfismo expansivo. De fato, seja $\varepsilon > 0$. Por outro lado, temos a seguinte propriedade

$$f^j(0, \pm\frac{1}{m}) = \begin{cases} (4m+2+j, \pm\frac{1}{m}) & ; \quad -4m-2 \leqslant j \leqslant -3m-2 \\ (2m+1+j, \mp\frac{1}{m}) & ; \quad -3m \leqslant j \leqslant -m-1 \\ (j, \pm\frac{1}{m}) & ; \quad -m \leqslant j \leqslant m \\ (-2m-1+j, \mp\frac{1}{m}) & ; \quad m+1 \leqslant j \leqslant 3m+1 \\ (-4m-2+j, \pm\frac{1}{m}) & ; \quad 3m+2 \leqslant j \leqslant 4m+2 \end{cases} \tag{2.13}$$

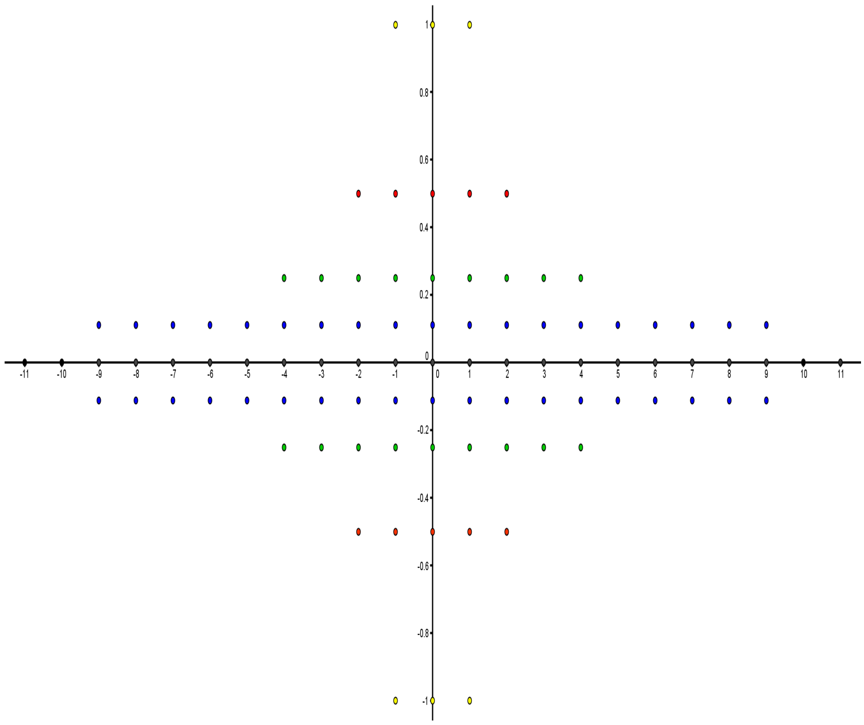


Figura 2.5: $X \subset S^2$

Observamos que, se $f^n(0,x) = (y,w)$, então

$$f^n(0,-x) = (y,-w),$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $(0,x) \in X\backslash\{(0,0)\}$. Nesse sentido, para cada $n \in \mathbb{Z}$, $(0,x) \in X\backslash\{0\}$

$$\text{dist}(f^n(0,x), f^n(0,-x)) = |f^n(0,x) - f^n(0,-x)| = 2|x|,$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{Z}$ e $(0,x) \in X\backslash\{(0,0)\}$

$$\text{dist}(f^n(0,x), f^n(0,-x)) = 2|x| \tag{2.14}$$

Para $\varepsilon > 0$ dado, existe $\frac{1}{m}$ tal que $\varepsilon > \frac{1}{m}$ assim tomando $(0, \frac{1}{2m})$ e $(0, -\frac{1}{2m})$ pela equação (2.14), temos que $\text{dist}(f^n(0, \frac{1}{2m}), f^n(0, -\frac{1}{2m})) = \frac{1}{m} < \varepsilon$. Em suma; para todo $\varepsilon > 0$ encontramos $x = (0, \frac{1}{2m}) \in X$ e $y = (0, -\frac{1}{2m}) \in X$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\text{dist}(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon,$$

isto é f não é expansivo.

b) *O fluxo suspensão ϕ_f de f, é B-expansivo*
De fato, para a função $T : X \to \mathbb{R}^+$, definida como $T(x) = 1$, para todo $x \in X$ e pela definição (1.13), de fluxo suspensão, temos que o fluxo $\phi_f^t : X_T \to X_T$

definida como $\phi_f^t(x_0,t_0)=(f^{x_0},s')$, onde n, s satisfazem

$$\sum_{i=0}^{n-1} T(f^i(x_0))+s'=t+t_0\ ,\quad 0\leqslant s'<T(f^n(x_0)),$$

que é equivalente a

$$\begin{gathered} n+s'=t+t_0\ ,\quad 0\leqslant s'<1\\ n\leqslant t+t_0<n+1\\ n=[\![t+t_0]\!]. \end{gathered}$$

Assim

$$\phi_f^t(x_0,t_0)=(f^{[\![t+t_0]\!]}(x_0),t+t_0-[\![t+t_0]\!]), \tag{2.15}$$

considerando $\delta=1$, mostraremos que é uma constante de expansividade do fluxo. Sejam dois pontos distintos em X, $(p,\pm\frac{1}{m})\in X$, $(q,\pm\frac{1}{n})\in X$, com $0<m<n$ os pontos $((p,\pm\frac{1}{m}),t_1),((q,\pm\frac{1}{n}),t_2)$, com $t_1,t_2\in[0,1]$ na variedade suspensão $X\times[0,1]/\sim$, onde a relação de equivalência $\sim$ é tal que $(x,1)\sim(f(x),0)$. Pela equação (2.15) as órbitas dos pontos na variedade suspensão são:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{((p,\pm\frac{1}{m}),t_1)}&=\{\phi_f^t((p,\pm\tfrac{1}{m})/t\in\mathbb{R}^+\}=\{(f^k(p,\pm\tfrac{1}{m}),r)/\ k\in\mathbb{Z},r\in[0,1]\}\\ \mathcal{O}_{((q,\pm\frac{1}{n}),t_1)}&=\{\phi_f^t((q,\pm\tfrac{1}{n})/t\in\mathbb{R}^+\}=\{(f^k(q,\pm\tfrac{1}{n}),r)/\ k\in\mathbb{Z},r\in[0,1]\}. \end{aligned}$$

As órbitas são distintas pois as segundas coordenadas de $f^k(p,\pm\frac{1}{m})$, $f^k(q,\pm\frac{1}{n})$ são $\pm\frac{1}{m}$ e $\pm\frac{1}{n}$.
Vamos provar que para $t=m+1-p+k$, onde k é o número da k-ésima composição de f, as primeiras coordenadas de $f^k(p,\frac{1}{m})$ e $f^k(q,\frac{1}{n})$ coincidem ($k=0$ se não coincidem para todo inteiro).

$$\text{dist}(\phi_f^t((p,\pm\frac{1}{m}),t_1),\phi_f^t((q,\pm\frac{1}{n}),t_2)>\delta=1$$

onde dist é a induzida pela norma euclidiana no $\mathbb{R}^3$. De fato, basta demonstrar que $\text{dist}(f^t(p,\frac{1}{m}),f^t(q,\frac{1}{n}))>1$.
A seguinte observação mostra que existem pontos $x_0=(-1,\frac{1}{2})$ e $y_0=(-7,\frac{1}{7})$ tal que $f^k(x_0)$ e $f^k(y_0)$ não tem primeiras coordenadas iguais para quaisquer $k\in\mathbb{Z}$.
Observação
Se $x_0=(-1,\frac{1}{2})$, $y_0=(-7,\frac{1}{7})$ então $f_1^k(x_0)\neq f_1^k(y_0)$, para cada $k\in\mathbb{Z}$, onde f_1^k significa primeira coordenada de f^k.
Por absurdo, supondo que existe $r\in\mathbb{Z}$ tal que $f_1^r(x_0)=f_1^r(y_0)$. Assim como $f_1^r(x_0)\in\{-2,-1,0,1,2\}$ e $f_1^r(y_0)\in\{-7,-6,\cdots,6,7\}$ temos que pelas propriedades da equação (2.13), $f_1^5(x_0)=-1$, $f_1^{15}(y_0)=-7$. Dessa forma, r tem que ser múltiplo de 5 e congruente a 6 modulo 15, pois o período de -1 é 5 e de -7 é 15. Então, para que $f^r(-7,\frac{1}{7})=f^r(y_0)=-1$, $r=5k_1=15k_2+(-1)-(-7)=15k_2+6$. Assim, denotando $\overline{5}$ os múltiplo de 5, $\overline{5}-5-1-\overline{15}=0$, então $\overline{5}=1$ absurdo pois, 1 não é múltiplo de 5.

Pela observação anterior, temos dois casos:
Cada $k \in \mathbb{Z}$ satisfaz

$$f_1^k(p, \frac{1}{m}) \neq f_1^k(q, \frac{1}{n}),$$

Assim considerando $t = m + 1 - p$ logo

$$\text{dist}(f^t(p, \frac{1}{m}), f^t(q, \frac{1}{n})) \geqslant |f_1^t(p, \frac{1}{m}) - f_1^t(q, \frac{1}{n})| > 1.$$

Existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$f_1^k(p, \frac{1}{m}) = f_1^k(q, \frac{1}{n}),$$

neste caso, considere $t = k + m + 1 - p$ em que k é a iterada onde as primeiras coordenadas de $f^k(p, \frac{1}{m})$,$f^k(q, \frac{1}{n})$ coincidem, e podemos supor, sem perda de generalidade que $f_1^k(p, \frac{1}{m}) = f_1^k(q, \frac{1}{n}) = p$, pois podemos compor algumas vezes até chegar a p. Nesse sentido:

$$\text{dist}(f^t(p, \frac{1}{m}), f^t(q, \frac{1}{n})) = |f^{m+n-p}(p, \pm\frac{1}{m}), f^{m+1-p}(q, \pm\frac{1}{n})| \tag{2.16}$$

Agora, pela equação (2.13), para $p > 0$ temos $f^{m+1-p}(p, \pm\frac{1}{m}) = f^{m+1}(0, \pm\frac{1}{m}) = (-m, \pm\frac{1}{m})$ e como $m < n$, $m + 1 \leqslant n$ então $f^{m+1-p}(p, \pm\frac{1}{n}) = f^{m+1}(0, \pm\frac{1}{n}) = (m+1, \pm\frac{1}{n})$. Assim, pelos resultados da equação (2.16), temos que

$$\text{dist}(f^t(p, \frac{1}{m}), f^t(q, \frac{1}{n})) = |(-m - m - 1, \pm\frac{1}{m} \pm \frac{1}{n})| > 1.$$

conclui-sendo que o fluxo ϕ_f é B-expansivo.

Exemplo 2.4.2. *Seja f a função identidade em um intervalo $[0, 1]$ e ϕ uma suspensão de f por uma função crescente $c : [0, 1] \to \mathbb{R}^+$ (ver figura 2.6). Então todas as órbitas de ϕ são periódicas e os períodos são todos distintos. ϕ é C-expansivo, mas f não é expansivo. Além disso, é expansivo ao futuro e a C-expansividade deste fluxo ϕ não é invariante por equivalência topológica.*

Mostraremos três propriedades:

a) *f não é expansivo ;*
Para isso, seja $\delta > 0$. Como $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente, temos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\delta > \frac{1}{(k)(k+1)}$. Agora, tomando $x = \frac{1}{k+1}$ e $y = \frac{1}{k}$ temos que:

$$\text{dist}(f^n(x), f^n(y)) = \text{dist}(x, y) = \frac{1}{(k)(k+1)} < \delta$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, embora $x \neq y$. Logo, f não é expansivo.

b) *As órbitas de ϕ são periódicas e ϕ é C-expansivo;*
Como o fluxo suspensão será : $\phi_t(x, s) = (f^{[t+s]}(x), \{t + s\})$, para t pequeno tem a seguinte forma; $\phi_t(x, s) = (x, t + s)$ com $0 \leqslant t + s < 1$. Assim $\phi_{c(x)}(x, s) = (x, s + c(x)) \sim (x, s)$, para cada $(x, s) \in [0, 1]_c$.

A C-expansividade: Seja $\varepsilon > 0$, façamos $\delta = \min\{c(x)/x \in [0,1]\}$. Se $|s| < \varepsilon$,$(y, s_1) \neq \phi_s(x, s_0)$ para t pequeno, $\text{dist}(\phi_t(x, s_0), \phi_t(y, s_1)) = \text{dist}((x, s_0 + t), (y, s_1 + t))$ supondo, sem perda de generalidade, $0 \leqslant s_0 \leqslant s_1$.
se para $t = c(x) - s_0$, $s_1 + t \geqslant \delta$ temos

$$\text{dist}(\phi_t((x, s_0), \phi_t(y, s_1)) = \text{dist}((x, 0), (y, s_1 + t)) \geqslant |s_1 + t| \geqslant \delta$$

Se para $\bar{t} = c(x) - s_0$, $s_1 + \bar{t} < \delta$, temos $t_1 = n(c(x))$ para n tal que $t_1 + s_1 \geqslant \delta$ e assim, se $t = \bar{t} + t_1$ temos

$$\text{dist}(\phi_t(x, s_0), \phi_t(y, s_1)) = \text{dist}((x, 0), (y, s_1 + t)) \geqslant |s_1 + t| \geqslant \delta$$

Como $t \geqslant 0$, ϕ é C-expansivo ao futuro.

c) *Um fluxo ϕ C-expansivo não é invariante por conjugação topológica;*
Seja $h : [0,1]_c \to [0,1]_1$ definida como $h(p, s) = (p, \frac{s}{c(p)})$.
$\mathcal{X}_t = h \circ \phi_{tc(p)} \circ h^{-1}$ é um fluxo em $[0,1]_1$
$\psi_t(p, r) = \mathcal{X}_{tc(p)}(p, r)$ é uma mudança temporal de $\mathcal{X}_t$. Assim:

$$\begin{aligned} \psi_0(p, r) = \mathcal{X}_{0c(p)}(p, r) = \mathcal{X}_0(p, r) = h \circ \phi_0 \circ h^{-1}(p, r) = \\ h \circ h^{-1}(p, r) = (p, r) \\ \psi_1(p, r) = \mathcal{X}_{1c(p)}(p, r) = \mathcal{X}_{c(p)}(p, r) = h \circ \phi_{c(p)} \circ h^{-1}(p, r) \\ = h \circ \phi_{c(p)}(p, rc(p)) = h(p, rc(p)) = (p, \frac{rc(p)}{c(p)}) = (p, r) \end{aligned}$$

Logo, os diâmetros das órbitas são constantes, $\text{diam}(\mathcal{O}(p, r)) = 1$ para cada $(p, r) \in [0,1]_1$, e nesse sentido, ϕ não é expansivo pois podemos tomar os pontos $(x, 0) = (\frac{1}{k+1}, 0)$ e $(y, 0) = (\frac{1}{k}, 0)$, isso acontece semelhantemente ao resultado onde se mostra que f não é expansivo.

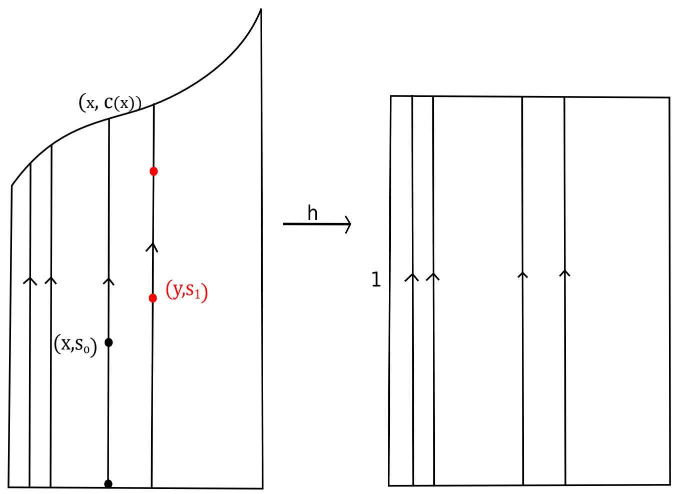


Figura 2.6: Variedades suspensão homeomorfas

Exemplo 2.4.3. *Sejam X um campo no toro $\mathbb{T}^2 := \frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z}^2}$, que gera um fluxo irracional que não tem pontos singulares e não é expansivo, e $f : \mathbb{T}^2 \to [0,1]$*

contínua que só se anula no ponto $p \in \mathbb{T}^2$. *Definimos o fluxo* ϕ *gerado pelo campo* fX.

Mostraremos duas propriedades:

a) ϕ *é C-expansivo.*
Pelo Teorema 6.2.8 em [4] se demonstra que o fluxo que tem pontos singulares sela e a união das suas separatrizes é densa e ϕ e C-expansivo

b) $\phi_t(x) = x + \int_0^t f(\phi_r(x))\partial r X$ *e seus fluxos conjugados são C-expansivos.*
De fato, seja $\varepsilon > 0$ e ψ um fluxo conjugado mediante h, uma conjugação topológica de ϕ, como $\mathbb{T}^2$ é, compacto e h é contínua, temos que h^{-1} é uniformemente contínua, isto é, para o $\overline{\delta} > 0$ constante de expansividade de ϕ existe $\delta > 0$ tal que $\text{dist}(x, y) < \delta \Rightarrow \text{dist}(h^{-1}(x), h^{-1}(y)) < \overline{\delta}$. Agora, se $\text{dist}(\psi_t(x), \psi_t(y)) < \delta$ para cada $t \in \mathbb{R}$ então pelo fato de h^{-1} ser uniformemente contínua temos que $\text{dist}(h^{-1} \circ \psi_t(x), h^{-1} \circ \psi_t(y)) < \overline{\delta}$ para cada $t \in \mathbb{R}$, o que é equivalente a $\text{dist}(\phi_t \circ h^{-1}(x), \phi_t \circ h^{-1}(y)) < \overline{\delta}$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Assim como $\overline{\delta}$ é constante de expansividade temos que existe $|s| < \varepsilon$ tal que $\phi_s(h^{-1})(x) = (h^{-1})(y)$ em que $h^{-1} \circ \psi_s \circ h \circ h^{-1}(x) = h^{-1}(y)$, o que implica que $\psi_s(x) = y$.

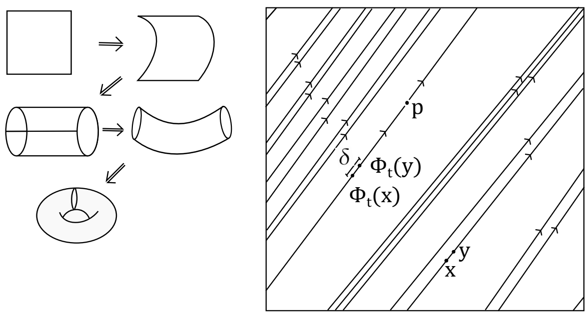


Figura 2.7: fluxo solução do campo fX

2.5 Relações entre as definições

Nestá secção mostraremos algumas relações entre as diferentes definições apresentadas na secção anterior. Na figura 2.8 temos um esquema dos resultados desta secção.
A definição 2.2 de um fluxo A-expansivo fica descartada, pois a proposição 2.1.1 diz que os espaços métricos compactos que suportam um fluxo A-expansivo são conjuntos finitos.

Proposição 2.5.1. *Seja* ϕ *um fluxo G-expansivo em* X, *então* ϕ *é K-expansivo.*

Demonstração. Seja ϕ um fluxo G-expansivo, dado $\varepsilon > 0$ pela proposição 2.3.3, existe $\delta > 0$ tal que se os pontos x, y satisfaz $\operatorname{dist}(\phi_{h(t)}(x), \phi_t(y)) < \delta$ para cada $t \in \mathbb{R}$, então existe $s \in \mathbb{R}$, $|s| < \varepsilon$ e $x = \phi_s(y)$; agora, se $t_0 = 0$, temos que $\phi_{h(t_0)}(x) = \phi_{s+t_0}(y)$. Portanto ϕ é K-expansivo. □

A recíproca não é verdadeira, pois se fosse, pela proposição 2.3.2, o fluxo K-expansivo teria pontos singulares como sendo pontos isolados do espaço X. O fluxo de Lorenz representa um contra-exemplo, e pode ser encontrado em [16].

Proposição 2.5.2. *Seja ϕ um fluxo J-expansivo em X, então ϕ é I-expansivo*

Demonstração. Se ϕ é o fluxo J-expansivo em X, por definição 2.10 existe uma constante de expansividade $\delta > 0$ tal que se dois pontos x, y são tais que existe um homeomorfismo crescente $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que fixe zero $h(0) = 0$, isto é $h \in \mathcal{H}_0^+$; e para cada $t \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{dist}(\phi_{h(t)}(x), \phi_t(y)) < \delta,$$

então x, y estão próximos em relação ao tempo um segmento de órbita $y \in \phi_{(-\delta,\delta)}$. Logo fazendo $\varepsilon = \delta$ e como h é um homeomorfismo em $\mathbb{R}$, obtemos que os pontos cumprem $y \in \phi_{(-\varepsilon,\varepsilon)}$. Isto é o fluxo ϕ é I-expansivo. □

Proposição 2.5.3. *Seja ϕ um fluxo α-expansivo em X, onde $\alpha \in \{G, I, J\}$, então ϕ é F-expansivo.*

Demonstração. Se ϕ é um fluxo G-expansivo em X, pela proposição 2.3.3, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se dois pontos x, y são tais que existem um homeomorfismo $h \in \mathcal{H}_0^+$; e para cada $t \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{dist}(\phi_{h(t)}(x), \phi_t(y)) < \delta,$$

então x, y estão próximos em relação ao tempo em um segmento de órbita, isto é, existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $|s| < \varepsilon$ e $y = \phi_s(x)$. Assim basta fixar $\varepsilon = \varepsilon_0$, constante positiva, e, sob tal perspectiva, pela proposição 2.3.3, existirá $\delta_0 > 0$ tal que se dois pontos x, y são tais que existem um homeomorfismo $h \in \mathcal{H}_0^+$; e para cada $t \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{dist}(\phi_{h(t)}(x), \phi_t(y)) < \delta,$$

então, existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $|s| < \varepsilon$ e $y = \phi_s(x)$, logo ϕ será F-expansivo.
Se o fluxo ϕ é I-expansivo, pela definição 2.10, existem $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ tal que se dois pontos x, y são tais que existem um homeomorfismo h em $\mathbb{R}$; e para cada $t \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{dist}(\phi_{h(t)}(x), \phi_t(y)) < \delta,$$

então existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $|s| < \varepsilon$ e $y = \phi_s(x)$. Desse modo, se temos dois pontos x, y tal que existem um homeomorfismo $h \in \mathcal{H}_0^+$; e para cada $t \in \mathbb{R}$, $\operatorname{dist}(\phi_{h(t)}(x), \phi_t(y)) < \delta$, pela I-expansividade do fluxo ϕ temos que existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $|s| < \varepsilon$ e $y = \phi_s(x)$, logo ϕ é F-expansivo.
Se o fluxo ϕ é J-expansivo, pela proposição 2.5.2 temos que o ϕ é I-expansivo e pelo que provamos anteriormente temos que o fluxo é F-expansivo. □

Com esta proposição 2.5.3, nenhum fluxo α-expansivo, onde $\alpha \in \{F, I, J\}$, pode ser K-expansivo.

Proposição 2.5.4. *Seja ϕ um fluxo α-expansivo em X, onde $\alpha \in \{F, G, I, J, K\}$, então ϕ é H-expansivo.*

Demonstração. Se ϕ é um fluxo F-expansivo, pela definição 2.7 de F-expansividade, existem $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ tal que se dois pontos x, y são tais que existem um homeomorfismo $h \in \mathcal{H}_0^+$ em $\mathbb{R}$; e para cada $t \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{dist}(\phi_{h(t)}(x), \phi_t(y)) < \delta,$$

então existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $|s| < \varepsilon$ e $y = \phi_s(x)$. Assim, pelo resultado anterior os pontos satisfazem $y = \phi_s(x)$ em que $y \in \phi_{\mathbb{R}}(x)$. Logo, ϕ é H-expansivo.
Se ϕ é um fluxo α-expansivo, onde $\alpha \in \{G, I, J\}$, pela proposição 2.5.3 ϕ é um fluxo F-expansivo, logo concluímos, pela prova anterior, que um fluxo ϕ F-expansivo é H-expansivo.
Se ϕ é um fluxo K-expansivo, pela definição 2.12 dos fluxos K-expansivos para um número positivo, fixado $\varepsilon_0 > 0$, existe $\delta_0 > 0$ tal que se dois pontos x, y não se separam, isto é, existe um homeomorfismo $h \in \mathcal{H}_0^+$; e para cada $t \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{dist}(\phi_{h(t)}(x), \phi_t(y)) < \delta,$$

então existem $s, t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $|s| < \varepsilon$ e $\phi_{h(t_0)}(x) = \phi_{s+t_0}(y)$. Com isso concluímos que $y \in \phi_{\mathbb{R}}(y)$, e que portanto, ϕ é H-expansivo. □

Proposição 2.5.5. *Seja ϕ um fluxo α-expansivo em X, onde $\alpha \in \{D, G, K\}$; ou ϕ e suas mudanças temporais são C-expansivas; então ϕ é C-expansivo.*

Demonstração. Seja ϕ um fluxo D-expansivo, tomando o homeomorfismo da identidade $Id : X \to X$ temos que o fluxo ϕ e equivalente topológico com ϕ, então por definição 2.5 de fluxo D-expansivo ϕ é C-expansivo.
Seja ϕ um fluxo G-expansivo, para $\varepsilon > 0$ existe uma constante de G-expansividade $\delta > 0$. Se dois pontos x, y tais que $\mathrm{dist}(\phi_t(x), \phi_t(y)) < \delta$ então pela G-expansividade temos que existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_s(x) = y$. Portanto ϕ é C-expansivo.
Se ϕ é um fluxo K-expansivo em [4] demonstra-se que é C-expansivo.
Se ϕ é um fluxo onde as mudanças temporais são C-expansivas, em [4] demonstra que é C-expansivo. □

Proposição 2.5.6. *Seja ϕ um fluxo α-expansivo em X, onde $\alpha \in \{G, K\}$, então ϕ é D-expansivo*

Demonstração. Seja ϕ um fluxo K-expansivo, pela proposição 2.3.5 em que todo fluxo topologicamente conjugado ψ é K-expansivo, e pela proposição 2.5.5 que diz que um fluxo K-expansivo é C-expansivo, temos que ψ é C-expansivo. portanto segundo a definição 2.5 de um fluxo D-expansivo, temos que ϕ é D-expansivo.
Seja ϕ um fluxo G-expansivo, pelo corolário 4 do teorema 3 em [6], que diz que um fluxo G-expansivo é invariante por conjugação topológica, temos que

qualquer fluxo ψ que é topologicamente equivalente a ϕ é G-expansivo. Agora, pela proposição 2.5.5 temos que ϕ é C-expansivo. Logo, ϕ é D-expansivo. $\square$

Proposição 2.5.7. *Seja ϕ um fluxo α-expansivo em X, onde $\alpha \in \{D, G, K\}$, então qualquer ψ mudança temporal de ϕ é C-expansivo.*

Demonstração. Se ϕ é um fluxo D-expansivo, e ψ uma mudança temporal de ϕ, e por definição uma mudança temporal ψ é um fluxo topologicamente equivalente a ϕ e que tem as mesmas órbitas e preserva a orientação, então por definição 2.5 de fluxo D-expansivo, ψ é D-expansivo. Logo, que ψ é C-expansivo.
Se ϕ é um fluxo α-expansivo, onde $\alpha \in \{G, K\}$, pela proposição 2.5.6 temos que ϕ é D-expansivo, e pela demonstração anterior, se ψ é uma mudança temporal, temos que ψ é C-expansivo. $\square$

Proposição 2.5.8. *Seja ϕ um fluxo α-expansivo em X, onde $\alpha \in \{C, D, F, G, I, J, K\}$, ou qualquer ψ mudança temporal de ϕ é C-expansivo; então ϕ é E-expansivo.*

Demonstração. Se ϕ é um fluxo F-expansivo, pela definição 2.7 existem $\varepsilon > 0, \delta > 0$, constantes de F-expansividade. Se temos dois pontos x, y tais que $\text{dist}(\phi_t(x), \phi_t(y)) < \delta$, para todo $t \in \mathbb{R}$; pela F expansividade e assumindo $h = Id$ como a identidade em $\mathcal{H}_0^+$, para cada $t \in \mathbb{R}$ e $\text{dist}(\phi_t(x), \phi_t(y)) = \text{dist}(\phi_{h(t)}(x), \phi_t(y)) < \delta$, temos que existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $|s| < \varepsilon$ e $\phi_s(x) = (y)$. Portanto ϕ é E-expansivo.
Se ϕ é um fluxo C-expansivo e fixando $\varepsilon_0 > 0$, pela definição 2.4 existe uma constante de C-expansividade $\delta_0 > 0$. Se temos que dois pontos x, y são tais que $\text{dist}(\phi_t(x), \phi_t(y)) < \delta_0$, para todo $t \in \mathbb{R}$; então, pela C-expansividade, existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $|s| < \varepsilon$ e $\phi_s(x) = (y)$. Portanto ϕ é E-expansivo.
Se ϕ um fluxo α-expansivo em X, onde $\alpha \in \{d, g, i, j, k\}$, ou qualquer ψ mudança temporal de ϕ é C-expansivo. Pelas proposições 2.5.3 e 2.5.7, ϕ é ou C-expansivo, ou F-expansivo, que pelos casos anteriores, se conclui-se que ϕ é E-expansivo. $\square$

Proposição 2.5.9. *Seja ϕ um fluxo α-expansivo em X, onde $\alpha \in \{D, F, G, H, I, J, K\}$, ou qualquer mudança temporal ψ de ϕ que seja C-expansivo; então qualquer fluxo ψ que é uma mudança temporal em X do fluxo ϕ é B-expansivo.*

Demonstração. Se ϕ é um fluxo H-expansivo, em [4] demonstra-se que um fluxo ϕ H-expansivo é tal que qualquer mudança temporal ψ é B-expansivo.
Se o fluxo ϕ e tal que qualquer mudança temporal ψ é C-expansivo em X. Basta demonstrar que um fluxo C-expansivo é B-expansivo, porque como qualquer mudança temporal ψ de ϕ é C-expansivo, então seria B-expansivo. Assim falta demonstrar que ϕ é B-expansivo, para isso tome um fluxo φ que é C-expansivo em X, para $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, uma constante de C-expansividade. Se temos dois pontos x, y tal que $\text{dist}(\varphi_t(x), \varphi_t(y)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$; então, pela C-expansividade, temos que existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $|s| < \varepsilon$ e $\phi_s(x) = y$, assim que $y \in \varphi_{\mathbb{R}}$. Portanto φ é B-expansivo.
Se ϕ é um fluxo α-expansivo, onde $\alpha \in \{D, F, G, H, I, J, K\}$. Pela proposição 2.5.6 e a proposição 2.5.3 temos que ϕ; ou é tal que qualquer mundança temporal ψ

de ϕ é B-expansiva; ou qualquer mudança temporal ψ de ϕ é C-expansiva. Como vimos anteriormente a conclusão é verdadeira. □

Proposição 2.5.10. *Seja ϕ um fluxo α-expansivo em X, onde $\alpha \in \{B, C, D, E, F, G, H, I, J, K\}$, ou qualquer mudança temporal ψ de ϕ que seja B-expansivo, ou qualquer mudança temporal ψ de ϕ que seja C-expansivo; então ϕ é B-expansivo*

Demonstração. Se ϕ é um fluxo α-expansivo em X, onde $\alpha \in \{B, C, D, E, F, G, H, I, J, K\}$, ou qualquer mudança temporal ψ de ϕ que seja B-expansivo, ou qualquer mudança temporal ψ de ϕ que seja C-expansivo. Pela proposição 2.5.9 temos que ϕ e quaisquer dos fluxos que é uma mudança temporal é B-expansivo, então trivialmente ϕ é B-expansivo. □

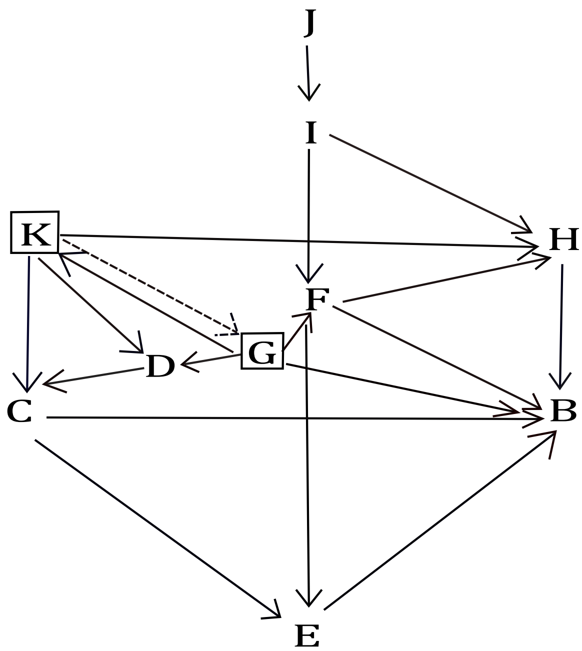


Figura 2.8: Esquema das implicações de fluxos expansivos

Capítulo 3

Sobre fluxos Expansivos em Superfícies

Neste capítulo provaremos que os fluxos sobre superfícies compactas são expansivos se, e somente se, as singularidades são de tipo sela e a união de suas separatrizes é um conjunto denso na superfície. Além disso mostraremos uma caracterização topológica das superfícies compactas que admitem fluxos expansivos.

3.1 Fluxos expansivos

Um fluxo é expansivo se é um fluxo K-expansivo, no que segue na dissertação, Σ é uma superfície compacta e ϕ_t um fluxo expansivo. Iniciaremos estudando os seguintes lemas.

Lema 3.1.1. *Se x é um ponto regular, então para cada $\delta > 0$ existe $s > 0$ tal que $y = \phi_s(x) \neq x$ e $\operatorname{dist}(\phi_t(x), \phi_t(y)) < \delta$, para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. De fato, seja $x \in X$ um ponto regular e $\delta > 0$ definamos a função $T_\delta : X \to \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{dist}(\phi_{T_\delta(x)}(x), x) = \delta$, que é contínua pela continuidade do fluxo, pela compacidade de X, existe $x_0 \in X$ tal que

$$T_\delta(x_0) = \min\{T_\delta(x) |\ x \in X\}$$

assim, assumindo que $s < T_\delta(x_0)$, obtemos que para cada $x \in X$ $\operatorname{dist}(x, \phi_s(x)) < \delta$, para $x = \phi_t(x)$ e $y = \phi_s(x)$ temos

$$\operatorname{dist}(\phi_t(x), \phi_t(y)) < \delta.$$

$\square$

A seguir, definiremos uma nova métrica, que nos auxiliará para melhor compreensão das propriedades de um fluxo expansivo.

Lema 3.1.2. *A função* $\text{dist}_\phi : X \times X \to \mathbb{R}$ *definida como*

$$\text{dist}_\phi(x,y) = \begin{cases} \inf\{\text{diam}(\phi_{[a,b]}(z)) : z \in X,\ [a,b] \subset \mathbb{R},\ x,y \in \phi_{[a,b]}(z)\} & ;\ y \in \phi_{\mathbb{R}}(x) \\ \text{diam}(X) & ;\ y \notin \phi_{\mathbb{R}}(x) \end{cases}$$

é uma métrica em X*, isto é, satisfaz:*

a) $\text{dist}_\phi(x,y) \geqslant 0$ *para todo* $x,y \in X$.

b) $\text{dist}_\phi(x,y) = 0$ *se, e somente se* $x = y$

c) $\text{dist}_\phi(x,y) = \text{dist}_\phi(y,x)$*, para todo* $x,y \in X$

d) $\text{dist}_\phi(x,y) \leqslant \text{dist}_\phi(x,z) + \text{dist}_\phi(z,y)$*, para todo* $x,y,z \in X$

Demonstração. a) De fato, pois $\text{diam}(\phi_{[a,b]}(z)) \geqslant 0$ e $\text{diam}(X) > 0$

b) $\text{dist}_\phi(x,y) = 0$, *Implica* $x = y$
Se $y \notin \phi_{\mathbb{R}}(x)$ então por definição $\text{diam}(X) = 0$ o que implica $x = y$, absurdo pois $y \notin \phi_{\mathbb{R}}(x)$. Logo $y \in \phi_{\mathbb{R}}(x)$
Assim como $0 = \inf\{\text{diam}(\phi_{[a,b]}(z)) :\ z \in X,\ [a,b] \subset \mathbb{R},\ x,y \in \phi_{[a,b]}(z)\}$ e pela definição de ínfimo temos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $z_n \in X$ e $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tais que $x,y \in \phi_{[a,b]}(z)$ e $0 \leqslant \text{diam}(\phi_{[a_n,b_n]}(z_n)) < \frac{1}{n}$; que implica

$$0 \leqslant \text{dist}(x,y) < \frac{1}{n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, no limite temos $\text{dist}(x,y) = 0$, segue que $x = y$.

Agora suponhamos $x = y$, se $z = x$ e $a = b = 0$, então $x,y \in \phi_{[a,b]}(z)$ e $\text{diam}(\phi_{[a,b]}(z)) = 0$, assim $\text{dist}_\phi(x,y) = \inf\{\text{diam}(\phi_{[a,b]}(z)) :\ z \in X,\ [a,b] \subset \mathbb{R},\ x,y \in \phi_{[a,b]}(z)\} = 0$.

c) De fato, naturalmente temos que:
$\text{dist}_\phi(x,y) = \inf\{\text{diam}(\phi_{[a,b]}(z)) :\ z \in X,\ [a,b] \subset \mathbb{R},\ x,y \in \phi_{[a,b]}(z)\} = \text{dist}_\phi(y,x)$

d) Se $z \in X$, $z \notin \phi_{\mathbb{R}}(x)$, $\text{dist}_\phi(x,z) = \text{diam}(X)$. Se $y \notin \phi_{\mathbb{R}}(x)$ então $\text{dist}_\phi(z,y) = \text{diam}(X)$ ou $\inf\{\text{diam}(\phi_{[a,b]}(z)) :\ z \in X,\ [a,b] \subset \mathbb{R}, z,y \in \phi_{[a,b]}(z)\} \geqslant 0$ então $\text{dist}_\phi(x,y) = \text{diam}(X) = \text{dist}_\phi(x,z) \leqslant \text{dist}_\phi(x,z) + \text{dist}_\phi(z,y)$. Se $y \in \phi_{\mathbb{R}}(x)$ então $\text{dist}_\phi(y,z) = \text{diam}(X)$ e $\text{dist}_\phi(x,y) < 2\,\text{diam}(X)$ então $\text{dist}_\phi(x,y) < \text{dist}_\phi(x,z) + \text{dist}_\phi(z,y)$. Além disso, se $z \in \phi_{\mathbb{R}}(x)$ e se $y \notin \phi_{\mathbb{R}}(x)$ então $\text{dist}_\phi(x,y) = \text{diam}(X) = \text{dist}_\phi(z,y)$, como $0 \leqslant \text{dist}(x,z) \leqslant \text{diam}(X)$ logo, $\text{dist}_\phi(x,y) = \text{diam}(X) = \text{dist}_\phi(z,y)$ daí,

$$\text{dist}_\phi(x,y) \leqslant \text{dist}_\phi(x,z) + \text{dist}_\phi(z,y).$$

Agora, se $y \in \phi_{\mathbb{R}}(x)$ e $z,y \in \phi_{\mathbb{R}}(x)$, sem perda de generalidade, podemos supor que existe um número positivo $s > 0$ tal que $y = \phi_s(x)$. Se $z \in \phi_{[0,s]}(x)$ então existe $t \geqslant 0$ tal que $z = \phi_t(x)$, logo para cada $u \in \phi_{[0,t]}(x), v \in \phi_{[t,s]}(x)$ temos $\text{dist}(u,v) \leqslant \text{dist}(u,z) + \text{dist}(z,v) \leqslant \text{diam}(\phi_{[0,t]}(x)) + \text{diam}(\phi_{[t,s]}(x))$; portanto

$\text{dist}_\phi(x,y) \leqslant \text{dist}_\phi(x,z) + \text{dist}_\phi(z,y)$; por último, se $z \notin \phi_{[0,s]}(x)$, então existe um número real $t \in (-\infty, 0] \cup [s, +\infty)$ tal que $z = \phi_t(x)$, e, dessa forma, $\text{dist}_\phi(x,y) \leqslant \text{dist}_\phi(x,z)$ ou $\text{dist}_\phi(x,y) \leqslant \text{dist}_\phi(z,y)$, segue que

$$\text{dist}_\phi(x,y) \leqslant \text{dist}_\phi(x,z) + \text{dist}_\phi(z,y).$$

conclui-sendo, X é um espaço métrico com a métrica dist_ϕ.

□

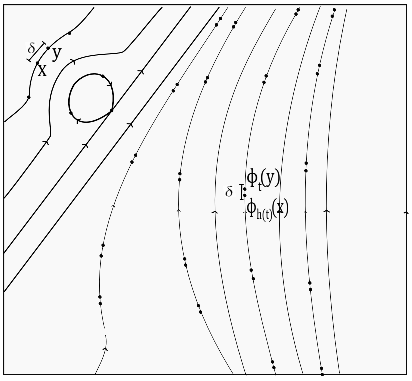


Figura 3.1: Expansividade

Considerando $\beta_0 = \inf\{\text{diam}(\phi_{\mathbb{R}}(x)) : \ x \notin \text{Sing}(\phi)\}$ mostraremos que, com a métrica dist_ϕ em X, dizer que dois pontos estão menos distânciados que uma constante positiva é equivalente a dizer que os pontos estão em um segmento de órbita de diâmetro pequeno.

Lema 3.1.3. *Seja ϕ um fluxo em X, então uma condição suficiente e necessária para que $\text{dist}_\phi(x,y) < \beta_0$ é que x, y estejam contidas em um segmento de órbita de diâmetro menor que β_0*

Demonstração. De fato, suponhamos $\text{dist}_\phi(x,y) < \beta_0$.
Se $y \notin \phi_{\mathbb{R}}(x)$ então por definição $\text{dist}_\phi(x,y) = \text{diam}(X)$, como $\beta_0 \leqslant \text{diam}(X)$ então $\beta_0 \leqslant \text{dist}_\phi(x,y)$, absurdo; logo, $y \in \phi_{\mathbb{R}}(x)$. Pela definição,

$$\text{dist}_\phi(x,y) = \inf\{\text{diam}(\phi_{[a,b]}(z)) : \ z \in X, \ x, y \in \phi_{[a,b]}(z), \ [a,b] \subset \mathbb{R}\}$$

e como $\text{dist}_\phi(x,y) < \beta_0$ temos que existe $z \in X$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ como $x, y \in \phi_{[a,b]}(z)$ tal que $\text{dist}_\phi(x,y) \leqslant \text{diam}(\phi_{[a,b]}(z)) < \beta_0$,
isto é, x e y estão em um segmento de órbita de diâmetro menor que β_0.

Agora, suponhamos que x, y estão em um segmento de órbita de diâmetro menor que β_0, isto é, existem $z \in X$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ tal que $x, y \in \phi_{[a,b]}(z)$ e $\text{diam}(\phi_{[a,b]}(z)) < \beta_0$. Logo, pela definição de dist_ϕ temos que

$$\text{dist}_\phi(x,y) \leqslant \text{diam}(\phi_{[a,b]}(z)) < \beta_0$$
$$\text{dist}_\phi(x,y) < \beta_0.$$

□

Observação 3.1.1. *Seja ϕ um fluxo em um espaço métrico compacto X, se x, y estão em uma órbita que não é periódica nem singular, então*

$$\operatorname{dist}_\phi(x,y) = \operatorname{diam}(\phi_{[0,t]}(z)),$$

onde z é ou x ou y, e $t > 0$.

De fato, se existe $t > 0$ tal que $\phi_t(x) = y$ então para um segmento de órbita qualquer $\phi_{[a,b]}(z)$, que contém x, y, pelas propriedades de supremo e pelo fato de $\phi_{[0,t]}(x) \subset \phi_{[a,b]}(z)$, temos

$$\operatorname{diam}(\phi_{[0,t]}(x) \leqslant \operatorname{diam}(\phi_{[a,b]}(z))). \tag{3.1}$$

Isto é, $\operatorname{diam}(\phi_{[0,t]}(x)$ é um limite inferior do conjunto dos diâmetros dos segmentos de órbita que contém x, y.
Agora provaremos que $\operatorname{diam}(\phi_{[0,t]}(x)$ é o ínfimo. De fato, seja $\varepsilon > 0$, pela continuidade do fluxo, obtemos que

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{diam}(\phi_{[-\frac{\varepsilon}{n}, t+\frac{\varepsilon}{n}]}(x)) = \operatorname{diam}(\phi_{[0,t]}(x),$$

logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n > n_0$

$$|\operatorname{diam}(\phi_{[-\frac{\varepsilon}{n}, t+\frac{\varepsilon}{n}]}(x)) - \operatorname{diam}(\phi_{[0,t]}(x)| < \varepsilon$$

com isto, e pela equação (3.1) temos que

$$\operatorname{diam}(\phi_{[-\frac{\varepsilon}{n}, t+\frac{\varepsilon}{n}]}(x)) < \operatorname{diam}(\phi_{[0,t]}(x) + \varepsilon.$$

O que diz que $\operatorname{diam}(\phi_{[0,t]}(x)$ é o ínfimo.

A seguinte definição é apresentada em [5] e provaremos mais adiante que ela é equivalente à definição adoptada no início deste capítulo.

Definição 3.1. *Dizemos que* ***um fluxo ϕ sobre Σ é L-expansivo*** *se para todo $\beta > 0$ existe uma constante de expansividade $\delta > 0$ tal que se $\operatorname{dist}(\phi_{h(t)}(x), \phi_t(y)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e algum $h \in \mathcal{H}_0^+(\mathbb{R})$, então $\operatorname{dist}_\phi(x,y) < \beta$.*

A seguir provaremos que um fluxo é L-expansivo se, e somente se é K-expansivo. Para isso, provaremos o seguinte.

Lema 3.1.4. *Suponha que ϕ possui um número finito de pontos singulares e $\beta_0 > 0$. Então para todo $\beta \in (0, \beta_0)$ existe $\delta > 0$ tal que se $\operatorname{dist}(\phi_{g(t)}(x), \phi_t(x)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e uma função contínua $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(0) = 0$, então $\operatorname{dist}_\phi(\phi_{g(t)}(x), \phi_t(x)) < \beta$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. De fato, por absurdo, existe $\beta \in (0, \beta_0)$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existem $x_n \in X$ e $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas tais que $g_n(0) = 0$; para cada $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(\phi_{g_n(t)}(x_n), \phi_t(x_n)) < \tfrac{1}{n} \quad & \text{e,} \\ \operatorname{dist}_\phi(\phi_{g_n(t'_n)}(x_n), \phi_{t'_n}(x_n)) \geqslant \beta & \end{aligned} \tag{3.2}$$

para algum $t'_n \in \mathbb{R}$; Como $\mathrm{dist}_\phi(\phi_{g_n(0)}(x_n), \phi_0(x_n)) = 0$ temos $\mathrm{dist}_\phi(\phi_{g_n(t'_n)}(x_n), \phi_{t'_n}(x_n)) \geqslant \beta > \mathrm{dist}_\phi(\phi_{g_n(0)}(x_n), \phi_0(x_n)) = 0$, nisso, pelo teorema do valor intermediário, temos que existe $t_n \in (0, t'_n)$ tal que

$$\mathrm{dist}_\phi(\phi_{g_n(t_n)}(x_n), \phi_{t_n}(x_n)) = \beta$$

sendo $a_n = \phi_{g_n(t_n)}(x_n)$ e $b_n = \phi_{t_n}(x_n)$, pelo resultado (3.2), temos $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{dist}(a_n, b_n) = 0$ assim, podemos supor $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = c$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = c$. Como

$$b_n = \phi_{t_n}(x_n) = \phi_{t_n - g_n(t_n)}(\phi_{g_n(t_n)}(x_n)) = \phi_{t_n - g_n(t_n)}(a_n)$$

tomando $s_n = t_n - g_n(t_n)$.
Se $s_n > 0$ para um número infinito de valores de n, temos (para $s_n < 0$ é similar) $\beta = \mathrm{diam}(\phi_{[0,s_n]}(a_n))$; pois $\phi_{[0,s_n]}(a_n) \subset \phi_{[a,b]}(z)$ para todo $\phi_{[a,b]}(z) \supset \{a_n, b_n\}$.
Se $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitado tomando uma subsequência temos que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = c$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = c$, $c = \phi_s(c)$ então $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{diam}(\phi_{[0,s_n]}a_n) = \beta$ logo $s \neq 0$ pois, caso contrário, $s = 0$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{diam}(\phi_{[0,s_n]}(a_n)) = \beta = \mathrm{diam}(\phi_{[0,s]}(c)) = 0$, absurdo, $\beta \neq 0$. Assim seja $t \in \mathbb{R}$, $m = [\![\frac{t}{s}]\!] \leqslant \frac{t}{s} < m+1$, neste sentido existe $r > 0$, $r \in [0, s)$ tal que $t = ms + r$ então $\phi_t(c) = \phi_{ms+r}(c) = \phi_r(\phi_{ms}(c)) = \phi_r(c) \in \phi_{[0,s]}(c)$. Portanto $\mathrm{diam}(\phi_{\mathbb{R}}(c)) = \mathrm{diam}(\phi_{[0,s]}(c)) = \beta$. Assim $\beta \leqslant \beta_0$ o qual é uma contradição com $\beta_0 < \beta$.
Se s_n não é limitado podemos supor que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$, como $(H(X), \mathrm{dist}_H)$, é um espaço métrico, onde $H(X) = \{A \subset X : A$ é compacto em $X\}$ e dist_H é a métrica de Hausdorff, podemos supor que a sequência $\{\phi_{[0,s_n]}(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um conjunto compacto K; além disso, de $\phi_{s_n}(a_n) = b_n$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = c$, temos que K é invariante. De fato, seja $z = \lim\limits_{n\to+\infty} \phi_{u_n}(a_n) \in K$, com $u_n \in [0, s_n]$; provaremos que para cada $T \in \mathbb{R}$

$$\phi_T(z) \in K.$$

Se $0 \leqslant u_n + T \leqslant s_n$ para um número infinito de valores de n então $\phi_{u_n+T}(a_n) \in \phi[0, s_n](a_n)$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} \phi_{u_n+T}(a_n) = \phi_T(z) \in K$.
Se $s_n < u_n + T$ para valores infinitos de n, como $u_n < s_n$, então $0 < u_n + T - S_n < T$. Nisso, temos que existe uma subsequência convergente $\tau_n = u_n + T - s_n$ com $\lim\limits_{n\to+\infty} \tau_n = \tau$, como $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = c$, pelo que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \phi_{\tau_n}(a_n) = \lim_{n\to+\infty} \phi_{\tau_n}(b_n) &= \lim_{n\to+\infty} \phi_{u_n+T-s_n}(b_n) = \lim_{n\to+\infty} \phi_{u_n+T}(\phi_{-s_n}(b_n)) \\ = \lim_{n\to+\infty} \phi_T(\phi_{u_n}(a_n)) &= \phi_T(z) \end{aligned} \tag{3.3}$$

como $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n > n_0$, $T < s_n$; nesse sentido, sem perda de generalidade, podemos supor $\tau \in [0, s_n]$, logo, a equação3.3 fica

$$\lim_{n\to+\infty} \phi_{\tau_n}(a_n) = \phi_T(z) \in K.$$

Se $u_n + T < 0$ para infinitos valores de n, então $0 \leqslant u_n < -T$, pois $0 \leqslant u_n$, nisso temos, tomando uma subsequência convergente sem perda de generalidade temos que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$. Por outro lado, temos que

$$z = \lim_{n\to+\infty} \phi_{u_n}(a_n) = \lim_{n\to+\infty} \phi_{u_n}(b_n) = \phi_u(c). \tag{3.4}$$

como $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$, temos que $0 \leqslant u_n + T + s_n < s_n$ para valores de n suficientemente grandes; fazendo $\tau_n = u_n + T + s_n$ e a equação 3.4 obtemos que

$$\lim_{n\to+\infty} \phi_{\tau_n}(a_n) = \lim \phi_T(\phi_{u_n}(\phi_{s_n}(a_n))) = \lim \phi_T(\phi_{u_n}(b_n)) = \phi_T(\phi_u(c)) = \phi_T(z) \in K.$$

Como $\mathrm{diam}(K) = \beta$ e K é conexo, logo K é um conjunto infinito. Pela hipótese o fluxo apresenta um número finito de singularidades, então existe um ponto regular tal que sua órbita tem diâmetro menor que β, contradizendo que β_0 é o ínfimo dos diâmetros das órbitas, conclui-sendo a veracidade do lema. $\square$

Teorema 3.1. *Os seguinte enunciados são equivalentes:*

a) ϕ é L-expansivo

b) ϕ é K-expansivo

Demonstração. ***(a) implica (b)***
Seja $\delta' > 0$ uma constante de L-expansividade, para algum número positivo.
Afirmação 1: *Existe $\gamma \in (0, \delta')$ tal que para cada $x \notin \mathrm{Sing}(\phi)$ existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_t(x) \notin B_\gamma(\mathrm{Sing}(\phi))$.*
Por absurdo, isto é, para cada $\gamma \in (0, \delta')$ existe $x \notin \mathrm{Sing}(\phi)$ tal que $\phi_t(x) \in B_\gamma(\mathrm{Sing}(\phi))$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Como $\mathrm{Sing}(\phi)$ é um conjunto finito, temos que $B_\gamma(\mathrm{Sing}(\phi)) = B_\gamma(p_1) \cup \ldots \cup B_\gamma(p_N)$, como $x \notin \mathrm{Sing}(\phi)$, é equivalente a, para cada $i \in \{1, \ldots, N\}$,

$$\mathrm{dist}(x, p_i) \geqslant \gamma \tag{3.5}$$

como $\phi_t(x) \in B_\gamma(\mathrm{Sing}(\phi))$ para cada $t \in \mathbb{R}$, temos que existe $k \in \{1, \ldots, N\}$ tal que $\mathrm{dist}(\phi_t(x), p_k) < \gamma$, para todo $t \in \mathbb{R}$, em particular para $t = 0$ temos $\mathrm{dist}(x, p_k) < \gamma$ o que contradiz a desigualdade 3.5.
Seja $\varepsilon > 0$ fixado;

Afirmação 2: *Existe $\beta > 0$ tal que $\mathrm{dist}(x, \mathrm{Sing}(\phi)) \geqslant \gamma$ e $\mathrm{diam}(\phi_{[0,s]}(x)) < \beta$ implica $|s| < \varepsilon$.*
Pelo absurdo, isto é, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X,\ t_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$x_n \notin B_\gamma(\mathrm{Sing}(\phi)),\ t_n \notin (-\varepsilon, \varepsilon), \mathrm{diam}(\phi_{[0,t_n]}(x_n)) < \frac{1}{n} \tag{3.6}$$

Pela compacidade de X podemos supor que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = z$ onde $z \notin B_\gamma(\mathrm{Sing}(\phi))$, pois $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{dist}(x_n, \mathrm{Sing}(\phi)) = \mathrm{dist}(z, \mathrm{Sing}(\phi)) \geqslant \gamma$, assim, temos que z não é uma singularidade. Como z não é uma singularidade, existe $\varepsilon' \in (0, \varepsilon) : \phi_{\varepsilon'}(z) \neq z$, caso contrário, $\phi_{\varepsilon'}(z) = z$, para todo $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$ e como $\phi_{\{\}}(z) : \mathbb{R} \to X$ é contínua temos que $\lim\limits_{\varepsilon'\to\varepsilon} \phi_{\varepsilon'}(z) = z = \phi_\varepsilon(z)$, absurdo pois $z \notin \mathrm{Sing}(\phi)$. Agora pela continuidade de ϕ temos $\lim_{n\to+\infty} \phi_{\varepsilon'}(x_n) = \phi_{\varepsilon'}(z)$, e pela equação (3.6) temos que $\lim_{n\to+\infty} \operatorname{diam}(\phi_{[0,t_n]}(x_n)) = 0$ e como a sequência $t_n \notin (-\varepsilon, \varepsilon)$ temos $\phi_{\varepsilon'}(x_n) \in \phi_{[0,t_n]}(x_n)$ o que implica $0 = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{diam}(\phi_{[0,\varepsilon']}(x_n)) = \operatorname{diam}(\phi_{[0,\varepsilon']}(z))$ logo $z \in K$ onde $K = \phi_{[0,\varepsilon']}(z)$ tem diâmetro zero logo $z \in \operatorname{Sing}(\phi)$, absurdo pois $z \notin \operatorname{Sing}(\phi)$;

pela Afirmação 2 obtemos $\beta > 0$. Assim por hipótese existe uma constante de expansividade $\delta > 0$, isto pelo item (a), tal que $\operatorname{dist}(\phi_{h(t)}(y), \phi_t(x)) < \delta$ e algum homeomorfismo crescente $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que fixe zero, então x, y estão em um segmento de diâmetro menor que $\beta > 0$;

Afirmação 3: *Seja ε fixado anteriormente, tal que $\operatorname{dist}(\phi_{h(t)}(y), \phi_t(x)) < \delta$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e algum homeomorfismo crescente $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que fixe zero; então existe $s, t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $|s| < \varepsilon$ e $\phi_{h(t_0)}(y) = \phi_{t_0+s}(x)$.*
De fato; primeiro observemos que não podem existir dois pontos singulares a distância menor que δ, caso contrário todas seriam iguais; assim um dos pontos é não singular. Suponhamos $x \notin \operatorname{Sing}(\phi)$. Pela expansividade do fluxo temos que, x está em um segmento de órbita de diâmetro menor que β. Então pela Afirmação 1 existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_{t_0}(x) \notin B_\gamma(\operatorname{Sing}(\phi))$. Definamos a função $h' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $h'(t) = h(t + t_0) - h(t_0)$, observemos que h' é um homeomorfismo crescente que fixa zero, pois h é; assim como $\operatorname{dist}(\phi_{h(t)}(y), \phi_t(x)) < \delta$, para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que se cumpre:

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}\left(\phi_{h'(t)}(\phi_{h(t_0)}(y)), \phi_t(\phi_{t_0}(x))\right) &= \operatorname{dist}\left(\phi_{h(t+t_0)-h(t_0)}(\phi_{h(t_0)}(y)), \phi_t(\phi_{t_0}(x))\right) \\ &= \operatorname{dist}\left(\phi_{h(t+t_0)}(y), \phi_{t+t_0}(x)\right) < \delta \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Concluimos por hipótese temos que $\phi_{h(t_0)}(y)$ e $\phi_{t_0}(x)$ estão em um segmento de órbita menor que β (β-conectados) dessa forma, existe $s' \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{diam}(\phi_{[0,s']}(\phi_{t_0}(x))) < \beta$ e $\phi_{h(t_0)}(y) \in \phi_{[0,s']}(\phi_{t_0}(x))$; assim pela afirmação 2, implica-se $|s'| < \varepsilon$. Logo conclui-se que $\phi_{h(t_0)}(y) = \phi_{t_0+s}(x)$ para $|s| < \varepsilon$;

(b) implica (a)

De fato, observemos que se existe um valor de β tal que satisfaz (a) então fica provada para todo valor maior de β, pois podemos usar o mesmo δ. Assim é válido supor $\beta \in (0, \beta_0)$. Logo, pelo lema 3.1.4 temos que para $\beta' \in (0, \beta)$ obtemos $\delta' > 0$ tal que se os pontos sempre estão δ'-próximos por uma função contínua g que fixe zero, então os pontos da forma $\phi_{g(t)}x$, $\phi_t x$ estão β' conectados.

Seja $\delta'' \in (0, \delta')$. Pela continuidade do fluxo temos a seguinte afirmação

Afirmação 4: *existe $\varepsilon > 0$ tal que se $\operatorname{diam}(\phi_{[a,b]}(x)) < \beta'$, então $\operatorname{diam}(\phi_{[a-\varepsilon,b+\varepsilon]}(x)) < \beta$.*

Seja $x \in X$ temos $\mathrm{diam}(\mathcal{O}(x)) < \beta'$ ou $\mathrm{diam}(\mathcal{O}(x)) \geqslant \beta'$. Se $\mathrm{diam}(\mathcal{O}(x)) < \beta'$ temos para todo $\varepsilon > 0$ $\mathrm{diam}(\phi_{[a,b]}(x)) < \beta'$ implica, $\mathrm{diam}(\phi_{[a-\varepsilon,b+\varepsilon]}(x)) < \beta$. Se $\mathrm{diam}(\mathcal{O}(x)) \geqslant \beta'$ existe $A, B \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{diam}(\phi_{[A,B]}(x)) = \beta'$ e $[A, B]$ é o intervalo maximal que satisfaz a igualdade anterior; seja $[a, b] \subset [A, B]$, definamos $\psi(t) = \mathrm{diam}(\phi_{[A-t,B+t]}(x))$ para todo $t \geqslant 0$, de maneira natural $\psi(t) \geqslant \beta'$ como $\beta > \beta'$ pela continuidade de ψ temos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\psi(\varepsilon) < \beta$ isto é $\mathrm{diam}(\phi_{[a-\varepsilon,b+\varepsilon]}(x)) < \beta$ pois $[a - \varepsilon, b + \varepsilon] \subset [A - \varepsilon, B + \varepsilon]$.
Pela continuidade de ϕ temos que, se $\mathrm{dist}(x, y) < \delta''$ existe $\varepsilon' > 0$ tal que para cada $|s| < \varepsilon'$: $\mathrm{dist}(\phi_s(x), (y)) < \delta'' < \delta'$. Nisto, assumindo ε e δ'' muito pequeno, podemos supor que

$$\text{se } \mathrm{dist}(x, y) < \delta'', \text{ então } \mathrm{dist}(\phi_s(x), (y)) < \delta', \tag{3.7}$$

para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$; por hipótese para ε existe uma constante de expansividade $\delta''' > 0$.

Afirmação 5: *$\delta < \min\{\delta', \delta'', \delta'''\}$ é uma constante de expansividade, para β dado anteriormente.*
De fato, suponhamos que para cada $t \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{dist}(\phi_{h(t)}(x), \phi_t(y)) < \delta, \tag{3.8}$$

onde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um homeomorfismo crescente que fixe zero. Assim, pela K-expansividade temos que existem s, $t_0 \in \mathbb{R}$ tais que $\phi_{h(t_0)}(x) = \phi_{t_0+s}(y)$ e $|s| < \varepsilon$, tomando $z = \phi_{h(t_0)}(x)$ e a função contínua $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $g(t) = h(t_0 + t) - h(t_0)$. Pela equação (3.8) temos $\mathrm{dist}(\phi_{g(t)}(z), \phi_{t-s}(z)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$, pois

$$\phi_{g(t)}(z) = \phi_{h(t_0+t)-h(t_0)}(\phi_{h(t_0)}(x)) = \phi_{h(t_0+t)}(x)$$
$$\phi_{t-s}(z) = \phi_{t-s}(\phi_{h(t_0)}(x)) = \phi_{t+t_0}(\phi_{h(t_0)-s-t_0}(x)) = \phi_{t+t_0}(y)$$

De $|s| < \varepsilon$, $\delta < \delta''$ e pela equação (3.7) temos $\mathrm{dist}(\phi_{g(t)}(z), \phi_t(z)) < \delta'$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, pelo lema 3.1.4 temos que $\phi_{g(-t_0)}(z)$ e $\phi_{-t_0}(z)$ estão β'-conectados, isto é $x = \phi_{g(-t_0)}(z)$, $\phi_s(y) = \phi_{-t_0}(z)$ estão β'-conectados. Logo, pela afirmação 4 temos que x, y são β-conectados, pois $|s| < \varepsilon$ e portanto $\mathrm{dist}_\phi(x, y) < \beta$, conclui-sendo esta parte. □

O seguinte resultado foi usado para demonstrar que o item (b) implica; item (a) no Teorema 3.1.

Lema 3.1.5. *se ϕ tem um número finito de singularidades e $\beta_0 > 0$ então para todo $\beta > 0$ existem $\varepsilon, \delta > 0$ tal que se*

$$\mathrm{dist}(\phi_{h(t)}(x), \phi_t(y)) < \delta$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ *com* $x, y \in X$*;* $h \in \mathcal{H}_0^+(\mathbb{R})$ *;* $\phi_{h(t_0)}(x) = \phi_{t_0+s}(y)$ *para algum* $t_0 \in \mathbb{R}$ *e* $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$*; então* $\operatorname{dist}_\phi(x, y) < \beta$*.*

O Teorema 3.1 confirma que a escolha da K-expansividade como definição para este trabalho é a mais adequada.

3.2 Propriedades dos fluxos expansivos

Nesta seção, provaremos que os fluxos expansivos, em superfícies compactas Σ, não apresentam pontos errantes (proposição 3.2.1); que todas suas singularidades são de tipo sela (proposição 3.2.3); que não apresentam pontos periódicos (proposição 3.2.4) e que são todos fluxos de Cherry. Assim ele será conjugado a um fluxo C^∞ (proposição 3.2.6).

O seguinte lema pode ser encontrado em [11].

Lema 3.2.1. *Se o fluxo* ϕ *apresenta um número finito de singularidades, então* $\Sigma \setminus \operatorname{Sing}(\phi) = \cup_{i=1}^{+\infty} U_i$ *onde:*

a) Qualquer U_i *é uma caixa de fluxo.*

b) Cada conjunto compacto de $\Sigma \setminus \operatorname{Sing}(\phi)$ *está contido em um número finito de caixas de fluxo de* U_i

c) Se $i \neq j$ *então* $U_i \cap U_j \subset \partial U_i \cap \partial U_j$

Demonstração. Proposição 4.3 de [11]. □

Lema 3.2.2. *Sejam* $l = [a, b]$ *e* l' *duas secções localmente compactas e* $\tau : [a, b) \to \mathbb{R}$ *uma função contínua tal que* $\phi_{\tau(x)}(x) \in l'$ *para todo* $x \in [a, b)$ *e* $\lim_{x \to b} \tau(x) = +\infty$*, então* $\omega(b) \subset \operatorname{Sing}(\phi)$*.*

Demonstração. Por absurdo; seja $[a, b] = l$, l' duas secções transversais locais compactas com $\tau : [a, b) \to \mathbb{R}$ função contínua tal que $\phi_{\tau(x)}(x) \in l'$ para cada $x \in [a, b)$, $\lim_{x \to b} \tau(x) = +\infty$ e $\omega(b) \nsubseteq \operatorname{Sing}(\phi)$ isto é, existe $y \in \omega(b)$ *e* $y \notin \operatorname{Sing}(\phi)$. Podemos supor que $y \notin l \cup l'$, pois, se $y \in l'$, então existe um tempo finito $\tau > 0$ tal que $\phi_\tau(b) \in l'$, o que é uma contradição com $\lim_{x \to b} \tau(x) = +\infty$. Se $y \in l = [a, b]$, então, como $y \in \omega(b)$, existe $t > 0$ tal que $\phi_t(b) \in l$; se $\phi_t(b) = b$ tem órbita periódica, o que contradiz, com $\lim_{x \to b} \tau(x) = +\infty$; se $\phi_t(b) \neq b$, então $\phi_{t+\tau(b)} \in l'$, o que contradiz, com $\lim_{x \to b} \tau(x) = +\infty$. Como $y \in \omega(b)$ é um ponto regular, consideremos uma secção transversal j tal que $y \in j$. Como l *e* l' são compactas podemos supor que $j \cap l = j \cap l' = \varnothing$. Para cada $x \in [a, b)$ consideremos o conjunto $T_x = \{t \in [0, \tau(x)] : \ \phi_t(x) \in j\}$ e definamos $N(x) \in \mathbb{Z}$ como o número de pontos de T_x, isto, pois se T_x é infinito, então tem um subconjunto infinito numerável:

$$A = \{t_1 < t_2 < \cdots\} \subset T_x,$$

logo, $t_i < \tau(x)$, para todo $i \in \mathbb{N}$, no limite obtemos que $\lim_{n\to+\infty} t_i \leqslant \tau(x)$, absurdo pois por hipótese $\tau(x)$ é um número real, por tanto T_x é finito e $N(x) \in \mathbb{Z}$ é limitado.

Por outro lado, existem infinitos valores de $t > 0$ tal que $\phi_t(b) \in j$, pois $y \in \omega(b)$; e como τ não é limitado, existe uma sequência de pontos $x_n \in [a, b)$ convergindo para b tal que $\lim_{n\to+\infty} \tau(x_n) = +\infty$, então, pela continuidade de N, temos que $\lim_{n\to+\infty} N(x_n) = +\infty$, o que é absurdo, pois N é limitado. Portanto $\omega(b) \subset \operatorname{Sing}(\phi)$. □

Definição 3.2. *Dizemos que* ***um ponto*** $\boldsymbol{x \in \Sigma}$ ***é estável (instavél)*** *se para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que, se* $y \in B_\delta(x)$, *então* $\operatorname{dist}(\phi_t(y), \phi_t(x)) < \varepsilon$, *para todo* $t > 0$ *(respectivamente* $t < 0$*).*

Definição 3.3. ***Um ponto*** $\boldsymbol{x \in \Sigma}$ ***é assimptoticamente estável (assimptoticamente instável)*** *se é estável (instável) e existe* $r > 0$ *tal que, se* $y \in B_r(x)$, *então*

$$\lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(\phi_t(y), \phi_t(x)) = 0$$

($\lim_{t\to-\infty} \operatorname{dist}(\phi_t(y), \phi_t(x)) = 0$*).*

Lema 3.2.3. *Se uma singularidade do fluxo* ϕ *apresenta um número infinito de separatrizes estáveis ou instáveis,* $\phi_{\mathbb{R}}(x)$, *então pelo menos um deses* $x \in \Sigma$ *é assimptóticamente estável ou instável.*

Demonstração. Seja $p \in \operatorname{Sing}(\phi)$ e $\{\phi_{\mathbb{R}}(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ infinitas separatrizes estáveis associadas a p (a prova é similar para o caso de infinitas separatrizes instáveis), tome um disco D_p centrado em p de raio conveniente. Seja para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in \phi_{\mathbb{R}}(x_n) \cap \partial D_p$, tal que $\phi_{\mathbb{R}^+}(y_n) \subset D_p$. Pela compacidade de ∂D_p existe uma subsequência tal que $\lim_{n\to+\infty} y_n = y_0$.

Afirmação: *Existe um intervalo* $I \subset D_p$ *em um sector parabólico.*

Provaremos pelo absurdo; suponhamos que não existe tal intervalo em D_p, então existem infinitos setores elípticos ou parabólicos, que contradiz o lema 8.2 em [12].

Pela afirmação tomando uma vizinhança conveniente U de y_0 conseguimos que $\lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}(\phi_t(y_0), \phi_t(z)) = 0$, para todo $z \in U$. Portanto y_0 é assimptóticamente estável.

□

Proposição 3.2.1. *Se* ϕ *é expansivo sobre* Σ, *então não existe pontos errantes na superfície* Σ, *isto é,* $\Omega(\phi) = \Sigma$.

Demonstração. Por absurdo. Seja $q \in \Sigma \backslash \Omega(\phi)$. Assim como q é regular existe uma secção transversal l em q, tal que para cada $t \in \mathbb{R}$

$$\phi_t(l) \cap l = \varnothing$$

Mostraremos que existe um segmento $l' \subset l$ que contradiz a expansividade. Temos dois casos:

Caso 1: *suponhamos que existem infinitos pontos de l que estão em separatrizes estáveis.*
Como $\text{Sing}(\phi)$ é finito, então existe uma singularidade $p \in \text{Sing}(\phi)$ que é ômega limite de infinitas separatrizes passando por l. Pelo lema 3.2.3, uma daquelas separatrizes tem um ponto $x \in l$ assimptóticamente estável a p. Para um $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, constante de expansividade de ϕ. Assim, por definição de assimpoticamente estável para $\frac{\delta}{2} > 0$ existe $\mu > 0$ tal que se $y \in B_\mu(x)$ então, $\text{dist}(\phi_t(y), \phi_t(x)) < \frac{\delta}{2}$ para todo $t > 0$. Tomando um sub segmento l' tal que $l' \subset l \cap B_\mu(x)$, temos que se $y, z \in l'$ então,

$$\text{dist}(\phi_t(y), \phi_t(z)) \leqslant \text{dist}(\phi_t(y), \phi_t(x)) + \text{dist}(\phi_t(x), \phi_t(z)) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

para todo $t > 0$.

Se existem infinitos pontos de l' em separatrizes instáveis podemos encontrar, pelo lema 3.2.3, $l'' \subset l'$ tal que $\text{dist}(\phi_t(y), \phi_t(z)) < \delta$ para todo $t < 0$; assim, se $x, y \in l''$ temos $\text{dist}(\phi_t(y), \phi_t(z)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o que contradiz a expansividade do fluxo.

Se existem finitos pontos de l' em separatrizes instáveis podemos encontrar, similar ao caso 2, $l'' \subset l'$ tal que $\text{dist}(\phi_t(y), \phi_t(z)) < \delta$ para todo $t < 0$; assim, se $x, y \in l''$ temos $\text{dist}(\phi_t(y), \phi_t(z)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o que contradiz a expansividade do fluxo.

Caso 2: *Suponhamos que existe um número finito de pontos $\{x_i\}_{i=0}^{M} \subset l$ da secção transversal l que estão em separatrizes estáveis.*
Se descartamos os pontos onde temos órbitas que são separatrizes temos um número finito de segmentos na secção transversal como sendo intervalos abertos $(x_i, x_{i+1}) \subset l$ com $i = 0, \ldots, M-1$, tais que se $i \in \{0, \ldots, M-1\}$ para cada $x \in (x_i, x_{i+1}) \subset l$, $\omega(x)$ não é um ponto singular.

Condição 1: *Chamaremos assim o fato de encontrar l' com para cada $x \in l'$, $\omega(x)$ não tem ponto singular.*
Um segmento que satisfaz a Condição 1 é $l' \subset (x_i, x_{i+1})$ para algum $i \in \{0, \ldots, M-1\}$. Seja p um ponto singular e $D_p = \{y \in \Sigma; \text{dist}(y, p) < r\}$ tal que $2r < \frac{\delta}{2}$. Pelo lema 3.2.1, temos que a superfície sem pontos singulares $\Sigma \backslash \text{Sing}(\phi)$ tem uma cobertura aberta de caixas de fluxos $\{\overline{U}_i \ : \ i \in \mathbb{N}\}$. Dividindo as caixas convenientemente, conseguimos outra cobertura aberta de caixas de fluxo $\{U_i \ : \ i \in \mathbb{N}\}$ com $\text{diam}(U_i) < \frac{\delta}{2}$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Uma cobertura aberta da superfície Σ, é $\{D_p\}_{p \in \text{Sing}(\phi)} \cup \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ e pela compacidade da superfície Σ, existe uma sub cobertura finita da forma

$$\Sigma \subset \{D_p\}_{p \in \text{Sing}(\phi)} \cup \{U_1, U_2, \ldots, U_N\} \tag{3.9}$$

Condição 2:*chamaremos assim o fato de encontrar l' tal que a órbita do segmento de órbita na fronteira das caixas do fluxo, $\{\partial U_i : \ i = 1, \ldots, N\}$, não intersecta l'.*
Isto é possível tomando o segmento l', menor em l. Com a_i e b_i as secções transversais na fronteira de U_i para algum $i \in \mathbb{N}$, onde o fluxo entra e sai da caixa respectivamente. Além disso, podemos supor que l' não intersecta a a_i para cada $i \in \mathbb{N}$. Sejam $x, y \in l'$ e definamos $A = \bigcup_{i=1}^{N} a_i$.
Devido a que o segmento l' satisfez a condição 1 e pelo teorema de Poincaré-Bendixson's, $\omega(x)$ é periódico ou $\omega(x) = \Sigma$ ou $\omega(x)$ é um gráfico. Logo, existem números reais positivos para cada n, $t_n, s_n \subset \mathbb{R}^+$, divergentes, tais que $\{t_n : \ n \in \mathbb{N}\} = \{t \in \mathbb{R}^+ : \ \phi_t(x) \in A\}$ e $\{s_n : \ n \in \mathbb{N}\} = \{t \in \mathbb{R}^+ : \ \phi_t(y) \in A\}$. Seja $I, J : \mathbb{N} \to \{1, \ldots, N\}$ funções definidas por $\phi_{t_n}(x) \in a_{I(n)}$ e $\phi_{t_n}(y) \in a_{J(n)}$ isto é por (3.9), pois temos uma cobertura finita .

Mostraremos que $I = J$, por indução; suponhamos que $I(1) \neq J(1)$ e seja o segmento $l'' = [x, y] \subset l'$ e

$$X = \{z \in l'' : \text{ existe } t > 0, \ \phi_{[0,t]}(z) \cap a_{J(1)} = \varnothing \text{ e } \phi_t(z) \in a_{I(1)}\}$$

Provaremos que $y \in X$. $x \in X$, pois caso contrário, $\phi_{[0,t]}(x) \cap a_{J(1)} \neq \varnothing$ para todo $t > 0$, que é absurdo. *X é um conjunto aberto em l''*, isto, pois para cada ponto $z \in X$, como l' satisfez a condição 2 e pela continuidade de ϕ existe uma vizinhança V do ponto $z \in X$ tal que para cada ponto z' da vizinhança V satisfez $\phi_{[0,t]}(z) \cap a_{J(1)} = \varnothing$ e $\phi_t(z) \in a_{I(1)}$, para algum $t > 0$, isto é, z é um ponto interior de X. Seja Y a componente conexa de X que contem a x. Então Y é um intervalo. Seja u um ponto extremo de Y distinto de x,$u \neq x$. $u \in Y$ e portanto $u = y$,

Prova de $u \in Y$:
De fato, pela definição de X podemos construir uma função de valor real $T : [x, u) \to \mathbb{R}^+$ tal que $\phi_{T(z)}(z) \in a_{I(1)}$ e $\phi_{[0,T(z)]}(z) \cap a_{J(1)} = \varnothing$.
Afirmação: *A função $T(z)$ não diverge para $+\infty$ quando z tende a u.* Pois, caso contrário, pelo lema 3.2.2 o conjunto ômega limite de u é singular, $\omega(u) \subset \mathrm{Sing}(\phi)$ o que contradiz o fato de l' satisfazer a condição 1. Logo, pela afirmação anterior

$$\lim_{z \to u} T(z) \neq +\infty$$

daí existe uma sequência em $[x, u)$, $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [x, u)$ tal que converge para u e pela continuidade da função de valor real T, a sequência $\{T(z_n)\}$ converge para $T(u)$. Então $\{\phi_{T(z_n)}\}$ converge para $\phi_{T(u)}(u)$.
Por outro lado, o segmento de órbita $\phi_{[0,T(u)]}(u)$ não pode cortar a $a_{J(1)}$, pois caso contrário, pela continuidade da função T e para números naturais n suficientemente grandes, os segmentos de órbitas $\phi_{[0,T(z_n)]}(z_n)$ cortariam $a_{J(1)}$ $(\phi_{[0,T(z_n)]} \cap a_{J(1)} = \varnothing)$, o que contradiz o fato de l' satisfazer a condição 2. Em suma

$$\phi_{[0,T(u)]}(u) \cap a_{J(1)} = \varnothing \ \text{ e } \ \phi_{T(u)}(u) \in a_{I(1)}$$

Logo, $u \in Y$. Com isso $y \in X$, logo $Y = X$ e como X é aberto e Y é conexo temos

que $l'' = Y = X$, pelo que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\phi_{s_n}(y) \in a_{I(1)}$ e $\phi_{[o,s_n]}(y) \cap a_{J(1)} = \emptyset$ assim $J(n) = I(1)$ e $n < 1$, absurdo. Portanto $I(1) = J(1)$.
Agora suponhamos $I(k) = J(k)$ para todo índice $k \in \{1, \ldots, K\}$. Definimos $l_K = [\phi_{t_K}(x), \phi_{s_K}(y)] \subset a_{I(K)}$, então l_K também verifica as condições (1) e (2). Logo, fazendo os mesmos razoamentos da parte onde se demonstrou $I(1) = J(1)$, então se conclui-se que $I(K+1) = J(K+1)$.
Seja $h : \mathbb{R}\backslash\mathbb{R}^- \to \mathbb{R}\backslash\mathbb{R}^-$ tal que $h(0) = 0$, $h(t_n) = s_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ é linear nos intervalos da forma (t_i, t_{i+1}). Assim conseguimos um homeomorfismo h.
Afirmação: $\operatorname{dist}(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(y)) < \delta$ *para todo* $t \geqslant 0$.
Basta provar que em qualquer caixa do fluxo ou perto da uma singularidade $\operatorname{dist}(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(y)) < \delta$, para todo $t \geqslant 0$.
De fato, seja $n \in \mathbb{N}$. Tome

$$t^* = \sup\{t \geqslant t_n : \ \phi_{[t_n,t]}(x) \subset U_i \text{ para algum } i \in \{1, \ldots, N\}\}$$

Observaçâo: *se* $\partial U_{I(n)} \cap \partial U_{I(n+1)} \neq \emptyset$ *então* $t^* \geqslant t_{n+1}$.
Fazendo $i_0 = I(n)$, temos que $\phi_{t^*}(x) \in b_{i_0}$, pois $\phi_{t_n}(x) \in a_{i_0}$ e no correr do tempo $\phi_{t^*}(x) \in b_{i_0}$.
Vamos partimos em dois casos para demonstrar nossa afirmação: $t^* \geqslant t_{n+1}$, e $t^* < t_{n+1}$

Para $t^* \geqslant t_{n+1}$ observamos: $\phi_{[t_n,t_{n+1}]}(x)$ e $\phi_{[s_n,s_{n+1}]}(y)$ estão contidos em U_{i_0} (ver figura 3.2(a)). Lembremos que $I = J$; isto diz que as órbitas de x e y cortam uma mesma secção transversal $a_{I(n)}$ para um tempo t_n e s_n respectivamente: assim como $\phi_{t^*}(x) \in b_{i_0}$ temos que os segmentos de órbitas estão contidos em U_{i_0} Da observação e $\operatorname{diam}(U_{i_0}) < \frac{\delta}{2}$, temos que

$$\operatorname{dist}(\phi_t(x), \phi_t(y)) < \delta \text{ para todo } t \in [t_n, t_{n+1}].$$

Para $t^* < t_{n+1}$, pela observação, temos que $\partial U_{I(n)} \cap \partial U_{I(n+1)} = \emptyset$ o que nos diz que existe um conjunto da superfície Σ que não está sendo coberto, pois l' é um segmento de pontos errantes, o que assegura que l' não recorrera ao mesmo lugar para qualquer tempo. Assim como temos uma cobertura para nossa superfície, isto, pelo resultado (3.9), então existiria um disco D_p centrado em algum ponto singular $p \in \operatorname{Sing}(\phi)$ tal que cobriria os pontos que faltavam cobrir. O que nos assegura que o ponto da órbita de x transcorrido $t^* > 0$, que esta em b_{i_0}, pertence a um disco D_p para algum $p \in \operatorname{Sing}(\phi)$ (ver figura 3.2(b)).

$$x_* = \phi_{t^*}(x) \in D_p$$

Assim, como $\phi_{s_n}(y) \in a_{i_0}$ temos que existirá $s^* \geqslant s_n$ tal que $y^* = \phi_{s^*}(y) \in b_{i_0}$ e tal que $\phi_{[s_n,s^*)}(y)$ esteja contido em U_{i_0}. Como os subsegmentos $[x^*, y^*]$ de b_{i_0} estão contidos em D_p temos que os segmentos de órbita de x e y que não são cobertos por caixas de fluxo, são cobertos por D_p, isto é

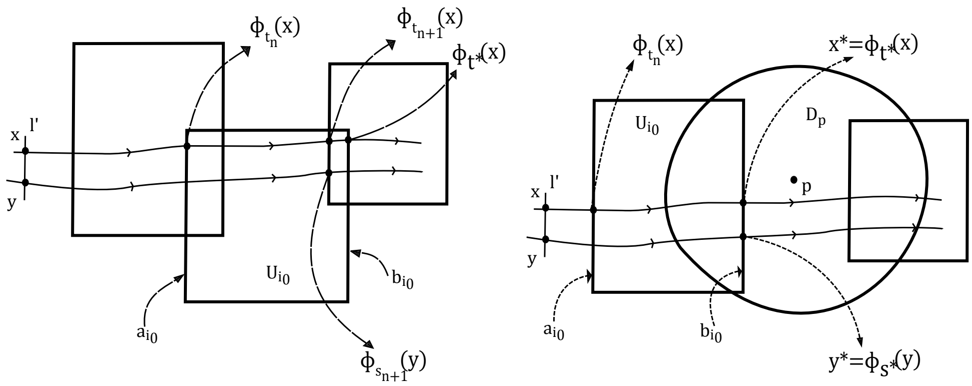
$$\phi_{[t^*,t_{n+1}]}(x) \subset D_p \text{ e } \phi[s^*, s_{n+1}](y) \subset D_p$$

Logo

$$\text{dist}(\phi_t(x), \phi_t(y)) < \delta \text{ para todo } t \in [t_n, t_{n+1}].$$

Se existem finitos pontos de l' em separatrizes instáveis podemos encontrar, como a construção anterior, $l''' \subset l'$ tal que $\text{dist}(\phi_t(y), \phi_t(z)) < \delta$ para todo $t < 0$; assim, se $x, y \in l'''$ temos $\text{dist}(\phi_t(y), \phi_t(z)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o que contradiz a expansividade do fluxo.

Se existem infinitos pontos de l' em separatrizes instáveis podemos encontrar, Pelo lema 3.2.3, $l'' \subset l'$ tal que $\text{dist}(\phi_t(y), \phi_t(z)) < \delta$ para todo $t < 0$; assim, se $x, y \in l''$ temos $\text{dist}(\phi_t(y), \phi_t(z)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o que contradiz a expansividade do fluxo. □



(a) $t^* \geqslant t_{n+1}$ (b) $t^* < t_{n+1}$

Figura 3.2: casos para t^*

Proposição 3.2.2. *Os fluxos expansivos em superfícies não tem pontos singulares estáveis.*

Demonstração. Pelo absurdo. Suponhamos que existem um ponto singular estável, $p \in \text{Sing}(\phi)$, afirmamos que:
Afirmação: *p é assimptóticamente estável*
Pelo absurdo. Suponhamos que $p \in \text{Sing}(\phi)$ não é assimptóticamente estável. Dado $\varepsilon > 0$ existe uma constante de expansividade $\delta > 0$, e para esta, por definição de ponto estável existe $\mu > 0$ tal que qualquer $y \in B_\mu(p)$; $\phi_{\mathbb{R}}(y) \subset B_\delta(p)$. E como p não é assimpóticamente estável temos que em qualquer vizinhança de p nem todos seus pontos tem como ômega limite a p, pelo que existe $x \in B_\mu(p)$ tal que $\omega(x) \neq \{p\}$. Provaremos que $\omega(x) \subset \text{clos}(B_\delta(p))$, supondo que não está contido, temos que existe $t' > 0$ tal que $\phi_{t'}(x) \notin clos(B_\delta(p))$ o que contradiz o fato de que todo $y \in B_\mu(p)$, $\phi_{\mathbb{R}^+}(y) \subset B_\delta(p)$.
Tomando $q \in \omega(x)$ temos que $q \neq p$, por hipótese $\omega(x) \neq \{p\}$.Assim

$$\text{dist}(\phi_t(q), \phi_t(p)) < \delta$$

para cada $t \in \mathbb{R}$ o que contradiz a expansividade do fluxo ϕ.

Pela afirmação o ponto singular estável p é assimpóticamente estável, que, segundo a definição, existe $\tau > 0$ para cada $x \in B_\tau(p)$; $\omega(x) = \{p\}$, que equivale a dizer que

$$\lim_{t \to +\infty} \phi_t(x) = p \tag{3.10}$$

Tomemos $x \in B_\tau(p)$ tal que $\text{dist}(x, p) = \frac{3}{4}\tau$. Isolemos os pontos x e p tomando bolas centradas em x e p de raios r menor que τ, como na figura 3.3 . Para $\varepsilon < \frac{r}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, segundo a hipótese de ser p ponto estável existe $\mu > 0$ tal que se $y \in B_\mu(p)$ então $\text{dist}(\phi_t(y), p) < \varepsilon$ para todo $t > 0$. Tomando $0 < v < \min\{\mu, \varepsilon\}$ fazemos com que para cada $y \in B_v(p)$

$$\phi_{\mathbb{R}^+}(y) \subset B_v(p). \tag{3.11}$$

Por outro lado, pela equação (3.10), temos que para $v > 0$ existe $M > 0$ tal que para cada $t > M$, $\text{dist}(\phi_t(x), p) < v$. Assim, e polo teorema do fluxo tubular longo existe uma vizinhança U do arco de trajetória $\phi_{[0,t]}(x)$, $t > M$ que é uma caixa de fluxo aberta, $U \cap B_v(p) \neq \varnothing$. Por último mostraremos que x é um ponto errante. Supondo o contrário, isto é, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $m > 0$, existe $t_n > m$ e $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x)$ tal que

$$\phi_{t_n}(x_n) \in B_{\frac{1}{n}}(x) \tag{3.12}$$

é possível encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{1}{n}}(x) \subset B_r(x) \cap U$ e por (3.11), fazer com que $\phi_t(B_{\frac{1}{n}}(x)) \subset B_v(p)$ com $t > M$. Para $M > 0$ pela equação (3.12) existe $t_n > M$ e $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x)$ tal que $\phi_{t_n}(x_n) \in B_{\frac{1}{n}}(x) \subset U$, em que $\phi_{t_n}(x_n) \in B_v(p)$ isto é, $B_{\frac{1}{n}}(x) \cap B_v(p) \neq \varnothing$, assim

$$B_r(x) \cap B_r(p) \neq \varnothing$$

o que contradiz o fato de ser x e p isolados por bolas de raio r.
Logo $x \in B_\tau(p)$ é um ponto errante, o que contradiz a proposição (3.2.1) que diz que na superfície Σ o conjunto dos pontos não errantes e toda a superfície Σ. $\square$

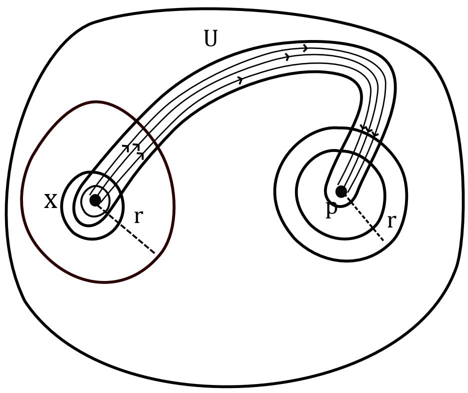


Figura 3.3: bolas isoladas

Proposição 3.2.3. *Se ϕ é expansivo então seus pontos singularidades são de tipo sela*

Demonstração. Um fluxo ϕ expansivo implica $\text{Sing}(\phi)$ é finito. Assim seja $p \in \text{Sing}(\phi)$ provaremos que

$$W^u(p) \neq \{p\}.$$

Para $W^s(p) \neq \{p\}$ é similar. Seja $\delta > 0$ constante de expansividade para um real positivo; pela proposição (3.2.2) p não é estável, existe um número positivo $\varepsilon > 0$ e uma sequência de pontos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ e números positivos $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tais que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = p$ e

$$\text{dist}(\phi_{T_n}(x_n), p) \geqslant \varepsilon \tag{3.13}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando $r \in (0, \frac{\delta}{2}) \cap (0, \varepsilon)$, conseguimos, pelo resultado (3.13) e $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = p$, que na bola $B_r(p)$ existam infinitos pontos da sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, e assim podemos definir outra sequência de pontos $\{y_n\}_{n\mathbb{N}}$ que são interseção das órbitas de x_n e a fronteira $\partial B_r(p)$. Isto é, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $t_n > 0$ tal que $y_n = \phi_{t_n}(x_n) \in \partial B_r(p)$ e tal que

$$\phi_{[0,t_n)}(x_n) \subset B_r(p) \tag{3.14}$$

A sequência de números reais positivos $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, pois $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = p$. Pela compacidade da superfície Σ podemos supor que $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$. Por último, provaremos

$$\alpha(y) = \{p\}$$

Para isto, observamos que $\alpha(y) \subset B_r(p)$; pois, caso contrário, $\alpha(y) \subset \partial B_r(p)$, então qualquer ponto de $\alpha(y)$ e p contradiz a expansividade; ou $\alpha(y) \not\subseteq \text{clos}(B_r(p))$, isto é, existe $t' < 0$ tal que $\phi_{t'}(y) \notin closB_r(p)$ em que pela continuidade, existem bolas centradas em $\phi_{t'}(y)$ e y de raios r_2, r_1 respectivamente tais que

$$\phi_{t'}(B_{r_1}(y)) \subset B_{r_2}(\phi_{t'}(y)), \text{ e } B_{r_2}(\phi_{t'}(y)) \cap \text{clos}\, B_r(p) = \varnothing \tag{3.15}$$

Dessa forma e pelo teorema de fluxo tubular longo, existe uma vizinhança U do arco da trajetória $\phi_{[0,t']}(y)$ tal que seja uma caixa do fluxo aberta que intersecta as vizinhanças de $\phi_t(y)$ e y. Do resultado (3.15) e para números naturais n suficientemente grandes temos que $y_n \in U$, assim

$$\phi_{t'}(y_n) \in B_{r_2}(\phi_{t'}(y))$$

Por outro lado pela equação (3.14) e como n é suficientemente grande, então $\phi_{t'}(y_n) = \phi_{t'+t_n}(x_n) \in B_r(p)$ $(0 < t' + t_n < t_n)$. Assim

$$B_{r_2}(\phi_{t'}(y)) \cap B_r(p) \neq \varnothing$$

o que contradiz o resultado (3.15). Logo $\alpha(y) \subset B_r(p)$.
Agora, provaremos que $\alpha(y) = \{p\}$. Suponhamos que $\alpha(y) \neq \{p\}$, então existe $q \in \alpha(y)$ distinto de p tal que $\text{dist}(\phi_t(p), \phi_t(q)) < r < \frac{\delta}{2}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, o que contradiz a expansividade do fluxo ϕ, pelo que

$$\alpha(y) = \{p\}$$

Da mesma maneira, existe $z \neq p$ tal que $\omega(z) = \{p\}$.

Por último, mostraremos que existem finitas separatrizes estáveis ou instáveis, pois se supormos que existem infinitos, pelo lema (3.2.3), teremos que alguma é assimptóticamente estável, o que implica a existência de pontos errantes, como na proposição (3.2.2). Logo, contradiz a proposição (3.2.1), que diz $\Omega(\phi) = \Sigma$. $\square$

Definição 3.4. *Se $p \in \mathrm{Sing}(\phi)$ é de tipo sela, dizemos que* ***um disco imerso (ou a metade disco se $p \in \partial\Sigma$) D_p é uma vizinhança adaptada de p*** *(ver figura 3.4) se $\overline{D}_p \cap \mathrm{Sing}(\phi) = \{p\}$ e $\partial D_p = \cup_{i=1}^{i=n}(\alpha_i \cup \beta_i \cup \gamma_i^+ \cup \gamma_i^-)$, ónde α_i e β_i são segmentos de órbita $\gamma_i^{\pm}$ são secções transversais tal que existe $x_i \in \gamma_i^+$ e $y_i \in \gamma_i^-$ tal que $W^u(p)\backslash\{p\} = \cup_{i=1}^{n}\phi_{\mathbb{R}}(x_i)$, $W^s(p)\backslash\{p\} = \cup_{i=1}^{n}\phi_{\mathbb{R}}(y_i)$*

Considerando a análise de setores hiperbólicos feita em [12] (pagina 167) temos que qualquer singularidade do tipo sela tem uma vizinhança adaptada. O seguinte resultado mostra como uma singularidade de índice negativo fornece uma espécie de expansividade local.

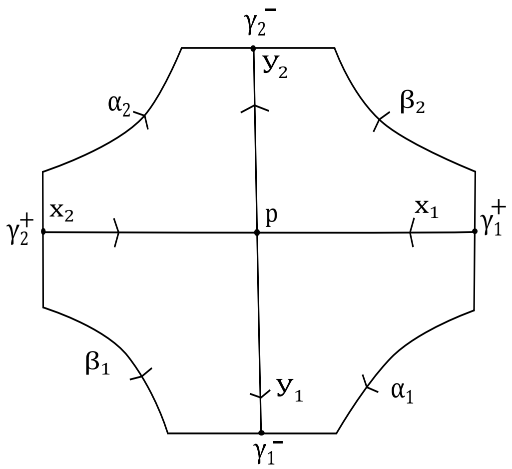


Figura 3.4: vizinhança adaptada

Lema 3.2.4. *Seja p uma singularidade do tipo sela, de índice negativo, tomemos uma vizinhança adaptada D_p de p. Então para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $x,\ y \in D_p$ e $\mathrm{dist}(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(y)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e para algum $h \in \mathcal{H}_0^+(\mathbb{R})$, então x e y pertencem a mesma secção hiperbólica; ou existe $t_0, s \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_{h(t_0)}(y) = \phi_{t_0+s}(x)$ e $|s| < \varepsilon$.*

Demonstração. Seja $p \in \mathrm{Sing}(\phi)$. Aqui temos dois grandes casos:
Se o ponto singular p não pertence a fronteira da superfície $p \notin \partial\Sigma$.
Seja D_p uma vizinhança adaptada do ponto singular p que segundo a definição 3.4, *existe um número finito $n = \frac{n_h}{2}$ de segmentos de órbita α_i, β_i e secções transversais $\gamma_i^{\pm}$ e $x_i \in \gamma_i^+$, $y_i \in \gamma_i^-$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ tais que $W^s(p)\backslash\{p\} = \cup_{i=1}^{n}\phi_{\mathbb{R}}(x_i)$, $W^u(p)\backslash\{p\} = \cup_{i=1}^{n}\phi_{\mathbb{R}}(y_i)$.* Assim, definimos $W = \bigcup_{i=1}^{n}\phi_{\mathbb{R}^+}(x_i) \cup \bigcup_{i=1}^{n}\phi_{\mathbb{R}^-}(y_i) \cup \{p\}$, como o complemento da união das secções hiperbólicas $\cup_{i=1}^{n_h}U_i$ em D_p, onde as secções transversais $\gamma_{\frac{i-1}{2}}^-$ e $\gamma_{\frac{i+1}{2}}^+$ ou $\gamma_{\frac{i}{2}}^-$ e $\gamma_{\frac{i}{2}}^+$ ou γ_n^- e γ_1^+ intersectam na fronteira da secção hiperbólica U_i para algum $i \in \{1, \ldots, n_h\}$ como na figura 3.5(a).
Seja $\varepsilon > 0$ consideremos $\delta > 0$ tal que satisfaça as seguintes condições

a) Para cada $z \in W \cap (B_\delta(x_i) \cup B_\delta(y_i))$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ tal que $\phi_s(z) = x_i$ ou $\phi_s(z) = y_i$

b) Para cada secção hiperbólica U_j e secção transversal $\gamma_i^\pm$, se $\text{dist}(\gamma_i^\pm, U_j) < \delta$ então $\text{dist}(\gamma_i^\pm, U_j) = 0$.

Existe $\delta > 0$ que satisfaz as condições a e b, pois: 1), existe um número finito n_h de separatrizes; encontrar uma vizinhança de raio $\delta_1 > 0$, que satisfaz (a), centrada no ponto x_i ou y_i resulta da continuidade do fluxo ϕ; 2), podemos tomar $\delta_2 = \min\{r_1, \ldots, r_{n_h}\}$, que satisfaz (b); $r_i = \min\{\text{dist}(\gamma_j^\pm, U_i) : j \neq 1, \frac{i}{2}, \frac{i-1}{2}, \frac{i+1}{2}, n\}$ com $i \in \{1, \ldots, n_h\}$. Logo, escolhamos $\delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$.
Seja

$$\text{dist}(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(y)) < \delta \tag{3.16}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e algum $h \in \mathcal{H}_0^+(\mathbb{R})$. Os pontos x, y tem três combinações de pertencer ou não a W dos quais basta fazer uma análise dos três casos:

Caso 1. $x \in W$ e $y \notin W$. Como $y \notin W$ existe $t' \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_{h(t')}(y) \in \gamma_i^+$ ou $\phi_{h(t')}(y) \in \gamma_i^-$ para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\lim\limits_{t \to +\infty} \phi_t(x) = p$. Além disso, como o índice de p é negativo temos que existem pelo menos quatro secções hiperbólicas. Então, podemos escolher uma secção hiperbólica U_k tal que $\phi_t(x) \in \partial U_k$ para todo $t \geqslant 0$ e $\text{dist}(\gamma_i^\pm, U_k) \neq 0$ e, assim, pela condição b, temos, $\text{dist}(\gamma_i^\pm, U_k) \geqslant \delta$ (ver figura 3.5(b)),

$$\text{dist}(\phi_{t'}(x), \phi_{h(t')}(y)) \geqslant \delta.$$

Isto contradiz a desigualdade (3.16). Descartamos este caso.

Caso 2. $x, y \in W$. Se $x = y = p$ a conclusão é trivial. Se $x, y \in \phi_{\mathbb{R}^+}(x_i)$ (ou $\phi_{\mathbb{R}^-}(y_i)$, neste caso, o argumento é similar) para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_{t_0}(x) = x_i$ e pela desigualdade (3.16) temos $\text{dist}(x_i, \phi_{h(t_0)}(y)) < \delta$ isto é, $z = \phi_{h(t_0)}(y) \in B_\delta(x_i)$ logo, pela condição a (ver figura 3.5(c)), existe $-s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ tal que $\phi_{-s}(z) = x_i$ pelo que $\phi_{-s}(\phi_{h(t_0)}(y)) = x_i = \phi_{t_0}(x)$

$$\phi_{h(t_0)}(y) = \phi_{t_0+s}(x).$$

Se x, y estão em diferentes componentes conexas de $W \backslash \{p\}$ (ver figura 3.5(d) e 3.6(a)), então existe $t' \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_{h(t')}(y) \in \gamma_j^\pm$ para algum $j \in \{1, \ldots, n\}$. Como o índice da singularidade é negativo, existe uma secção hiperbólica U_k tal que $\phi_t(x) \in \partial U_k$ para todo $t \geqslant 0$ e $\text{dist}(\gamma_j^\pm, U_k) \neq 0$, então, pela condição b, $\text{dist}(\gamma_j^\pm, U_k) \geqslant \delta$ logo

$$\text{dist}(\phi_{h(t')}(y), \phi_{t'}(x)) \geqslant \delta.$$

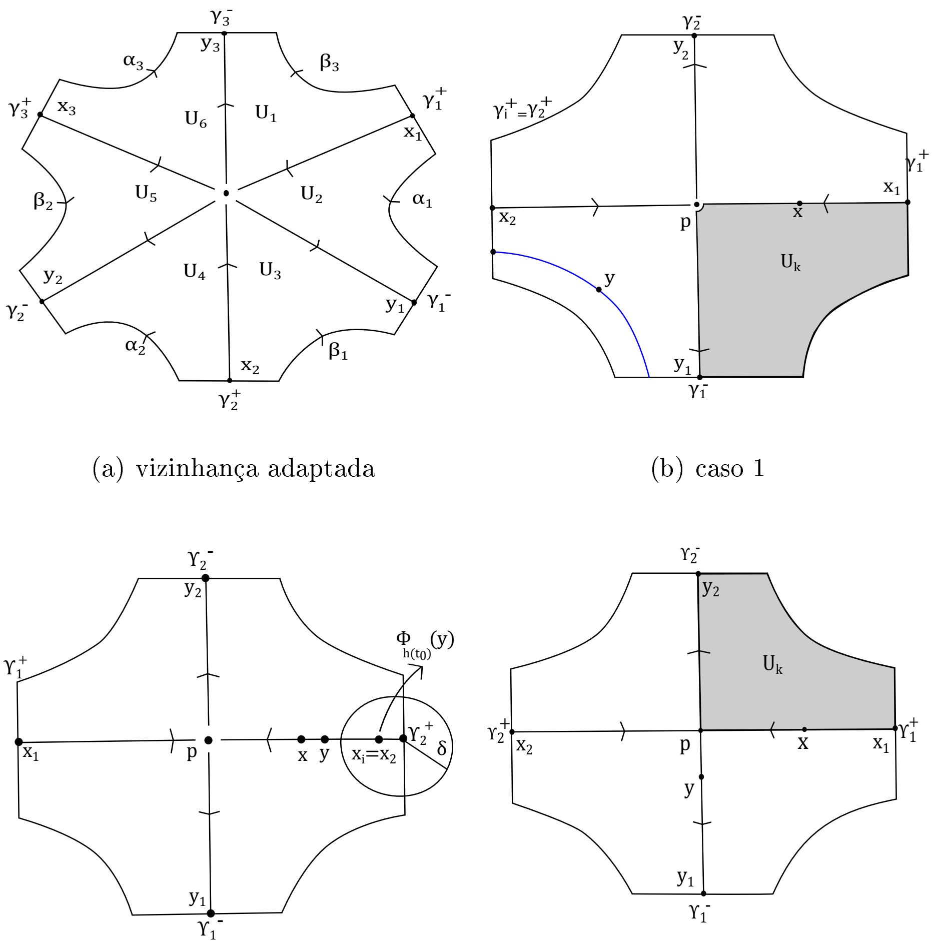
O que contradiz a desigualdade (3.16).

Caso 3. $x, y \notin W$ e não estão na mesma secção hiperbólica (ver figura 3.6(b)). De fato, se $x \in U_k$, por hipótese o índice de p é negativo, é possível encontrar $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tais $\phi_{t_1}(x) \in \gamma_{i_1}^{\pm}$, $\phi_{t_2}(y) \in \gamma_{i_2}^{\pm}$ e $\gamma_{i_1}^{\pm} \cap \gamma_{i_2}^{\pm} = \varnothing$. Nisso existe $t' \in \mathbb{R}$ e $\gamma_j^{\pm}$ tal que $\{\phi_{t'}(x), \phi_{h(t')}(y)\} \cap \gamma_j^{\pm} \neq \varnothing$ com $j \neq \frac{k-1}{2}$ e $\frac{k+1}{2}$ ou $j \neq \frac{k}{2}$ ou $j \neq n, 1$. Assim, garantimos que $\mathrm{dist}(\gamma_j^{\pm}, U_k) \neq 0$ e, pela condição b, temos que $\mathrm{dist}(\gamma_j^{\pm}, U_k) \geqslant \delta$. Logo,

$$\mathrm{dist}(\phi_{t'}, \phi_{h(t')}(y)) \geqslant \delta$$

o que contradiz a desigualdade (3.16). Portanto $x, y \notin W$ estão na mesma secção hiperbólica.

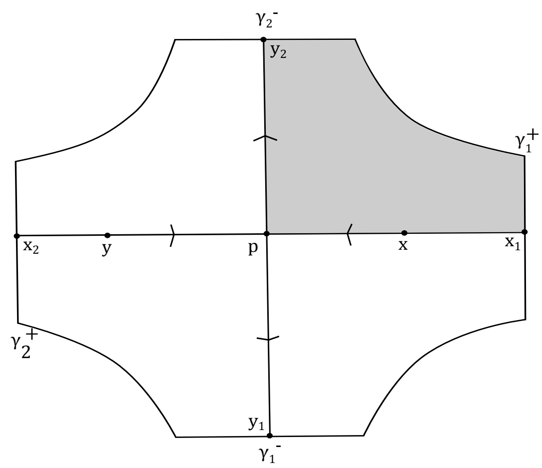
Se o ponto singular pertence a fronteira da superfície, $p \in \partial\Sigma$.
Como o índice p é negativo, podemos supor que existem pelo menos duas secções hiperbólicas (ver figura 3.6(c)) e fazer o mesmo que fizemos no caso anterior $(p \notin \partial\Sigma)$. $\square$



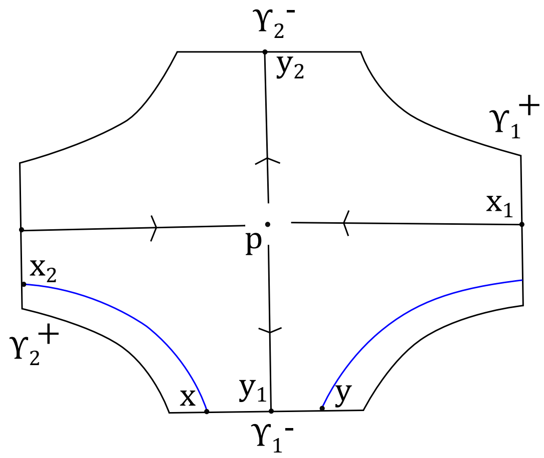
(a) vizinhança adaptada (b) caso 1

(c) caso 2, $x \in \phi_{\mathbb{R}} y$ (d) caso 2, $x \notin \phi_{\mathbb{R}} y$

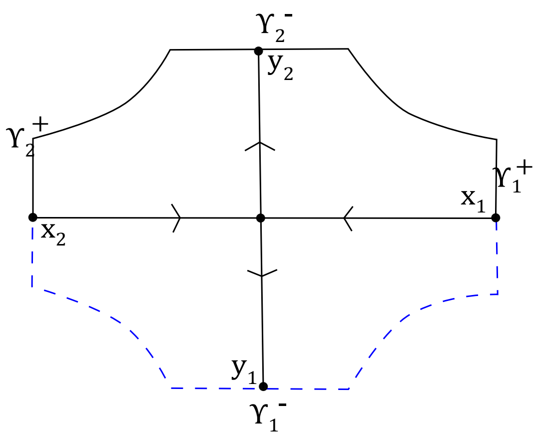
Figura 3.5: vizinhança adaptada e casos dos pontos x, y



(a) caso 2, $x \notin \phi_{\mathbb{R}} y$



(b) caso 3



(c) caso $p \in \partial\Sigma$

Figura 3.6: vizinhança adaptada e casos dos pontos x, y

Proposição 3.2.4. *Os fluxos expansivos sobre superfícies compactas não tem pontos periódicos.*

Demonstração. Seja $\delta > 0$ constante de expansividade de ϕ, para algum número positivo. Suponhamos pelo absurdo; isto é, existe $p \in \mathrm{Per}(\phi)$; logo, existe um cobrimento finito de caixas de fluxo abertas de diâmetro menor que $\frac{\delta}{2}$, de $\phi_{\mathbb{R}}(p)$, pois X é compacto. Seja $\mathcal{C}$ a união das caixas; $l \subset \mathcal{C}$ uma secção transversal passando por p e definindo uma aplicação de Poincaré f em $l' \subset l$. A aplicação f não tem pontos fixos, pois caso contrário, contradiz a expansividade de ϕ. Assim podemos supor

$$\omega(x) = \phi_{\mathbb{R}}(p),$$

para todo $x \in \mathcal{C}$ (ver figura 3.7(a)). Seja $x \in l'$ e, partilhando as caixas do cobrimento, outro cobrimento de $\phi_{\mathbb{R}}(p)$ tal que a união finita de caixas abertas $\mathcal{U}$, satisfaz: $x \notin \mathrm{clos}\mathcal{U}$ e

$$\phi_{\mathbb{R}^+}(y) \subset \mathcal{U}, \tag{3.17}$$

para todo $y \in \mathcal{U}$ ($\phi_{\mathbb{R}^-}(y) \subset \mathcal{U}$ é similar). Como $f : l \to l$ não tem pontos fixos e pelo resultado (3.17) temos

$$\lim_{n\to+\infty} f^n(x) = p$$

em que existe $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$f^n(x) \in \mathcal{U}$$

seja $\tau : l \to [0, +\infty)$ o tempo de primeiro retorno, então existe $T > 0$

$$\phi_{\tau(f^n(x))} f^n(x) = \phi_T(x).$$

Logo, pelo teorema do fluxo tubular longo temos que existe uma vizinhança U do arco de trajetória $\phi_{[0,T]}(x)$ que é uma caixa de fluxo aberta como figura 3.7(b). Além disso, U e $(\mathrm{clos}(\mathcal{U}))^C$ são abertos e pela continuidade de ϕ_T, é possível encontrar bolas de raios r_1, r_2 tais que

$$\begin{aligned} \phi_T(B_{r_1}(x)) &\subset B_{r_2}(\phi_T(x)) \subset U, \\ B_{r_2}(\phi_T(x)) &\subset \mathcal{U}, \\ B_{r_1}(x) &\subset U, \\ B_{r_1}(x) &\subset (\mathrm{clos}\mathcal{U})^C. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Em suma, conseguimos isolar x e $\phi_T(x)$ por bolas abertas disjuntas que estão conectadas por um fluxo tubular longo.

Afirmação: *$x \in l$ é um ponto errante*

Pelo absurdo, suponhamos que x não é ponto errante. Por definição, existe uma sequência de pontos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ e números reais $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tais que

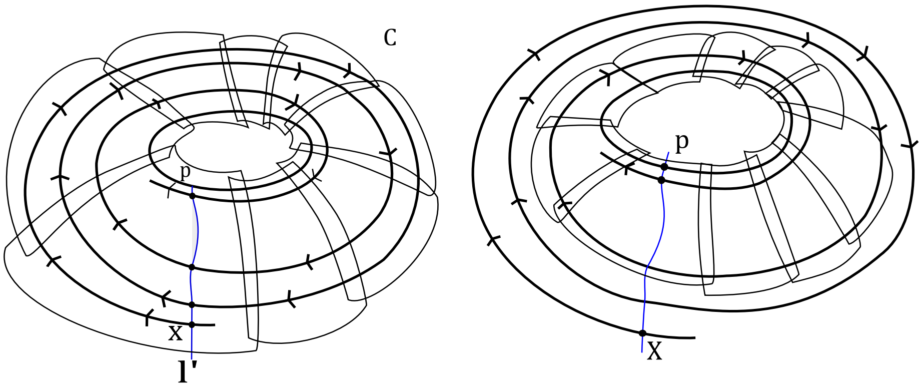
$$\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} \phi_{t_n}(x_n) = x, \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = x,$$

Nisso obtemos que existem infinitos pontos $x_n \in B_{r_1}(x) \subset (clos\mathcal{U})^C$ e $\phi_{t_n}(x_n) \in$

$B_{r_1}(x)$ para $t_n > 0$ suficientemente grande. Por outro lado, para valores $t_n > T$ temos pela equação 3.18

$$\phi_T(x_n) \in B_{r_2}(\phi_T(x)) \subset \mathcal{U}$$

e também pela equação 3.17 $\phi_{t_n}(x_n) \in \mathcal{U}$. Assim, $B_{r_1}(x) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, e que contradiz a equação 3.18.
A afirmação contradiz a proposição 3.2.1. $\square$



(a) Cobertura $\mathcal{C}$ (b) Recobrimento $\mathcal{U}$

Figura 3.7: Recobrimetos de $\phi_{\mathbb{R}}(p)$

Lema 3.2.5. *Suponha que ϕ não tem pontos periódicos, que* $\mathrm{Sing}(\phi)$ *é um conjunto finito, que a união das separatrizes estáveis das singularidades não é densa na superfície e $\Omega(\phi) = \Sigma$. Então Σ é o Toro e ϕ é o fluxo irracional.*

Demonstração. De fato, definamos o conjunto $\Delta = \{x \in \Sigma : \ \omega(x) \in \mathrm{Sing}(\phi)\}$. e como $\overline{\cup_{x\in\Delta}\phi_{\mathbb{R}}(x)} \neq \Sigma$. Um ponto no aberto $\Sigma\backslash\overline{\cup_{x\in\Delta}\phi_{\mathbb{R}}(x)}$, é regular. Tomando $l \subset \Sigma\backslash\overline{\cup_{x\in\Delta}\phi_{\mathbb{R}}(x)}$ uma seção transversal, afirmamos:

a) A função de primeiro retorno em l não inverte orientação.

b) Existe uma transversal fechada em $\gamma \subset \phi_{\mathbb{R}}(l)$ tal que a função de primeiro retorno nesta transversal fechada é transitiva.

De fato:

a) Seja $x \in l$ como $\Omega(\phi) = \Sigma$ temos que existe um número real positivo $t > 0$, tal que $\phi_t(x) \in l$. E por $\mathrm{Per}(\phi) = \emptyset$, $\phi_t(x) \neq x$, se a função de Poincaré f em l não é contínua. Tomemos $l^* \subset l$ tal que a função de Poincaré $f : l^* \to l$, seja contínua, pois o fluxo é contínuo. Se $f : l^* \to l$ inverte orientação em alguma componente conexa de l^*. Admitamos uma ordem em l por uma parametrização. Se $a, b \in l^*$ tal que

$$a < b < f(b) < f(a). \tag{3.19}$$

Seja l_a a componente conexa de $l^* \cap [a, f(a)]$ tal que $a \in l_a$. Consideremos $c := \sup l_a \neq f(a)$ como na figura 3.8(a). Demonstraremos que

$$f : [a, f(a)] \to l \ \text{ é contínua.} \tag{3.20}$$

Se $c \geqslant f(a)$ então trivialmente, f é contínua. Se $c < f(a)$ a aplicação $\tau : l^* \to \mathbb{R}$ de l^* em $\mathbb{R}$, que chamaremos o tempo de primeiro retorno, tal que $\phi_{\tau(x)}(x) = f(x)$. Pelo lema 3.2.2 temos que τ é limitado, caso contrário intersectaria a l em uma órbita de algum ponto de l, que é uma separatriz estável o que contradiz o fato de $l \subset \Sigma \backslash \overline{\cup_{x \in \Delta} \phi_{\mathbb{R}}(x)}$. Assim, pelo teorema das condições iniciais e pelo teorema 1.6 do fluxo tubular longo, para $\varepsilon > 0$ existe uma vizinhança aberta de c de raio $\delta > 0$ tal que $\text{dist}(\phi_{\tau(c)}(c), \phi_{\tau(x)}(x)) < \varepsilon$, isto é, $\text{dist}(f(c), f(x)) < \varepsilon$, com $x \in (c - \delta, c + \delta)$. Então f é contínua em c no que $c + \delta = \sup l_a$, absurdo, pois c, por definição de supremo, $c + \delta \leqslant c$. Logo, $c = f(a)$.

Agora, vamos provar que o conjunto $[b, f(b)]$ é invariante por f. Pelo absurdo, isto é, existe $z \in [b, f(b)]$ tal que $f(z) \notin [b, f(b)]$. Por (3.19), a continuidade de f, existe uma vizinhança aberta de b, V_b que seja um intervalo aberto, tal que f inverte orientação. Sem perda de generalidade e por (3.20), podemos supor que existe uma vizinhança aberta V de z tal que f não inverte orientação, tal que:

$$\begin{aligned} f(V) \cap f(V_b) &\neq \varnothing \quad , \; f(y) > f(z), \\ V \cap V_b &= \varnothing \\ \overline{V} \cap \overline{V_b} &\neq \varnothing \end{aligned} \tag{3.21}$$

para todo $y \in V_b$, $z \in V$. Como na figura 3.8(b). Isto pois $l_a = [a, f(a)]$ é conexo e $f(V) \cap f(V_b) \neq \varnothing$ e pela unicidade das órbitas.

Seja $d \in \overline{V} \cap \overline{V_b}$, tomemos duas sequências de números reais $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nas vizinhanças V, V_b, respectivamente, tais que

$$\lim_{n \to \infty} y_n = d = \lim_{n \to \infty} z_n : \; y_n < d < z_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Assim, por (3.20), e pela continuidade de f em $[a, f(a)]$, temos que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$f(y_n) \leqslant f(d) = \lim_{n \to \infty} f(y_n) \qquad \lim_{n \to \infty} f(z_n) = f(d) \leqslant f(z_n)$$

temos, pois,

$$f(y_n) \leqslant f(z_n)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ o que contradiz (3.21). Segundo a invariância de f em $[b, f(b)]$, isto é $f([b, f(b)]) \subset [b, f(b)]$, e a continuidade de f, temos que existe um ponto fixo. Absurdo, pois $\text{Per}(\phi) = \varnothing$. Portanto f não inverte orientação em l e Σ é uma superfície orientável.

Nos outros casos, $a < f(b) < b < f(a)$, $a < f(b) < f(a)b <$ e $f(b) < a < f(a) < b$, a prova é similar.

b) Como $\Omega(\phi) = \Sigma$ e os pontos de $l \subset \Sigma \backslash \overline{\cup_{x \in \Delta} \phi_{\mathbb{R}}(x)}$ são regulares, tomemos uma secção transversal fechada

$$\gamma \subset \phi_{\mathbb{R}}(l),$$

em Σ, como na figura 3.9(a). Sendo assim, não existe uma órbita de um ponto de γ que seja separatriz.

Consideremos o conjunto

$$\gamma^* = \{y \in \gamma | \ \phi_{\mathbb{R}}(y) \in \gamma\}.$$

Afirmação 1: $\gamma = \gamma^*$.
De fato, supondo o contrário, isto é, existe $y \in \gamma$ tal que $\phi_{\mathbb{R}}(y) \cap \gamma = \emptyset$, sem perda de generalidade, podemos supor que $y = \sup C$ é o supremo de uma componente conexa C de γ tal que $C \subset \gamma^*$. Isto, pois pela continuidade de ϕ e $\Omega(\phi) = \Sigma$, pode haver conjuntos conexos de γ em γ^*. Assim, como a aplicação $\tau : C \to \mathbb{R}$ definida como $\phi_{\tau(x)}(x) \in \gamma$, $x \in C$; em y, τ é limitada, caso contrário, pelo lema 3.2.2,

$$\omega(y) \subset \text{Sing}(\phi)$$

isto é, $\phi_{\mathbb{R}}(y)$ é uma separatriz estável, o que contradiz $\gamma \subset \phi_{\mathbb{R}}(l)$. Logo,

$$\gamma = \gamma^*.$$

Por outro lado, demonstraremos a seguinte afirmação:

Afirmação 2: *A aplicação de Poincaré $g : \gamma \to \gamma$ definida em γ é um homeomorfismo.*
De fato
$g : \gamma \to \gamma$ é contínua, pois seja $y \in \gamma$, $\varepsilon > 0$ pela continuidade do fluxo (continuidade a respeito das condições iniciais), existe $\delta > 0$ tal que se $y^* \in B_\delta(y)$, então

$$\text{dist}(\phi_t(y), \phi_t(y^*))) < \varepsilon,$$

para todo $|t| \leqslant T(y)$, com $T(y)$ tempo de primeiro retorno, isto é, $\phi_{T(y)}(y) = g(y)$. Assim, para o segmento de órbita $\phi_{[0,T(y)]}(y)$, pelo teorema 1.5 de vizinhança tubular, existe uma vizinhança U de $\phi_{[0,T(y)]}(y)$, como sendo uma caixa de fluxo. Logo, tomando $I \subset \gamma \cap B_\delta(y) \cap U$, com $y \in I$ tal que I esteja contido na intersecção da transversal γ, a bola de raio δ, centrada em y, e a vizinhança U, pelo que garantimos que

$$g(I) \subset B_\varepsilon(g(y)) \cap \gamma.$$

Como na figura 3.9(b).
$g : \gamma \to \gamma$ é injetora. De fato, seja $y, y^* \in \gamma$ tal que $g(y) = g(y^*)$, então $\phi_{\tau(y)}(y) = \phi_{\tau(y^*)}(y^*)$ isto é $y^* \in \mathcal{O}(y)$ e suponhamos que existe $T \neq 0$ com $\phi_T(y) = y^*$, logo $T \geqslant \tau(y)$ e como $g(y) = g(y^*)$ temos que $y \in Per(\phi)$ é um ponto periódico de ϕ, absurdo, logo $T = 0$. Assim, $y = y^*$
$g : \gamma \to \gamma$ é sobrejetora. De fato se não fosse sobrejetora existiria $y^* \in \gamma$ tal que $y^* \notin g(\gamma)$, o que contradiz a afirmação 1 ($\gamma^* = \gamma$). Logo, para cada $y \in \gamma$

existe $\overline{y} \in \gamma$ tal que

$$g(\overline{y}) = y$$

Assim, como g é contínua, injetora e sobrejetora; temos que existe seu inverso, que denotaremos por $g^{-1} : \gamma \to \gamma$.
Mostraremos que g leva fechados de γ em fechados de γ. De fato, seja A um subconjunto fechado de γ, tomemos uma sequência convergente $\{g(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset g(A)$ na imagem de A com $\lim\limits_{n\to\infty} g(a_n) = y$. Como a sequência de pontos a_n estão contidos em A e A é um conjunto fechado de γ, e como γ é compacto, obtemos uma subsequência a_{n_k} de pontos que convergem para a e, assim, pela unicidade de limite obtemos que

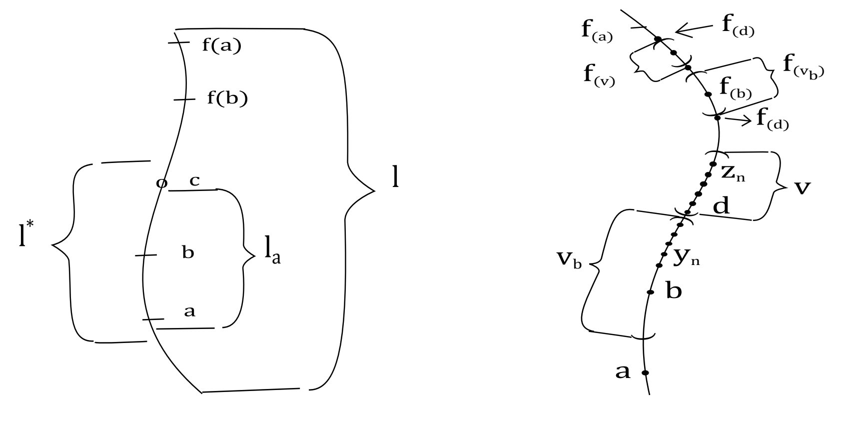
$$y = \lim_{k\to\infty} g(a_{n_k}) = g(\lim_{n\to\infty} a_{n_k}) = g(a)$$

logo, $y \in g(A)$. Portanto $g : \gamma \to \gamma$ é um homeomorfismo. Por outro lado provaremos a seguinte afirmação:

Afirmação 3: *$g : \gamma \to \gamma$ é transitivo.*

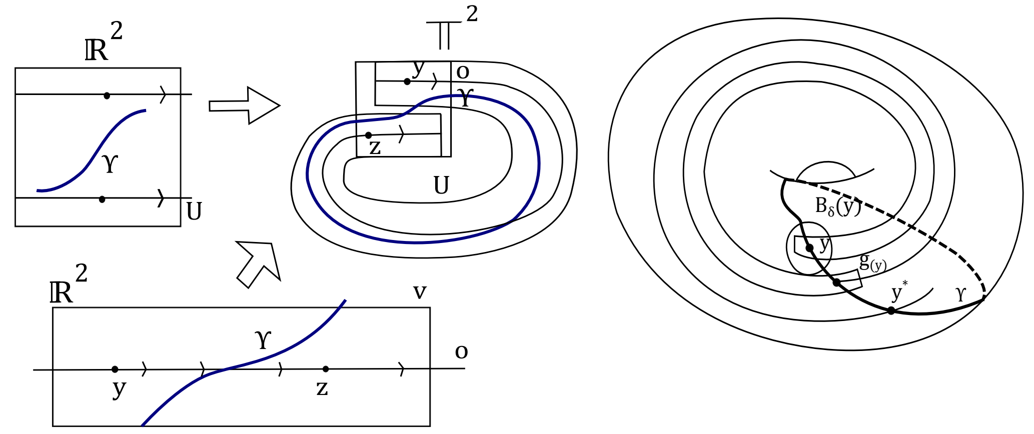
De fato, pela afirmação 2, g é um homeomorfismo. Provaremos que g é um sistema dinâmico transitivo, para isto, seja $x, y \in \gamma$ no círculo transversal e uma vizinhança de y, assim existe uma caixa de fluxo U contido na vizinhança que contém y; Por $\Omega(\phi) = \Sigma$ e Per$(\phi) = \varnothing$, temos que $\omega(y) = \Sigma$, logo, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $g^n(x) = \phi_{t_n}(x) \in U$ segue que g é transitivo.

Agora, pela afirmação 3, g é conjugado a uma rotação irracional R_α, sendo assim, ϕ conjugado a uma suspensão de R_α. Logo, Σ é o toro e ϕ é o fluxo irracional. $\square$



(a) função de Poincaré (b) função de Poincaré

Figura 3.8: função de Poincaré



(a) construção do círculo transversal (b) circulo transversal em Σ

Figura 3.9: Construção da transversal fechada.

Proposição 3.2.5. *Se ϕ é um fluxo expansivo sobre uma superfície compacta Σ então a união das separatrizes estáveis é denso em Σ. Em particular* $\mathrm{Sing}(\phi) \neq \varnothing$

Demonstração. Pelo absurdo, suponhamos que ϕ é um fluxo expansivo em Σ e a união das separatrizes estáveis não é densa em Σ. Pela proposição 3.2.4, temos que $\mathrm{Per}(\phi) = \varnothing$, e pela proposição 3.2.1, $\Omega(\phi) = \Sigma$. Pelo lema 3.2.5, obtemos que ϕ é suspensão de uma rotação irracional do círculo. Logo, como o fluxo irracional não tem pontos singulares, então, pelo teorema 3.1 e a proposição 2.1, que diz que um fluxo expansivo sem singularidades é um fluxo G-expansivo, logo o fluxo ϕ é G-expansivo e suspensão de um homeomorfismo $h : \gamma \to \gamma$ no círculo. Assim, pelo teorema 6 em [6] temos que o homeomorfismo h é um homeomorfismo expansivo. Absurdo, pois em [14] se demonstra que não existem homeomorfismos expansivos no círculo. $\square$

Definição 3.5. ***Um fluxo ϕ sobre uma superfície Σ é um fluxo de Cherry*** *se cumpre as seguintes condições:*

a) *ϕ tem apenas um número finito de pontos singulares.*

b) *Se $p_1, p_2, \cdots, p_m$ pontos singulares fonte e seja $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ suas bacias de repulsão, onde $\lambda_i = \{z \in \Sigma |\ \alpha(z) = \{p_i\}\}$, então λ_j contém uma única trajetória θ_j conectando p_j a outro ponto singular na fronteira de λ_j, $q_j \in \partial\lambda_j$.*

c) *Existem finitos pontos $x_1, x_2, \cdots, x_n$ tal que o conjunto*

$$\left(\bigcup_{i=1}^{m} \lambda_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{n} \phi_{\mathbb{R}^+}(x_j)\right)$$

é denso em Σ.

Como na figura 3.10.

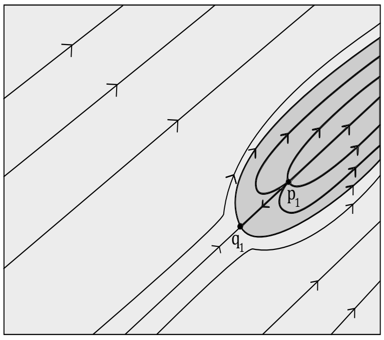


Figura 3.10: Fluxo de Cherry

Proposição 3.2.6. *Seja ϕ um fluxo expansivo na superfície Σ, então ϕ é um fluxo de Cherry.*

Demonstração. Seja ϕ um fluxo expansivo, temos que o conjunto de pontos singulares $\mathrm{Sing}(\phi)$ é finito. Como não existem pontos singulares fonte, então o fluxo ϕ é um fluxo de Cherry. Além disso, pela proposição 3.2.3 temos que existe um número finito de separatrizes e pela proposição 3.2.5 a união das separatrizes é densa em Σ. Portanto o fluxo ϕ satisfez todas as condições de fluxo de Cherry. □

Teorema 3.2. *Seja ϕ um fluxo expansivo sobre uma superfície compacta Σ. Então ϕ é topologicamente equivalente a um fluxo C^∞.*

Demonstração. Em [10], teorema 1, página 318, se demonstra que todo fluxo de Cherry é C^∞, e pela proposição 3.2.6 conclui-semos que todo fluxo ϕ seja expansivo é C^∞. □

Nesta seção vamos lidar com singularidades de índice zero. Mostraremos que elas podem ser removidas ou adicionadas sem perder a expansividade.

Definição 3.6. *Sejam os fluxos ϕ e ψ definidos sobre a mesma superfície Σ e seja $p \in \mathrm{Sing}(\phi)$ um ponto singular de índice 0 de ϕ. Diz-se que* ***ψ remove ou evita a singularidade p de ϕ, ou da mesma forma, ϕ adiciona singularidade a ψ****,se satisfaz as seguintes condiçoes:*

a) p não é ponto singular de ψ, $p \notin \mathrm{Sing}(\psi)$,

b) se $x \notin \psi_{\mathbb{R}}(p)$, então $\phi_{\mathbb{R}}(x) = \psi_{\mathbb{R}}(x)$

c) a direção de ambos fluxos coincide com qualquer órbita.

Observação 3.2.1. *Suponhamos que p é um ponto singular. Os seguintes enunciados são equivalentes:*

a) Existe ψ que remove p.

b) p é um ponto singular de índice 0 de ϕ.

Os pontos singulares de índice 0 são chamados de **selas falsas**.

Proposição 3.2.7. *Sejam ϕ e ψ fluxos na superfície compacta Σ, se ψ é expansivo e remove um ponto singular de ϕ então ϕ é expansivo.*

Demonstração. Seja $p \in \Sigma$ um ponto singular de ϕ da superfície Σ que ψ remove de ϕ, como p é um ponto regular de ψ existe uma secção transversal l e seja $t^* > 0$ tal que $\psi|_{(-t^*,t^*)\times l}$ é um homeomorfismo, $U = \psi_{(-t^*,t^*)}(l)$ é a caixa de fluxo. Seja também $\beta > 0$, por hipótese, ψ é expansivo, então existe $\delta_\beta > 0$, constante de expansividade e escolhendo $\delta \in (0, \frac{1}{2}\operatorname{dist}(p, \partial U)) \cap (0, \delta_\beta)$. Mostraremos que δ escolhido é uma constante de expansividade para o fluxo ϕ. De fato, suponhamos que se $x, y \in \Sigma$ tal que

$$\operatorname{dist}(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(y)) < \delta \tag{3.22}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e algum $h \in \mathcal{H}_0^+(\mathbb{R})$. Vamos provar que em todos os casos (ver figura 3.11) para x, y; a distância $\operatorname{dist}_\phi(x, y) < \beta$.

Caso 1 Se os pontos $x, y \notin \psi_{\mathbb{R}}(p)$. Pela continuidade do fluxo ψ restrito à $\mathbb{R}$, existem homeomorfismos $g_x, g_y \in \mathcal{H}_0^+(\mathbb{R})$ que fixem zero em $\mathbb{R}$, tal que para cada $t \in \mathbb{R}$

$$\phi_t(x) = \psi_{g_x(t)}(x), \qquad \phi_t(y) = \psi_{g_y(t)}(y).$$

Como $\operatorname{dist}(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(y)) = \operatorname{dist}(\psi_{g_x(t)}(x), \psi_{g_y(t)}(y))$ para todo $t \in \mathbb{R}$, em particular para os números reais $g_x^{-1}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\operatorname{dist}(\phi_{g_x^{-1}(t)}(x), \phi_{h(g_x^{-1}(t))}(y)) = \operatorname{dist}(\psi_{g_x \circ g_x^{-1}(t)}(x), \psi_{g_y \circ h \circ g_x^{-1}(t)}(y))$$

e por (3.22) temos

$$\operatorname{dist}(\psi_t(x), \psi_{g_y \circ h \circ g_x^{-1}(t)}(y)) = \operatorname{dist}(\phi_{g_x^{-1}}(x), \phi_{h(g_x^{-1})}(y)) < \delta < \delta_\beta.$$

Logo, pela expansividade de ψ obtemos $\operatorname{dist}_\psi(x, y) < \beta$; isto é, x, y estão em um segmento de órbita de diâmetro menor que β. Como o fluxo ψ por sua expansividade não tem órbitas periódicas, pela observação 3.1.1, podemos supor que existe $t_y > 0$ tal que $\phi_{t_y}(x) = y$. Como ψ remove p, temos a igualdade das órbitas $\phi_{\mathbb{R}}(x) = \psi_{\mathbb{R}}(x)$. Além disso, como o fluxo ψ não tem órbitas periódicas, sem perda de generalidade, se $y = \phi_t(x)$, $t > 0$, temos $\phi_{[0,t]}(x) = \phi_{[0,t_y]}(x)$. Sendo assim e a observação 3.1.1 temos que

$$\operatorname{dist}_\phi(x, y) = \operatorname{diam}(\phi_{[0,t]}(x)) = \operatorname{diam}(\psi_{[0,t_y]}(x))$$

e como $\operatorname{dist}_\psi(x, y) < \beta$ obtemos

$$\operatorname{dist}_\phi(x, y) = \operatorname{dist}_\psi(x, y) < \beta$$

Caso 2 Se $x \in \psi_{\mathbb{R}}(p)$ e $y \notin \psi_{\mathbb{R}}(p)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\lim_{t\to\infty} \phi_t(x) = p$. Observemos que para todo número positivo $t' > 0$ existe $t > t'$ tal que

$$\phi_t(y) \notin U \tag{3.23}$$

pois, caso contrário, existiria $t' > 0$ tal que se $t > t'$, então $\phi_t(y) \in U$. Como ψ é expansivo, em particular não tem órbitas periódicas, então $\omega(y) = \{p\}$, pois se não for, contradiz (3.22). Logo, p não é um ponto singular de índice zero, o que contradiz o fato de ψ remover p. Sem perda de generalidade, podemos supor que se $\phi_t(y) \notin U$, então

$$\mathrm{dist}(p, U) \leqslant \mathrm{dist}(p, \phi_t(y)) \tag{3.24}$$

Assim como $\lim_{t\to\infty} \phi_t(x) = p$ e (3.23), podemos considerar $t > 0$ tal que $\phi_{h(t)}(y) \notin U$, logo $\mathrm{dist}(p, U) \leqslant \mathrm{dist}(p, \phi_{h(t)}(y))$. Assim, e pela equação (3.24) obtemos

$$\begin{aligned}&\mathrm{dist}(p, \phi_{h(t)}(y)) \leqslant \mathrm{dist}(p, \phi_t(x)) + \mathrm{dist}(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(y)) < \\ &\tfrac{1}{2}\,\mathrm{dist}(p, U) + \delta < \tfrac{1}{2}\,\mathrm{dist}(p, U) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{dist}(p, U) = \mathrm{dist}(p, U)\end{aligned}$$

logo

$$\mathrm{dist}(p, U) \leqslant \mathrm{dist}(p, \phi_{h(t)}(y)) < \mathrm{dist}(p, U),$$

absurdo.

Caso 3 Se $x, y \in \psi_{\mathbb{R}}(p)$. Podem ocorrer nas separatrizes associadas de $p \in \mathrm{Sing}(\phi)$; $a, b \in \phi_{\mathbb{R}}(p)$, $\omega(a) = \{p\} = \alpha(b)$, que contém x e y de duas formas básicas, sem perder a generalidade. Suponhamos

$$x \in \phi_{\mathbb{R}}(a) \cup \{p\},\ \ y \in \phi_{\mathbb{R}}(b) \cup \{p\} \quad \text{ou} \quad x, y \in \phi_{\mathbb{R}}(a).$$

Se $x \in \phi_{\mathbb{R}}(a) \cup \{p\},\ y \in \phi_{\mathbb{R}}(b) \cup \{p\}$, supondo que $x = y = p$, se conclui-se $0 = \mathrm{dist}_\phi(x, y) < \beta$. Se $y \neq p$ não for o ponto singular, se consegue que a órbita de y saia da bola de raio 2δ, pois caso contrário, teria que existir outra separatriz, absurdo pois o pondo é de índice zero. Assim para cada $t' > 0$ exite $t > t'$ tal que

$$\phi_t(y) \notin B_{2\delta}(p). \tag{3.25}$$

Além disso, $\mathrm{dist}(p, \phi_{h(t)}(y)) \leqslant \mathrm{dist}(p, \phi_t(x)) + \mathrm{dist}(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(y)) \leqslant \delta + \delta = 2\delta$ isto é, $\phi_{h(t)}(y) \in B_{2\delta}(p)$ tomando t suficientemente grande, pois para x o conjunto ômega limite $\omega(x) = \omega(a) = \{p\}$ é o mesmo que de a. Por outro lado escolhendo $t > 0$ suficientemente grande tal que $\phi_{h(t)}(y) \notin B_{2\delta}(p)$, isto pela equação (3.25), chegamos a um absurdo

$$\phi_{h(t)}(y) \in B_{2\delta}(p) \cap B^C_{2\delta}(p).$$

Assim, se $x \in \phi_{\mathbb{R}}(a)$ e $y \in \phi_{\mathbb{R}}(b)$ acontece o mesmo razoamento, chegando a um absurdo, logo descartamos o caso em que os dois pontos $x \in \phi_{\mathbb{R}}(a) \cup \{p\}$, $y \in \phi_{\mathbb{R}}(b) \cup \{p\}$ estão em distintas separatrizes com o ponto singular.

O outro caso em que os pontos $x, y \in \phi_{\mathbb{R}}(a)$ pertencem a uma das separatrizes. Sem perda de generalidade, podemos supor que pertencem a separatriz $\phi_{\mathbb{R}}(a)$, que é a órbita de a. Como no caso 1 existem homeomorfismos $g_x, g_y \in \mathcal{H}_0^+$ que fixam zero nos números reais, tal que

$$\phi_t(x) = \psi_{g_x(t)}(x),\ \ \phi_t(y) = \psi_{g_y(t)}(y)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, pela equação (3.22) e tomando os números reais $g_x^{-1}(t) \in \mathbb{R}$, para cada $t \in \mathbb{R}$ obtemos

$$\operatorname{dist}(\phi_{g_x^{-1}(t)}(x), \phi_{h\circ g_x^{-1}(t)}(y)) = \operatorname{dist}(\psi_t(x), \psi_{g_y\circ h\circ g_x^{-1}(t)}(y)) < \delta,$$

e como $g_y \circ h \circ g_x^{-1} \in \mathcal{H}_0^+$ é ainda um homeomorfismo que fixa zero, obtemos pela equação (3.22) que

$$\operatorname{dist}_\psi(x, y) < \beta. \tag{3.26}$$

Por outro lado, por ser um fluxo expansivo, pela proposição 3.2.4, ψ não tem órbitas periódicas, então ϕ não tem órbitas periódicas; assim, como x, y estão na mesma órbita temos que

$$\phi_{[0,t]}(x) = \phi_{[0,t_y]}(x),$$

onde $\phi_t(x) = y$, $\phi_{t_y}(x) = y$, com t, t_y números reais positivos. Assim, pela observação 3.1.1 e pela equação (3.26), obtemos

$$\operatorname{dist}_\phi(x, y) = \operatorname{diam}(\phi_{[0,t]}(x)) = \operatorname{diam}(\psi_{[0,t_y]}(x)) = \operatorname{dist}_\psi(x, y))$$

logo,

$$\operatorname{dist}_\phi(x, y) < \beta.$$

Portanto ϕ é expansivo. $\square$

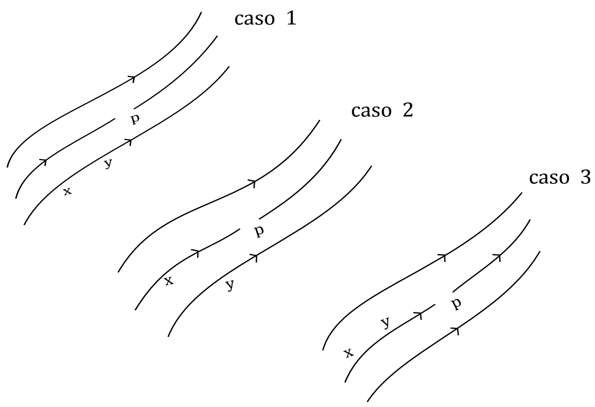


Figura 3.11: Singularidades removíveis

Lema 3.2.6. *Seja ϕ um fluxo sobre Σ e suas singularidades de tipo sela. Então para todo $\beta > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\operatorname{dist}(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(y)) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$ com $\operatorname{dist}_\phi(x, y) \geqslant \beta$ e $h \in \mathcal{H}_0^+(\mathbb{R})$, então existe uma secção transversal l contendo x e y tal que qualquer separatriz intersectando l entre x e y está associado a uma singularidade de índice 0.*

Demonstração. Seja $\beta > 0$, as singularidades do tipo sela são isoladas por definição, $\mathrm{Sing}(\phi)$ é um conjunto finito e

$$\beta_0 = \inf\{\mathrm{diam}(\phi_{\mathbb{R}}(x)) : x \in \mathrm{Sing}(\phi)\} > 0.$$

Aplicando o resultado do lema 3.1.5, para β, existem números positivos ε e δ''. Para qualquer ponto singular p admitamos uma vizinhança adaptada D_p com $\mathrm{diam}(D_p) < \beta$. Assim, para qualquer ponto singular p, e ε considerado anteriormente, tomemos δ_p dado pelo lema 3.2.4. Consideremos as caixas de fluxo U_i dado pelo lema 3.2.1. Suponhamos que $\mathcal{C}$ é um cobrimento finito de Σ feito com D_p, $p \in \mathrm{Sing}(\phi)$ e um número finito de caixas de fluxo U_i, $i \in \{1, \cdots, N\}$. Subdividindo as caixas de fluxo podemos assumir que $\mathrm{diam}(U_i) < \beta$ para todo $i \in \{1, \cdots, N\}$. Podemos supor que a intersecção de qualquer dos conjuntos abertos em $\mathcal{C}$ é conexa ou vazia. Consideremos $\delta' > 0$ tal que se o diâmetro de $X \subset \Sigma$ é menor que δ', então X está contido em algum conjunto aberto de $\mathcal{C}$. Finalmente, definimos $\delta = \min\{\delta', \delta''\} \cup \{\delta_p\}_{p\,\mathrm{Sing}(\phi)}$.

Neste parágrafo, mostraremos que existe uma secção transversal local através de x e y. Como $\mathrm{dist}(x, y) < \delta \leqslant \delta'$ temos que $x, y \in U$ para algum $U \in \mathcal{C}$, isto, pois $\mathrm{diam}(X) < \delta'$. Como $\mathrm{diam}(U) < \beta$ e $\mathrm{dist}_\phi(x, y) \geqslant \beta$ temos que x e y não estão em um segmento de órbita contido em U, se U é uma caixa de fluxo ou uma vizinhança adaptada de um ponto singular de índice 0; então, no caso de U ser uma caixa de fluxo, é trivial que existe uma secção transversal; no outro caso, em que U é vizinhança adaptada de um ponto singular de índice 0, temos que se x e y estão em distintos setores hiperbólicos, então também é possível encontrar uma secção transversal contendo x, y e um ponto da separatriz. Suponha que $x, y \in D_p$ para algum $p \in \mathrm{Sing}(\phi)$ de índice negativo. Se x, y estão no mesmo setor, existe um secção transversal que pode ser construída levando as secções transversais da vizinhança adaptada até os pontos. Se x, y não estão no mesmo setor hiperbólico, chegamos a uma contradição, pois aplicando o lema 3.2.4, existe $t_0, s \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_{h(t_0)}(y) = \phi_{t_0+s}(x)$ e $|s| < \varepsilon$. Então aplicando o lema 3.1.5, conclui-semos que $\mathrm{dist}_\phi(x, y) < \beta$, chegando a uma contradição.

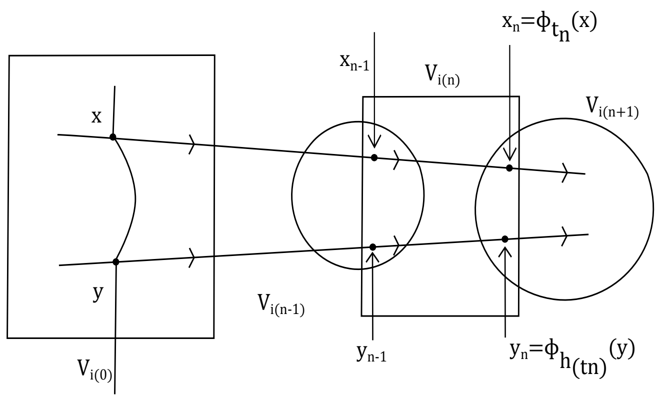
O argumento anterior mostra que se $\phi_t(x), \phi_{h(t)}(y) \in D_p$ para algum $t \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathrm{Sing}(\phi)$ de índice negativo, então $\phi_t(x)$ e $\phi_{h(t)}(y)$ pertencem ao mesmo setor hiperbólico, em D_p. Em particular x e y não são separatrizes. Portanto $\phi_t(x)$ e $\phi_{h(t)}(y)$ estão conectados por uma secção transversal para todo $t \in \mathbb{R}$.

Agora, como x e y não são separatrizes e estão no mesmo setor hiperbólico, em uma vizinhança de um ponto singular ou em na mesma caixa de fluxo, consideremos uma sequência divergente de números $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $t_0 = 0$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $i(n)$ tal que

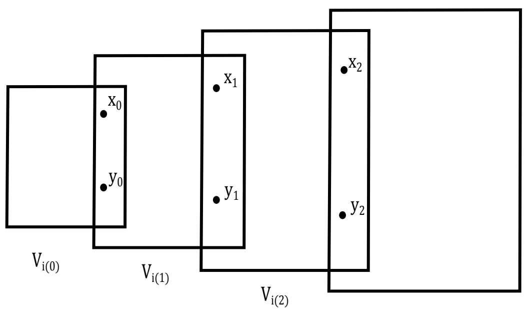
$$\phi_{[t_n, t_{n+1}]}(x) \cup \phi_{[h(t_n), h(t_{n+1})]} \subset V_{i(n)} \in \mathcal{C},$$

onde $V_{i(n)}$ é ou uma caixa de fluxo ou uma vizinhança adaptada D_p. Consideremos em $V_{i(n)} \cap V_{i(n+1)}$ uma secção transversal local l_n que contem $x_n = \phi_{t_n}(x)$ e

$y_n = \phi_{h(t_n)}(y)$ como na figura 3.12(a). Seja um ponto $z \in l_0 = [x, y] \subset l$. Se z pertence a uma separatriz de um ponto singular de índice negativo, a conclusão é trivial. Se caso contrário z não pertence a uma separatriz de um ponto singular de índice negativo, provaremos que z não pertence a uma separatriz. De fato consideremos a sequência $s_n \in \mathbb{R}$ tal que $z_n = \phi_{s_n}(z) \in l_n$, para todo número inteiro não negativo $n \geqslant 0$; isto, pois se x_n e y_n estão em uma vizinhança adaptada D_p, então x_n e y_n estão no mesmo setor hiperbólico. Se a sequência $\{z_n\}_{n\mathbb{N}}$ é convergente, então $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências convergentes. Isto contradiz o fato de x e y não pertencerem a separatrizes. Então a sequência $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ não é convergente e z não pertence a uma separatriz. conclui-semos, pois, que, se existe uma separatriz intersectando a $[x, y] \in l$, então, ela está associada a um ponto singular de índice 0. □



(a) Cobriento da superfície



(b) construção do recobrimento

Figura 3.12: Recobrimento de Σ e sua construção

Teorema 3.3. *Sejam ϕ e ψ fluxos na superfície compacta Σ, suponha que ψ remove um ponto singular de ϕ. Então os seguintes enunciados são equivalentes:*

a) ψ *é expansivo*

b) ϕ *é expansivo.*

Demonstração. Com as condições do teorema e tomando $p \in \mathrm{Sing}(\phi)$ como o ponto singular que é removido por ψ, provaremos que

(a) implica (b)
isto é, ψ é expansivo. Então ϕ é expansivo; se conclui-se pela proposição 3.2.7.

(b) implica (a)
Prova por contradição. Suponhamos que ϕ é expansivo e ψ não seja expansivo, isto é, existe $\beta > 0$ e, para todo $n \in \mathbb{N}$ natural existem pontos $x_n \in \Sigma$, $y_n \in \Sigma$ na superfície Σ, $h_n \in \mathcal{H}_0^+(\mathbb{R})$ homeomorfismos reais que fixem zero e números $\delta_n > 0$ positivos, tais que

$$\lim_{n\to+\infty} \delta_n = 0 \tag{3.27}$$
$$\mathrm{dist}_\psi(x_n, y_n) > \beta \text{ e} \tag{3.28}$$
$$\mathrm{dist}(\psi_t(x_n), \psi_{h_n(t)}(y_n)) < \delta_n, \tag{3.29}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ real. Chegamos a uma contradição estudando o:

Caso 1 Se os pontos $x_n \notin \psi_{\mathbb{R}}(p)$, $y_n \notin \psi_{\mathbb{R}}(p)$ não estão na órbita $\psi_{\mathbb{R}}(p)$ de p para infinitos valores de $n \in \mathbb{N}$. Pela continuidade dos fluxo ϕ respeito de $\mathbb{R}$ topológico, para cada $t \in \mathbb{R}$ número real.

$$\psi_t(x_n) = \phi_{g_{x_n}(t)}(x_n), \;\; \psi_t(y_n) = \phi_{g_{y_n}(t)}(y_n).$$

Por outro lado, para $\beta > 0$ existe uma constante $\delta_\beta > 0$ de expansividade de ϕ e, em particular, existem infinitas constantes de expansividade de ϕ que são de ψ, pois, pela equação (3.27), para δ_β existem números naturais $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grandes tal que $\delta_n < \delta_\beta$; observando a equação (3.29) e $g_{y_n} \circ h_n \circ g_{x_n}^{-1} \in \mathcal{H}_0^+(\mathbb{R})$ temos que

$$\begin{aligned} &\mathrm{dist}(\psi_{g_{x_n}^{-1}(t)}(x_n), \psi_{h_n(g_{x_n}^{-1}(t))}(y_n)) = \\ &\mathrm{dist}(\phi_t(x_n), \phi_{g_{y_n}\circ h_n \circ g_{x_n}^{-1}(t)}(y_n)) < \delta_n, \end{aligned} \tag{3.30}$$

com $\delta_n < \delta_\beta$, para todo $t \in \mathbb{R}$; concluímos pela expansividade de que ϕ, $\mathrm{dist}_\phi(x_n, y_n) < \beta$. Como ϕ é expansivo, por hipótese, temos que ϕ não tem pontos periódicos pela proposição 3.2.4, logo, pela observação 3.1.1, $\mathrm{dist}_\phi(x_n, y_n) = \mathrm{diam}(\phi_{[0,t_y]}(x_n))$. Supondo, sem perda de generalidade, que $\phi_{t_{y_n}}(x_n) = y_n$, $t_{y_n} \geqslant 0$, além disso, que $x_n, y_n \notin \psi_{\mathbb{R}}(p)$, a igualdade $\phi_{\mathbb{R}}(x_n) = \psi_{\mathbb{R}}(x_n)$ e ainda que ϕ não tenha pontos periódicos, temos que

$$\psi_{[0,t_n]}(x_n) = \phi_{[0,t_{y_n}]}(x_n),$$

também supondo, sem perda de generalidade, que $\phi_{t_n}(x_n) = y_n$, $t_n \geqslant 0$, obtemos.

$$\operatorname{diam}(\psi_{[0,t_n]}(x_n)) = \operatorname{diam}(\phi_{[0,t_{y_n}]}(x_n))$$

logo, pela observação 3.1.1, temos

$$\operatorname{dist}_\psi(x_n, y_n) = \operatorname{diam}(\psi_{[0,t_n]}(x_n)) = \operatorname{diam}(\phi_{[0,t_{y_n}]}(x_n)) = \operatorname{dist}_\phi(x_n, y_n)$$

e pela equação (3.28), $\operatorname{dist}_\psi(x_n, y_n) > \beta$ temos

$$\operatorname{dist}_\phi(x_n, y_n) > \beta.$$

Sendo, (3.19), (3.30) concluímos que ϕ não é expansivo. Contradição pois, por hipótese, ϕ é um fluxo expansivo.

Caso 2 Se os pontos $x_n \in \psi_{\mathbb{R}}(p)$ e $y_n \notin \psi_{\mathbb{R}}(p)$, para infinitos valores de n. Provaremos que é possível encontrar pontos que contradizem a expansividade de ϕ. Para isso, seja $n \in \mathbb{N}$ o número dos valores infinitos, números reais $t \in \mathbb{R}$ tal que $\psi_{t_n}(x_n) = p$ e definimos $z_n = \psi_{h_n(t_n)}(y_n)$, além disso consideremos $s = t - t_n$, para qualquer número real t, e $g_n \in \mathcal{H}_0^+(\mathbb{R})$ homeomorfismo real que fixe zero, definidos como $g_n(s) = h_n(s + t_n) - h_n(t_n)$. Se verifica que para cada $s \in \mathbb{R}$ real e $n \in \mathbb{N}$ um dos valores infinitos, com $s = t - t_n$

$$\operatorname{dist}(\psi_s(p), \psi_{g_n(s)}(z_n)) < \delta_n. \tag{3.31}$$

Pois,

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(\psi_s(p), \psi_{g_n(s)}(z_n)) &= \operatorname{dist}(\psi_s(\psi_{t_n}(x_n)), \psi_{h_n(t)-h_n(t_n)}(z_n)) \\ &= \operatorname{dist}(\psi_t(x_n), \psi_{h_n(t)}(y_n)) < \delta_n.\end{aligned}$$

Agora, vamos encontrar pontos em uma caixa de fluxo que contém p tal que sua distância, como a métrica dist_ϕ, associada ao fluxo ϕ, são maiores que uma constante positiva.
Isto é, existe $\beta' > 0$ uma constante positiva e uma subsequência de $\{z_n\}$ tal que se dois termos da subsequência $n_1 \neq n_2$ são distintos, então

$$\operatorname{dist}_\phi(z_{n_1}, z_{n_2}) > \beta. \tag{3.32}$$

De fato, considere uma secção transversal local l contendo p e tomando $t^* > 0$ tal que o fluxo $\psi : (-t^*, t^*) \times l \to \psi_{(-t^*,t^*)}(l)$ é um homeomorfismo. Tome também $U = \psi_{(-t^*,t^*)}(l)$ um fluxo de caixa, e tomando o limite em (3.31) para $s = 0$ e por (3.27) obtemos $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = p$. Assim, podemos supor, sem perda de generalidade, que $z_n \in U$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, para encontrar os pontos mencionados, tomemos $0 < \beta' < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(p, \partial U)$ um número positivo menor que a metade da distância do ponto singular ao bordo da caixa, e uma subsequência de $\{z_n\}$ tal que, se um ponto da órbita de um termo da subsequência $\phi_t(z_{n_1}) \notin U$ não está na caixa de fluxo, então

$$\operatorname{dist}(z_{n_1}, \phi_t(z_{n_1})) > \frac{1}{2}\operatorname{dist}(p, \partial U),$$

como na figura 3.13(a). Se supomos que para $n_1 \neq n_2$, todas as órbitas da subsequência são iguais $\phi_{\mathbb{R}}(z_{n_1}) = \phi_{\mathbb{R}}(z_{n_1})$; pela proposição 3.2.1, e pela hipótese de que ψ remove p isto é, para qualquer ponto, as órbitas de ψ é ϕ são iguais, exceto no ponto da órbita de p em ψ. Então ψ e ϕ não tem pontos errantes, isto é $\Omega(\phi) = \Omega(\psi) = \Sigma$, pelo que existe $t > 0$ tal que $\phi_t(z_{n_1}) \notin U$ como na figura 3.13(a). Logo,

$$\text{dist}(z_1, \phi_t(z_{n_1})) > \frac{1}{2}\,\text{dist}(p, \partial U) > \beta',$$

sendo assim, pela expansividade do fluxo ϕ, como a proposição diz 3.2.4, que ϕ não tem pontos periódicos, e aplicando a observação 3.1.1, obtemos

$$\text{dist}_\phi(z_{n_1}, z_{n_2}) > \beta'.$$

Se existem pontos da subsequência z_{n_1}, z_{n_2}, com $n_1 \neq n_2$, que não estão na mesma órbita, então se conclui-se por definição de métrica dist_ϕ associada a ϕ, que

$$\text{dist}_\phi(z_{n_1}, z_{n_2}) = \text{diam}(\Sigma) > \beta'.$$

contínuando, resta provar que se os pontos da subsequência de $\{z_n\}$ construída satisfazem as relações similares às equações (3.28), (3.29), para chegar a contradição de que ϕ não é um fluxo expansivo. Assim, provaremos que para termos z_{n_1}, z_{n_2} da subsequência, com $n_1 \neq n_2$ suficientemente grande,

$$\text{dist}(\psi_{g_{n_1}(s)}(z_{n_1}), \psi_{g_{n_2}(s)}(z_{n_2})) < \delta_{n_1} + \delta_{n_2}, \tag{3.33}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. De fato, pela equação (3.27) temos que $\lim\limits_{||(n_1,n_2)||\to\infty} \delta_{n_1} + \delta_{n_2} = 0$, e para n_1, n_2 suficientemente grande, em concordância a equação (3.31), obtemos

$$\begin{gathered}\text{dist}(\psi_{g_{n_1}(s)}(z_{n_1}), \psi_{g_{n_2}(s)}(z_{n_2})) \leqslant \\ \text{dist}(\psi_{g_{n_1}(s)}(z_{n_1}), \psi_s(p)) + \text{dist}(\psi_s(p), \psi_{g_{n_2}(s)}(z_{n_2})) < \\ \delta_{n_1} + \delta_{n_2} < \delta,\end{gathered}$$

onde $\delta > 0$ é uma constante de expansividade para $\beta' > 0$. Assim, pela continuidade dos fluxos ψ e ϕ e $z_n \notin \psi_{\mathbb{R}}(p)$ temos que existem $g_{z_{n_1}}$, $g_{z_{n_1}} \in \mathcal{H}_0^+(\mathbb{R})$ homeomorfismos reais que fixem zero, tal que,

$$\psi_{g_{n_1}(s)}(z_{n_1}) = \phi_{g_{z_{n_1}}(s)}(z_{n_1}) \quad , \quad \psi_{g_{n_2}(s)}(z_{n_2}) = \phi_{g_{z_{n_2}}(s)}(z_{n_2})$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Logo, para todo $g_{z_{n_1}}^{-1}(s)$, $s \in \mathbb{R}$ pela equação (3.33) obtemos

$$\text{dist}(\phi_s(z_{n_1}), \phi_{g_{z_{n_2}} \circ g_{z_{n_1}}^{-1}(s)}(z_{n_2})) < \delta_{n_1} + \delta_{n_2} < \delta.$$

Assim sendo, e pelas equações (3.27), (3.32), conclui-semos que ϕ não é expansivo. Contradição, pois, por hipótese ϕ é expansivo.

Caso 3 Se os pontos $x_n, y_n \in \psi_{\mathbb{R}}(p)$ pertencem a órbita de p para valores infinitos de n. Sem perda de generalidade, podemos supor $x_n = p$ para todo $n \in \mathbb{N}$ número natural. Agora, provaremos que *é possível encontrar um fluxo em Σ que remove todos os pontos singulares de índice zero de ϕ e que é topologicamente equivalente ao fluxo irracional no toro Σ e portanto, ϕ não é expansivo*, que contradiz a hipótese geral. Para isso, seja l uma secção transversal local contendo p. Pela proposição 3.2.1, ϕ não tem pontos errantes, $\Omega(\phi) = \Sigma$, então podemos supor, sem perda de generalidade, que $y_n \in l$ pertence a secção transversal local l, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela proposição 3.2.4, o fluxo ϕ não tem órbitas periódicas, e como as órbitas de qualquer ponto que não esteja na órbita de p, são iguais, então o fluxo ψ não tem órbitas periódicas. Para $\beta > 0$ existe $\delta_\beta > 0$, uma constante de expansividade de ϕ, assim como pela equação (3.27) $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta_n = 0$ para $\delta = \delta_\beta > 0$ existem infinitos valores de n suficientemente grandes, tais que

$$\delta_n < \delta,$$

da mesma maneira, para n, suficientemente grande, pelas equações (3.27), (3.29) obtemos para cada $t \in \mathbb{R}$, que

$$\text{dist}_\phi(x_n, y_n) > \beta \quad , \quad \text{dist}(\psi_t(x_n), \psi_{h_n(t)}(y_n)) < \delta_n < \delta,$$

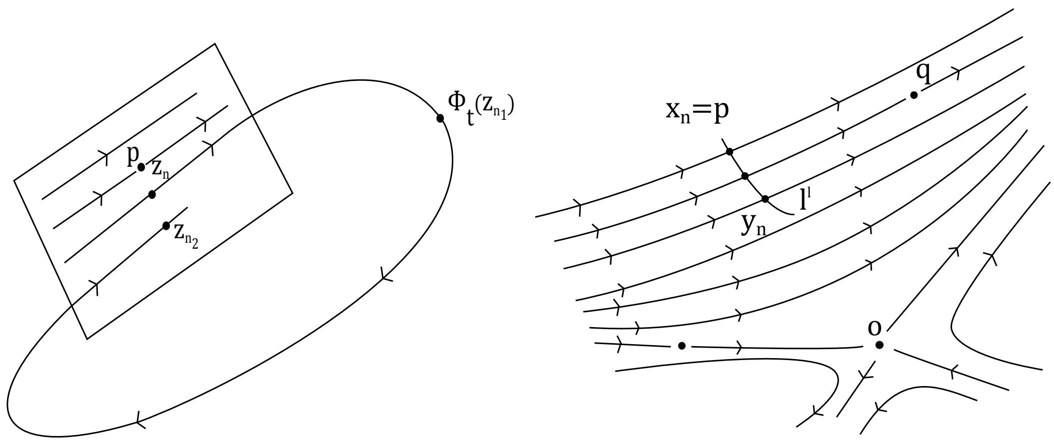
Assim, aplicando o lema 3.2.6 , obtemos que

não existem separatrizes de pontos singulares que não são removíveis e que intersectem o sub segmento $l' \subset l$, limitado por x_n e y_n, da secção transversal l.

Isto é, não existe uma separatriz de um ponto sela com índice negativo, como na figura 3.13(b).
Agora, como ϕ tem finitas singularidades, por ser expansivo, então ψ também tem finitas singularidades. Então seja ψ' um fluxo em Σ que remove todas as singularidades de índice zero ou removível de ψ, isto será possível sempre, porque pode-se aplicar a observação 3.2.1 um número finito de vezes e conseguir um fluxo que remova todos os pontos removíveis. Logo, como não existem separatrizes associadas a pontos singulares de índice negativo que intersectam a $l' \subset l$, então ψ' não tem separatrizes em l', assim
1) a união de separatrizes de ψ' não é densa em Σ;
por outro lado, pela proposição 3.2.1, ϕ não tem pontos errantes, então ψ' não tem pontos errantes
2) $\Omega(\phi) = \Omega(\psi') = \Sigma$;
pela proposição 3.2.4, temos que ϕ não tem pontos periódicos, então
3) ψ' não tem pontos periódicos;
e como ϕ é expansivo, então o conjunto de pontos singulares $\text{Sing}(\phi)$ é finito, segue que
4) o conjunto de pontos singulares $\text{Sing}(\psi')$ de ψ' é finito.

Portanto, pelos resultados 1,2,3 e 4, e aplicando o lema 3.2.5, concluímos que ψ' é uma suspensão de uma rotação irracional no círculo. Por outro lado, como ϕ é obtido de ψ' adicionando singularidades, e como o fluxo irracional no toro não é expansivo, então ϕ não é expansivo. O que contradiz a hipótese geral.

□



(a) Singularidades removíveis (b) Singularidades removíveis

Figura 3.13: Singularidades removíveis

Pela proposição 3.2.4 e teorema 3.3 obtemos a seguinte observação:

Observação 3.2.2. *Se ϕ é um fluxo expansivo em uma superfície, então ϕ tem pelo menos um ponto singular de índice negativo sobre qualquer bordo.*

Demonstração. Se não fosse assim, então removendo o ponto de índice 0 teríamos uma órbita periódica, contradizendo a proposição 3.2.4 e o teorema 3.3. □

3.3 Caracterização de fluxos expansivos sobre superfícies

Nesta seção, Σ denota uma superfície compacta e $\phi : \mathbb{R} \times \Sigma \to \Sigma$ um fluxo de classe C^1. O resultado mais importante é o teorema A e o Teorema B. Em virtude do teorema 3.3, podemos supor que o fluxo ϕ não tem pontos singulares de índice zero.

Teorema A. *Seja ϕ um fluxo sem singularidades de índice* 0 *zero sobre uma superfície compacta Σ, então os seguintes enunciados são equivalentes:*

a) ϕ *é expansivo.*

b) O conjunto $\mathrm{Sing}(\phi)$ *é finito e não vazio,* $\Omega(\phi) = \Sigma$ *e* $\mathrm{Per}(\phi) = \varnothing$*.*

c) As singularidades são de tipo sela e a união da suas separatrizes é densa em Σ*.*

Demonstração. Supondo que ϕ é um fluxo sem singularidades de índice zero sobre uma superfície compacta Σ, provaremos que:

(a) implica (b);
de fato, pela expansividade do fluxo ϕ aplicando as proposições 3.2.5, 3.2.1 e 3.2.4 obtemos que o conjunto de pontos singulares de ϕ é finito e não vazio; $\Omega(\phi) = \Sigma$ e $Per(\phi) = \varnothing$.

(b) implica (c);
de fato, suponhamos que o fluxo ϕ tem os conjuntos: $\mathrm{Sing}(\phi)$ finito e não vazio, $\Omega(\phi) = \Sigma$ e $\mathrm{Per}(\phi) = \varnothing$. Mostraremos que ϕ tem singularidades de tipo sela, por contradição. Assim suponhamos que existe $p \in \mathrm{Sing}(\phi)$ que não é do tipo sela. Então, existem infinitas separatrizes de ϕ associadas ao ponto singular p, e supondo para cada ponto x da separatrizes, $\omega(x) = \{p\}$. Pelo lema 3.2.3 temos que existe uma separatriz $\phi_{\mathbb{R}}(x)$ assimptóticamente estável, isto é, existe uma bola $B_r(x)$ tal que para cada $y \in B_r(x)$ temos $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{dist}(\phi_t(y), \phi_t(x)) = 0$, segue que x é um ponto errante, absurdo, pois ϕ não tem pontos errantes. Por outro lado, supondo que a união das separatrizes não é densa na superfície e tendo por hipótese, $\Omega(\phi) = \Sigma$, $\mathrm{Per}(\phi) = \varnothing$ e $\mathrm{Sing}(\phi)$ é finito, pelo lema 3.2.5 obtemos que ϕ é um fluxo suspensão de um fluxo irracional e Σ é o toro. Como provamos que ϕ tem pontos selas de índice negativo, chegamos a um absurdo, pois o fluxo irracional no toro não tem pontos selas de índice negativo. Portanto a união das separatrizes é densa na superfície.

(c) implica (a);
de fato, suponha que o fluxo ϕ tem todos seus pontos singulares do tipo sela e a união das separatrizes é densa na superfície Σ. Seja $\beta > 0$, pelo lema 3.2.6, existe $\delta > 0$. Provaremos que δ e uma constante de expansividade do fluxo ϕ, por absurdo; isto é suponha que existem $x, y \in \Sigma$ e $h \in \mathcal{H}_0^+(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{dist}(\phi_t(x), \phi_{h(t)}(y)) < \delta$ e $\delta_\phi(x, y) \geqslant \beta$. Aplicando novamente o lema 3.2.6 obtemos que se existe uma separatriz γ de ϕ que intersecta l entre x e y, onde l é uma secção transversal que contem x e y, então γ é uma separatriz que está associada a uma singularidade de índice zero. Logo, a união das separatrizes não é densa, que contradizendo a hipótese (c). $\square$

Observação 3.3.1. *Se o fluxo expansivo* ϕ *tem singularidade removível, então o fluxo* ϕ *satisfez os enunciados* (b) *e* (c) *do teorema A. Mas se adicionamos um número finito de singularidades de índice 0 zero no fluxo irracional sobre o toro, então o fluxo irracional satisfez os enunciados* (b) *e* (c) *do teorema A, mas o fluxo irracional não é expansivo.*

Para uma caracterização sem restrições, introduzimos o seguinte conceito.

Definição 3.7. *Seja ϕ fluxo na superfície Σ e um ponto singular $p \in \mathrm{Sing}(\phi)$ de índice negativo de ϕ; ϕ' um fluxo sobre Σ que remove todo ponto singular de índice 0 zero de ϕ. Chamaremos* ***uma ϕ'-separatriz de p, à separatriz estendida de p para o fluxo ϕ.***

Teorema 3.4. *Seja ϕ um fluxo sobre a superfície compacta Σ, os seguintes enunciados são equivalentes:*

a) ϕ é expansivo,

b) ϕ tem singularidades de tipo sela e a união das separatrizes estendidas das singularidades de índice negativo é densa na superfície Σ.

Demonstração. Consideremos ϕ' um fluxo obtido de ϕ. Removendo todas as suas singularidades de índice zero, mostraremos:

(a) implica (b)
Para isso, suponha que ϕ é expansivo, então pelo teorema 3.3 ϕ' é expansivo, e pelo teorema A, se conclui-se que os pontos singulares de ϕ' são do tipo sela e que a união das separatrizes de ϕ' são densas na superfície Σ, pois as separatrizes de ϕ' são separatrizes extendidas de ϕ.

(b) implica (a)
Para isso, suponhamos que a união das separatrizes estendidas de ϕ é densa em Σ e que seus pontos singulares são do tipo sela. Como a união da clausura das separatrizes de ϕ' é igual a clausura da união das separatrizes estendidas de singularidades de índice negativo, obtemos pelo teorema A, que ϕ' é expansivo, e pelo teorema 3.3, que ϕ é expansivo. □

Definição 3.8. *Sejam dois fluxos ϕ_t sobre a superfície compacta Σ e ϕ'_t sobre a superfície compacta Σ'. Se $\gamma \subset \Sigma \backslash \partial\Sigma$ e $\gamma'_1, \gamma'_2 \subset \partial\Sigma'$ são conexões de sela no interior de Σ e na fronteira de Σ', respectivamente, dizemos que* ***ϕ' faz um corte ao longo de γ***. *Se existe uma semi-conjugação $h : \Sigma' \to \Sigma$ tal que*

$$h : \Sigma' \backslash (\mathrm{clos}(\gamma'_1 \cup \gamma'_2)) \to \Sigma \backslash \mathrm{clos}(\gamma),$$

é uma conjugação topológica de ϕ' restrita $\Sigma' \backslash (\mathrm{clos}(\gamma'_1 \cup \gamma'_2))$ ao ϕ restrita $\Sigma \backslash \mathrm{clos}(\gamma)$ (ver definição1.6). Neste caso dizemos que ***ϕ cola γ'_1 com γ'_2***.

Definição 3.9. *Dado o fluxo ϕ sobre Σ dizemos que* ***um fluxo ϕ' sobre Σ' é obtido de ϕ por uma operação básica*** *se este é obtido adicionando ou removendo uma singularidade de índice 0, colando conexões de sela ou cortando ao longo de conexões de sela.*

Observação 3.3.2. *a) Qualquer conexão de sela que não está na fronteira da superfície, pode ser cortada. E, qualquer par de conexões na fronteira pode ser colada.*

b) Sejam dois pontos singulares de índice zero p, $q = \phi_t(p)$, $t > 0$, em uma órbita regular, fazemos um corte sobre a conexão sela determinada por p e q. Seja γ e γ' duas conexões na fronteira conectando p e q. Coloque dois pontos singulares removíveis r e s de índice 0 zero em γ. Agora cole as conexões sela que começam em p, isto é, construímos um fluxo ϕ' que cola γ_1 com γ', onde γ_1 e uma separatriz que conecta as singularidades de índice zero p com r; como na figura 3.14.

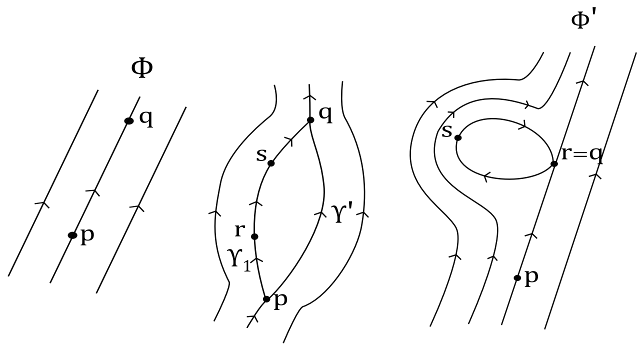


Figura 3.14: Operação básica

Lembremos que qualquer superfície compacta conexa Σ é obtida da esfera adicionando $h \geqslant 0$ alças, $b \geqslant 0$ componentes de fronteiras e $c \geqslant 0$ tampas cruzadas (*crosscap*). Denotemos $\Sigma^{h,b,c} = \Sigma$ tal superfície. O corolário 1.2, diz que uma superfície não orientável que se obtenha adicionando uma alça é equivalente que se obtenha adicionando duas tampas cruzadas (crosscap), Obtemos a seguinte observação:

Observação 3.3.3. *:*

a) $c > 0$ se, e somente se, $\Sigma^{h,b,c}$ é não orientável.

$c > 0$, implica $\Sigma^{h,b,c}$ não é orientável
De fato, suponhamos que $c > 0$ e $\Sigma = \Sigma^{h,b,c}$ sejam orientáveis, como $\Sigma^{h,b,0}$ é orientável, aplicando sucesivamente o teorema 1.4, obtemos que $\Sigma = \Sigma^{h,b,c}$ não é orientável; que contradiz a hipótese.

$\Sigma^{h,b,c}$ não é orientável, implica $c > 0$.
De fato, por absurdo, suponha que $\Sigma = \Sigma^{h,b,c}$ não é orientável e $c \leqslant 0$ então, temos que $c = 0$, pois $c \geqslant 0$; o que contradiz o fato de $\Sigma = \Sigma^{h,b,c}$ não ser orientável.

b) $\Sigma = \Sigma^{h',b,c'}$ é o toro com $h' + b + c' > 0$ se, e somente se $\Sigma = \Sigma^{h,b,c}$ com $h > 0$ e $h + b + c > 1$.

($h > 0$ e $h + b + c > 1$, implica que Σ é o toro e $h' + b + c' > 0$)
De fato, suponhamos que $\Sigma = \Sigma^{h,b,c}$ e $h > 0$, $h+b+c > 1$, tomando $h' = h-1$. Se $\Sigma^{h',b,c}$ não é orientável, pela observação 3.3.3 item 1, temos que $c > 0$; assim pelo teorema 1.3 obtemos que

$$\Sigma^{h'+1,b,c} \approx \Sigma^{h',b,c+2} = \Sigma^{h',b,c'} \quad com\ c' = c + 2 \geqslant 3;$$

logo, Σ é o toro com $h' + b + c' > 0$. Se $\Sigma^{h',b,c}$ for orientável, pela observação 3.3.3, item 1, temos que $c = 0$; como $h+b+c = 1+h'+b > 1$ então $h'+b > 0$; logo Σ é o toro com $h' + b + c' > 0$.

(Σ é o toro e $h' + b + c' > 0$, implica $h > 0$ e $h + b + c > 1$),
de fato, suponhamos que Σ é o toro com $h' + b + c' > 0$; então $\Sigma = \Sigma^{h'+1,b,c'}$. Neste modelo, com $c' \geqslant 3$, será sempre possível reduzir a outro similar a

$$\Sigma \approx \Sigma^{h'+1+[\![\frac{c'}{2}]\!],b,i},$$

com $i = 1$ ou $i = 2$, como se verá depois. Assim, sem perda de generalidade, podemos supor que $c' = 0$, $c' = 1$ ou $c' = 2$. Se $\Sigma^{h',b,c'}$ não é orientável, pela observação 3.3.3 item 1, $c' > 0$. Logo, pelo teorema 1.3, $\Sigma \approx \Sigma^{h',b,c'+2}$, onde $c' + 2 \geqslant 3$. Assim, aplicando a equação 3.34, sucessivamente, obtemos $\Sigma \approx \Sigma^{h'+[\![\frac{c'+2}{2}]\!],b,1}$ ou $\Sigma \approx \Sigma^{h'+[\![\frac{c'+2}{2}]\!],b,2}$. Em quaisquer dos casos, tomando $h = h' + [\![\frac{c'+2}{2}]\!] > 0$, $c = c'$, obtemos

$$h + b + c > 1.$$

Se $\Sigma^{h',b,c'}$ for orientável, então pela observação 3.3.3 item 1, $c' = 0$, logo, $\Sigma = \Sigma^{h'+1,b,c'}$ é orientável; então tomando $h = h' + 1$, $c = c'$, obtemos $h + b + c > 0$.

c) *Se $k > 0$, então existe um fluxo expansivo no toro com k componentes de fronteira. De fato, seja o fluxo irracional no toro, adicionando $k > 0$ componentes de fronteiras disjuntas, como na observação 3.3.2 item 2, o fluxo obtido no toro é expansivo, pois a união das separatrizes é densa no toro, isto pelo teorema 3.4. Assim pelo difeomorfismo das superfícies $\Sigma = \Sigma^{1,k,0}$ com o toro com $k > 0$ componentes de fronteira disjuntas, tais componentes satisfazem a seguinte Propriedade,*
se γ é uma componente de fronteira, então $\mathrm{Sing}(\phi) \cap \gamma = \{p, q\}$ e existe dois pontos regulares $a, b \in \gamma$ tal que $\omega(a) = \alpha(b)\{q\}$ e $\omega(b) = \alpha(a)\{p\}$, como na figura 3.15.

Temos que se $c \geqslant 3$ e pelo teorema 9.1.7 de [13], a superfície não orientável $\Sigma^{h,b,c}$ é isomorfa a $\Sigma^{h+1,b,c-2}$, que denotaremos por

$$\Sigma^{h,b,c} \approx \Sigma^{h+1,b,c-2}, \tag{3.34}$$

logo, os modelos de superfície não orientável $\Sigma = \Sigma^{h,b,c}$, com $c \geqslant 3$, podem se reduzir a estudar supondo apenas $h \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, e $c = 1$ ou $c = 2$, pois, aplicando

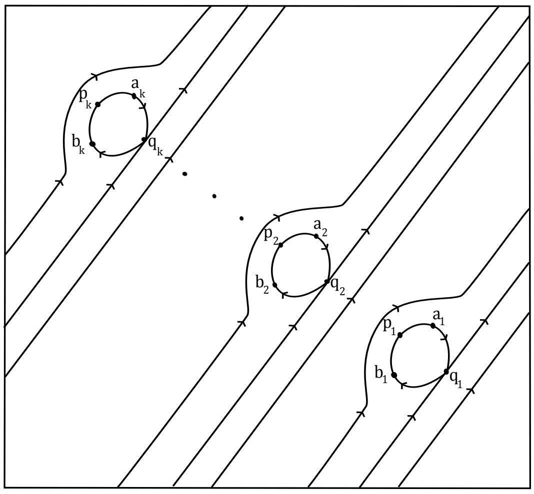


Figura 3.15: Toro com K componentes de fronteiras

sucessivamente a equação (3.34) temos

$$\Sigma^{h,b,c} \approx \Sigma^{h+[\![\frac{c}{2}]\!],b,1} \quad \text{ou} \quad \Sigma^{h,b,c} \approx \Sigma^{h+[\![\frac{c}{2},]\!]b,2}.$$

Assim, um modelo de superfície $\Sigma = \Sigma^{h,b,c}$, com $h \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ e $c \geqslant 0$ vamos supor sempre como sendo $c = 0$, $c = 1$ ou $c = 2$.

Teorema B. *Seja uma superfície compacta e conexa $\Sigma = \Sigma^{h,b,c}$; as seguintes afirmações são equivalentes:*

a) $\Sigma = \Sigma^{h,b,c}$ *admite um fluxo expansivo*

b) $\Sigma = \Sigma^{h,b,c}$ *satisfaz* $h > 0$ *e* $h + b + c > 1$

Demonstração. Seja uma superfície compacta e conexa $\Sigma = \Sigma^{h,b,c}$, provaremos:
(a) implica (b);
Suponhamos que a superfície $\Sigma = \Sigma^{h,b,c}$; com $h \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ e $c \geqslant 0$, onde denotaremos $gen(\Sigma^{h,b,c})$ como sendo o gênero de $\Sigma^{h,b,c}$, admita um fluxo expansivo ϕ. Pelo teorema 3.3, que diz que um fluxo expansivo continua sendo expansivo se adiciona ou remove singularidades de índice 0, podemos supor que ϕ não tem singularidades de índice 0. Como o índice de qualquer ponto singular é negativo, então a característica de Euler $\chi(S) < 0$ é negativa. Pelo teorema A, temos que o fluxo tem órbitas recorrentes não triviais, pois, caso contrário, o conjunto de pontos recorrentes de ϕ se reduz ao $\mathrm{Sing}(\phi)$ conjunto de pontos singulares de ϕ, isto é, $\Omega(\phi) = \mathrm{Sing}(\phi) \neq \Sigma$, absurdo.
Se $c = 0$, como $\Sigma = \Sigma^{h,b,0}$ é orientável, então pelo teorema 4 em [17], que diz que o número máximo de conjuntos fechados sendo órbitas recorrentes não triviais é o gênero da superfície orientável, supondo $gen(\Sigma) = g$ obtemos que $g \geqslant 1$: como em uma superfície orientável o gênero é igual ao número de alça, $g = h$; então

$$h > 0. \tag{3.35}$$

Além disso, como a nossa superfície orientável $\Sigma = \Sigma^{h,b,0}$ tem característica de Euler negativa e $\chi(\Sigma) = 2 - g - b = 2 - 2h - b$, então $2 < 2h + b$. Se $h + b = 0$, obtemos que $h = -b$. Logo, pelo resultado (3.35), temos que $0 < -b$, isto é, $b < 0$, que contradiz o fato de Σ admitir um número não negativo de componentes de fronteiras $b \geqslant 0$. Se $h + b = 1$, então $h = 1 - b > 0$, pelo que $1 > b \geqslant 0$. Logo como $b \in \mathbb{Z}$ é um número inteiro obtemos $b = 0$, então $h = 1$; e como $2 < 2h + b$ chegamos em $2 < 2$, absurdo; assim, $h + b > 1$. Com isso, e sendo $h > 0$, temos

$$h > 0 \quad \text{e} \quad h + b + c > 1.$$

Se $c > 0$, como $\Sigma = \Sigma^{h,b,c}$ é não orientável, isto, pela observação 3.3.3 item (a). Temos, aplicando o teorema 4 de [17], que diz que o número máximo de conjuntos fechados sendo órbitas recorrentes não triviais na superfície não orientável, é $[\![\frac{g-1}{2}]\!]$, onde $gen(\Sigma) = g$. Então

$$1 \leqslant [\![\frac{g-1}{2}]\!]$$

em que

$$1 \leqslant [\![\frac{g-1}{2}]\!] \leqslant \frac{g-1}{2}$$

logo

$$\begin{aligned} 2 &\leqslant g - 1 \\ 3 &\leqslant g \\ 2 &< g. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Como $0 < c \leqslant 2$ e $\Sigma^{h,b,0}$ é uma superfície orientável, com gênero $gen(\Sigma^{h,b,0}) = h$, temos que pelo teorema 1.4 a superfície não orientável $\Sigma^{h,b,1}$ tem géner o

$$gen(\Sigma^{h,b,1}) = 2gen(\Sigma^{h,c,0}) + 1 = 2h + 1$$

Se supomos que a superfície não orientável $\Sigma^{h,b,c}$ tem gênero $gen(\Sigma^{h,b,c}) = 2h + c$, temos que a superfície não orientável $\Sigma^{h,b,c+1}$ tem gênero $gen(\Sigma^{h,b,c+1}) = 2h+c+1$; portanto

$$g = gen(\Sigma^{h,b,c}) = 2h + c.$$

Assim, pela equação (3.36) obtemos $2 < g = 2h + c$ e como $0 < c \leqslant 2$

$$\begin{aligned} 2 < g &\leqslant 2 + 2h \\ 2 < c + 2h &\leqslant 2 + 2h \\ 2 &< 2 + 2h \\ 0 &< 2h \\ 0 &< h \end{aligned}$$

segue que $0 < c \leqslant 2$, assim

$$h + c > 1$$

segue que $h > 0$ e $h + b + c > 1$;

(b) implica (a);
Suponha que $\Sigma = \Sigma^{h,b,c}$ é uma superfície compacta com $h \geqslant 0$ alças, $b \geqslant 0$, componentes de fronteira e $c \geqslant 0$ crosscaps, tais que

$$h > 0,\ h + b + c > 1.$$

Pela observação 3.3.3 item (b), é equivalente a dizer que Σ é um toro com $h' \geqslant 0$ alças, $b \geqslant 0$ componentes de fronteira e $c' \geqslant 0$ crosscaps, tais que

$$h' + b + c' > 0.$$

Vamos mostrar que a superfície Σ, é um toro com

$$h' + b + c' > 0$$

admite um fluxo expansivo. Com a observação 3.3.3 item (c), como $h', b, c' \geqslant 0$ e como $h' + b + c' > 0$ tome $k = 2h' + b + c' > 0$. Pela observação 3.3.3 item 3, existe um fluxo expansivo no toro com $k = 2h' + b + c' > 0$ componentes de fronteira como sendo $\partial\Sigma = \cup_{i=1}^{k}\gamma_i$ tal que γ_i é homeomorfa ao círculo, para todo $i \in \{1, \cdot, k\}$, e satisfez a propriedade da observação 3.3.3 item (c). Colando dois componentes de fronteira, obtemos um novo fluxo que é expansivo, isto pelo teorema 3.4, pois a união das suas separatrizes ainda é densa e os pontos singulares são selas. Fazendo h colagens obtemos um fluxo que ainda é expansivo, novamente pelo teorema 3.4. Da mesma maneira se pode adicionar $c \geqslant 0$ crosscap identificando pontos em uma componente de fronteira γ_i tal que satisfaz a propriedade da observação 3.3.3 item 3. Isto é, $a, b, p, q \in \gamma_i$ são pontos singulares tal que identificamos p com q e para cada $t \in \mathbb{R}$ $\phi'_t(a)$ com $\phi'_t(b)$, pois, pelo teorema 3.4 ϕ' é expansivo. Portanto, o fluxo ϕ assim determinado é expansivo sobre a superfície Σ, que é o toro, com $h' + b + c' > 0$, é equivalente a dizer que existe um fluxo ϕ sobre $\Sigma = \Sigma^{h,b,c}$, com $h > 0$ e $h + b + c > 1$. □

Observação 3.3.4. *A superfície compacta conexa que não admite fluxos expansivos é:*

a) *O toro;*
de fato, seja ϕ' um fluxo expansivo sobre a superfície $\Sigma' = \Sigma'^{h,b,c}$; onde $h \geqslant 0$ é o número de alças, $b \geqslant 0$ é o número de componentes de fronteira e $c \geqslant 0$ é o número de crosscap ou de tampas cruzadas; então, pelo teorema B

$$h > 0 \quad e \quad h + b + c > 0,$$

desse modo, pela observação 3.3.3 item 3, podemos supor que Σ' é o toro com $h' \geqslant 0$ número de alças, $c' \geqslant 0$ número de crosscap ou de tampas cruzadas tal que

$$h' + b + c' > 0$$

pelo que Σ' não é o toro.

b) *A esfera com b componentes de fronteira;*

c) *O fluxo projetivo com b componentes de fronteira, e* *d) A garrafa de Klein com b componentes de fronteira (com $0 \leqslant b < \infty$) nos três casos.*

Teorema 3.5. *Supondo que Σ é uma superfície compacta diferente do toro, e considerando um fluxo ϕ sobre Σ; então os seguintes enunciados são equivalentes:*

a) ϕ é expansivo

b) ϕ e seu conjunto $\mathrm{Sing}(\phi)$ *é finito,* $\Omega(\phi) = \Sigma$, $\mathrm{Per}(\phi) = \varnothing$.

Demonstração. Suponhamos uma superfície Σ compacta diferente do toro. Provaremos:

(a) implica (b)
Suponha que ϕ é expansivo. Pelas proposições 3.2.1 e 3.2.4 temos que o conjunto $\Omega(\phi) = \Sigma$ de pontos não errantes é toda a superfície e o conjunto $Per(\phi)$ de pontos periódicos é vazio. Agora, por ser ϕ expansivo em uma superfície compacta, temos que o conjunto $\mathrm{Sing}(\phi)$ é finito.

(b) implica (a);
De fato. Suponhamos que ϕ é um fluxo sobre Σ e os conjuntos $\Omega(\phi) = \Sigma$, $Per(\phi) = \varnothing$ e $\mathrm{Sing}(\phi)$ finito. Considere ϕ' o fluxo que remove todas as singularidades removíveis de ϕ. Obtem-se que $\Omega(\phi) = \Omega(\phi')$, $\mathrm{Sing}(\phi)$ é finito e ϕ' não tem órbitas periódicas. Como Σ não é o toro pelo lema 3.2.5 concluisemos que a união das separatrizes de ϕ' é densa na superfície. Agora como ϕ' não tem singularidades de índice zero, as singularidades são selas de índice negativo, pelo teorema A, obtemos que ϕ' é expansivo e pelo teorema 3.3 temos que ϕ é expansivo. □

Segue o resultado que pode ser considerado como um complemento do teorema 3.3:

Corolário 3.6. *Se ϕ é um fluxo expansivo sobre a superfície Σ e ϕ' é um fluxo sobre Σ' obtido de ϕ por uma operação básica, os seguintes enunciados são equivalentes:*

a) ϕ' é expansivo

b) Σ' não é o toro

Demonstração. Suponha que ϕ é um fluxo expansivo sobre a superfície Σ e ϕ' é um fluxo sobre a superfície Σ' obtido de ϕ por uma operação básica. Provaremos:

(a) implica (b);
Suponhamos que ϕ' é expansivo sobre a superfície compacta Σ', pela observação 3.3.4, temos que Σ' não é o toro.

(b) implica (a);
Suponhamos que Σ' não é o toro; pelo teorema 3.3 a expansividade é invariante adicionando ou removendo singularidade. Se colarmos ou cortarmos conexões de sela, então $\Omega(\phi') = \Sigma'$; as órbitas periódicas, também não podem existir fazendo operações básicas, e pela expansividade de ϕ temos Sing(ϕ) finito segue que Sing(ϕ') é finito. Logo, aplicando o teorema 3.5 ,obtemos que ϕ' é expansivo. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] J. M. Alongi; G. S. Nelson, *Recurrence and Topology,* American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (2007).

[2] D. V. Anosov, *Geodesic Flows on closed Riemann Manifolds with negative curvature,* Proc. of the Steklov Inst. of Mathematics 90. (1967).

[3] S. Kh. Aranson; G. R. Belitsky; E. V. Zhuzhoma *Qualitative Theory of Dynamical Systems on Surfaces.* Springer Press(1999).

[4] A. Artigue, *Expansive Dynamical Systems,* Universidad de la República, Uruguai (2015).

[5] A. Artigue, *Expansive Flows of Surfaces,* Discrete and Continuous Dynamical Systems, (2013) vol.33, no. 2, 505-525.

[6] R. Bowen; P. Walters *Expansive One-Parameter Flow.* J. Diff. Eq. Press(1972), 180-193.

[7] M. Brin; G. Stock, *Introduction to Dynamical Systems,* Cambridge University Press(2002).

[8] M. Cerminara; J. Lewowicz, *Some open problems concerning expansive systems,* Rend. Instit. Mat. Univ. Trieste 42 (2010), 129-141.

[9] A. A. Gura, *Horocycle flow on a surface of negative curvature is separating,* Mat. Zametki (1984).

[10] C. Gutiérrez, *Smoothability of Cherry flows on two-manifolds,* In Lecture Notes in Math, Springer, Berlin, 1007 (1983), 308-331.

[11] C. Gutiérrez,*Smoothing continuous flows on two-manifolds and recurrences,* Ergodic Theory Dynam. Systems, 6 (1986), 17-44

[12] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations,* John Wiley Sons Inc., New York, 1964.

[13] M. W. Hirsch, *Differential Topology,* Graduate Texts in Mathematics, No. 33, Springer-Verlag, New York, 1976.

[14] J. F. Jakobsen; W. R. Utz *The nonexistence of expansive homeomorphisms on a closed 2-cell,* Pacific J. Math. (1960), no. 4, 1319-1321.

[15] A. Katok; Boris Hasselblatt, *A Moderna Teoria de Sistemas Dinâmicos,* Cambridge University Press(1999).

[16] M. Komuro, *Expansive properties of Lorenz attractors,* The Theory of dynamical systems and its applications to nonlinear problems (1984), 4-26.

[17] N. G. Markley, *On the nunber of recurrent orbit closures,* Proc. Amer. Math. Soc., 25 (1970),413-416.

[18] M. Oka, *Expansive of real flows,* Tsukuba J. Math. (1990), no. 1, 1-8.

[19] R. O. Ruggiero, *Expansive geodesic flows in manifolds with no conjugate points,* Erg, Th. and Dyn. Sys. 17 (1997), 211-225.

[20] J. Sotomayor, *Equações Diferenciais Ordinárias,* Coleção de textos universitários do IME-USP; v.3 (2011).

[21] H. Whitney, *Regular families of curves,* Ann. of Math, 34 (1983) 244-270.