

RODRIGO LUIZ PEREIRA LARA

**DESEMPENHOS DE DIFERENTES PROPOSTAS DE PLANEJAMENTOS  
DE GRÁFICOS DE CONTROLE MULTIVARIADOS**

Tese apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria, para obtenção do título de *Doctor Scientiae*.

VIÇOSA  
MINAS GERAIS - BRASIL  
2017

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade  
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa

T

L318d  
2017 Lara, Rodrigo Luiz Pereira, 1984-  
Desempenhos de diferentes propostas de planejamentos de  
gráficos de controle multivariados. / Rodrigo Luiz Pereira Lara.  
– Viçosa, MG, 2017.  
xvi, 133f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Inclui anexos.

Orientador: José Ivo Ribeiro Júnior.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Viçosa.

Inclui bibliografia.

1. Estatística. 2. Probabilidades. 3. Métodos gráficos.

I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Estatística.  
Programa de Pós-graduação em Estatística Aplicada e Biometria.

II. Título.

CDD 22 ed. 519.5

RODRIGO LUIZ PEREIRA LARA

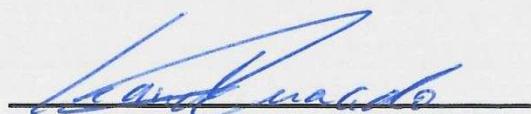
**DESEMPENHOS DE DIFERENTES PROPOSTAS DE PLANEJAMENTOS  
DE GRÁFICOS DE CONTROLE MULTIVARIADOS**

Tese apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria, para obtenção do título de *Doctor Scientiae*.

APROVADA: 17 de julho de 2017.



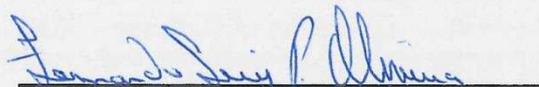
Alexandre Navarro da Silva



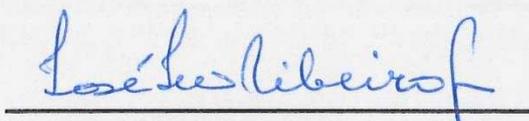
Leandro Roberto de Macedo



Paulo César Emiliano



Fernando Luiz Pereira de Oliveira  
Coorientador



José Ivo Ribeiro Júnior  
Orientador

*Aos meus pais*

*Maria Aparecida Pereira Lara  
e Luiz Alcides Mesquita Lara*

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, por me conduzir no caminho da vida.

Aos meus pais pela educação e amor incondicional, a quem sempre estarei em dívida; e à minha irmã Cinara que sempre esteve próxima a mim e compartilhou de grandes momentos da minha vida. Ao meu cunhado Renato pela amizade, apoio e incentivo.

À minha namorada Ligiana, por todo o carinho e paciência comigo.

Aos companheiros de doutorado, tanto da minha turma como turmas adjacentes, cuja convivência e espírito de equipe se mostraram fundamentais ao longo da jornada.

A todos os amigos do mestrado, graduação e de Ouro Preto, que caminharam comigo em diversos períodos da minha vida, que me forneceram ajuda e companheirismo nas mais variadas situações.

A todos os professores do Departamento de Estatística da Universidade Federal de Viçosa.

Aos funcionários do DET-UFV Anita Paiva, Carla Zinato e Júnior Pires, pela constante prontidão em nos auxiliar nas diversas atividades burocráticas do PPESTBIO/UFV.

Ao meu professor orientador e amigo José Ivo Ribeiro Júnior, pelos ensinamentos, atenção, amizade, paciência e preciosos conselhos dados durante o doutorado.

Ao professores do DMAFE – IFSudeste, Campus Rio Pomba, por apoiarem meu afastamento para a finalização dessa tese.

Aos professores membros da banca pelas críticas e sugestões.

# SUMÁRIO

|   |     |
|---|-----|
| LISTA DE FIGURAS .....                      | vi  |
| LISTA DE TABELAS .....                      | x   |
| LISTA DE SIGLAS E SÍMBOLOS .....            | xii |
| RESUMO .....                                | xv  |
| ABSTRACT .....                              | xvi |
| <br>  |     |
| 1. INTRODUÇÃO .....                         | 1   |
| <br>  |     |
| 2. OBJETIVOS .....                          | 3   |
| 2.1 Geral.....                              | 3   |
| 2.2 Específicos .....                       | 3   |
| <br>  |     |
| 3. REFERENCIAL TEÓRICO .....                | 4   |
| 3.1 Controle Estatístico de Processos ..... | 4   |
| 3.2 Gráfico de Controle Univariado.....     | 5   |
| 3.2.1 Shewhart.....                         | 6   |
| 3.2.2 CUSUM .....                           | 7   |
| 3.2.3 EWMA .....                            | 11  |
| 3.2.4 Desempenho.....                       | 14  |
| 3.3 Gráficos de Controle Multivariado ..... | 21  |
| 3.3.1 $T^2$ de Hotelling .....              | 24  |
| 3.3.2 MCUSUM.....                           | 26  |
| 3.3.3 MEWMA .....                           | 30  |
| 3.3.4 Lin-MEWMA.....                        | 33  |
| 3.3.5 ELR .....                             | 34  |
| <br>  |     |
| 4. MATERIAL E MÉTODOS .....                 | 38  |
| 4.1 $T^2$ de Hotelling .....                | 42  |
| 4.2 MCUSUM.....                             | 44  |
| 4.3 MEWMA .....                             | 48  |
| 4.4 Lin-MEWMA.....                          | 51  |

|         |   |     |
|---------|---|-----|
| 4.5     | ELR .....   | 54  |
|         |   |     |
| 5.      | RESULTADOS E DISCUSSÃO .....  | 58  |
| 5.1     | T <sup>2</sup> de Hotelling .....   | 58  |
| 5.1.1   | Planejamento .....  | 58  |
| 5.1.2   | Alarme Falso .....  | 58  |
| 5.1.3   | Alarme Verdadeiro.....  | 59  |
| 5.2     | MCUSUM.....   | 61  |
| 5.2.1   | Planejamento .....  | 61  |
| 5.2.2   | Alarme Falso .....  | 63  |
| 5.2.3   | Alarme Verdadeiro.....  | 65  |
| 5.3     | MEWMA .....   | 72  |
| 5.3.1   | Planejamento.....   | 72  |
| 5.3.2   | Alarme Falso .....  | 73  |
| 5.3.3   | Alarme Verdadeiro.....  | 75  |
| 5.4     | Lin-MEWMA.....  | 79  |
| 5.4.1   | Planejamento .....  | 79  |
| 5.4.2   | Alarme Falso .....  | 80  |
| 5.4.3   | Alarme Verdadeiro.....  | 83  |
| 5.5     | ELR .....   | 91  |
| 5.5.1   | Planejamento .....  | 91  |
| 5.5.2   | Alarme Falso .....  | 92  |
| 5.5.3   | Alarme Verdadeiro.....  | 95  |
| 5.6     | Consiaerações Gerais .....  | 104 |
|         |   |     |
| 6.      | CONCLUSÕES .....  | 114 |
|         |   |     |
| 7.      | REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....   | 115 |
|         |   |     |
| Anexo A | - Funções desenvolvidas para o planejamento do T <sup>2</sup> de Hotelling..... | 121 |
| Anexo B | - Funções desenvolvidas para o planejamento do MCUSUM.....                      | 123 |
| Anexo C | - Funções desenvolvidas para o planejamento do MEWMA.....                       | 126 |
| Anexo D | - Funções desenvolvidas para o planejamento do Lin-MEWMA .....                  | 129 |
| Anexo E | - Funções desenvolvidas para o planejamento do ELR .....                        | 132 |

## LISTA DE FIGURAS

|   |    |
|---|----|
| <b>Figura 4.1.</b> Fluxograma do uso das funções Est_Hotelling, ARL_IC_medio, AF_por_SR e AV_por_SR ao longo do planejamento do gráfico de controle T <sup>2</sup> de Hotelling.....  | 43 |
| <b>Figura 4.2.</b> Fluxograma do uso das funções Est_MCUSUM, ARL_IC_medio, AF_por_SR e AV_por_SR ao longo do planejamento do gráfico de controle MCUSUM.....  | 46 |
| <b>Figura 4.3.</b> Fluxograma do uso das funções Est_MEWMA, ARL_IC_medio, AF_por_SR e AV_por_SR ao longo do planejamento do gráfico de controle MEWMA. ....   | 49 |
| <b>Figura 4.4.</b> Fluxograma do uso das funções Est_LinMEWMA, ARL_IC_medio, AF_por_SR e AV_por_SR ao longo do planejamento do gráfico de controle Lin-MEWMA. ....  | 52 |
| <b>Figura 4.5.</b> Fluxograma do uso das funções Est_ELR, ARL_IC_medio, AF_por_SR e AV_por_SR ao longo do planejamento do gráfico de controle ELR.....  | 55 |
| <b>Figura 5.1.</b> Estimativas das probabilidades dos alarmes falsos para os primeiros 50 subgrupos racionais do T <sup>2</sup> de Hotelling, em função das combinações entre $p$ e $\sigma_{ww'}$ com o respectivo $h$ .....                               | 59 |
| <b>Figura 5.2.</b> Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) para os primeiros 50 subgrupos racionais do T <sup>2</sup> de Hotelling, em função da combinação entre $p$ , $\sigma_{ww'}$ e $\mu_1$ , com o respectivo $h$ .....        | 59 |
| <b>Figura 5.3.</b> Estimativas das probabilidades dos alarmes falsos ao longo dos primeiros 50 subgrupos racionais para o gráfico de controle MCUSUM.....   | 65 |
| <b>Figura 5.4.</b> Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do MCUSUM de acordo com $\mu_1 = [0,5 \ 0,5]'$ ; $[1 \ 1]'$ ; $[2 \ 2]'$ e $[3 \ 3]'$ ao longo dos primeiros 50 subgrupos racionais, para $p = 2$ . ....                  | 67 |
| <b>Figura 5.5.</b> Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do MCUSUM de acordo com $\mu_1 = [0,5 \dots 0,5]'$ ; $[1 \dots 1]'$ ; $[2 \dots 2]'$ e $[3 \dots 3]'$ ao longo dos primeiros 50 subgrupos racionais, para $p = 6$ .. .... | 68 |
| <b>Figura 5.6.</b> Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do MCUSUM de acordo com $\mu_1 = [0,5 \dots 0,5]'$ ; $[1 \dots 1]'$ ; $[2 \dots 2]'$ e $[3 \dots 3]'$ ao longo dos primeiros 50 subgrupos racionais, para $p = 10$ .....  | 69 |
| <b>Figura 5.7.</b> Estimativas das probabilidades dos alarmes falsos do MEWMA em função do parâmetro de suavização $\lambda$ e quantidade $p$ de características monitoradas.....   | 73 |

|   |    |
|---|----|
| <b>Figura 5.8.</b> Estimativas das probabilidades dos alarmes falsos do MEWMA ao longo dos primeiros 50 subgrupos racionais em função do parâmetro de suavização $\lambda$ , matriz de covariâncias $\Sigma_0$ e quantidade $p$ de características monitoradas.....                                 | 74 |
| <b>Figura 5.9.</b> Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do MEWMA ao longo dos primeiros 50 subgrupos racionais, em função do parâmetro de suavização $\lambda$ , vetor de médias fora de controle $\mu_1$ e matriz de covariâncias $\Sigma_0$ , para $p = 2$ .....        | 75 |
| <b>Figura 5.10.</b> Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do MEWMA ao longo dos primeiros 50 subgrupos racionais, em função do parâmetro de suavização $\lambda$ , vetor de médias fora de controle $\mu_1$ e matriz de covariâncias $\Sigma_0$ , para $p = 6$ .....       | 76 |
| <b>Figura 5.11.</b> Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do MEWMA ao longo dos primeiros 50 subgrupos racionais, em função do parâmetro de suavização $\lambda$ , vetor de médias fora de controle $\mu_1$ e matriz de covariâncias $\Sigma_0$ , para $p = 10$ .....      | 77 |
| <b>Figura 5.12.</b> Estimativas das probabilidades dos alarmes falsos do Lin-MEWMA em função do parâmetro de suavização $\lambda$ e quantidade $p$ de características monitoradas .....   | 80 |
| <b>Figura 5.13.</b> Estimativas das probabilidades dos alarmes falsos do Lin-MEWMA ao longo dos primeiros 200 subgrupos racionais em função do parâmetro de suavização $\lambda$ , matriz de covariâncias $\Sigma_0$ e quantidade $p$ de características monitoradas .....                          | 81 |
| <b>Figura 5.14.</b> Estimativas das probabilidades dos alarmes falsos do Lin-MEWMA ao longo dos primeiros 50 subgrupos racionais em função do parâmetro de suavização $\lambda$ , matriz de covariâncias $\Sigma_0$ e quantidade $p$ de características monitoradas.....                            | 82 |
| <b>Figura 5.15.</b> Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do Lin-MEWMA ao longo dos primeiros 200 subgrupos racionais, em função do parâmetro de suavização $\lambda$ , vetor de médias fora de controle $\mu_1$ e matriz de covariâncias $\Sigma_0$ , para $p = 2$ .....  | 83 |
| <b>Figura 5.16.</b> Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do Lin-MEWMA ao longo dos primeiros 200 subgrupos racionais, em função do parâmetro de suavização $\lambda$ , vetor de médias fora de controle $\mu_1$ e matriz de covariâncias $\Sigma_0$ , para $p = 6$ .....  | 84 |
| <b>Figura 5.17.</b> Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do Lin-MEWMA ao longo dos primeiros 200 subgrupos racionais, em função do parâmetro de suavização $\lambda$ , vetor de médias fora de controle $\mu_1$ e matriz de covariâncias $\Sigma_0$ , para $p = 10$ ..... | 85 |

|   |    |
|---|----|
| <b>Figura 5.18.</b> Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do Lin-MEWMA ao longo dos 50 primeiros subgrupos racionais em função do parâmetro de suavização $\lambda$ , vetor de médias fora de controle $\mu_1$ , matriz de covariâncias $\Sigma_0$ , para $p = 2$ características monitoradas..  | 86 |
| <b>Figura 5.19.</b> Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do Lin-MEWMA ao longo dos 50 primeiros subgrupos racionais em função do parâmetro de suavização $\lambda$ , vetor de médias fora de controle $\mu_1$ , matriz de covariâncias $\Sigma_0$ , para $p = 6$ características monitoradas..  | 87 |
| <b>Figura 5.20.</b> Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do Lin-MEWMA ao longo dos 50 primeiros subgrupos racionais em função do parâmetro de suavização $\lambda$ , vetor de médias fora de controle $\mu_1$ , matriz de covariâncias $\Sigma_0$ , para $p = 10$ características monitoradas.. | 88 |
| <b>Figura 5.21.</b> Estimativas das probabilidades dos alarmes falsos do ELR em função do parâmetro de suavização $\lambda$ e quantidade $p$ de características monitoradas..   | 93 |
| <b>Figura 5.22.</b> Estimativas das probabilidades dos alarmes falsos do ELR ao longo dos primeiros 200 subgrupos racionais, em função do parâmetro de suavização $\lambda$ , matriz de covariâncias $\Sigma_0$ e quantidade $p$ de características monitoradas.....  | 93 |
| <b>Figura 5.23.</b> Estimativas das probabilidades dos alarmes falsos do ELR ao longo dos primeiros 50 subgrupos racionais em função do parâmetro de suavização $\lambda$ , matriz de covariâncias $\Sigma_0$ e quantidade $p$ de características monitoradas.....  | 94 |
| <b>Figura 5.24.</b> Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do ELR ao longo dos primeiros 200 subgrupos racionais em função do parâmetro de suavização $\lambda$ , vetor de médias fora de controle $\mu_1$ , matriz de covariâncias $\Sigma_0$ , para $p = 2$ características monitoradas .....   | 96 |
| <b>Figura 5.25.</b> Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do ELR ao longo dos primeiros 200 subgrupos racionais em função do parâmetro de suavização $\lambda$ , vetor de médias fora de controle $\mu_1$ , matriz de covariâncias $\Sigma_0$ , para $p = 6$ características monitoradas .....   | 97 |
| <b>Figura 5.26.</b> Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do ELR ao longo dos primeiros 200 subgrupos racionais em função do parâmetro de suavização $\lambda$ , vetor de médias fora de controle $\mu_1$ , matriz de covariâncias $\Sigma_0$ , para $p = 10$ características monitoradas .....  | 98 |
| <b>Figura 5.27.</b> Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do ELR ao longo dos primeiros 50 subgrupos racionais em função do parâmetro de suavização $\lambda$ , vetor de médias fora de controle $\mu_1$ , matriz de covariâncias $\Sigma_0$ , para $p = 2$ características monitoradas .....    | 99 |
| <b>Figura 5.28.</b> Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do ELR ao longo dos primeiros 50 subgrupos racionais em função do parâmetro de   |    |

suavização  $\lambda$ , vetor de médias fora de controle  $\boldsymbol{\mu}_1$ , matriz de covariâncias  $\boldsymbol{\Sigma}_0$ , para  $p = 6$  características monitoradas ..... 100

**Figura 5.29.** Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do ELR ao longo dos primeiros 50 subgrupos racionais em função do parâmetro de suavização  $\lambda$ , vetor de médias fora de controle  $\boldsymbol{\mu}_1$ , matriz de covariâncias  $\boldsymbol{\Sigma}_0$ , para  $p = 10$  características monitoradas ..... 101

**Figura 5.30.** Desempenhos dos GCMs  $T^2$  de Hotelling, MCUSUM, MEWMA, Lin-MEWMA e ELR a partir de suas respectivas recomendações, para  $p = 2$  e  $\boldsymbol{\mu}_1 = [0,5 \ 0,5]'$  ..... 105

**Figura 5.31.** Desempenhos dos GCMs  $T^2$  de Hotelling, MCUSUM, MEWMA, Lin-MEWMA e ELR a partir de suas respectivas recomendações para  $p = 6$  e  $\boldsymbol{\mu}_1 = [0,5 \ \dots \ 0,5]'$  ..... 106

**Figura 5.32.** Desempenhos dos GCMs  $T^2$  de Hotelling, MCUSUM, MEWMA, Lin-MEWMA e ELR a partir de suas respectivas recomendações para  $p = 10$  e  $\boldsymbol{\mu}_1 = [0,5 \ \dots \ 0,5]'$  ..... 107

**Figura 5.33.** Desempenhos dos GCMs  $T^2$  de Hotelling, MCUSUM, MEWMA, Lin-MEWMA e ELR a partir de suas respectivas recomendações para  $p = 2$  e  $\boldsymbol{\mu}_1 = [1 \ 1]'$  ..... 109

**Figura 5.34.** Desempenhos dos GCMs  $T^2$  de Hotelling, MCUSUM, MEWMA, Lin-MEWMA e ELR a partir de suas respectivas recomendações para  $p = 6$  e  $\boldsymbol{\mu}_1 = [1 \ \dots \ 1]'$  ..... 110

**Figura 5.35.** Desempenhos dos GCMs  $T^2$  de Hotelling, MCUSUM, MEWMA, Lin-MEWMA e ELR a partir de suas respectivas recomendações para  $p = 10$  e  $\boldsymbol{\mu}_1 = [1 \ \dots \ 1]'$  ..... 111

## LISTA DE TABELAS

|   |    |
|---|----|
| <b>Tabela 4.1.</b> Resumo das combinações entre os termos dos GCMs utilizadas nas simulações.....   | 57 |
| <b>Tabela 5.1.</b> Intervalos de decisão $h$ que proporcionam $ARL IC = 200$ em função de $p$ e $\sigma_{ww'}$ para o $T^2$ de Hotelling.....   | 58 |
| <b>Tabela 5.2.</b> Valores recomendados para o $T^2$ de Hotelling considerando a matriz de covariâncias sob controle e o vetor de médias fora de controle $\boldsymbol{\mu}_1 = [3 \ \cdots \ 3]'$ .....                                      | 61 |
| <b>Tabela 5.3.</b> Raiz quadrada da distância de Mahalanobis referente à mudança do vetor de médias $\boldsymbol{\mu}_0$ para $\boldsymbol{\mu}_1$ sob a matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}_0(\sigma_{ww'})$ .....                   | 61 |
| <b>Tabela 5.4.</b> Valor de referência $k$ recomendado por Crosier (1988) para monitorar a mudança do vetor de médias $\boldsymbol{\mu}_0$ para $\boldsymbol{\mu}_1$ sob a matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}_0(\sigma_{ww'})$ ..... | 62 |
| <b>Tabela 5.5.</b> Intervalos de decisão $h$ que proporcionam $ARL IC = 200$ para o MCUSUM.....   | 62 |
| <b>Tabela 5.6.</b> Médias das probabilidades dos alarmes falsos do MCUSUM em função de $p$ , $\mu_1$ e $\sigma$ .....   | 64 |
| <b>Tabela 5.7.</b> Médias dos poderes por subgrupo racional do MCUSUM do primeiro ao quinquagésimo subgrupo racional.....   | 69 |
| <b>Tabela 5.8.</b> Médias dos poderes por subgrupo racional do MCUSUM do primeiro ao ducentésimo subgrupo racional.....   | 70 |
| <b>Tabela 5.9.</b> Valores recomendados dos pares $k$ e $h$ do MCUSUM, considerando-se a matriz de covariâncias sob controle e o vetor de médias fora de controle, para $p = 2$ .....   | 70 |
| <b>Tabela 5.10.</b> Valores recomendados dos pares $k$ e $h$ do MCUSUM, considerando-se a matriz de covariâncias sob controle e o vetor de médias fora de controle, para $p = 6$ .....  | 71 |
| <b>Tabela 5.11.</b> Valores recomendados dos pares $k$ e $h$ do MCUSUM, considerando-se a matriz de covariâncias sob controle e o vetor de médias fora de controle, para $p = 10$ .....   | 71 |
| <b>Tabela 5.12.</b> Intervalos de decisão $h$ para o gráfico de controle MEWMA que proporcionam $ARL IC = 200$ .....  | 72 |

|  |     |
|--|-----|
| <b>Tabela 5.13.</b> Valores recomendados dos pares $\lambda$ e $h$ do MEWMA, considerando-se a matriz de covariâncias sob controle e o vetor de médias fora de controle, para $p = 2$ .....      | 78  |
| <b>Tabela 5.14.</b> Valores recomendados dos pares $\lambda$ e $h$ do MEWMA, considerando-se a matriz de covariâncias sob controle e o vetor de médias fora de controle, para $p = 6$ .....      | 78  |
| <b>Tabela 5.15.</b> Valores recomendados dos pares $\lambda$ e $h$ do MEWMA, considerando-se a matriz de covariâncias sob controle e o vetor de médias fora de controle, para $p = 10$ .....     | 79  |
| <b>Tabela 5.16.</b> Intervalos de decisão $h$ para o Lin-MEWMA que proporcionaram $ARL IC = 200$ para um processo sob controle estatístico .....   | 80  |
| <b>Tabela 5.17.</b> Valores recomendados dos pares $\lambda$ e $h$ do Lin-MEWMA, considerando-se a matriz de covariâncias sob controle e o vetor de médias fora de controle, para $p = 2$ .....  | 89  |
| <b>Tabela 5.18.</b> Valores recomendados dos pares $\lambda$ e $h$ do Lin-MEWMA, considerando-se a matriz de covariâncias sob controle e o vetor de médias fora de controle, para $p = 6$ .....  | 90  |
| <b>Tabela 5.19.</b> Valores recomendados dos pares $\lambda$ e $h$ do Lin-MEWMA, considerando-se a matriz de covariâncias sob controle e o vetor de médias fora de controle, para $p = 10$ ..... | 91  |
| <b>Tabela 5.20.</b> Intervalos de decisão $h$ para o gráfico de controle ELR que proporcionam $ARL IC = 200$ para um processo sob controle estatístico .....                                     | 92  |
| <b>Tabela 5.21.</b> Valores recomendados dos pares $\lambda$ e $h$ do ELR, considerando-se a matriz de covariâncias sob controle e o vetor de médias fora de controle, para $p = 2$ .....        | 102 |
| <b>Tabela 5.22.</b> Valores recomendados dos pares $\lambda$ e $h$ do ELR, considerando-se a matriz de covariâncias sob controle e o vetor de médias fora de controle, para $p = 6$ .....        | 103 |
| <b>Tabela 5.23.</b> Valores recomendados dos pares $\lambda$ e $h$ do ELR, considerando-se a matriz de covariâncias sob controle e o vetor de médias fora de controle, para $p = 10$ .....       | 104 |
| <b>Tabela 5.24.</b> Recomendações para uso dos GCMs em função de $\mu_1$ e $\sigma_{ww'}(\Sigma_0)$ para $p = 2$ .....   | 112 |
| <b>Tabela 5.25.</b> Recomendações para uso dos GCMs em função de $\mu_1$ e $\sigma_{ww'}(\Sigma_0)$ para $p = 6$ .....   | 112 |
| <b>Tabela 5.26.</b> Recomendações para uso dos GCMs em função de $\mu_1$ e $\sigma_{ww'}(\Sigma_0)$ para $p = 10$ .....  | 113 |

## LISTA DE SIGLAS E SÍMBOLOS

|           |   |
|-----------|---|
| ARL IC    | comprimento médio da sequência para um processo sob controle estatístico ( <i>Average Run Length In Control</i> )         |
| ARL OC    | comprimento médio da sequência para um processo fora de controle estatístico ( <i>Average Run Length Out of Control</i> ) |
| CUSUM     | Soma Acumulada (Cumulative Sum)   |
| $d^2$     | distância generalizada de Mahalanobis   |
| ELR       | Razão de Verossimilhanças Exponencialmente Ponderada  |
| EWMA      | Média Móvel Exponencialmente Ponderada  |
| GCM       | Gráfico de Controle Multivariado  |
| $H$       | intervalo de decisão do CUSUM   |
| $h^*$     | intervalo de decisão padronizado do CUSUM   |
| $h$       | intervalo de decisão para GCMs  |
| $H_0$     | hipótese de nulidade  |
| $H_a$     | hipótese alternativa  |
| $I$       | ordem do subgrupo racional  |
| $K$       | valor de referência do CUSUM  |
| $k^*$     | valor de referência padronizado do CUSUM  |
| $k$       | valor de referência do MCUSUM   |
| $LSC$     | Limite Superior de Controle   |
| $LM$      | Linha Média   |
| $LIC$     | Limite Inferior de Controle   |
| Lin-MEWMA | Média Móvel Exponencialmente Ponderada Multivariada Linear  |
| MCUSUM    | Soma Acumulada Multivariada   |
| MEWMA     | Média Móvel Exponencialmente Ponderada Multivariada   |
| $n$       | tamanho do subgrupo racional  |

|                |  |
|----------------|--|
| $p$            | quantidade de características estudadas                                  |
| $Pd$           | poder ou probabilidade do alarme verdadeiro                              |
| $\widehat{Pd}$ | estimativa da probabilidade do alarme verdadeiro                         |
| $Pd_C$         | probabilidade do alarme verdadeiro conjunto                              |
| $Pd_i$         | probabilidade do alarme verdadeiro no subgrupo racional $i$              |
| $Pd_M$         | probabilidade do alarme verdadeiro para a média                          |
| $Pd_V$         | probabilidade do alarme verdadeiro para a variabilidade                  |
| $R^2$          | coeficiente de determinação  |
| $S_H(i)$       | variável aleatória da CUSUM unilateral superior no subgrupo racional $i$ |
| $S_L(i)$       | variável aleatória da CUSUM unilateral inferior no subgrupo racional $i$ |
| $s_H(i)$       | valor observado da CUSUM unilateral superior no subgrupo racional $i$    |
| $s_L(i)$       | valor observado da CUSUM unilateral inferior no subgrupo racional $i$    |
| $y_i$          | valor observado no subgrupo racional $i$                                 |
| $\mathbf{y}_i$ | vetor de observações no subgrupo racional $i$                            |
| $\alpha$       | probabilidade do alarme falso ou do erro tipo I                          |
| $\hat{\alpha}$ | estimativa da probabilidade do alarme falso                              |
| $\alpha_C$     | probabilidade do alarme falso conjunto                                   |
| $\alpha_i$     | probabilidade do alarme falso no subgrupo racional $i$                   |
| $\alpha_M$     | probabilidade do alarme falso para a média                               |
| $\alpha_V$     | probabilidade do alarme falso para a variabilidade                       |
| $\beta$        | probabilidade da falta de detecção ou do erro tipo II                    |
| $\delta$       | deslocamento preestabelecido da média                                    |
| $\Delta$       | deslocamento real da média   |

|                         |   |
|-------------------------|---|
| $\kappa$                | fator de alargamento                            |
| $\lambda$               | parâmetro de suavização                         |
| $\mu_0$                 | média sob controle estatístico                  |
| $\boldsymbol{\mu}_0$    | vetor de médias sob controle estatístico        |
| $\mu_1$                 | média fora de controle estatístico              |
| $\boldsymbol{\mu}_1$    | vetor de médias fora de controle estatístico    |
| $\mu_Y$                 | média do processo                               |
| $\sigma_0$              | desvio-padrão inicial do processo               |
| $\sigma_Y$              | desvio-padrão do processo                       |
| $\sigma_{ww'}$          | covariância entre as características $w$ e $w'$ |
| $\boldsymbol{\Sigma}_0$ | matriz de covariâncias sob controle estatístico |

## RESUMO

LARA, Rodrigo Luiz Pereira, D.Sc., Universidade Federal de Viçosa, julho de 2017. **Desempenhos de diferentes propostas de planejamentos de gráficos de controle multivariados.** Orientador: José Ivo Ribeiro Júnior. Coorientadores: Carlos Henrique Osório Silva e Fernando Luiz Pereira de Oliveira.

O desenvolvimento tecnológico iniciado no século passado, juntamente com o aumento da competição do mercado e a exigência dos consumidores no século atual acarretam o interesse em Gráficos de Controle Multivariados (GCMs). Nos trabalhos até então divulgados sobre GCMs, é comum o enfoque na comparação de desempenho entre eles, entretanto, essas comparações revelam-se restritas e direcionadas ao GCM recém proposto no trabalho em questão. O presente trabalho estudou, teoricamente, as estatísticas e aplicou, computacionalmente, os gráficos de controle multivariados  $T^2$  de Hotelling, *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* (MEWMA), *Multivariate Cumulative Sum* (MCUSUM), *Linear Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* (Lin-MEWMA) e *Exponentially Likelihood Ratio* (ELR) para o monitoramento do vetor de médias de todas as características importantes para a caracterização multivariada de processos. Para um processo sob controle estatístico, foram simulados dados de uma variável resposta  $p$ -variada e, para processos fora de controle estatístico, foram estabelecidas combinações de descontrole para o vetor de médias. Para tanto, foram realizadas 20.000 simulações por subgrupo racional e ajustes a distribuições de probabilidades multivariadas. O  $T^2$  de Hotelling foi o mais ineficaz dos GCMs ao passo que o Lin-MEWMA destacou-se pela sua baixa probabilidade do alarme falso. O ELR e MCUSUM mostraram desempenho melhores em relação aos GCMs anteriores, porém com dificuldade em detecção de pequenas mudanças no vetor de médias. Utilizando-se recomendações pouco citadas na literatura ( $\lambda = 0,03$  e  $0,04$ ) o MEWMA mostrou-se o melhor dos GCMs estudados de modo a não interferir um processo sob controle, mas interromper a produção quando seus produtos estiverem sendo produzido fora do vetor de médias considerado sob controle.

## ABSTRACT

LARA, Rodrigo Luiz Pereira, D.Sc., Universidade Federal de Viçosa, July, 2017. **Performance of different proposals for multivariate control charts.** Advisor: José Ivo Ribeiro Júnior. Co-Advisors: Carlos Henrique Osório Silva and Fernando Luiz Pereira de Oliveira.

The technological development initiated in the last century, coupled with increased market competition and consumer demand in the present century, leads to studies about Multivariate Control Charts (GCMs). In papers published so far on GCMs, it is common to focus on the comparison of performance between them, however, these comparisons are restricted and directed to the GCM recently proposed in the paper in question. The present work has theoretically studied the statistics and applied, computationally, the Multivariate Exponentially Weighted Moving Average (MEWMA), Multivariate Cumulative Sum (MCUSUM), Linear Multivariate Exponentially Weighted Moving Average (Lin-MEWMA) and Exponentially Likelihood Ratio (ELR) for monitoring the vector of means of all characteristics important for the multivariate characterization of processes. For a process under statistical control, data were simulated from a  $p$ -variable response, and for out-of-control processes, uncontrol combinations were established for the vector of means. For that, 20,000 simulations were performed per rational subgroup and adjustments to multivariate probability distributions. Hotelling's  $T^2$  was the most ineffective of GCMs while Lin-MEWMA stood out for its low probability of false alarms. The ELR and MCUSUM showed better performance than previous GCMs, but with difficulty in detecting small changes in the means vector. Using recommendations not mentioned in the literature ( $\lambda = 0.03$  and  $0.04$ ), the MEWMA proved to be the best of the studied GCMs in order to not interfere with a process under control, but to interrupt production when its products are being produced outside of the vector of means considered under control.

# 1. INTRODUÇÃO

Com o aumento da competição do mercado juntamente com a exigência dos consumidores, tem ressurgido nessas últimas décadas o interesse em gráficos de controle multivariados (GCMs). Nesse contexto, a qualidade dos produtos e serviços é cada vez mais exigida e, portanto, passa a ter um aspecto multivariado, em função de ser avaliada simultaneamente por mais de uma característica.

O surgimento do primeiro GCM é datado de 1947, de acordo com o trabalho desenvolvido por Hotelling ao criar uma versão multivariada dos gráficos de controle univariados propostos por Shewhart na década de 1920. O gráfico de controle  $T^2$  de Hotelling (1947) é recomendado para detectar grandes variações no vetor de médias e possui um critério de decisão relativamente simples, que consiste em analisar somente o resultado para cada amostra produzida.

Porém, a utilização dos GCMs é ainda mais recente, pois apenas no final da década de 1980, houve um aprofundamento dessa área a partir, principalmente, dos desenvolvimentos dos gráficos de controle univariados da Soma Acumulada (*Cumulative Sum* – CUSUM) e da Média Móvel Exponencialmente Ponderada (*Exponentially Weighted Moving Average* – EWMA) propostos originalmente por Page (1954) e Roberts (1959), respectivamente.

A partir de então, Crosier (1988) e Pignatiello e Runger (1990) propuseram versões multivariadas do gráfico de controle CUSUM, denominados de gráficos de controle da Soma Acumulada Multivariada (*Multivariate Cumulative Sum* – MCUSUM), em que se consegue detectar inclusive pequenas mudanças no vetor de médias do processo. Outros autores tais como Lowry et al. (1992), Runger e Prabhu (1996) e Hawkins e Maboudou-Tchao (2007) propuseram versões multivariadas do gráfico de controle EWMA, chamados de gráficos de controle da Média Móvel Exponencialmente Ponderada Multivariada (*Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* – MEWMA). Assim como as diversas versões dos gráficos de controle MCUSUM, os gráficos de controle MEWMA possuem critérios de decisão que se baseiam no histórico do processo, possibilitando assim a detecção também de pequenas mudanças no vetor de médias.

A respeito dos GCMs que monitoram somente a variabilidade do processo, destacam-se o da Variância Generalizada desenvolvido por Alt e Bedewi (1986), juntamente com os trabalhos de Tang e Barnett (1996), Chang e Zhang (2001), Yeh et al. (2004, 2005, 2006) e o gráfico de controle da Matriz de Covariância Móvel Exponencialmente Ponderada Multivariada (*Multivariate Exponentially Weighted Moving Covariance Matrix* – MEWMC), desenvolvido por Hawkins e Maboudou-Tchao (2008).

Como exemplos de GCMs que monitoram simultaneamente o vetor de médias e a matriz de covariâncias, têm-se o Razão de Verossimilhanças Exponencialmente Ponderada (*Exponentially Likelihood Ratio* – ELR) proposto por Zhang et al. (2010), o Média Móvel e Matriz de Covariâncias Exponencialmente Ponderado Auto Inicializável (*Self-Starting Multivariate Exponentially Weighted Moving Average and Covariance Matrix* – SS-MEWMAC) de autoria de Maboudou-Tchao e Hawkins (2011) e o ELR de Intervalos de Amostras Variáveis (*Variable Sample Intervals* – VSI-ELR) proposto por Zhang et al. (2012). No Brasil foram recentemente publicados os gráficos de controle Lin-MEWMA e CUSUM-Lin desenvolvidos por Moraes et al. (2014) para o monitoramento do vetor de médias, RMAX de Costa e Machado (2011) para o monitoramento da matriz de covariâncias e os MCMAX e MRMAX de Costa et al. (2010), Costa e Machado (2013) para o monitoramento simultâneo de ambos os parâmetros.

Nos trabalhos divulgados sobre GCMs, é comum visualizar a comparação de desempenho em termos de probabilidades dos alarmes falsos e verdadeiros entre um determinado GCM recém proposto e outros previamente estabelecidos na literatura. Entretanto, essas comparações revelam-se muito restritas e direcionadas apenas ao GCM recém proposto no trabalho em questão.

Daí a necessidade de um novo trabalho que realiza uma comparação ampla e imparcial em relação ao desempenho dos principais GCMs propostos na literatura e verificar em quais casos de descontrole cada um deles prevalece em relação aos demais.

## 2. OBJETIVOS

### 2.1 Geral

Estudar teoricamente as estatísticas e aplicar computacionalmente os gráficos de controle multivariados  $T^2$  de Hotelling, MEWMA, MCUSUM, Lin-MEWMA e ELR para o monitoramento do vetor de médias das características mais usuais para a caracterização multivariada de processos.

### 2.2 Específicos

Elaborar programas computacionais para o planejamento dos gráficos de controle multivariados estudados no software R (R Development Core Team, 2013);

Comparar diferentes propostas de planejamentos de gráficos de controle multivariados e avaliar os seus desempenhos em termos de probabilidades dos alarmes falsos e verdadeiros, de acordo com diferentes graus de mudanças do vetor de médias;

Estabelecer recomendações para as aplicações dos diferentes tipos de gráficos de controle multivariados.

## 3. REFERENCIAL TEÓRICO

### 3.1 Controle Estatístico de Processos

O Controle Estatístico de Processos (CEP) é realizado durante o estágio de produção e consiste, em uma de suas etapas, no desenvolvimento e interpretação dos resultados dos gráficos de controle. O principal objetivo é obter os padrões de especificação de qualidade e reduzir a variabilidade, de modo que o processo atue dentro dos limites de especificação.

A metodologia do CEP para o monitoramento dos parâmetros de um processo envolve duas etapas. A primeira delas é chamada Fase I, em que os parâmetros sob controle (*In Control* – IC) são monitorados para gerar limites de controle, baseados principalmente na probabilidade do alarme falso. Woodall (2000) ressalta que a Fase I consiste em remover as causas especiais visando proporcionar a estabilidade do processo. A segunda etapa é chamada Fase II, em que as amostras são produzidas em um processo corrente, e as suas estatísticas são comparadas com os limites de controle. Nessa fase o processo é literalmente posto à prova de modo a monitorar se os seus parâmetros permanecem sob controle ou se estão sofrendo algum deslocamento. Para esse segundo caso, os parâmetros são considerados fora de controle (*Out of Control* - OC).

O controle é usado principalmente para manter os resultados de um processo que já sofreu ações de melhoria e já se apresenta padronizado. Nesse primeiro momento, o objetivo consiste em verificar a estabilidade do processo, ou seja, se o processo encontra-se sob controle estatístico e, desse modo, em proporcionar média e variabilidade constantes ao longo do tempo. Ou seja, isento de causas que possam atuar de forma a comprometerem a estabilidade da produção, chamadas causas especiais.

Para que o processo opere sob controle estatístico é necessário que as causas especiais não se manifestem e, conseqüentemente, que só haja a presença das aleatórias. Durante a avaliação da estabilidade compara-se a variabilidade manifestada pelo processo com a variabilidade aleatória que o processo tem condições de operar dada a manifestação apenas das causas aleatórias. Dada a

existência da estabilidade do processo, compara-se a sua variabilidade com a permitida a ele, em função do intervalo de especificação ou tolerância. Neste caso, avalia-se a capacidade do processo em produzir produtos conformes à especificação (WERKEMA, 2012).

### 3.2 Gráfico de Controle Univariado

Durante a Revolução Industrial, o estatístico Walter Shewhart (1891-1967) introduziu os gráficos de controle que, desde então, têm sido extensivamente usados para monitorar diversas características de qualidade em produtos e processos (EYVAZIAN; NAINI; VAGHEFI, 2007). Alwan e Roberts (1995) ressaltam a importância de que algumas pressuposições devem ser satisfeitas pelos dados para, assim, permitirem a utilização dos gráficos de controle. Primeiramente, as observações retiradas na Fase I devem ser identicamente distribuídas e obtidas de forma aleatória. E, em segundo lugar, as observações ou estimativas dos subgrupos racionais devem seguir uma distribuição de probabilidades específica, tal como a normal, binomial ou poisson.

Nos gráficos de controle são estudados os estimadores de uma característica de qualidade ao longo do tempo. Esses gráficos possuem uma linha média<sup>1</sup> (*LM*) que representa a média da variável quando o processo está sob controle (livre de causas especiais) e duas outras linhas que representam os limites inferior e superior de controle do processo (*LIC* e *LSC*).

Seja  $\hat{\theta}$  o estimador a ser monitorado por algum gráfico de controle de Shewhart, e suponha que a sua média e desvio-padrão sejam expressos respectivamente por  $\mu_{\hat{\theta}}$  e  $\sigma_{\hat{\theta}}$ . Daí, a linha média e os limites de controle são expressos por:

$$LSC = \mu_{\hat{\theta}} + \kappa\sigma_{\hat{\theta}} ; \quad (3.1a)$$

$$LM = \mu_{\hat{\theta}} ; \quad (3.1b)$$

$$LIC = \mu_{\hat{\theta}} - \kappa\sigma_{\hat{\theta}} , \quad (3.1c)$$

---

<sup>1</sup> Também denominada linha central.

em que  $\kappa$  é o fator de alargamento do limite de controle expresso em unidades de desvio-padrão.

Os gráficos de controle de Shewhart estão divididos em duas grandes categorias: por atributos e por variáveis. Esses gráficos de controle podem ser revisados em Costa et al. (2005), Ribeiro Júnior (2013) e Montgomery (2016).

### 3.2.1 Shewhart

No gráfico de controle por variáveis para o monitoramento da média ( $n \geq 1$ ), o estimador  $\hat{\theta} = \bar{Y}_i$  em cada subgrupo racional de ordem  $i$  de tamanho  $n$  é definido por:

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_{ij} \quad , \quad (3.2)$$

em que  $Y_{ij}$  é a variável aleatória  $Y$  no subgrupo racional  $i$  e repetição  $j$ , e  $\bar{Y}_i$  é a variável aleatória média de  $Y$  no subgrupo racional ( $i = 1, 2, \dots, m$  e  $j = 1, 2, \dots, n$ ).

Dado que a variável aleatória  $Y$  no subgrupo racional  $i$  segue distribuição normal, então  $\bar{Y}$  também segue distribuição normal com os seguintes parâmetros:

$$\mu_{\bar{Y}} = \mu_Y ; \quad (3.3a)$$

$$\sigma_{\bar{Y}} = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}} . \quad (3.3b)$$

Portanto, se a estimativa  $\bar{y}_i$  plotada no gráfico de controle for maior que o  $LSC$  ou menor que o  $LIC$ , conclui-se que o processo está fora de controle estatístico.

Conforme as Equações 3.1a, b e c, a linha média e os limites de controle oriundos de um processo sob controle estatístico, são dados por:

$$LSC = \mu_{\bar{Y}} + \kappa \sigma_{\bar{Y}} = \mu_Y + \kappa \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}} = \mu_0 + \kappa \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} ; \quad (3.4a)$$

$$LM = \mu_{\bar{Y}} = \mu_Y = \mu_0 ; \quad (3.4b)$$

$$LIC = \mu_{\bar{Y}} - \kappa \sigma_{\bar{Y}} = \mu_Y - \kappa \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}} = \mu_0 - \kappa \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} , \quad (3.4c)$$

em que  $\mu_0$  é a média de controle e  $\sigma_0$  é o desvio-padrão de controle.

### 3.2.2 CUSUM

Uma alternativa ao gráfico de controle de Shewhart para o monitoramento da média é o gráfico de controle da Soma Acumulada (*Cumulative Sum* – CUSUM). Inicialmente proposto por Page (1954), o gráfico incorpora informação de uma sequência de observações amostrais plotando as somas acumuladas dos desvios das observações em relação a um valor-alvo. Ao contrário do gráfico de controle de Shewhart, o CUSUM plota, para cada subgrupo racional avaliado, uma estatística que leva em consideração o histórico do processo. Um estudo pormenorizado do gráfico de controle CUSUM pode ser obtido em Lara (2012), Ribeiro Júnior (2013) e Montgomery (2016).

Esse gráfico analisa o processo de forma retroativa, ou seja, a estatística do CUSUM armazena somas acumuladas dos desvios em relação à média. O gráfico também possui maior flexibilidade de planejamento, uma vez que é possível especificar o deslocamento em relação à média que se deseja monitorar.

Conforme afirmado por Walpole et al. (2008), é considerado um gráfico de controle melhor que o de Shewhart para o monitoramento da média.

No gráfico de controle CUSUM, utilizam-se os estimadores  $S_H(i)$  e  $S_L(i)$  que realizam as somas acumuladas dos desvios acima e abaixo da média, respectivamente. Esses estimadores são definidos para cada subgrupo racional de ordem  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) e são chamados CUSUMs unilaterais superior e inferior, como seguem:

$$S_H(i) = \text{máx}[0, \bar{Y}_i - (\mu_Y + K) + S_H(i - 1) ] ; \quad (3.5a)$$

$$S_L(i) = \text{máx}[ 0, (\mu_Y + K) - \bar{Y}_i + S_L(i - 1) ] . \quad (3.5b)$$

Para o processo sob controle estatístico, tem-se:

$$S_H(i) = \text{máx}[0, \bar{Y}_i - (\mu_0 + K) + S_H(i - 1)]; \quad (3.6a)$$

$$S_L(i) = \text{máx}[0, (\mu_0 + K) - \bar{Y}_i + S_L(i - 1)], \quad (3.6b)$$

em que  $\bar{Y}_i$  é o estimador da média no subgrupo racional de ordem  $i$ ,  $\mu_0$  é a média de controle e  $K$  é o valor de referência<sup>1</sup>. Geralmente, adota-se  $S_H(0) = S_L(0) = 0$ .

Para um processo sob controle estatístico, e considerando-se  $Y$  uma variável aleatória normal, tem-se:

$$\mu_{S_H(i)} = \mu_{S_L(i)} = 0, \forall i (i = 1, 2, \dots, m). \quad (3.7)$$

Dado  $Y$  uma variável aleatória simétrica, as variações para cima e para baixo da média serão as mesmas. Daí, as variações em  $S_H(i)$  e  $S_L(i)$  serão as mesmas e, conseqüentemente, acarretarão a mesma média e desvio-padrão.

O desvio-padrão do  $S_H(i)$  é calculado a partir dos valores obtidos aleatoriamente em torno de  $\mu_0$  (processo sob controle estatístico). Nesse caso, os valores são obtidos de dois diferentes casos. No primeiro, tem-se:

$$s_H(i) = 0, \text{ para } \bar{y}_i \leq (\mu_0 + K) + s_H(i - 1). \quad (3.8a)$$

Já o segundo caso acarreta:

$$s_H(i) > 0, \text{ para } \bar{y}_i > (\mu_0 + K) + s_H(i - 1). \quad (3.8b)$$

Dada essa particularidade, o cálculo do desvio-padrão do  $S_H(i)$ , como também do  $S_L(i)$ , ficam impossibilitados de serem generalizados, o que dificulta o planejamento dos intervalos de controle em termos de  $\kappa\sigma_{S_H(i)}$  e  $\kappa\sigma_{S_L(i)}$ . Daí, Page (1954) definiu outro parâmetro, chamado intervalo de decisão ( $H$ ). Caso pelo menos uma das CUSUMs unilaterais ultrapasse esse valor, o processo é

---

<sup>1</sup> Também chamado valor de tolerância ou folga.

considerado fora de controle estatístico. Assim, a linha média e os limites de controle do CUSUM são obtidos por:

$$LSC = H ; \quad (3.9a)$$

$$LM = 0 ; \quad (3.9b)$$

$$LIC = -H. \quad (3.9c)$$

Portanto, se  $s_H(i) > H$  ou  $s_L(i) > H$ , conclui-se que o processo está fora de controle estatístico.

Os valores de  $H$  e  $K$  são definidos, respectivamente, por:

$$H = h^* \sigma_{\bar{Y}} = h \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} ; \quad (3.10a)$$

$$K = k^* \sigma_{\bar{Y}} = k \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} , \quad (3.10b)$$

em que  $h^*$  é o intervalo de decisão padronizado,  $k^*$  é o valor de referência padronizado e  $\sigma_0$  é o desvio-padrão de controle. Em geral,  $k^*$  é expresso por:

$$k^* = \frac{\delta}{2} , \quad (3.11)$$

em que  $\delta$  representa, em módulo, o menor deslocamento da média de controle, em número de desvios-padrão, que se quer detectar como especial.

Para um processo fora de controle estatístico que esteja atuando sob uma determinada média  $\mu_Y$ , dado que a média-alvo é  $\mu_0$ , pode-se concluir que:

$$E[S_H(i)] = i(\mu_Y - \mu_0 - K), \text{ para } \mu_Y > \mu_0. \quad (3.12)$$

Portanto, para  $\mu_Y > \mu_0$ , tem-se:

$$E[S_H(i)] > 0 \Leftrightarrow i(\mu_Y - \mu_0 - K) > 0$$

$$\Leftrightarrow (\mu_Y - \mu_0 - K) > 0, \quad i > 0 \forall i$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \mu_Y - \mu_0 > K \\
&\Leftrightarrow \mu_Y - \mu_0 > \frac{\delta}{2} \sigma_{\bar{Y}}, \quad K = k^* \sigma_{\bar{Y}} = \frac{\delta}{2} \sigma_{\bar{Y}} \text{ (Equações 3.10b e 3.11)} \\
&\Leftrightarrow \mu_Y > \mu_0 + \frac{\delta}{2} \sigma_{\bar{Y}}.
\end{aligned}$$

Se o desvio-padrão  $\sigma_Y$  estiver sob controle estatístico, então tem-se:

$$E[S_H(i)] > 0 \Leftrightarrow \mu_Y > \mu_0 + \frac{\delta}{2} \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}. \quad (3.13)$$

Por outro lado, se  $\mu_1$  for considerada como a menor média que se quer detectar como fora de controle, dado  $\mu_1 > \mu_0$ , tem-se:

$$\mu_1 = \mu_0 + \delta \sigma_0. \quad (3.14)$$

Isso indica que a média  $\mu_Y$  presente no processo será detectada, com maior probabilidade, como fora de controle pelo gráfico CUSUM, quando o deslocamento em relação a  $\mu_0$ , em número de desvios-padrão, for maior do que  $\delta$ , ou seja, quando ocorrer  $\mu_Y > \mu_1$ .

Desse modo, o deslocamento real da média do processo, também em número de desvios-padrão, será chamado de  $\Delta$ , sendo:

$$\Delta = \frac{\mu_Y - \mu_0}{\sigma_0}. \quad (3.15)$$

Daí, dando continuidade às equivalências anteriores, segue que:

$$E[S_H(i)] > 0 \Leftrightarrow \mu_Y = \mu_0 + \Delta \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}. \quad (3.16)$$

Em palavras, a equivalência dada pela fórmula 3.16 significa que é esperado que cada subgrupo racional de ordem  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) assumam valores de  $S_H(i)$  positivos e, conseqüentemente, produza somas acumuladas que denuncie

o descontrolo do processo se, e somente se, o processo apresentar média  $\mu_Y$  desde o primeiro subgrupo racional, cujo deslocamento  $\Delta$  seja superior à metade do deslocamento  $\delta$  da média considerada como fora de controlo e que se deseja detectar.

Conforme já mencionado, o valor de referência padronizado  $k^*$  é geralmente definido por  $\frac{\delta}{2}$ . Entretanto, pode-se atribuir outros valores como, por exemplo,  $\delta$ . Neste caso, deve-se ocorrer  $\Delta > \delta$  para que  $E[S_H(i)] > 0$ .

Quanto menor o valor  $k^*$  adotado e, conseqüentemente, o  $\delta$ , mais fácil fica para o verdadeiro deslocamento  $\Delta$  superá-lo, ou seja, mais sensível torna-se o gráfico de controlo CUSUM em detectar o sinal.

Nota-se, portanto, que  $k^*$  é o valor primordial que determina o bom planeamento do gráfico de controlo CUSUM. A partir do valor atribuído para  $k^*$ , o descontrolo  $\Delta$  existente no processo será considerado relevante ou não para produzir CUSUMs unilaterais diferentes de zero.

O gráfico de controlo CUSUM também pode detectar somente grandes diferenças, assim como aquelas detectadas pelo gráfico de controlo de Shewhart. Nesse caso, utilizam-se altos valores de referência padronizados ( $k^* \geq 1,5$ ), assim como também os dos intervalos de decisão padronizados  $h^*$  que compõem o limite de controlo.

### 3.2.3 EWMA

De acordo com Hines (2006), uma alternativa efetiva ao gráfico de controlo de Shewhart para o monitoramento da média é o da Média Móvel Exponencialmente Ponderada (*Exponentially Weighted Moving Average* – EWMA). O gráfico de controlo EWMA é escolhido quando se deseja detectar menores desajustes que estejam ocorrendo na média da variável-resposta  $Y$ .

Para o gráfico de controlo EWMA existem  $m$  estimadores  $\hat{\theta}_i = W_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , ou seja, um estimador para cada subgrupo racional de ordem  $i$ , definido por:

$$W_i = \lambda \bar{Y}_i + (1 - \lambda)W_{i-1}, \quad (3.17)$$

em que  $\lambda$  é uma constante de suavização ( $0 < \lambda \leq 1$ ) e  $W_{i-1}$  é a média ponderada de todas as médias de amostras anteriores.

Utilizando-se a recorrência, cada estimador  $W_i$  pode ser obtido em função dos anteriores ( $W_{i-1}, W_{i-2}, \dots, W_1, W_0$ ), conforme explicitado a seguir:

$$W_i = \lambda \left[ \sum_{j=0}^{i-1} (1 - \lambda)^j \bar{Y}_{i-j} \right] + (1 - \lambda)^i W_0, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.18)$$

Uma vez que  $Y_i$  segue distribuição normal com parâmetros  $\mu_{Y_i}$  e  $\sigma_{Y_i}$ , os parâmetros de  $W_i$  podem ser obtidos conforme a seguir:

$$\mu_{W_i} = \lambda \left[ \sum_{j=0}^{i-1} (1 - \lambda)^j \mu_{Y_{i-j}} \right] + (1 - \lambda)^i W_0; \quad (3.19a)$$

$$\sigma_{W_i} = \lambda \sigma_Y \sqrt{\sum_{j=0}^{i-1} (1 - \lambda)^{2j}} = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2i}]}{2 - \lambda}}. \quad (3.19b)$$

Para o processo sob controle estatístico, a média e o desvio-padrão do estimador  $W_i$  simplificam-se para:

$$\mu_{W_i} = \mu_0; \quad (3.20a)$$

e

$$\sigma_{W_i} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2i}]}{2 - \lambda}}. \quad (3.20b)$$

Desse modo,  $\mu_{W_i} = \mu_0 \forall i = 1, 2, \dots, m$ , mas o  $\sigma_{W_i}$  aumenta com o aumento da ordem  $i$  do subgrupo racional, devido ao acúmulo das informações dos subgrupos racionais anteriores pela variável  $W_i$ .

Dessa forma, a linha média e os limites de controle do EWMA são dados por:

$$LSC_i = \mu_{W_i} + \kappa\sigma_{W_i} = \mu_0 + \kappa \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2i}]}{2 - \lambda}}; \quad (3.21a)$$

$$LM = \mu_{W_i} = \mu_0; \quad (3.21b)$$

$$LIC_i = \mu_{W_i} - \kappa\sigma_{W_i} = \mu_0 - \kappa \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2i}]}{2 - \lambda}}. \quad (3.21c)$$

Isso significa que se a estimativa  $w_i$  pertencer ao intervalo fechado do  $LIC$  ao  $LSC$ , o processo será considerado como sob controle estatístico.

O valor  $\kappa$  também se refere ao afastamento da linha média em número de desvios-padrão.

Para o caso em que a média  $\mu_{Y_i}$  permaneça fora de controle, porém constante para todos os subgrupos racionais ( $\mu_{Y_i} = \mu_1$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ), mas sem alteração do desvio-padrão  $\sigma_0$  e, conseqüentemente, do  $\sigma_{W_i}$ , segue a partir da Equação 3.19a que:

$$\mu_{W_i} = \lambda \left[ \sum_{j=0}^{i-1} (1 - \lambda)^j \mu_1 \right] + (1 - \lambda)^i \mu_0 \quad (3.22a)$$

$$= \lambda \mu_1 \left[ \frac{1 - (1 - \lambda)^i}{\lambda} \right] + (1 - \lambda)^i \mu_0 \quad \begin{array}{l} \text{(fórmula da soma dos } i \text{ primeiros} \\ \text{termos de uma progressão} \\ \text{geométrica)} \end{array} \quad (3.22b)$$

$$= \mu_1 - \mu_1(1 - \lambda)^i + \mu_0(1 - \lambda)^i \quad (3.22c)$$

$$= \mu_1 + (\mu_0 - \mu_1)(1 - \lambda)^i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.22d)$$

em que  $\mu_1$  é a média fora de controle, dada por:

$$\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0. \quad (3.23)$$

A média  $\mu_1$  é a soma entre a média sob controle  $\mu_0$  e o seu deslocamento, medido em número de desvios-padrão.

Assim, quanto maior o deslocamento de  $\mu_1$  em relação à  $\mu_0$ , quanto maior a ordem  $i$  do subgrupo racional e, ou, quanto menor o valor  $\lambda$ , maior será a probabilidade do EWMA em detectar o descontrole.

Nesse gráfico de controle, a decisão sobre o processo avaliado está baseada na informação de cada subgrupo racional com um percentual de peso dos anteriores. Um estudo mais detalhado sobre o EWMA pode ser obtido em Costa et al. (2005), Montgomery e Runger (2012) e Ribeiro Júnior (2013).

### 3.2.4 Desempenho

Os gráficos de controle são como os testes de hipóteses para cada subgrupo racional, separadamente. Portanto, em cada um deles toma-se a decisão de afirmar se o processo está ou não sob controle estatístico, ou seja, se apresenta somente causas aleatórias atuando ou se há manifestações também de causas especiais. Em termos estatísticos, os gráficos de controle consistem em confrontar as seguintes hipóteses de nulidade ( $H_0$ ) e alternativa ( $H_a$ ):

$$\begin{aligned} H_0: & \text{ o processo encontra-se sob controle estatístico;} \\ H_a: & \text{ o processo encontra-se fora de controle estatístico.} \end{aligned} \tag{3.24}$$

Pela hipótese de nulidade afirma-se que tanto a média como a variabilidade da distribuição dos valores da variável aleatória se mantêm constantes ao longo do tempo. Já pela hipótese alternativa defende-se que, dentre os dois parâmetros da variável aleatória do processo, pelo menos um deles sofreu alteração ao longo do monitoramento.

Mais especificamente, as hipóteses 3.24 podem ser enunciadas do seguinte modo:

$$\begin{aligned} H_0: & \mu_Y = \mu_0 \text{ e } \sigma_Y = \sigma_0 ; \\ H_a: & \mu_Y \neq \mu_0 \text{ e, ou, } \sigma_Y \neq \sigma_0 . \end{aligned} \tag{3.25}$$

Considerando-se que o processo sofra apenas alteração da média, então a menor diferença para detectar um descontrole na média, como já mencionado anteriormente, é definida por:

$$\begin{aligned} dif &= \mu_1 - \mu_0, \text{ para } \mu_1 > \mu_0; \\ dif &= \mu_0 - \mu_1, \text{ para } \mu_1 < \mu_0. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Em termos estatísticos, essa diferença *dif*, para cima ou para baixo de  $\mu_0$  pode ser expressa em número de desvios-padrão de controle, como segue:

$$|dif| = \delta\sigma_0. \tag{3.27}$$

A menor média de interesse, considerando sem perda de generalidade que  $\mu_1 \geq \mu_0$ , de um processo fora de controle estatístico, é dada por:

$$\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0. \tag{3.28}$$

Para a hipótese  $H_0$ , as decisões de rejeição e aceitação estão sujeitas aos possíveis erros tipo I e tipo II, respectivamente. O erro tipo I consiste em rejeitar a hipótese  $H_0$  ( $RH_0$ ) quando esta é verdadeira. A probabilidade de ocorrência do erro tipo I –  $P(RH_0 | H_0 \text{ é verdadeira})$  – é denominada nível de significância  $\alpha$ . Em gráficos de controle, essa probabilidade é conhecida como probabilidade do alarme falso.

O erro tipo II, por sua vez, consiste em aceitar a hipótese  $H_0$  ( $AH_0$ ) quando esta é falsa. A probabilidade de ocorrência do erro tipo II –  $P(AH_0 | H_0 \text{ é falsa})$  – é denominada  $\beta$ , também conhecida como probabilidade da falta de detecção.

Já o poder ( $Pd$ ) de um teste de hipóteses estatístico é a probabilidade de rejeitar a hipótese  $H_0$  quando ela de fato é falsa, expressa por  $P(RH_0 | H_0 \text{ é falsa})$ . Em gráficos de controle, essa probabilidade é conhecida como probabilidade do alarme verdadeiro.

É importante observar que as probabilidades  $\beta$  e  $Pd$  se complementam, uma vez que:

$$P(AH_0 | H_0 \text{ é falsa}) + P(RH_0 | H_0 \text{ é falsa}) = 1, \quad (3.29)$$

em que:

$$P(AH_0 | H_0 \text{ é falsa}) = \beta; \quad (3.30a)$$

$$P(RH_0 | H_0 \text{ é falsa}) = Pd. \quad (3.30b)$$

Portanto, o desempenho de um gráfico de controle pode ser mensurado por meio das probabilidades  $\alpha$  e  $Pd$ . Um gráfico de controle bem planejado é aquele que possui baixa probabilidade de alarme falso ( $\alpha \leq 0,05$ ) e alta probabilidade de alarme verdadeiro ( $Pd \geq 0,90$ ), ou seja, baixa probabilidade de acusar erroneamente um descontrole no processo e alta probabilidade de detecção de causas especiais quando estas estiverem presentes.

Alternativamente, os gráficos de controles podem ter seus desempenhos medidos por meio do comprimento médio da sequência (*Average Run Length – ARL*) para processos sob e fora de controle estatístico (*ARL IC* e *ARL OC*, respectivamente). O *ARL* é o número médio de subgrupos racionais necessários para que o gráfico de controle acuse descontrole do processo, esteja ele sob controle (*In Control – IC*) ou fora de controle (*Out of Control – OC*).

O *ARL IC* é inversamente proporcional à probabilidade do alarme falso (Equação 3.31). De fato, é razoável admitir que quanto menor a probabilidade de um gráfico de controle acusar erroneamente um descontrole, mais subgrupos racionais serão monitorados para que o processo em questão seja interrompido. Desse modo tem-se:

$$ARL IC \propto \frac{1}{\alpha}. \quad (3.31)$$

Analogamente à relação existente entre o *ARL IC* e o  $\alpha$ , tem-se que o *ARL OC* é inversamente proporcional ao poder de um gráfico de controle. Quanto maior a capacidade do gráfico de controle detectar um real descontrole no processo, menor será a quantidade de subgrupos racionais monitorados até que o processo seja interrompido (Equação 3.32). Isso significa que:

$$ARL OC \propto \frac{1}{Pd} . \quad (3.32)$$

No caso de haver o descontrole somente para o deslocamento da média, as hipóteses enunciadas em 3.25 se restringem a:

$$\begin{aligned} H_0: \mu_Y = \mu_0 \text{ e } \sigma_Y = \sigma_0 ; \\ H_a: \mu_Y \neq \mu_0 \text{ e } \sigma_Y = \sigma_0 . \end{aligned} \quad (3.33)$$

Neste caso, considera-se que o processo encontra-se sempre sob controle estatístico para a variabilidade, ou seja, todos os subgrupos racionais possuem o mesmo desvio-padrão  $\sigma_0$ .

Costa et al. (2005) e Ribeiro Júnior (2013) apresentam o poder do gráfico de controle de Shewhart para o monitoramento da média, considerando-se a variabilidade constante, como segue:

$$Pd = P(Z < -\kappa - \delta\sqrt{n}) + P(Z < -\kappa + \delta\sqrt{n}) . \quad (3.34)$$

No caso dos gráficos de controle que avaliam a média, tais como os de Shewhart, CUSUM e EWMA, já são conhecidos os seus desempenhos em termos de  $ARL IC$  e  $ARL OC$ . Para  $\delta \geq 3$ , esses gráficos são recomendados por conseguirem altos desempenhos de  $ARL IC$  (no mínimo igual a 370) e baixos de  $ARL OC$  (no máximo igual a dois).

Outros autores também realizaram estudos de desempenho do gráfico de controle de Shewhart, dentre eles destacam-se Wadsworth et al. (2002), Costa et al. (2005) e Souza et al. (2008).

O desempenho é relativo ao descontrole mínimo que se deseja sinalizar no processo em termos de média. Para deslocamentos grandes ( $\delta \geq 3$ ) os gráficos de Shewhart apresentam bom desempenho. Já para deslocamentos baixos ( $\delta < 2$ ) recomendam-se somente os gráficos de controle EWMA e CUSUM, dado que possuem bons desempenhos sem o aumento do tamanho do subgrupo racional. Para que o gráfico de controle de Shewhart possua bom desempenho na detecção

de baixos deslocamentos  $\delta$ , é necessário altos valores do tamanho  $n$  do subgrupo racional. Entretanto, essa medida encarece o monitoramento do processo.

Para o gráfico de controle EWMA, Lucas e Saccucci (1990) obtiveram os *ARLs* para deslocamentos  $\delta$  variando entre 0 a 5, juntamente com diversas combinações do fator de alargamento  $\kappa$  e da constante de suavização  $\lambda$ . Outros autores, tais como Souza et al. (2008) e Ribeiro Júnior (2013) também realizaram estudos de desempenho do gráfico de controle EWMA para a média.

Lucas e Crosier (1982) obtiveram o *ARL* do gráfico de controle CUSUM para a média em função dos deslocamentos  $\delta$  iguais a 0; 0,5; 1; 2 e 3, com valores de referências  $k^*$  iguais a 0,25; 0,5; 0,75; 1 e 1,5.

Para o gráfico de controle CUSUM, Lara (2012) estudou as probabilidades dos alarmes falsos e verdadeiros em relação ao descontrole na média. O autor simulou combinações entre subgrupos racionais de tamanho  $n$  iguais a 1 até 16, deslocamentos  $\delta$  na média de 0,5; 1; 2 e 3 e intervalos de decisão padronizados  $h^*$  variando de 1 a 10. E para cada deslocamento  $\delta$  utilizou-se o valor de referência padronizado  $k^*$  igual a  $\delta/2$ .

Outros autores também realizaram estudos de desempenho do gráfico de controle CUSUM, dentre eles podem-se citar os trabalhos de Hawkins (1981), Hawkins (1987), Hawkins (1993, apud MONTGOMERY, 2016) e Souza et al. (2008).

Na prática, cada uma das probabilidades que se manifestam tanto por  $\alpha$  como  $Pd$  são probabilidades conjuntas para a média e para a variabilidade, dado que o deslocamento da média e o aumento da variabilidade provocam alterações nas probabilidades dos gráficos de controle para o monitoramento da média.

Desse modo, a probabilidade do alarme falso ( $\alpha$ ) provém das probabilidades  $\alpha_M$  e  $\alpha_V$ , que sinalizam alterações incorretas na média e na variabilidade, respectivamente. Assim, o alarme falso individual, chamado alarme falso conjunto da média e variabilidade, é dado por:

$$\alpha = \alpha_M + \alpha_V - \alpha_M\alpha_V, \quad (3.35)$$

em que:

$$\begin{aligned} \alpha > \alpha_M \quad \forall 0 < \alpha_M < 1 ; \\ & \text{e} \\ \alpha > \alpha_V \quad \forall 0 < \alpha_V < 1 . \end{aligned} \tag{3.36}$$

De modo semelhante, a probabilidade do alarme verdadeiro ( $Pd$ ) provém, na prática, das probabilidades  $Pd_M$  e  $Pd_V$ , que sinalizam alterações corretas na média e na variabilidade. Assim, tem-se:

$$Pd = Pd_M + Pd_V - Pd_M Pd_V , \tag{3.37}$$

em que:

$$\begin{aligned} Pd > Pd_M \quad \forall 0 < Pd_M < 1 ; \\ & \text{e} \\ Pd > Pd_V \quad \forall 0 < Pd_V < 1 . \end{aligned} \tag{3.38}$$

Conseqüentemente, quando um processo estiver fora de controle estatístico para a média, o aumento da variabilidade poderá ter influenciado tal deslocamento. Desse modo, quando o gráfico de controle da média acusa um ponto fora de controle, existe além da decisão de que a média deslocou, uma probabilidade de ter havido aumento na variabilidade.

Já para um processo sob controle estatístico, a sinalização de um alarme (neste caso falso) levará a uma interferência no processo de acordo com os dois estimadores, mesmo com o monitoramento realizado somente pelo gráfico de controle para a média.

Para cada característica avaliada utilizam-se, geralmente, dois gráficos de controle, um para a variabilidade e outro para a média. Entretanto, no monitoramento simultâneo de duas ou mais variáveis-resposta são construídos dois ou mais gráficos de controle para a variabilidade e a média, respectivamente, ou simplesmente um único gráfico de controle multivariado (GCM) ou um para a variabilidade e outro para a média.

Mesmo na construção de dois gráficos de controle para cada variável, separadamente, o objetivo consiste em monitorar o processo de forma múltipla, ou seja, para todas as  $p$  variáveis-resposta de interesse. O problema estatístico, neste caso, é que os gráficos de controle univariados não contemplam as correlações

entre as respostas e implicam uma probabilidade conjunta do erro tipo I ( $\alpha_c$ ), quando são interpretados todos os gráficos univariados superior ao nível de significância  $\alpha$  adotado.

Quando todas as  $p$  variáveis respostas são independentes, tem-se a seguinte relação entre a probabilidade do alarme falso conjunto ( $\alpha_c$ ) e a quantidade  $p$  de características avaliadas utilizando-se gráficos de controle univariados (MONTGOMERY, 2016):

$$\alpha_c = 1 - (1 - \alpha)^p. \quad (3.39)$$

Admitindo-se um teto máximo de 5% de alarme falso conjunto, segue que, para o planejamento de gráficos de controle, em que ocorre probabilidade de alarme falso individual de 0,01; 0,005 e 0,0027; são admitidas, respectivamente, no máximo 5, 10 e 18 características independentes a serem estudadas, simultaneamente. Já em um planejamento ainda mais conservador, admitindo-se um teto máximo de 1% de alarme falso conjunto, segue que, para uma probabilidade de alarme falso individual de 0,01; 0,005 e 0,0027; são admitidas, respectivamente, no máximo 1, 2 e 3 características independentes.

Apesar da probabilidade individual do alarme falso não inviabilizar a utilização do gráfico de controle, ou seja, quando se monitora somente uma variável-resposta, o alarme falso em termos de probabilidade conjunta poderá, sim, tornar inviável o uso dos gráficos de controle univariados para interpretações de múltiplas variáveis.

Já o poder conjunto ( $Pd_c$ ) de  $p$  características independentes avaliadas por meio dos gráficos de controle univariados, é dado por:

$$Pd_c = 1 - (1 - Pd)^p. \quad (3.40)$$

Nesse caso, pode-se observar o acentuado crescimento da probabilidade do poder conjunto à medida que se aumenta o número de características avaliadas. Admitindo-se um piso mínimo de 95% de poder conjunto, são necessárias, respectivamente, no mínimo 9, 5 e 3 características independentes com poderes individuais de 0,30; 0,50 e 0,70. Já em um planejamento ainda mais sensível,

admitindo-se um piso mínimo de 99% de alarme verdadeiro conjunto, são necessárias, respectivamente, no mínimo 13, 7 e 4 características independentes com os mesmos poderes individuais.

Observa-se, portanto, que quanto menor o poder relativo a cada gráfico de controle individual, maior deverá ser a quantidade de características independentes a serem monitoradas de modo a proporcionar um determinado poder conjunto desejável.

O poder conjunto, expresso na Equação 3.40, representa a probabilidade de pelo menos um gráfico de controle detectar causa especial e, conseqüentemente, apontar o processo como fora de controle estatístico. Apesar do aumento do poder ser desejável, o uso dos gráficos de controle univariados para múltiplas respostas são inviáveis, pois promovem aumento da probabilidade do alarme falso conjunto.

### 3.3 Gráfico de Controle Multivariado

Quando se deseja monitorar uma ou poucas características de qualidade de interesse, os gráficos de controle univariados representam boa opção de uso. Entretanto, é comum na prática o interesse do monitoramento simultâneo de várias características de qualidade. Por exemplo, em um determinado processo de produção, é razoável que haja o interesse simultâneo da qualidade do produto em relação ao seu peso, volume e viscosidade. Daí, torna-se útil o uso de gráficos de controle multivariados (GCMs), em que se calcula uma estatística que representa o controle do processo em relação à todas as características de qualidade simultaneamente.

Os GCMs mantêm a probabilidade conjunta do alarme falso ( $\alpha_c$ ) igual às probabilidades dos alarmes falsos individuais ( $\alpha$ ), ou seja, ele não aumenta o  $\alpha_c$ , mas, ele aumenta o poder conjunto ( $Pd_c$ ). Nesse caso, a avaliação multivariada é mais eficiente quando analisada por GCMs em vez dos gráficos de controle univariados.

Conforme ressaltado por Moraes et al. (2014), os GCMs têm se revelado uma importante área de pesquisa para o novo século. Além da área industrial, os

GCMs tem sido também aplicados em outras áreas de pesquisa. Anderson e Thompson (2004), por exemplo, propuseram um GCM para o monitoramento ambiental e ecológico de peixes. Williams et al. (2007) utilizaram o GCM  $T^2$  de Hotelling para o monitoramento de bioensaios na área farmacêutica visando o controle das doses de medicamentos.

De modo geral, a maioria dos GCMs possui somente o limite superior como limite:

$$LSC = h ; \quad (3.41a)$$

$$LM = 0 . \quad (3.41b)$$

Em um processo univariado, cada valor observado está sujeito a três situações em relação à média de controle: aumentar, diminuir ou permanecer estatisticamente igual. Daí, os limites de controle e a linha média se adequam a essas três situações, ou seja, os limites de controle são referências para aumento e diminuição da média enquanto que a linha média é a referência para a possível permanência da média do processo.

Por outro lado, um processo multivariado de dimensão  $p$  está sujeito a  $3^p$  situações. Por exemplo, para um processo de dimensão  $p = 2$ , visando o monitoramento da média, o vetor de observações  $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2]'$  está sujeito a  $3^2 = 9$  situações em relação ao vetor de médias  $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1 \ \mu_2]$ . Essas 9 situações são as seguintes:  $Y_1$  e  $Y_2$  permanecem sob controle estatístico, ou seja,  $E(Y_1) = \mu_1$  e  $E(Y_2) = \mu_2$ ;  $Y_1$  permanece sob controle estatístico enquanto ocorre aumento em  $Y_2$ , ou seja,  $E(Y_1) = \mu_1$  e  $E(Y_2) > \mu_2$ ;  $Y_1$  permanece sob controle estatístico enquanto ocorre diminuição em  $Y_2$ , ou seja,  $E(Y_1) = \mu_1$  e  $E(Y_2) < \mu_2$ ;  $E(Y_1) > \mu_1$  e  $E(Y_2) = \mu_2$ ;  $E(Y_1) > \mu_1$  e  $E(Y_2) > \mu_2$ ;  $E(Y_1) > \mu_1$  e  $E(Y_2) < \mu_2$ ;  $E(Y_1) < \mu_1$  e  $E(Y_2) = \mu_2$ ;  $E(Y_1) < \mu_1$  e  $E(Y_2) > \mu_2$ ;  $E(Y_1) < \mu_1$  e  $E(Y_2) < \mu_2$ .

Logo, caso se seguisse o mesmo planejamento dos gráficos de controle de Shewhart em relação aos limites de controle, seriam necessários uma linha média e  $3^p - 1$  limites de controle.

Dada à inviabilidade de estruturar um limite de controle para cada tipo de alteração no vetor de observações em relação ao vetor de médias, os GCMs

possuem somente um limite de controle, que representa todos os possíveis cenários de descontrole que possam ocorrer.

Os gráficos de controle multivariados se subdividem entre aqueles que monitoram somente o vetor de médias de um processo, somente a matriz de covariâncias e simultaneamente o vetor de médias e a matriz de covariâncias.

Em relação aos GCMs que monitoram somente o vetor de médias do processo, as hipóteses testadas são dadas por:

$$\begin{aligned} H_0: \boldsymbol{\mu} &= \boldsymbol{\mu}_0 \text{ e } \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0 ; \\ H_a: \boldsymbol{\mu} &\neq \boldsymbol{\mu}_0 \text{ e } \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0 . \end{aligned} \quad (3.42)$$

O vetor de médias sob controle  $\boldsymbol{\mu}_0$  e a matriz de covariâncias sob controle  $\boldsymbol{\Sigma}_0$  são expressas por:

$$\boldsymbol{\mu}_0 = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} ; \quad (3.43)$$

e

$$\boldsymbol{\Sigma}_0 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix} . \quad (3.44)$$

Já para os GCMs que monitoram somente a matriz de covariâncias do processo, as hipóteses testadas são:

$$\begin{aligned} H_0: \boldsymbol{\mu} &= \boldsymbol{\mu}_0 \text{ e } \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0 ; \\ H_a: \boldsymbol{\mu} &= \boldsymbol{\mu}_0 \text{ e } \boldsymbol{\Sigma} \neq \boldsymbol{\Sigma}_0 . \end{aligned} \quad (3.45)$$

E, para os GCMs que monitoram simultaneamente o vetor de médias e a matriz de covariâncias do processo, as hipóteses são:

$$H_0: \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 \text{ e } \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0 ; \quad (3.46)$$

$$H_a: \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0 \text{ e, ou } \boldsymbol{\Sigma} \neq \boldsymbol{\Sigma}_0 .$$

Nas subsecções seguintes são descritos os principais GCMs encontrados na literatura.

### 3.3.1 $T^2$ de Hotelling

O primeiro GCM, proposto por Hotelling (1947) para monitorar o vetor de médias, é caracterizado por ser eficaz em detectar grandes mudanças em um processo, além de possuir um critério de decisão relativamente simples que se baseia apenas na mais recente amostra produzida. Esse gráfico de controle se baseia na distribuição  $T^2$  de Hotelling que é a generalização da distribuição  $t$  de Student, para várias dimensões.

Harold Hotelling (1895-1973) desenvolveu a seguinte estimativa a ser plotado no gráfico de controle  $T^2$  de sua autoria:

$$\chi_i^2 = n(\bar{\mathbf{y}}_i - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\bar{\mathbf{y}}_i - \boldsymbol{\mu}_0) , \quad (3.47)$$

em que  $\bar{\mathbf{y}}_i$  é o vetor de médias referente ao subgrupo racional de ordem  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), cujos elementos são as estimativas das médias obtidas no  $i$ -ésimo subgrupo racional, da  $w$ -ésima característica de qualidade e na  $k$ -ésima observação dentro do subgrupo racional  $i$  ( $w = 1, 2, \dots, p$ ;  $k = 1, 2, \dots, n$ ). O valor  $p$  representa a quantidade de variáveis analisadas, enquanto  $n$  refere-se ao tamanho do subgrupo racional. E o vetor  $\boldsymbol{\mu}_0$  contém as médias paramétricas  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$  (Equação 3.43) de cada uma das respectivas estimativas  $\bar{y}_{i1}, \bar{y}_{i2}, \dots, \bar{y}_{ip}$  (Equação 3.48), referentes às mesmas variáveis aleatórias  $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$ .

$$\bar{\mathbf{y}}_i = \begin{bmatrix} \bar{y}_{i1} \\ \bar{y}_{i2} \\ \vdots \\ \bar{y}_{ip} \end{bmatrix} , \text{ em que } \bar{y}_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_{ijk} . \quad (3.48)$$

Ainda em relação à Equação 3.47, tem-se que  $\Sigma_0$  representa a matriz de covariâncias do processo, podendo ser expressa pela Equação 3.44, em que  $\sigma_{ww'}$  representa a covariância entre as características de qualidade  $w$  e  $w'$  ( $w = 1, 2, \dots, p$ ;  $w' = 1, 2, \dots, p$ ). Em particular, para  $w = w'$  (casos observados na diagonal principal da Equação 3.44), tem-se  $\sigma_{ww'} = \sigma_{w'w} = \sigma_w^2$  que é a variância da característica de qualidade  $w$ . Vale ainda salientar que:

$$\sigma_{ww'} = \sigma_{w'w} \quad \forall (w, w') \in \mathbb{N}^2 \mid w = 1, 2, \dots, p \text{ e } w' = 1, 2, \dots, p, \quad (3.49)$$

ou seja,  $\Sigma_0$  é uma matriz simétrica.

Para subgrupos racionais de tamanho  $n = 1$ , o vetor de médias simplifica-se para:

$$\bar{\mathbf{y}}_i = \begin{bmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \\ \vdots \\ y_{ip} \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Assim como no caso univariado, em que o processo produzia sob distribuição normal, no caso multivariado as variáveis  $Y_s$  do processo devem ser produzidas sob distribuição normal multivariada, ou seja,  $Y_1, Y_2, \dots, Y_p \sim N(\boldsymbol{\mu}_0, \Sigma_0)$ .

Portanto, o vetor de médias  $\boldsymbol{\mu}_0$  e a matriz de covariâncias  $\Sigma_0$  apresentados nas Equações 3.43 e 3.44 são parâmetros de uma normal multivariada de dimensão  $p$ .

O estimador de Hotelling possui distribuição  $\chi^2$  com  $p$  graus de liberdade, o que implica nas seguintes estimativas da  $LM$  e do  $LSC$ :

$$LSC = \chi_{p,\alpha}^2; \quad (3.51a)$$

$$LM = 0, \quad (3.51b)$$

em que  $p$  é a quantidade de variáveis monitoradas,  $\alpha$  é a probabilidade do alarme falso e  $\chi_{p,\alpha}^2$  é o valor obtido na tabela unilateral a direita da distribuição  $\chi^2$ .

Isso significa que o processo será interpretado como sob controle quando ocorrer  $\chi_i^2 \leq LSC \forall i = 1, 2, \dots, m$ .

Visando comparar o desempenho do gráfico de controle  $T^2$  de Hotelling com  $p$  gráficos de controle de Shewhart, Lara e Souza (2014) simularam processos visando obter a taxa de alarme falso e verdadeiro, este último para vários deslocamentos nos respectivos vetores de médias e  $p$  médias do processo. De modo geral, o gráfico de controle  $T^2$  de Hotelling mostrou-se visivelmente superior aos gráficos de controle univariados de Shewhart em obter as menores probabilidades dos alarmes falsos e maiores probabilidades dos alarmes verdadeiros.

### 3.3.2 MCUSUM

A partir do gráfico de controle  $T^2$  de Hotelling, do crescimento e complexidade dos processos de produção e da crescente disponibilização dos recursos computacionais, ocorreu aumento no interesse pelo monitoramento simultâneo de várias características da qualidade de um processo e, conseqüentemente, no aprimoramento dos estudos com os GCMs.

Inicialmente estudado por Woodall e Ncube (1985), Pignatiello e Kasunic (1985, apud CROSIER, 1988), Healy (1987) e, posteriormente, proposto por Crosier (1988) e Pignatiello e Runger (1990), o gráfico de controle da Soma Acumulada Multivariada (*Multivariate Cumulative Sum* – MCUSUM) caracteriza-se por ser uma extensão do gráfico de controle CUSUM univariado para o caso multivariado, ou seja, quando se pretende monitorar o vetor de médias de um processo que segue distribuição normal  $p$ -variada  $(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)$ . Woodall e Ncube (1985) sugeriram operar  $p$  gráficos de controle CUSUMs paralelamente, cujo desempenho foram medidos utilizando-se o ARL. Healy (1987) mostrou que um gráfico de controle CUSUM univariado baseado numa combinação linear de variáveis pode ser usado para situações multivariadas, caso o interesse seja em detectar uma mudança numa direção específica do vetor de médias. Contudo, as primeiras versões definitivas do gráfico de controle CUSUM Multivariado (MCUSUM) foram realizadas por Crosier (1988) e Pignatiello e Runger (1990) em que os autores desenvolveram uma estatística obtida a partir do cálculo

vetorial simultâneo de todas as características do processo avaliadas para cada subgrupo racional.

Ao contrário do gráfico de controle CUSUM univariado que possui duas CUSUMs unilaterais, o MCUSUM possui apenas uma, que indica somente o descontrole no processo, sem apontar sua direção. Essa MCUSUM, expressa por  $\mathbf{s}_i$ , é um vetor de dimensão  $p$ .

Considerando-se  $i$  a ordem do subgrupo racional ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), seja:

$$c_i = [(\mathbf{s}_{i-1} + \mathbf{y}_i - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\mathbf{s}_{i-1} + \mathbf{y}_i - \boldsymbol{\mu}_0)]^{1/2}, \quad (3.52)$$

em que  $\mathbf{y}_i$  é um vetor de observações de ordem  $p \times 1$ ,  $\boldsymbol{\mu}_0$  é o vetor de médias  $p \times 1$  sob controle estatístico,  $\boldsymbol{\Sigma}_0$  é a matriz de covariâncias  $p \times p$  sob controle estatístico e  $\mathbf{s}_0 = \mathbf{0}_{p \times 1}$ .

Assim, de acordo com Crosier (1988), a MCUSUM, para  $i = 1, 2, \dots, m$ , é dada por:

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{0}, \quad \text{se } c_i \leq k \quad (3.53a)$$

$$\mathbf{s}_i = (\mathbf{s}_{i-1} + \mathbf{y}_i - \boldsymbol{\mu}_0) \left(1 - \frac{k}{c_i}\right), \quad \text{se } c_i > k \quad (3.53b)$$

em que  $\mathbf{s}_i$  é um vetor  $p \times 1$ ,  $\mathbf{s}_0 = \mathbf{0}$  e  $k > 0$ .

No gráfico MCUSUM, a estatística plotada é padronizada e definida por:

$$x_i = [(\mathbf{s}_i)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\mathbf{s}_i)]^{1/2}. \quad (3.54)$$

O gráfico de controle MCUSUM sinaliza descontrole quando  $x_i > h$ , de modo que o limite superior de controle e a linha média são expressos por:

$$LSC = h; \quad (3.55a)$$

$$LM = 0, \quad (3.55b)$$

em que o valor  $h$  é chamado de intervalo de decisão.

De modo análogo à comparação feita entre os gráficos de controle univariados de Shewhart e CUSUM, tem-se que o MCUSUM é mais sensível em relação ao  $T^2$  de Hotelling por detectar pequenas mudanças no vetor de médias de um processo.

Para  $p = 1$  e  $n = 1$ , o valor  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) de um processo sob controle estatístico referente à Equação 3.52 do MCUSUM se reduz a:

$$c_i = [(s_{i-1} + y_i - \mu_0)' (\sigma_0^2)^{-1} (s_{i-1} + y_i - \mu_0)]^{1/2} = \left[ \frac{(s_{i-1} + y_i - \mu_0)^2}{\sigma_0^2} \right]^{1/2}$$

$$= \frac{|y_i - \mu_0 + s_{i-1}|}{\sigma_0}.$$

Para o caso  $y_i - \mu_0 + s_{i-1} > 0$  e, desenvolvendo-se as Equações 3.53a e b, tem-se:

$$\begin{cases} s_i = 0, & \text{se } c_i \leq k^* \\ s_i = (y_i - \mu_0 + s_{i-1}) \left( 1 - \frac{k^*}{c_i} \right), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

↓

$$\begin{cases} s_i = 0, & \text{se } \frac{y_i - \mu_0 + s_{i-1}}{\sigma_0} \leq k^* \\ s_i = (y_i - \mu_0 + s_{i-1}) \left( 1 - \frac{k^*}{\frac{y_i - \mu_0 + s_{i-1}}{\sigma_0}} \right), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

↓

$$\begin{cases} s_i = 0, & \text{se } y_i - \mu_0 + s_{i-1} \leq k^* \sigma_0 \\ s_i = (y_i - \mu_0 + s_{i-1}) \left( 1 - \frac{k^* \sigma_0}{y_i - \mu_0 + s_{i-1}} \right), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

↓

$$\begin{cases} s_i = 0, & \text{se } y_i - \mu_0 - k^* \sigma_0 + s_{i-1} \leq 0 \\ s_i = (y_i - \mu_0 + s_{i-1}) - k^* \sigma_0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

↓

$$\begin{cases} s_i = 0, & \text{se } y_i - (\mu_0 + \overbrace{k^* \sigma_0}^{=K}) + s_{i-1} \leq 0 \\ s_i = y_i - \left( \mu_0 + \overbrace{k^* \sigma_0}^{=K} \right) + s_{i-1}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

⇓

$$s_i = \text{máx}[0; y_i - (\mu_0 + K) + s_{i-1}].$$

Note que a última equação obtida é, na verdade, a CUSUM unilateral superior descrita na Equação 3.6a.

Para estabelecer o valor de referência  $k$  (Equações 3.53a e b), é necessário definir uma distância  $d^2$  entre o vetor de médias  $\boldsymbol{\mu}_0$  sob controle e o outro vetor de médias  $\boldsymbol{\mu}_1$  considerado como fora de controle estatístico e que apresenta a menor diferença absoluta em relação a  $\boldsymbol{\mu}_0$ . No contexto multivariado, essa distância  $d^2$  é chamada de distância generalizada de Mahalanobis que, de acordo com Ferreira (2011), é obtida por:

$$d^2(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_0) = (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0), \quad (3.56)$$

em que  $\boldsymbol{\Sigma}_0$  representa a matriz de covariâncias das  $p$  variáveis presentes no processo e  $\boldsymbol{\mu}_0$  e  $\boldsymbol{\mu}_1$  os vetores de ordem  $p \times 1$  das médias consideradas como sob e fora de controle estatístico, respectivamente. Em particular, para  $p = 1$ , tem-se que:

$$d^2(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_0) = d^2(\mu_1, \mu_0) = (\mu_1 - \mu_0) (\sigma_0^2)^{-1} (\mu_1 - \mu_0) = \frac{(\mu_1 - \mu_0)^2}{\sigma_0^2}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} d = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{\sigma_0} &\Rightarrow |\mu_1 - \mu_0| = d\sigma_0 \Rightarrow \mu_1 - \mu_0 = \pm d\sigma_0 \\ &\Rightarrow \mu_1 = \mu_0 \pm d\sigma_0. \end{aligned}$$

A escolha de  $k$  é proporcional à raiz quadrada da distância generalizada de Mahalanobis, representada por  $d$ . Conforme apresentado por Crosier (1988), a

escolha  $k = d/2$  aparenta minimizar o *ARL OC* a partir de um *ARL IC* previamente estabelecido. Note ainda que essa escolha para  $k$  condiz com a escolha de  $k^*$  para o caso univariado (Equação 3.11).

### 3.3.3 MEWMA

Inspirados com o surgimento das versões multivariadas dos gráficos de controle da soma acumulada, Lowry et al. (1992) desenvolveram a versão multivariada do gráfico de controle da média móvel exponencialmente ponderada (MEWMA).

A partir da estatística do EWMA univariado (Equação 3.17), uma extensão natural para o caso multivariado é definir os seguintes vetores e matrizes:

$$\mathbf{w}_i = \Lambda \mathbf{y}_i + (\mathbf{I} - \Lambda) \mathbf{w}_{i-1}, \quad (3.57)$$

em que:

- $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $\mathbf{w}_0 = \boldsymbol{\mu}_0$ ;  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ ;  $0 < \lambda_j \leq 1$ ;  $j = 1, 2, \dots, p$ ;
- $\mathbf{y}_i$ : vetor dos valores observados das variáveis  $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$  no subgrupo racional  $i$ ;
- $\mathbf{w}_i$ : vetor dos valores das variáveis  $W_1, W_2, \dots, W_p$  no subgrupo racional  $i$ ;
- $\mathbf{I}$ : matriz identidade de ordem  $p$ .

Em notação matricial, a Equação 3.57 pode ser representada, para cada subgrupo racional de ordem  $i$ , por:

$$\begin{bmatrix} w_{i1} \\ w_{i2} \\ \vdots \\ w_{ip} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \\ \vdots \\ y_{ip} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 - \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 - \lambda_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{(i-1)1} \\ w_{(i-1)2} \\ \vdots \\ w_{(i-1)p} \end{bmatrix}$$

Se não há uma razão a priori para ponderar as observações passadas de forma diferente para as  $p$  características de qualidade, então  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = \lambda$ . Conseqüentemente, o vetor MEWMA para o subgrupo racional  $i$ , pode ser escrito como:

$$\mathbf{w}_i = \lambda \mathbf{y}_i + (1 - \lambda) \mathbf{w}_{i-1}. \quad (3.58)$$

O gráfico de controle MEWMA fornece um sinal de descontrole no processo quando:

$$t_i^2 = (\mathbf{w}_i)'(\boldsymbol{\Sigma}_{W_i})^{-1}(\mathbf{w}_i) > h, \quad (3.59)$$

em que o valor  $h$ , positivo, é escolhido para alcançar um determinado controle  $ARL_{IC}$  e, conseqüentemente, tornar-se o limitante superior de controle (Equação 3.60a):

$$LSC = h; \quad (3.60a)$$

$$LM = 0. \quad (3.60b)$$

Já  $\boldsymbol{\Sigma}_{W_i}$  é a matriz de covariâncias de  $\mathbf{W}_i$ , no subgrupo racional  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) dada por:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{W_i} = \frac{\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2i}]}{2 - \lambda} \boldsymbol{\Sigma}_0, \quad (3.61)$$

em que  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = \lambda$  e  $\boldsymbol{\Sigma}_0$  é a matriz de covariâncias de  $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$  do processo sob controle estatístico.

Para compreender melhor a matriz de covariâncias  $\boldsymbol{\Sigma}_{W_i}$ , vale a pena retornar ao gráfico de controle EWMA univariado. Se  $W_1, W_2, \dots, W_m$  são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas nos subgrupos racionais de ordem 1, 2, ...,  $m$  então a variância de  $W_i$  é dada por:

$$\sigma_{W_i}^2 = \frac{\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2i}]}{2 - \lambda} \sigma_Y^2, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.62)$$

Fazendo-se uma comparação direta entre as Equações 3.61 e 3.62, observa-se que a matriz de covariâncias de  $\mathbf{W}_i$  – expressa por  $\boldsymbol{\Sigma}_{W_i}$  – é uma generalização da variância de  $W_i$  – expressa por  $\sigma_{W_i}^2$  – e sua dedução pode ser visualizada em Lowry et al. (1992).

Analogamente ao caso univariado<sup>1</sup>, o gráfico de controle MEWMA para  $\lambda = 1$  é equivalente ao de  $T^2$  de Hotelling.

O desempenho do MEWMA em termos de probabilidades dos alarmes falsos ( $d = 0$ ) e verdadeiros ( $d > 0$ ) ou, analogamente, ARL IC e ARL OC, depende do parâmetro de não centralidade que é, na verdade, a raiz quadrada da distância generalizada de Mahalanobis que, de acordo com Ferreira (2011), é obtida por:

$$d(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_0) = [(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)]^{1/2}, \quad (3.63)$$

em que  $\boldsymbol{\Sigma}_0$  representa a matriz de covariâncias das  $p$  variáveis presentes no processo sob controle e  $\boldsymbol{\mu}_0$  e  $\boldsymbol{\mu}_1$  os vetores de ordem  $p \times 1$  das médias consideradas como sob e fora de controle estatístico, respectivamente.

Os vetores  $\boldsymbol{\mu}_0$  e  $\boldsymbol{\mu}_1$  podem ser definidos conforme a seguir:

$$\boldsymbol{\mu}_0 = \begin{bmatrix} \mu_{0_1} \\ \mu_{0_2} \\ \vdots \\ \mu_{0_p} \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{\mu}_1 = \begin{bmatrix} \mu_{1_1} \\ \mu_{1_2} \\ \vdots \\ \mu_{1_p} \end{bmatrix}, \quad (3.64)$$

em que  $\mu_{0_w}$  e  $\mu_{1_w}$  são as médias consideradas sob e fora de controle estatístico, respectivamente, para a  $w$ -ésima característica de qualidade ( $w = 1, 2, \dots, p$ ).

Para valores baixos de  $d$  o gráfico de controle  $T^2$  de Hotelling possui desempenho inferior ao gráfico de controle MCUSUM e MEWMA, enquanto que para valores altos, todos os GCMs operam bem, sendo necessários, em média, 2 ou 3 subgrupos racionais para detectar o descontrole (LOWRY et al., 1992).

Outras comparações de desempenhos entre os GCMs  $T^2$  de Hotelling, MCUSUM e MEWMA podem ser visualizadas em Lara et al. (2014) e Moraes et al. (2014).

---

<sup>1</sup> O EWMA univariado para  $\lambda = 1$  equivale ao gráfico de controle de Shewhart para a média.

### 3.3.4 Lin-MEWMA

Moraes et al. (2014) propuseram o gráfico de controle Lin-MEWMA para o monitoramento do vetor de médias a partir de transformações lineares baseada na análise de componentes principais. Essa metodologia consiste em, a partir das  $p$  características avaliadas, condensá-las em apenas alguns componentes ou componentes principais.

Seja o vetor de médias  $\mathbf{m}_i$ , com a inclusão do mais recente vetor observado  $\mathbf{y}_i$ , dado por:

$$\mathbf{m}_i = (1 - \lambda)\mathbf{y}_{i-1} + \lambda\mathbf{y}_i, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (3.65)$$

em que  $\mathbf{m}_0 = \mathbf{0}$  e  $0 < \lambda \leq 1$ , embora diferentes pesos possam ser atribuídos para cada variável no vetor.

O desempenho é medido pela comparação dos *ARLs* dos GCMs concorrentes após a calibração do processo. Como o GCM proposto para monitorar o vetor de médias é baseado numa estatística linear, ele é chamado de gráfico de controle Lin-EWMA.

O Lin-EWMA monitora a variável unidimensional escolhendo limites de controle simétricos que resultam de um *ARL IC* pré especificado. As observações geradas a partir de um processo sob controle são referidas como classe  $w_0$ , tal que:

$$Y|w_0 \sim N(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0). \quad (3.66)$$

A variável transformada é dada por:

$$x_i = [\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}(\mathbf{m}_i - \mathbf{m}_0)]' \mathbf{y}_i \quad (3.67)$$

e dispara uma sinalização fora de controle assim que  $|x_i| \geq h$ .

Nesse contexto,  $\mathbf{m}_i$  é o vetor de médias corrente, e  $h$  é escolhido para alcançar um *ARL IC* pré-especificado.

### 3.3.5 ELR

Proposto por Zhang et al. (2010), o GCM ELR utiliza o gráfico de controle EWMA juntamente com a Razão de Verossimilhança Generalizada (*Generalized Likelihood Ratio* – GLR) visando o monitoramento conjunto da média e variabilidade.

Seja  $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_p)'$  um vetor aleatório que represente  $p$  características de qualidade correlacionadas de um processo de interesse. Quando o processo está sob controle, é assumido que a distribuição de  $\mathbf{g} \sim N(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)$ , ou seja, uma distribuição normal de dimensão  $p$  com vetor de médias  $\boldsymbol{\mu}_0$  e matriz de covariâncias  $\boldsymbol{\Sigma}_0$ , ambos conhecidos ou estimados ao final da fase I de controle do processo. Portanto, pode-se obter uma transformação apropriada para  $\mathbf{g}$ :

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1/2}(\mathbf{g} - \boldsymbol{\mu}_0), \quad (3.68)$$

de tal modo que  $\mathbf{x} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , quando o processo está sob controle estatístico.

Desse modo, tem-se:

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Sigma}_0^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{\mu}_0 - \boldsymbol{\mu}_0) = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_0^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Sigma}_0 \boldsymbol{\Sigma}_0^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{I}_p, \quad (3.69)$$

em que  $\mathbf{I}_p$  é a matriz identidade de ordem  $p$ .

De acordo com a transformação de  $\mathbf{g}$  para  $\mathbf{x}$ , seja  $\mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{i2}, \dots, \mathbf{x}_{in}$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) os vetores aleatórios de ordem  $p \times 1$  independentes entre si, tanto entre os subgrupos racionais como entre as repetições dentro de cada um deles.

Assim, considere:

$$\bar{\mathbf{x}}_i = \frac{\sum_{k=1}^n \mathbf{x}_{ik}}{n} \quad \text{e} \quad \mathbf{S}_i = \frac{\sum_{k=1}^n (\mathbf{x}_{ik} - \bar{\mathbf{x}}_i)'(\mathbf{x}_{ik} - \bar{\mathbf{x}}_i)}{n} \quad (3.70)$$

o  $i$ -ésimo vetor de médias e a  $i$ -ésima matriz de covariâncias, respectivamente.

Em seguida, considere o seguinte teste de hipóteses:

$$H_0: \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0} \text{ e } \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{I}_p \text{ e } H_a: \boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0} \text{ e, ou } \boldsymbol{\Sigma} \neq \mathbf{I}_p, \quad (3.71)$$

sendo relativamente fácil obter a estatística da razão de verossimilhanças generalizada, conforme a seguir:

$$LR_i = np(a - \log g - 1) + n\|\bar{\mathbf{x}}_i\|^2, \quad (3.72)$$

em que:

$a = \frac{1}{p} \text{tr}(\mathbf{S}_i)$ ,  $g = (|\mathbf{S}_i|)^{1/p}$ ,  $|\cdot|$  e  $\text{tr}(\cdot)$  denotam respectivamente o determinante e traço da matriz quadrada e  $\|\cdot\|$  representa a norma do vetor.

Pode ser verificado que  $LR_i$  converge em distribuição (Equação 3.73), ou seja, converge em lei.

$$LR_i \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_{\frac{1}{2}p(p+3)}^2 \text{ para } n \rightarrow +\infty. \quad (3.73)$$

Obviamente, quanto maior o  $LR_i$  mais propenso é rejeitar a hipótese nula. Os termos  $\|\bar{\mathbf{x}}_i\|^2$  e  $a - \log g$  contribuem para as mudanças na média e na variância do processo, respectivamente. Ao contrário de outros testes estatísticos, o  $LR_i$  é uma razão de verossimilhanças estatística obtida sob o cenário em que o vetor de médias e a matriz de covariâncias podem mudar e, portanto, se adaptar a vários tipos de combinações de mudanças no processo.

Para detectar pequenas e médias mudanças efetivamente, incorpora-se o EWMA para a construção do  $LR_i$ . Aqui o esquema EWMA não é diretamente a média do  $LR_i$ , mas serve para obter estimativas mais precisas do vetor de médias e da matriz de covariâncias do processo corrente. É análogo à construção do gráfico de controle MEWMA (Lowry et al., 1992; Chang e Zhang, 2001), porém de modo mais estendido. Mais especificamente falando, dois gráficos de controle MEWMA baseados no vetor de médias  $\bar{\mathbf{x}}_i$  e matriz de covariância amostral  $\mathbf{S}_i$  são dadas por:

$$\mathbf{u}_i = \lambda \bar{\mathbf{x}}_i + (1 - \lambda)\mathbf{u}_{i-1}; \quad (3.74a)$$

$$\mathbf{V}_i = \lambda \mathbf{S}_i^* + (1 - \lambda) \mathbf{V}_{i-1}, \quad (3.74b)$$

em que:

$$\mathbf{S}_i^* = \frac{\sum_{k=1}^n (\mathbf{x}_{ik} - \mathbf{u}_i)' (\mathbf{x}_{ik} - \mathbf{u}_i)}{n}, \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{V}_0 = \mathbf{I}_p, \quad (3.75)$$

em que  $\lambda$  é o parâmetro de suavização ( $0 < \lambda \leq 1$ ). De modo geral, quanto menor o valor  $\lambda$ , mais rápida é a detecção de pequenas mudanças no processo (Lucas e Saccucci, 1990).

Pode ser notado, conforme apontado por Huang et al. (2007, apud Zhang et al., 2010), que para  $ni \geq p$ ,  $\mathbf{V}_i$  pode ser usado para estimar  $\Sigma$ . E também, que a estimativa do vetor de médias  $\mathbf{u}_i$  do processo é usada para a estimação da matriz de covariâncias. É esperado que ocorresse maior acurácia utilizando essas estimações sequencialmente atualizadas e então maior capacidade em detectar possíveis mudanças no processo. De fato, Yeh et al. (2003) e Huwang et al. (2007, apud Zhang et al., 2010) também defendem o uso dessa formulação.

Finalmente, substitui-se  $\bar{\mathbf{x}}_i$  e  $\mathbf{S}_i$  por  $\mathbf{u}_i$  e  $\mathbf{V}_i$  na Equação 3.74 e obtém-se a estatística do gráfico ELR, para  $i = 1, 2, \dots, m$ :

$$ELR_i = np(a^* - \log g^* - 1) + n\|\mathbf{u}_i\|^2, \quad (3.76)$$

em que  $a^* = \frac{1}{p} \text{tr}(\mathbf{V}_i)$  e  $g^* = (|\mathbf{V}_i|)^{1/p}$ .

Se  $ELR_i > h$ , então um alarme é acionado, no qual um determinado valor  $h$  é escolhido para alcançar um determinado  $ARL_{IC}$ .

O gráfico ELR é similar ao gráfico MEC de Hawkins e Maboudou-Tchao (2008), mas possui algumas diferenças. Primeiro, o ELR aponta para o monitoramento simultâneo da média e da variabilidade em um único gráfico, enquanto que o gráfico MEC aponta somente para mudanças na matriz de covariâncias. Em segundo lugar, a estimativa da média do processo é usada na estimação da covariância.

Para que um GCM possa ser aplicado, é necessário que, além de adequadas propriedades estatísticas, ele esteja acessível em um software. Os GCMs  $T^2$  de Hotelling e MEWMA podem ser executado nos softwares Minitab®

e Statistica®. Já o MCUSUM encontra-se disponível apenas no Statistica®. Vale ainda ressaltar que todos os gráficos de controle podem ser implementados e executados pelo usuário por meio dos softwares SAS® e Excel®. No software R, existe o pacote MSQC desenvolvido por Fernandez (2015) em que estão implementados os GCMs  $T^2$  de Hotelling, MCUSUM e MEWMA.

## 4. MATERIAL E MÉTODOS

Os GCMs estudados,  $T^2$  de Hotelling, MCUSUM, MEWMA e Lin-MEWMA monitoram a média, enquanto que o ELR monitora a média e a variabilidade. E para estudar teoricamente esses cinco GCMs, foram estabelecidos, principalmente, os seguintes critérios sequenciais:

- interpretar e deduzir, matematicamente e estatisticamente, as equações dos gráficos de controle desenvolvidos nos artigos originais;
- conhecer as medidas de desempenhos desenvolvidas originalmente;
- conhecer as propostas originais de aplicações.

No GCM  $T^2$  de Hotelling foi determinado o limite superior de controle que proporcione, em média, uma probabilidade do alarme falso máxima estipulada para o gráfico em um processo sob controle estatístico. E, posteriormente, foi determinada uma probabilidade média do alarme verdadeiro ao longo dos subgrupos racionais para o processo fora de controle estatístico.

Para os GCMs MCUSUM, MEWMA, Lin-MEWMA e ELR foram realizados, além do mesmo trabalho supracitado para o  $T^2$  de Hotelling, as determinações dos respectivos parâmetros  $k$  e  $\lambda$  que proporcionassem desempenhos ótimos em função do deslocamento que o vetor de médias sofre.

Para um processo sob controle estatístico, foram simulados no software R (R Development Core Team, 2013) dados de  $p$  variáveis aleatórias, de modo que  $Y_1, Y_2, \dots, Y_p \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0)$ , para  $p$  igual a 2; 6 e 10 e para 200 subgrupos racionais de tamanho  $n = 1$ , em que um determinado subgrupo racional foi especificado pelo índice  $i$  ( $1 \leq i \leq 200$ , para  $i \in \mathbb{N}$ ). Para tanto, foram realizadas 20.000 simulações ( $1 \leq j \leq 20.000$ , para  $j \in \mathbb{N}$ ) por subgrupo racional. É importante ressaltar que na literatura são utilizados geralmente 25 subgrupos racionais. Portanto, foi adotado o óctuplo para que o estudo fosse realizado com maior precisão, além de proporcionar maior conhecimento teórico das probabilidades dos alarmes falsos e verdadeiros ao longo dos subgrupos racionais.

A escolha  $p = 2$  realizada no presente estudo é devida às aplicações de GCMs para processos bivariados, conforme pode ser visto em trabalhos tais como os de Melo et al. (2017), Costa e Machado (2013) e Lee et al. (2013).

De acordo com Montgomery (2016) os GCMs funcionam melhor quando o número  $p$  de variáveis do processo é no máximo igual a 10. Daí a escolha  $p = 10$ , que é o limitante superior de quantidade de variáveis recomendadas a serem monitoradas.

Para maior precisão do presente estudo, escolheu-se ainda uma terceira quantidade  $p$  de características em um processo. A escolha mais natural foi quantidade média das duas quantidades anteriormente propostas, ou seja,  $p = 6$ .

Para o caso  $p = 2$  o vetor de médias foi dado por:

$$\boldsymbol{\mu}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

e a matriz de covariância foi dada de acordo com os três seguintes casos de covariâncias ( $\sigma_{ww'}$ ) entre as variáveis aleatórias  $Y_1$  e  $Y_2$ :

$$\boldsymbol{\Sigma}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0,1 \\ 0,1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad (4.2a)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix} ; \quad (4.2b)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0,9 \\ 0,9 & 1 \end{bmatrix} . \quad (4.2c)$$

As matrizes de covariâncias expressas nas Equações 4.2a, b e c representam casos de pequena, média e alta correlação entre as  $p = 2$  variáveis, respectivamente.

Para o caso  $p = 6$  o vetor de médias foi dado por:

$$\boldsymbol{\mu}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]' \quad (4.3)$$

e a matriz de covariâncias, de acordo com os três seguintes casos de covariâncias ( $\sigma_{ww'}$ ) entre as variáveis aleatórias  $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5$  e  $Y_6$  foi dada por:

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 & 1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 & 1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 & 1 \end{bmatrix}; \quad (4.4a)$$

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 1 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 1 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 & 1 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 1 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 1 \end{bmatrix}; \quad (4.4b)$$

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0,9 & 0,9 & 0,9 & 0,9 & 0,9 \\ 0,9 & 1 & 0,9 & 0,9 & 0,9 & 0,9 \\ 0,9 & 0,9 & 1 & 0,9 & 0,9 & 0,9 \\ 0,9 & 0,9 & 0,9 & 1 & 0,9 & 0,9 \\ 0,9 & 0,9 & 0,9 & 0,9 & 1 & 0,9 \\ 0,9 & 0,9 & 0,9 & 0,9 & 0,9 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.4c)$$

E, para o caso  $p = 10$ , o vetor de médias foi dado por:

$$\mu_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]'; \quad (4.5)$$

enquanto que a matriz de covariância foi dada, também de acordo com três casos, por:

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0,1 & 0,1 & \dots & 0,1 \\ 0,1 & 1 & 0,1 & \dots & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 1 & \dots & 0,1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{10 \times 10}; \quad (4.6a)$$

$$\mathbf{\Sigma}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,5 & \dots & 0,5 \\ 0,5 & 1 & 0,5 & \dots & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 1 & \dots & 0,5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{10 \times 10} ; \quad (4.6b)$$

$$\mathbf{\Sigma}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0,9 & 0,9 & \dots & 0,9 \\ 0,9 & 1 & 0,9 & \dots & 0,9 \\ 0,9 & 0,9 & 1 & \dots & 0,9 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0,9 & 0,9 & 0,9 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{10 \times 10} . \quad (4.6c)$$

Nesse estudo, os processos monitorados com base em duas, seis e dez ( $p$ ) variáveis aleatórias, foram definidos por:

$$\mathbf{Y}_p \sim N(\boldsymbol{\mu}_0, \mathbf{\Sigma}_0) , \text{ para processos sob controle;} ,$$

$$\mathbf{Y}_p \sim N(\boldsymbol{\mu}_1, \mathbf{\Sigma}_0) , \text{ para processos fora de controle.}$$

Foram gerados diagramas de dispersão da probabilidade do alarme falso em função da ordem do subgrupo racional para todos os GCMs citados anteriormente. Realizou-se também uma análise de regressão do alfa em função da quantidade  $p$  de características estudadas, correlação  $\sigma_{ww'}$ , entre elas e ordem  $i$  do subgrupo racional. Para o MCUSUM, acrescentou-se como variável independente na regressão a média  $\boldsymbol{\mu}_1$  a ser considerada como fora de controle, e para os gráficos de controle MEWMA, Lin-MEWMA e ELR acrescentou-se como variável independente o parâmetro de suavização  $\lambda$ . Para os gráficos de controle MEWMA, Lin-MEWMA e ELR obteve-se o gráfico da probabilidade do alarme falso em função de  $\lambda$ .

Conforme a mesma metodologia de simulação para o processo sob controle estatístico, procedeu-se a substituição do vetor

$$\boldsymbol{\mu}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{p \times 1} \quad (4.7)$$

pelo vetor  $\boldsymbol{\mu}_1$  para que o processo fora de controle fosse gerado, sendo  $\boldsymbol{\mu}_1$  dado por:

$$\begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ \vdots \\ 0,5 \end{bmatrix}_{p \times 1}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{p \times 1}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \end{bmatrix}_{p \times 1} \text{ e } \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ \vdots \\ 3 \end{bmatrix}_{p \times 1}. \quad (4.8)$$

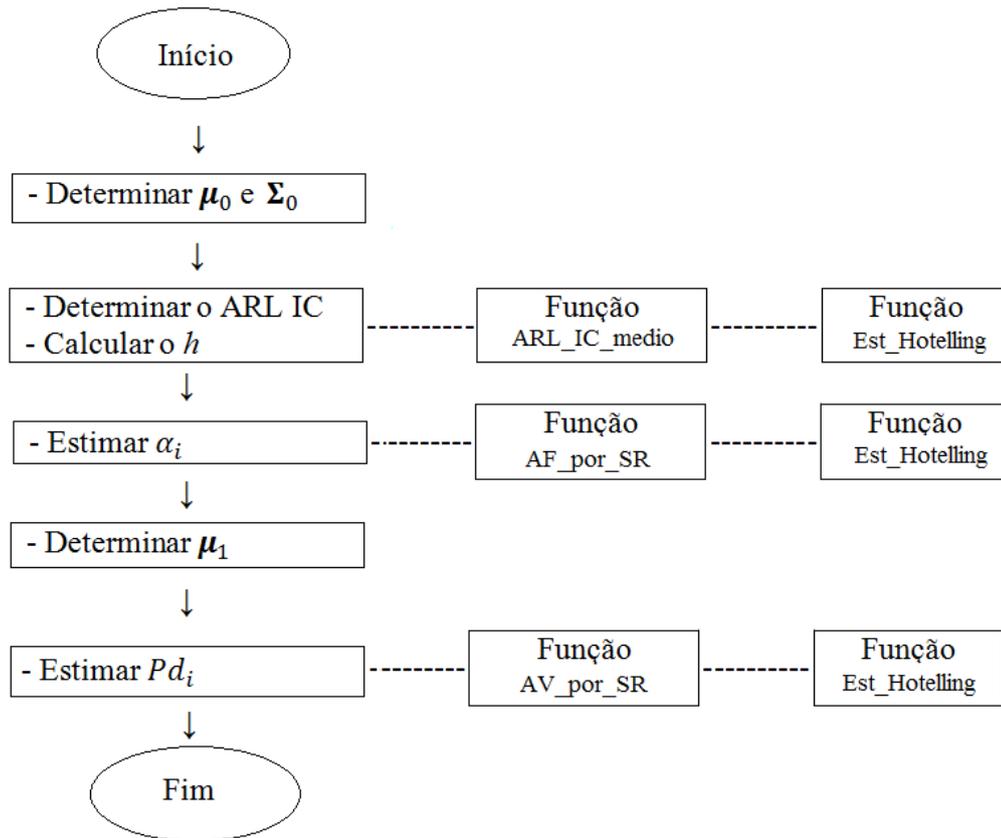
Foram gerados diagramas de dispersão da probabilidade do alarme verdadeiro (poder) em função da ordem do subgrupo racional para todos os GCMs citados anteriormente.

#### 4.1 T<sup>2</sup> de Hotelling

Para um processo sob controle estatístico, foram determinados os intervalos de decisão  $h$  que proporcionaram  $ARL_{IC} = 200$  para todas as combinações de  $p$  e de matrizes de covariâncias sob controle propostas. Dado que estão sendo estudados três valores diferentes de  $p$  e três matrizes de covariâncias  $\boldsymbol{\Sigma}_0$ , então foram determinados nove valores de  $h$  para este gráfico de controle.

A partir da obtenção do valor  $h$ , foram simulados os processos sob controle e fora de controle estatístico e, conseqüentemente, calculadas as probabilidades médias dos alarmes falso e verdadeiro ao longo dos 200 subgrupos racionais.

No fluxograma que contém os procedimentos para execução do gráfico T<sup>2</sup> de Hotelling foi resumida a forma sequencial de uso das funções Est\_Hotelling, ARL\_IC\_medio, AF\_por\_SR e AV\_por\_SR, além do modo como elas se relacionaram (Figura 4.1). Essas cinco funções foram desenvolvidas no software R e estão apresentadas no Anexo A.



**Figura 4.1.** Fluxograma do uso das funções Est\_Hotelling, ARL\_IC\_medio, AF\_por\_SR e AV\_por\_SR ao longo do planejamento do gráfico de controle  $T^2$  de Hotelling.

Pela função Est\_Hotelling, primeira função implementada, foram obtidas as estimativas do  $T^2$  de Hotelling para cada simulação e subgrupo racional a partir das seguintes entradas: vetor de médias  $\mu_0$  ou  $\mu_1$ , matriz de covariâncias  $\Sigma_0$  e número  $p$  de características estudadas. A partir dessa função, foram realizados os cálculos referentes à Equação 3.75, obtendo-se assim as estimativas do  $T^2$  de Hotelling em cada subgrupo racional.

Para a escolha do intervalo de decisão  $h$ , utilizou-se uma função que retornou o  $ARL IC$  médio ao longo de um processo  $p$ -variado sob controle estatístico e a partir de um valor  $h$  preestabelecido. Desse modo, diversos valores de  $h$  foram testados na função, a fim de selecionar aquele que proporcionasse o  $ARL IC$  desejado (200).

Após realizadas as 20.000 simulações de um processo normalmente distribuído  $p$ -variado composto por 200 subgrupos racionais e obtidas, para cada simulação as respectivas estatísticas  $T^2$  de Hotelling ao longo dos subgrupos

racionais obteve-se a ordem do subgrupo racional que proporcionou o primeiro alarme falso.

Conseqüentemente, após todas as simulações realizadas, calculou-se o subgrupo racional que, em média, o alarme falso ocorreu (função ARL\_IC\_medio).

Pela função denominada de AF\_por\_SR, calculou-se a probabilidade média do alarme falso ao longo dos 200 subgrupos racionais do processo sob controle estatístico.

De acordo com essa função, foram contabilizadas quantas estimativas superaram o intervalo de decisão  $h$  e, conseqüentemente, o percentual de alarmes falsos por subgrupo racional.

Análogo à função anterior, calculou-se com o auxílio da função a probabilidade média do alarme verdadeiro ao longo dos 200 subgrupos racionais do processo fora de controle estatístico.

Em seguida, para cada subgrupo racional, foram contabilizadas quantas estimativas superaram o intervalo de decisão  $h$  e, conseqüentemente, o percentual de alarmes verdadeiros por subgrupo racional.

Se  $\chi_i^2 > \chi_{p,\alpha}^2(h)$  em cada uma das 20.000 simulações, então considerou-se a ocorrência de um alarme (falso ou verdadeiro), sendo:

$$\chi_i^2 = (\mathbf{y}_i - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\mathbf{y}_i - \boldsymbol{\mu}_0),$$

em que  $\mathbf{y}_i$  é o vetor de  $p$  valores simulados no subgrupo racional  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, 200$ );  $\boldsymbol{\mu}_0$  é o vetor de  $p$  médias sob controle;  $\boldsymbol{\Sigma}_0$  é a matriz  $p \times p$  de covariâncias sob controle;  $\alpha = \frac{1}{200} = 0,005 = 0,5\%$ .

## 4.2 MCUSUM

Para obter a probabilidade do alarme falso ao longo dos 200 subgrupos racionais do gráfico de controle MCUSUM, foram obtidas as distâncias de

Mahalanobis referentes às mudanças no vetor de médias, de  $\boldsymbol{\mu}_0$  (Equação 4.7) para  $\boldsymbol{\mu}_1$  (Equação 4.8), conforme os valores apresentados para  $p$  e  $\boldsymbol{\Sigma}_0$ .

A distância generalizada de Mahalanobis entre os dois vetores  $\boldsymbol{\mu}_1$  e  $\boldsymbol{\mu}_0$  foi obtida, de acordo com a Equação 3.56. Como a distância de Mahalanobis pode assumir um mesmo resultado para diversos deslocamentos no vetor de médias, foi necessário, para cada caso em particular, realizar o cálculo de acordo com os vetores  $\boldsymbol{\mu}_0$  e  $\boldsymbol{\mu}_1$  e a matriz  $\boldsymbol{\Sigma}_0$ .

Uma vez obtidas as distâncias de Mahalanobis, o valor de referência  $k$  das Equações 3.53a e b foi definido por  $d/2$ . Uma vez obtido o valor  $k$ , foi calculado o intervalo de decisão  $h$  que proporcionou  $ARL IC = 200$ . Dado que foram estudados três valores diferentes de  $p$ , três matrizes de covariâncias  $\boldsymbol{\Sigma}_0$  e quatro vetores de médias  $\boldsymbol{\mu}_1$ , então foram determinados 36 valores de  $h$  para esse gráfico de controle.

A partir da obtenção do valor  $h$ , foram simulados os processos sob controle estatístico e, conseqüentemente, calculadas as probabilidades médias dos alarmes falsos, em média, para cada um dos 200 subgrupos racionais dos diferentes processos.

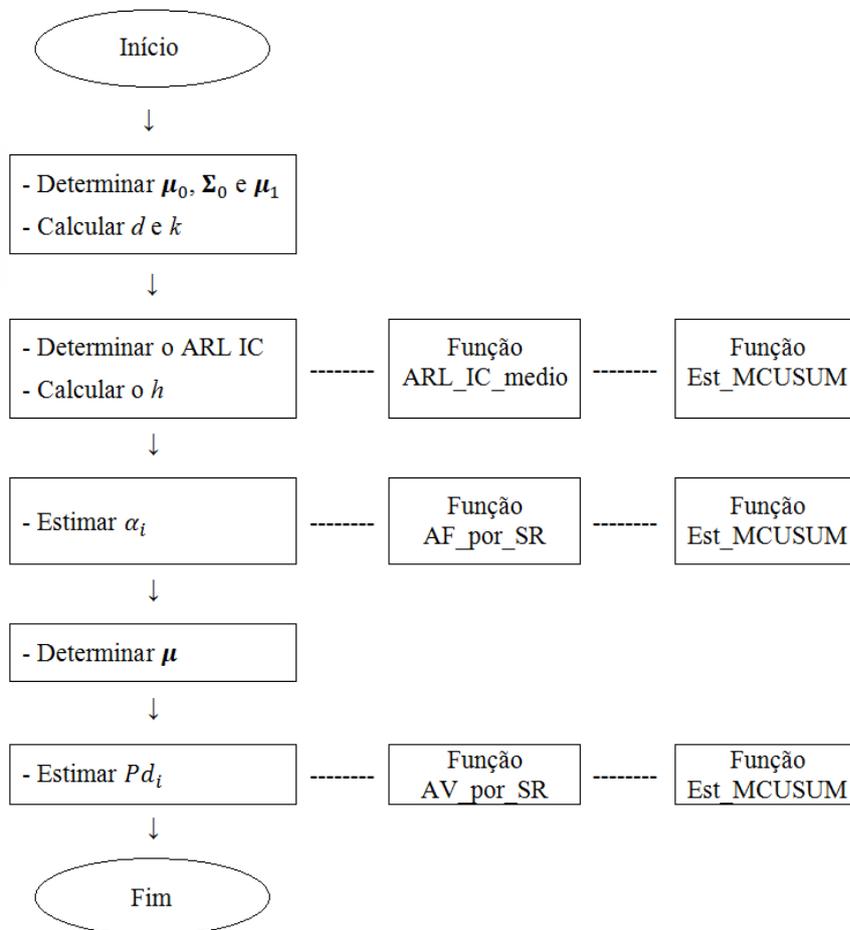
Mesmo para um processo sob controle estatístico, o gráfico de controle MCUSUM precisa ser configurado para um vetor de médias  $\boldsymbol{\mu}_1$  considerado como fora de controle estatístico. A partir desse vetor de médias foi determinada a distância de Mahalanobis e, conseqüentemente, o valor de referência  $k$  presente no gráfico.

Para cada cenário em que o vetor  $\boldsymbol{\mu}_1$  foi configurado como o vetor de referência das médias fora de controle estatístico, foram simuladas mudanças no processo de  $\boldsymbol{\mu}_0$  para  $\boldsymbol{\mu}_Y$ , tal que  $\boldsymbol{\mu}_Y \leq \boldsymbol{\mu}_1$ <sup>1</sup>, representa a mudança que não é de interesse de ser detectada. Nesse caso, foi verificado se o MCUSUM acarretaria baixas probabilidades em detectar mudanças para o vetor  $\boldsymbol{\mu}_Y$ , tal que  $\boldsymbol{\mu}_0 < \boldsymbol{\mu}_Y < \boldsymbol{\mu}_1$ . Portanto, para  $\boldsymbol{\mu}_1 = [3 \cdots 3]'_{1 \times p}$ , foram simulados desconroles de não interesse  $\boldsymbol{\mu}_Y$  iguais a  $[0,5 \cdots 0,5]'_{1 \times p}$ ,  $[1 \cdots 1]'_{1 \times p}$  e  $[2 \cdots 2]'_{1 \times p}$ , além do desconrole de interesse  $[3 \cdots 3]'_{1 \times p}$ . Para  $\boldsymbol{\mu}_1 = [2 \cdots 2]'_{1 \times p}$ , os desconroles de não

<sup>1</sup> Essa notação é, na verdade, um abuso de linguagem e indica que cada componente  $\mu_j$  do vetor  $\boldsymbol{\mu}$  é menor ou igual, em módulo, a cada componente  $\mu_{1j}$  do vetor  $\boldsymbol{\mu}_1$ , para  $j = 1, 2, \dots, p$ .

interesse  $\mu_Y$  foram iguais a  $[0,5 \cdots 0,5]'_{1 \times p}$  e  $[1 \cdots 1]'_{1 \times p}$ , além do descontrol de interesse  $[2 \cdots 2]'_{1 \times p}$ . Para  $\mu_1 = [1 \cdots 1]'_{1 \times p}$ , foi simulado o descontrol de não interesse  $\mu_Y$  igual a  $[0,5 \cdots 0,5]'_{1 \times p}$  e o descontrol de interesse  $[1 \cdots 1]'_{1 \times p}$ . Já para  $\mu_1 = [0,5 \cdots 0,5]'_{1 \times p}$  foi simulado apenas o descontrol de interesse para o vetor de médias  $[0,5 \cdots 0,5]'_{p \times 1}$ .

No fluxograma construído para o gráfico de controle MCUSUM, foi resumida a forma sequencial de uso das funções Est\_MCUSUM, ARL\_IC\_medio, AF\_por\_SR e AV\_por\_SR, bem como o modo como elas se relacionaram (Figura 4.2). Essas cinco funções foram implementadas no software R e estão apresentadas no Anexo B.



**Figura 4.2.** Fluxograma do uso das funções Est\_MCUSUM, ARL\_IC\_medio, AF\_por\_SR e AV\_por\_SR ao longo do planejamento do MCUSUM.

Pela primeira função implementada, chamada de Est\_MCUSUM, foram calculadas as estimativas do MCUSUM em cada simulação e subgrupo racional, a partir das seguintes entradas: vetor de médias  $\boldsymbol{\mu}_0$ , matriz de covariâncias  $\boldsymbol{\Sigma}_0$ , número  $p$  de variáveis-resposta, valor de referência  $k$  e o conjunto de observações referentes a uma simulação do processo.

A partir dessa função, foram realizados os cálculos referentes às Equações 3.52 a 3.54, obtendo-se assim as estimativas do MCUSUM em cada subgrupo racional.

O valor de referência  $k$  foi calculado a partir da distância de Mahalanobis  $d^2$  entre os vetores de médias  $\boldsymbol{\mu}_0$  e  $\boldsymbol{\mu}_1$ , levando em consideração a matriz de covariâncias  $\boldsymbol{\Sigma}_0$  do processo. E, conseqüentemente, o valor de referência  $k$  para o MCUSUM foi setado para  $d/2$ , conforme recomendação de Crosier (1988).

Para a escolha do intervalo de decisão  $h$ , utilizou-se a mesma função ARL\_IC\_medio a partir de um valor  $h$  preestabelecido no processo sob controle estatístico. Do mesmo modo, diversos valores de  $h$  foram testados na função, com o objetivo de selecionar aquele que proporcionasse  $ARL\ IC = 200$ .

Pela mesma função AF\_por\_SR, calculou-se a probabilidade média do alarme falso ao longo dos 200 subgrupos racionais do processo sob controle.

Para cada subgrupo racional, foi contabilizado o número de simulações em que a estimativa do MCUSUM excedeu o intervalo de decisão. Daí obteve-se a estimativa da probabilidade do alarme falso manifestada naquela respectiva ordem.

Conforme já mencionado, calculou-se também pela função AV\_por\_SR, a probabilidade média do alarme verdadeiro provocada pelo gráfico MCUSUM ao longo dos 200 subgrupos racionais do processo fora de controle.

Em seguida, para cada subgrupo racional, foram contabilizadas quantas estimativas superaram o intervalo de decisão  $h$  e, conseqüentemente, o percentual de alarmes verdadeiros por subgrupo racional.

Se  $x_i > h$  em cada uma das 20.000 simulações, então houve a manifestação de um alarme (falso ou verdadeiro), sendo:

$$x_i = [(\mathbf{s}_i)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}(\mathbf{s}_i)]^{1/2},$$

em que:

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{0}, \quad \text{se } c_i \leq k$$

$$\mathbf{s}_i = (\mathbf{s}_{i-1} + \mathbf{y}_i - \boldsymbol{\mu}_0) \left(1 - \frac{k}{c_i}\right), \quad \text{se } c_i > k$$

e

$$c_i = [(\mathbf{s}_{i-1} + \mathbf{y}_i - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}(\mathbf{s}_{i-1} + \mathbf{y}_i - \boldsymbol{\mu}_0)]^{1/2},$$

em que  $\mathbf{y}_i$  é um vetor de observações de ordem  $p \times 1$ ,  $\boldsymbol{\mu}_0$  é o vetor de médias  $p \times 1$  sob controle estatístico,  $\boldsymbol{\Sigma}_0$  é a matriz de covariâncias  $p \times p$  sob controle estatístico e  $\mathbf{s}_0 = \mathbf{0}_{p \times 1}$ .

### 4.3 MEWMA

Para as construções dos gráficos de controle MEWMA, foram propostos os seguintes valores para o parâmetro de suavização  $\lambda$ : 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05; 0,1 e 0,3.

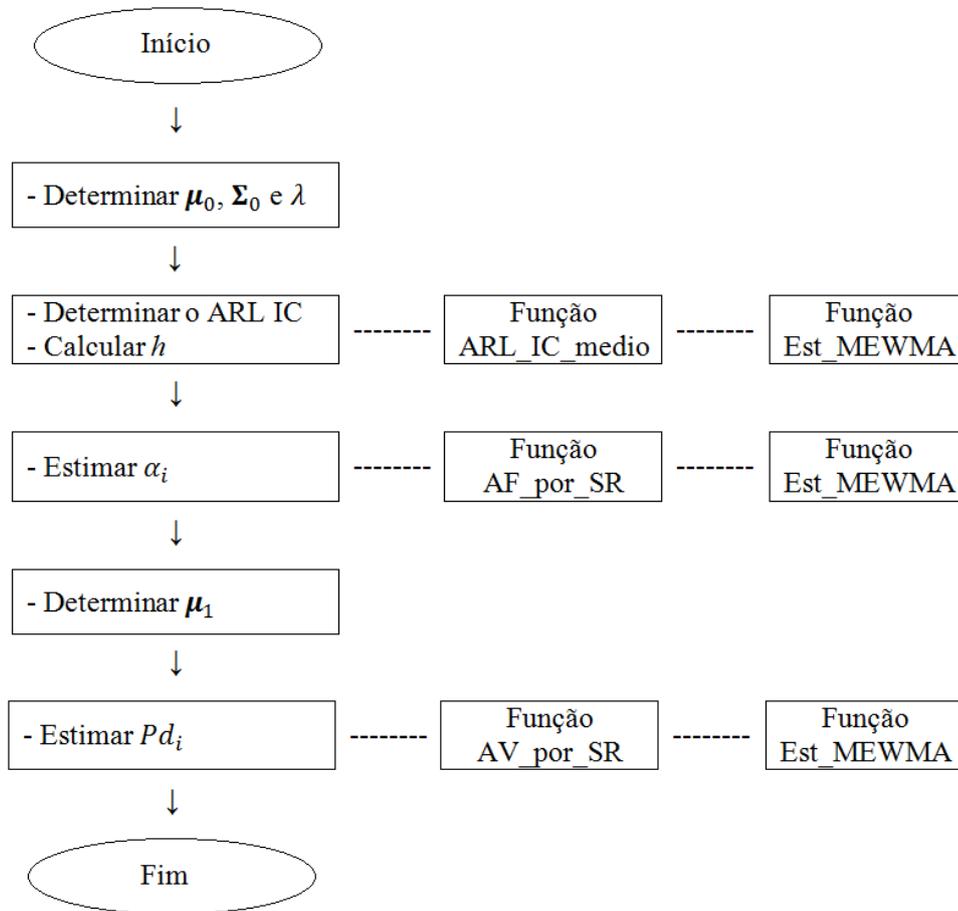
Isso significa que para os três valores de  $p$  e as três matrizes de covariâncias  $\boldsymbol{\Sigma}_0$ , e os sete valores de  $\lambda$ , foram determinados 63 valores de  $h$  para que cada gráfico proporcionasse  $ARL_{IC} = 200$ .

Portanto, foram obtidas as probabilidades dos alarmes falso e verdadeiro para mudanças no vetor de médias de  $\boldsymbol{\mu}_0$  (Equação 4.7) para  $\boldsymbol{\mu}_1$ , conforme os valores apresentados para  $p$ ,  $\lambda$  e  $\boldsymbol{\Sigma}_0$ .

Em seguida, dado o valor  $h$ , selecionou-se o parâmetro de suavização  $\lambda$  que formou o par  $(\lambda, h)$  que proporcionou a menor probabilidade do alarme falso, levando-se em considerações os resultados obtidos para o processo sob controle estatístico e, simultaneamente, maior poder de acordo com os resultados obtidos para o processo fora de controle.

No fluxograma construído para o gráfico MEWMA, foi resumida a forma sequencial de uso das funções Est\_MEWMA, ARL\_IC\_medio, AF\_por\_SR e AV\_por\_SR, bem como o modo como elas se relacionaram (Figura 4.3). Essas

cinco funções foram desenvolvidas no software R e estão apresentadas no Anexo C.



**Figura 4.3.** Fluxograma do uso das funções Est\_MEWMA, ARL\_IC\_medio, AF\_por\_SR e AV\_por\_SR ao longo do planejamento do MEWMA.

Pela função Est\_MEWMA, foram obtidas as estimativas do MEWMA em cada simulação e cada subgrupo racional, a partir das seguintes dados de entradas: vetores de médias  $\mu_0$  ou  $\mu_1$ , matriz de covariâncias  $\Sigma_0$ , parâmetro de suavização  $\lambda$  e número  $p$  de características estudadas nos 200 subgrupos racionais.

Por fim, foram realizados os cálculos referentes às Equações 3.58 e 3.59, obtendo-se assim as estimativas do MEWMA em cada subgrupo racional.

Para a escolha do intervalo de decisão  $h$ , utilizou-se a mesma função ARL\_IC\_medio ao longo dos subgrupos racionais de um processo  $p$ -variado sob controle estatístico e a partir de um valor  $h$  preestabelecido. Desse modo, diversos

valores de  $h$  foram testados na função para selecionar aquele que proporcionasse o  $ARL_{IC}$  desejado de 200.

De acordo com a função  $AF_{por\_SR}$ , calculou-se a probabilidade média do alarme falso ao longo dos 200 subgrupos racionais do processo sob controle.

Para cada subgrupo racional, a função contabilizou quantas estimativas superaram o intervalo de decisão  $h$  e, conseqüentemente, retornou o percentual de alarmes falsos por subgrupo racional.

Utilizando-se a função  $AV_{por\_SR}$ , calculou-se a probabilidade média do alarme verdadeiro ao longo dos 200 subgrupos racionais do processo fora de controle estatístico.

Em seguida, e por meio dessa função, obteve-se o número de estimativas que superaram o intervalo de decisão  $h$  e, conseqüentemente, o percentual de alarmes verdadeiros por subgrupo racional.

Se  $t_i^2 > h$  em cada uma das 20.000 simulações, então ocorreu o alarme (falso ou verdadeiro) sendo:

$$t_i^2 = (\mathbf{w}_i)'(\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{w}_i})^{-1}(\mathbf{w}_i);$$

$$\mathbf{w}_i = \lambda \mathbf{y}_i + (1 - \lambda)\mathbf{w}_{i-1};$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{w}_i} = \frac{\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2i}]}{2 - \lambda} \boldsymbol{\Sigma}_0,$$

em que  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = \lambda$  e  $\boldsymbol{\Sigma}_0$  é a matriz de covariâncias de  $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$  do processo sob controle estatístico.

Para cada cenário de descontrole estatístico no processo, recomendou-se um par  $(\lambda, h)$  que melhor detectou a mudança no vetor de médias dado a probabilidade do alarme falso que ele ofereceu para o mesmo processo sob controle estatístico. Os critérios utilizados para a escolha dos pares foram os seguintes:

a) Para cada cenário sob controle estatístico, selecionaram-se todos os pares que possuísem probabilidades dos alarmes falsos menores ou iguais a 0,03;

b) Dentre os pares obtidos anteriormente, selecionaram-se aqueles que proporcionaram poderes iguais ou superiores a 0,90 a partir de algum subgrupo racional do processo;

c) E, dentre eles, selecionou-se aquele que atingiu o poder de 0,90 mais cedo ao longo do processo. Entretanto, caso dois ou mais pares concorrentes possuísem uma diferença de apenas dois subgrupos racionais no alcance do poder, selecionou-se aquele de maior valor  $\lambda$ , uma vez que sua probabilidade do alarme falso foi a menor de todos os pares.

#### 4.4 Lin-MEWMA

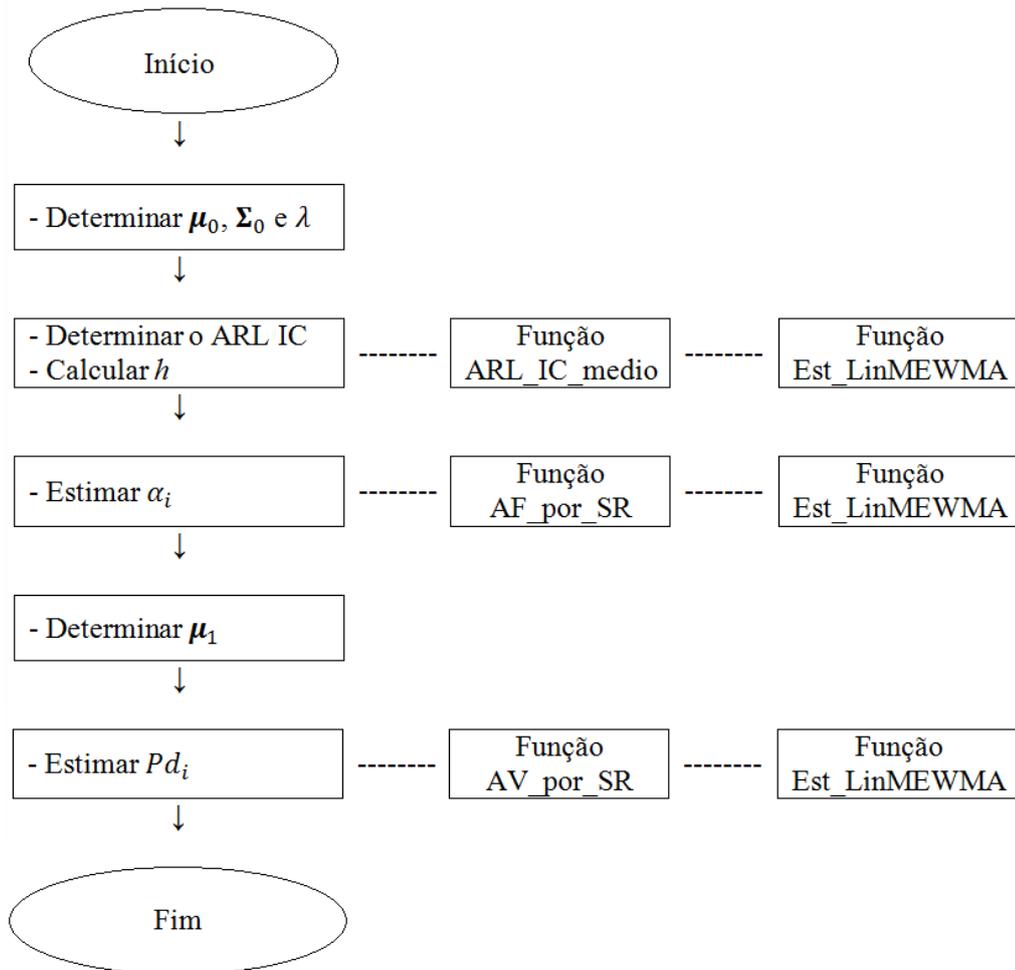
Para as construções dos gráficos de controle Lin-MEWMA, foram propostos os seguintes valores de  $\lambda$ : 0,01; 0,05; 0,1 e 0,3.

Isso significa que para os três valores de  $p$  e as três matrizes de covariâncias  $\Sigma_0$ , e os quatro valores de  $\lambda$ , foram determinados 36 valores de  $h$  para que cada gráfico proporcionasse  $ARL_{IC} = 200$ .

Desta forma, foram obtidas as probabilidades dos alarmes falso e verdadeiro para mudanças no vetor de médias de  $\mu_0$  (Equação 4.7) para  $\mu_1$ , conforme os valores apresentados para  $p$ ,  $\lambda$  e  $\Sigma_0$ .

Em seguida, dado o valor  $h$ , selecionou-se o parâmetro de suavização  $\lambda$  que formou o par  $(\lambda, h)$  que proporcionou a menor probabilidade do alarme falso, levando-se em considerações os resultados obtidos para o processo sob controle estatístico e, simultaneamente, maior poder de acordo com os resultados obtidos para o processo fora de controle.

No fluxograma construído para o gráfico Lin-MEWMA, foi resumida a forma sequencial de uso das funções `Est_LinMEWMA`, `ARL_IC_medio`, `AF_por_SR` e `AV_por_SR`, bem como o modo como elas se relacionaram (Figura 4.4). Essas cinco funções foram desenvolvidas no software R e estão apresentadas no Anexo D.



**Figura 4.4.** Fluxograma do uso das funções Est\_LinMEWMA, ARL\_IC\_medio, AF\_por\_SR e AV\_por\_SR ao longo do planejamento do Lin-MEWMA.

Pela função Est\_LinMEWMA, foram obtidas as estimativas do Lin-MEWMA em cada simulação e cada subgrupo racional, a partir das seguintes dados de entradas: vetores de médias  $\mu_0$  ou  $\mu_1$ , matriz de covariâncias  $\Sigma_0$ , parâmetro de suavização  $\lambda$  e número  $p$  de características estudadas nos 200 subgrupos racionais.

Por fim, foram realizados os cálculos referentes às Equações 3.65 e 3.67, obtendo-se assim as estimativas do Lin-MEWMA em cada subgrupo racional.

Para a escolha do intervalo de decisão  $h$ , utilizou-se a mesma função ARL\_IC\_medio ao longo dos subgrupos racionais de um processo  $p$ -variado sob controle estatístico e a partir de um valor  $h$  preestabelecido. Desse modo, diversos

valores de  $h$  foram testados na função para selecionar aquele que proporcionasse o  $ARL IC$  desejado de 200.

De acordo com a função  $AF\_por\_SR$ , calculou-se a probabilidade média do alarme falso ao longo dos 200 subgrupos racionais do processo sob controle.

Para cada subgrupo racional, a função contabilizou quantas estimativas superaram o intervalo de decisão  $h$  e, conseqüentemente, retornou o percentual de alarmes falsos por subgrupo racional.

Utilizando-se a função  $AV\_por\_SR$ , calculou-se a probabilidade média do alarme verdadeiro ao longo dos 200 subgrupos racionais do processo fora de controle estatístico.

Em seguida, e por meio dessa função, obteve-se o número de estimativas que superaram o intervalo de decisão  $h$  e, conseqüentemente, o percentual de alarmes verdadeiros por subgrupo racional.

Se  $|x_i| > h$  em cada uma das 20.000 simulações, então ocorreu o alarme (falso ou verdadeiro) sendo:

$$x_i = [\Sigma_0^{-1}(\mathbf{m}_i - \mathbf{m}_0)]' \mathbf{y}_i ;$$
$$\mathbf{m}_i = (1 - \lambda)\mathbf{y}_{i-1} + \lambda\mathbf{y}_i ,$$

em que  $\mathbf{m}_0 = \mathbf{0}$ ;  $0 < \lambda \leq 1$ ,  $i = 1, 2, 3...$

Para cada cenário de descontrole estatístico no processo, recomendou-se um par  $(\lambda, h)$  que melhor detectou a mudança no vetor de médias dado a probabilidade do alarme falso que ele ofereceu para o mesmo processo sob controle estatístico. Os critérios utilizados para a escolha dos pares foram os seguintes:

a) Para cada cenário sob controle estatístico, selecionaram-se todos os pares que possuísem probabilidades dos alarmes falsos menores ou iguais a 0,03;

b) Dentre os pares obtidos anteriormente, selecionaram-se aqueles que proporcionaram poderes iguais ou superiores a 0,90 a partir de algum subgrupo racional do processo;

c) E, dentre eles, selecionou-se aquele que atingiu o poder de 0,90 mais cedo ao longo do processo. Entretanto, caso dois ou mais pares concorrentes

possuísssem uma diferença de apenas dois subgrupos racionais no alcance do poder, selecionou-se aquele de maior valor  $\lambda$ , uma vez que sua probabilidade do alarme falso foi a menor de todos os pares.

## 4.6 ELR

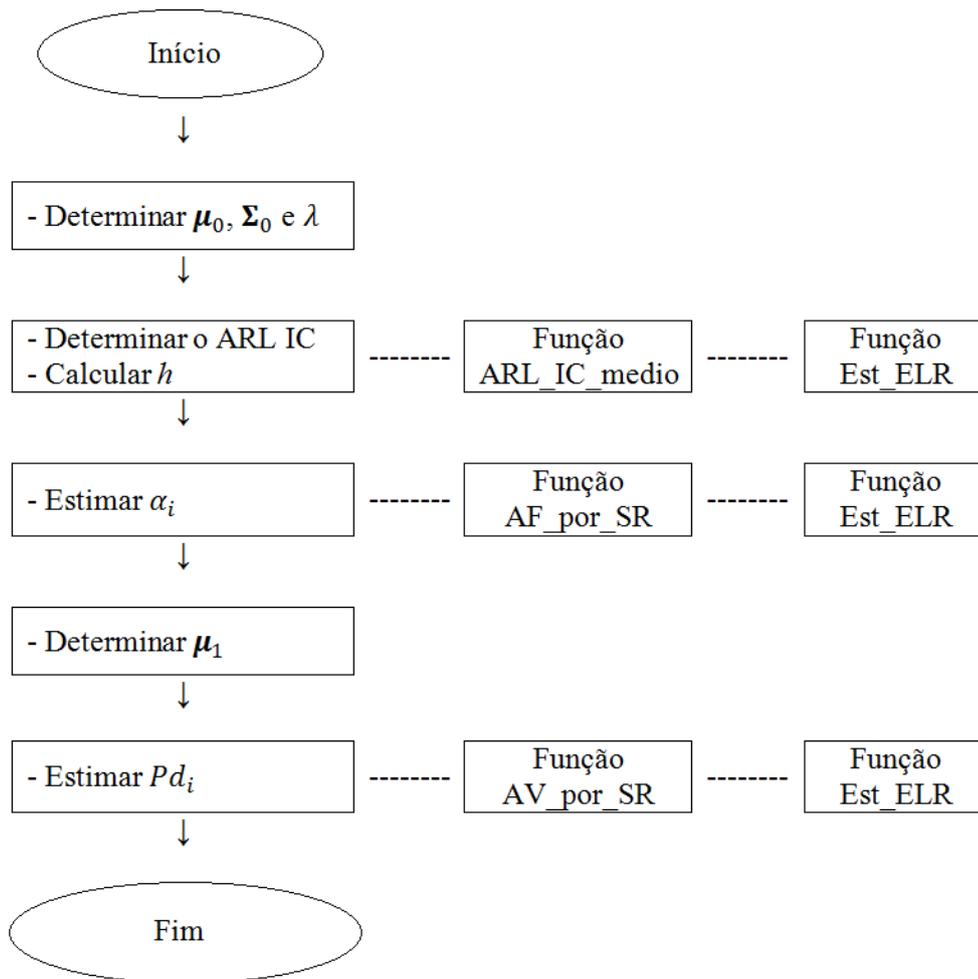
Para as construções dos gráficos de controle ELR, foram propostos os seguintes valores de  $\lambda$ : 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05; 0,1 e 0,3.

Isso significa que para os três valores de  $p$  e as três matrizes de covariâncias  $\Sigma_0$ , e os sete valores de  $\lambda$ , foram determinados 63 valores de  $h$  para que cada gráfico proporcionasse  $ARL_{IC} = 200$ .

Desse modo, foram obtidas as probabilidades dos alarmes falso e verdadeiro para mudanças no vetor de médias de  $\mu_0$  (Equação 4.7) para  $\mu_1$ , conforme os valores apresentados para  $p$ ,  $\lambda$  e  $\Sigma_0$ .

Em seguida, dado o valor  $h$ , selecionou-se o parâmetro de suavização  $\lambda$  que formou o par  $(\lambda, h)$  que proporcionou a menor probabilidade do alarme falso, levando-se em considerações os resultados obtidos para o processo sob controle estatístico e, simultaneamente, maior poder de acordo com os resultados obtidos para o processo fora de controle.

No fluxograma construído para o gráfico ELR, foi resumida a forma sequencial de uso das funções `Est_ELRL`, `ARL_IC_medio`, `AF_por_SR` e `AV_por_SR`, bem como o modo como elas se relacionaram (Figura 4.5). Essas cinco funções foram desenvolvidas no software R e estão apresentadas no Anexo E.



**Figura 4.5.** Fluxograma do uso das funções Est\_ELR, ARL\_IC\_medio, AF\_por\_SR e AV\_por\_SR ao longo do planejamento do ELR.

Pela função Est\_ELR, foram obtidas as estimativas do ELR em cada simulação e cada subgrupo racional, a partir das seguintes dados de entradas: vetores de médias  $\mu_0$  ou  $\mu_1$ , matriz de covariâncias  $\Sigma_0$ , parâmetro de suavização  $\lambda$  e número  $p$  de características estudadas nos 200 subgrupos racionais.

Por fim, foram realizados os cálculos referentes à Equação 3.76, obtendo-se assim as estimativas do ELR em cada subgrupo racional.

Para a escolha do intervalo de decisão  $h$ , utilizou-se a mesma função ARL\_IC\_medio ao longo dos subgrupos racionais de um processo  $p$ -variado sob controle estatístico e a partir de um valor  $h$  preestabelecido. Desse modo, diversos valores de  $h$  foram testados na função para selecionar aquele que proporcionasse o ARL IC desejado de 200.

De acordo com a função AF\_por\_SR, calculou-se a probabilidade média do alarme falso ao longo dos 200 subgrupos racionais do processo sob controle.

Para cada subgrupo racional, a função contabilizou quantas estimativas superaram o intervalo de decisão  $h$  e, conseqüentemente, retornou o percentual de alarmes falsos por subgrupo racional.

Utilizando-se a função AV\_por\_SR, calculou-se a probabilidade média do alarme verdadeiro ao longo dos 200 subgrupos racionais do processo fora de controle estatístico.

Em seguida, e por meio dessa função, obteve-se o número de estimativas que superaram o intervalo de decisão  $h$  e, conseqüentemente, o percentual de alarmes verdadeiros por subgrupo racional.

Se  $ELR_i > h$  em cada uma das 20.000 simulações, então ocorreu o alarme (falso ou verdadeiro) sendo:

$$ELR_i = np(a^* - \log g^* - 1) + n\|\mathbf{u}_i\|^2;$$

$$a^* = \frac{1}{p} tr(\mathbf{V}_i); \quad g^* = (|\mathbf{V}_i|)^{\frac{1}{p}}; \quad \mathbf{u}_i = \lambda \bar{\mathbf{x}}_i + (1 - \lambda)\mathbf{u}_{i-1};$$

$$\mathbf{V}_i = \lambda \mathbf{S}_i^* + (1 - \lambda)\mathbf{V}_{i-1}; \quad \mathbf{S}_i^* = \frac{\sum_{k=1}^n (\mathbf{x}_{ik} - \mathbf{u}_i)'(\mathbf{x}_{ik} - \mathbf{u}_i)}{n};$$

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}; \quad \mathbf{V}_0 = \mathbf{I}_p; \quad 0 < \lambda \leq 1.$$

Para cada cenário de descontrole estatístico, recomendou-se um par  $(\lambda, h)$  que melhor detectou a mudança no vetor de médias dado a probabilidade do alarme falso que ele ofereceu para o mesmo processo sob controle estatístico. Os critérios utilizados para a escolha dos pares foram os mesmos que os já apresentados para os MEWMA e Lin-MEWMA.

Na Tabela 4.1 estão resumidos as combinações de todos os termos dos GCMs usados na metodologia desse trabalho.

**Tabela 4.1.** Resumo das combinações entre os termos dos GCMs utilizadas nas simulações

|                             |  |
|-----------------------------|--|
| T <sup>2</sup> de Hotelling | $ARL IC = 200;$<br>$p = 2; 6 \text{ e } 10;$<br>$\sigma_{ww'} = 0,1; 0,5; 0,9.$  |
| MCUSUM                      | $ARL IC = 200;$<br>$p = 2; 6 \text{ e } 10;$<br>$\sigma_{ww'} = 0,1; 0,5; 0,9;$<br>$k = \frac{d}{2},$ em que $d = [(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)]^{1/2}.$ |
| MEWMA                       | $ARL IC = 200;$<br>$p = 2; 6 \text{ e } 10;$<br>$\sigma_{ww'} = 0,1; 0,5; 0,9;$<br>$\lambda = 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05; 0,1 \text{ e } 0,3.$   |
| Lin-MEWMA                   | $ARL IC = 200;$<br>$p = 2; 6 \text{ e } 10;$<br>$\sigma_{ww'} = 0,1; 0,5; 0,9;$<br>$\lambda = 0,01; 0,05; 0,1 \text{ e } 0,3.$   |
| ELR                         | $ARL IC = 200;$<br>$p = 2; 6 \text{ e } 10;$<br>$\sigma_{ww'} = 0,1; 0,5; 0,9;$<br>$\lambda = 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05; 0,1 \text{ e } 0,3.$   |

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 5.1 T<sup>2</sup> de Hotelling

#### 5.1.1 Planejamento

Para os processos sob controle estatístico, os valores obtidos de  $h$  do gráfico de controle T<sup>2</sup> de Hotelling que proporcionaram  $ARL IC = 200$  estão apresentados na Tabela 5.1.

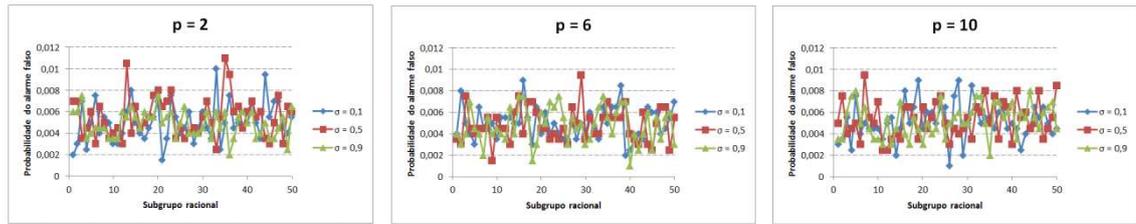
**Tabela 5.1.** Intervalos de decisão  $h$  que proporcionam  $ARL IC = 200$  em função de  $p$  e  $\sigma_{ww'}$  para o T<sup>2</sup> de Hotelling

| $p$ | $\sigma_{ww'}$ |      |      |
|-----|----------------|------|------|
|     | 0,1            | 0,5  | 0,9  |
| 2   | 10,6           | 10,6 | 10,6 |
| 6   | 18,5           | 18,5 | 18,6 |
| 10  | 25,1           | 25,2 | 25,3 |

Conforme se observa, o  $ARL IC$  não é influenciado pela correlação entre as variáveis, mas sim pelo número de variáveis. Como o  $ARL IC$  diminui em função do aumento de  $p$ , torna-se necessário aumentar o  $h$ , a fim de manter o mesmo  $ARL IC = 200$ . A partir dos valores previamente estabelecidos para  $h$ , obteve-se os resultados para as probabilidades dos alarmes falsos e verdadeiros apresentados nas seções seguintes (5.1.2 e 5.1.3).

#### 5.1.2 Alarme Falso

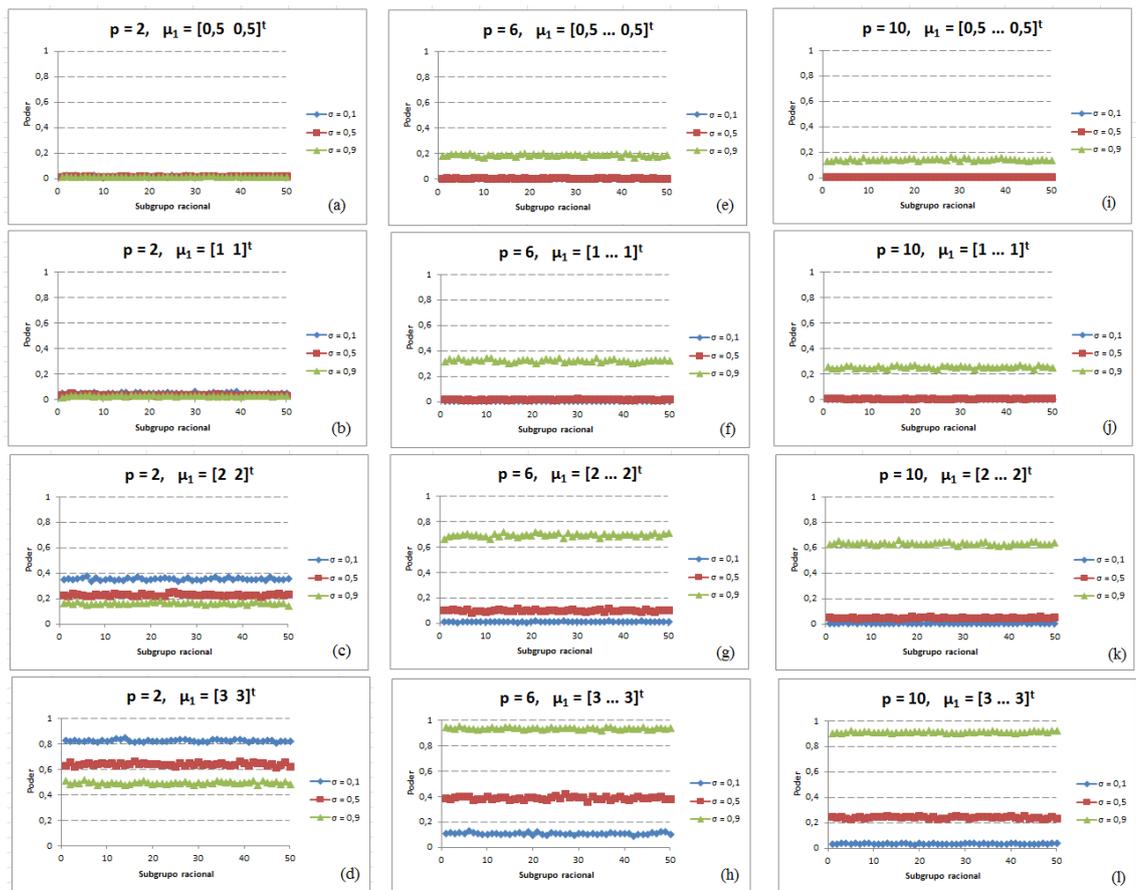
A probabilidade do alarme falso proporcionada pelo gráfico de controle T<sup>2</sup> de Hotelling independe da quantidade de características avaliadas (2, 6 e 10) e das matrizes de covariâncias estudadas (Equações 4.2, 4.4 e 4.6), quando se define o planejamento pelos respectivos intervalos de decisão  $h$  (Tabela 5.1). Considerando-se todas as combinações entre  $p$  e  $\sigma_{ww'}(\Sigma_0)$ , a probabilidade média do alarme falso foi, conforme esperado, igual a 0,005 (Figura 5.1), ou seja, além de proporcional ao inverso do  $ARL IC$  (Equação 3.31), mostrou-se exatamente igual a seu inverso.



**Figura 5.1.** Estimativas das probabilidades dos alarmes falsos para os primeiros 50 subgrupos racionais do  $T^2$  de Hotelling, em função das combinações entre  $p$  e  $\sigma_{ww'}$  com o respectivo  $h$ .

### 5.1.3 Alarme Verdadeiro

Na Figura 5.2, estão apresentadas as estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poderes) provocados pelos gráficos de controle  $T^2$  de Hotelling, em função de todas as combinações entre o número de características avaliadas, mudanças no vetor de médias (Equação 4.8) e matrizes de covariâncias (Equações 4.2, 4.4 e 4.6).



**Figura 5.2.** Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) para os primeiros 50 subgrupos racionais do  $T^2$  de Hotelling, em função da combinação entre  $p$ ,  $\sigma_{ww'}$  e  $\mu_1$ , com o respectivo  $h$ .

Para pequena quantidade de características avaliadas ( $p = 2$ ) o poder proporcionado pelo  $T^2$  de Hotelling diminui com o aumento da correlação  $\sigma_{ww'}$  entre elas. Por exemplo, para a mudança no vetor de médias de  $\boldsymbol{\mu}_0$  (Equação 4.1) para  $\boldsymbol{\mu}_1 = [0,5 \ 0,5]'$ , o poder médio do  $T^2$  de Hotelling foi igual a 0,0120; 0,0102 e 0,0089 para  $\sigma_{ww'}$  igual a 0,1; 0,5 e 0,9, respectivamente ( $h = 10,6$ ) (Figura 5.2a). Já para a mudança no vetor de médias de  $\boldsymbol{\mu}_0$  (Equação 4.1) para  $\boldsymbol{\mu}_1 = [3 \ 3]'$ , o poder médio do  $T^2$  de Hotelling foi igual a 0,8233; 0,6400 e 0,4932 para  $\sigma_{ww'}$  igual a 0,1; 0,5 e 0,9 respectivamente (Figura 5.2d).

Por outro lado, para grandes quantidades de características avaliadas ( $p = 6$  e  $10$ ) o poder proporcionado pelo  $T^2$  de Hotelling aumenta com o aumento da correlação  $\sigma_{ww'}$  entre elas. Por exemplo, para  $p = 6$  e mudança no vetor de médias de  $\boldsymbol{\mu}_0$  (Equação 4.3) para  $\boldsymbol{\mu}_1 = [1 \ \dots \ 1]'$ , os poderes médios do  $T^2$  de Hotelling ao longo dos duzentos subgrupos racionais foram iguais a 0,0007; 0,112 e 0,3190 para  $\sigma_{ww'}$  igual a 0,1; 0,5 e 0,9, respectivamente ( $h = 18,5$ ) (Figura 5.2f). Para  $p = 10$  e mudança no vetor de médias de  $\boldsymbol{\mu}_0$  (Equação 4.5) para  $\boldsymbol{\mu}_1 = [2 \ \dots \ 2]'$ , os poderes médios do  $T^2$  de Hotelling foram iguais a 0,019; 0,0424 e 0,6281 para  $\sigma_{ww'}$  igual a 0,1; 0,5 e 0,9, respectivamente ( $h = 25,2$ ) (Figura 5.2k).

O GCM  $T^2$  de Hotelling revelou-se como um gráfico de pouca sensibilidade de detecção da mudança no vetor de médias para a maioria das combinações feitas entre  $p$ ,  $\sigma_{ww'}(\boldsymbol{\Sigma}_0)$  e  $\boldsymbol{\mu}_1$ . Os únicos casos em que esse gráfico de controle operou com poder acima de 90% foram para  $p = 6$ ,  $\boldsymbol{\mu}_1 = [3 \ \dots \ 3]'$  e  $\sigma_{ww'} = 0,9$  (Figura 5.2h) e para  $p = 10$ ,  $\boldsymbol{\mu}_1 = [3 \ \dots \ 3]'$  e  $\sigma_{ww'} = 0,9$  (Figura 5.2l), cujas recomendações estão apresentadas na Tabela 5.2.

Umit e Cigdem (2001) também observaram que o GCM  $T^2$  de Hotelling não possui sensibilidade em detectar pequenas e médias mudanças no vetor de médias, uma vez que seu procedimento consiste em se basear apenas na mais recente observação.

**Tabela 5.2.** Valores recomendados para o  $T^2$  de Hotelling considerando a matriz de covariâncias sob controle e o vetor de médias fora de controle  $\mu_1 = [3 \dots 3]'$ .

| $p$ | $\sigma_{ww'}$ | $h$  | $\hat{\alpha}$ | $\widehat{Pd} > 0,90$ |
|-----|----------------|------|----------------|-----------------------|
| 2   | 0,1            | 10,6 | 0,005          | $\forall i \geq 1^*$  |
|     | 0,5            | -    | -              | -                     |
|     | 0,9            | -    | -              | -                     |
| 6   | 0,1            | -    | -              | -                     |
|     | 0,5            | -    | -              | -                     |
|     | 0,9            | 18,6 | 0,005          | $\forall i \geq 1$    |
| 10  | 0,1            | -    | -              | -                     |
|     | 0,5            | -    | -              | -                     |
|     | 0,9            | 25,3 | 0,005          | $\forall i \geq 1$    |

\* $\widehat{Pd} > 0,80$ .

## 5.2 MCUSUM

### 5.2.1 Planejamento

Em função dos vetores de médias  $\mu_0$  e  $\mu_1$  considerados, respectivamente, como oriundos de processos sob e fora de controle estatístico e da matriz de covariâncias  $\Sigma_0$  obtida apenas do processo sob controle estatístico (Equação 5.1), calculou-se a distância generalizada de Mahalanobis ( $d^2$ ) e, conseqüentemente, a sua raiz quadrada ( $d$ ) (Tabela 5.3), e o valor  $k = d/2$  (Tabela 5.4).

**Tabela 5.3.** Raiz quadrada da distância de Mahalanobis referente à mudança do vetor de médias  $\mu_0$  para  $\mu_1$  sob a matriz de covariâncias  $\Sigma_0(\sigma_{ww'})$

| $p \backslash \sigma_{ww'}$ | $\mu_1$ |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----------------------------|---------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|                             | 0,5     |      |      | 1    |      |      | 2    |      |      | 3    |      |      |
|                             | 0,1     | 0,5  | 0,9  | 0,1  | 0,5  | 0,9  | 0,1  | 0,5  | 0,9  | 0,1  | 0,5  | 0,9  |
| 2                           | 0,67    | 0,57 | 0,51 | 1,35 | 1,15 | 1,02 | 2,70 | 2,31 | 2,05 | 4,04 | 3,46 | 3,08 |
| 6                           | 1,00    | 0,66 | 0,52 | 2,00 | 1,31 | 1,04 | 4,00 | 2,62 | 2,09 | 6,00 | 3,93 | 3,13 |
| 10                          | 1,15    | 0,67 | 0,52 | 2,29 | 1,35 | 1,05 | 4,59 | 2,70 | 2,10 | 6,88 | 4,11 | 3,15 |

**Tabela 5.4.** Valor de referência  $k$  recomendado por Crosier (1988) para monitorar a mudança do vetor de médias  $\mu_0$  para  $\mu_1$  sob a matriz de covariâncias  $\Sigma_0(\sigma_{ww'})$

|                            |  | $\mu_1$ |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----------------------------|--|---------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|                            |  | 0,5     |      |      | 1    |      |      | 2    |      |      | 3    |      |      |
| $p \setminus \sigma_{ww'}$ |  | 0,1     | 0,5  | 0,9  | 0,1  | 0,5  | 0,9  | 0,1  | 0,5  | 0,9  | 0,1  | 0,5  | 0,9  |
| 2                          |  | 0,34    | 0,29 | 0,26 | 0,68 | 0,58 | 0,51 | 1,35 | 1,16 | 1,03 | 2,02 | 1,73 | 1,54 |
| 6                          |  | 0,50    | 0,33 | 0,26 | 1,00 | 0,66 | 0,52 | 2,00 | 1,31 | 1,05 | 3,00 | 1,97 | 1,57 |
| 10                         |  | 0,58    | 0,34 | 0,26 | 1,15 | 0,68 | 0,53 | 2,30 | 1,35 | 1,05 | 3,44 | 2,05 | 1,58 |

Posteriormente às obtenções de  $d$  e  $k$ , determinaram-se o valor  $c_i$  e o vetor  $s_i$  que originaram a estimativa  $x_i$  do MCUSUM, para cada subgrupo racional de ordem  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, 200$ ). Desse modo, cada uma delas foi comparada com o respectivo intervalo de decisão  $h$ .

Para os processos sob controle estatístico, os valores obtidos de  $h$  para o gráfico de controle MCUSUM que proporcionaram  $ARL IC = 200$  estão apresentados na Tabela 5.5.

No MCUSUM, o  $ARL IC$  diminui com o aumento do número de variáveis monitoradas e com o aumento da correlação entre elas, e aumenta com o aumento da distância entre  $\mu_1$  e  $\mu_0$ . Por isso, o valor de  $h$  relacionado ao  $ARL IC = 200$  variou conforme as relações anteriores (Tabela 5.5). A partir dos valores previamente estabelecidos para  $h$ , obteve-se os resultados para as probabilidades dos alarmes falsos e verdadeiros apresentados nas seções seguintes (5.2.2 e 5.2.3).

**Tabela 5.5.** Intervalos de decisão  $h$  que proporcionam  $ARL IC = 200$  para o MCUSUM

|                |               | $\mu_1$ |       |       |      |       |       |      |      |      |      |      |      |
|----------------|---------------|---------|-------|-------|------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|
|                |               | 0,5     |       |       | 1    |       |       | 2    |      |      | 3    |      |      |
| $\sigma_{ww'}$ | $p \setminus$ | 0,1     | 0,5   | 0,9   | 0,1  | 0,5   | 0,9   | 0,1  | 0,5  | 0,9  | 0,1  | 0,5  | 0,9  |
| 2              |               | 7,20    | 8,00  | 8,50  | 4,30 | 4,90  | 5,40  | 2,20 | 2,60 | 2,94 | 1,26 | 1,61 | 1,87 |
| 6              |               | 10,50   | 14,10 | 16,3  | 5,88 | 8,50  | 10,20 | 2,64 | 4,45 | 5,60 | 1,32 | 2,71 | 3,62 |
| 10             |               | 13,49   | 19,60 | 22,75 | 7,35 | 11,80 | 14,39 | 3,27 | 6,26 | 8,04 | 1,61 | 3,89 | 5,28 |

Os resultados apresentados na Tabela 5.5 equiparam-se àqueles obtido por Crosier (1988). Por exemplo, para  $p = 2$  características de qualidade juntamente com uma diferença entre os vetores de média que proporcionasse distância de

Mahalanobis  $d = 1$  e matriz de covariâncias igual à da Equação 4.2b, o autor obteve o intervalo de decisão  $h = 5,5$  que proporcionasse  $ARL IC = 200$ .

Portanto, para a utilização do gráfico de controle MCUSUM, torna-se necessário, antes, definir ou conhecer os valores de todos os termos citados anteriormente:  $p$ ,  $\boldsymbol{\mu}_0$ ,  $\boldsymbol{\mu}_1$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}_0$ ,  $d$ ,  $k$  e  $h$ . Como auxílio, a função `ARL_IC_medio` implementada no software R determina, em média, o valor do  $ARL IC$  em resposta ao vetor  $\boldsymbol{\mu}_0$ , matriz  $\boldsymbol{\Sigma}_0$  e aos valores  $p$ ,  $k$  e  $h$ .

### 5.2.2 Alarme Falso

A probabilidade do alarme falso proporcionada pelo MCUSUM não depende ( $P > 0,05$ ) da quantidade  $p$  de características avaliadas e aumenta ( $P < 0,05$ ) com os aumentos da média  $\mu_1$ , da covariância  $\sigma$  entre as variáveis e da ordem  $i$  do subgrupo racional, mesmo com a utilização de diferentes valores de  $h$ .

No caso em que  $\mu_{Y_1} = \mu_{Y_2} = \dots = \mu_{Y_p} = \mu_1$ ,  $\sigma_{ww'} = \sigma \forall w, w' = 1, 2, \dots, p$ ,  $w \neq w'$  e  $\sigma_{ww} = 1 \forall w = 1, 2, \dots, p$ , a equação de regressão estimada, com todos os efeitos significativos, foi dada por:

$$\hat{\alpha}(\%) = 1,44 \mu_1 + 0,851 \sigma + 0,0148 i + 0,00022 p - 1,87 \mu_1 \sigma + 0,337 \sigma p - 0,145 \mu_1 p + 0,0235 \sigma i - 0,0158 \mu_1 i + 0,00222 ip \quad (R^2 = 0,66), \quad (5.2)$$

para  $0,5 \leq \mu_1 \leq 3$ ;  $0,1 \leq \sigma \leq 0,9$ ;  $1 \leq i \leq 200$  e  $2 \leq p \leq 10$ .

O efeito da interação  $\mu_1 \times \sigma$ , indicou que quanto maiores, simultaneamente, os valores do vetor de médias e da matriz de covariâncias entre as  $p$  variáveis, menor foi a probabilidade do alarme falso. Uma vez que a probabilidade do alarme falso não pode ser negativa, é sensato a ocorrência dos efeitos principais de  $\mu_1$  e  $\sigma$  com sinais contrários ao da interação  $\mu_1 \times \sigma$ , para manter a positividade de  $\alpha$ . Já a interação  $\sigma \times p$  mostrou que grandes quantidades de características estudadas juntamente com altas covariâncias entre elas, acarretam no aumento do  $\alpha$ .

Outro efeito que contribuiu para o aumento do  $\alpha$  foi a ordem  $i$  do subgrupo racional, bem como as suas interações  $\sigma \times i$  e  $i \times p$ . De modo geral, a

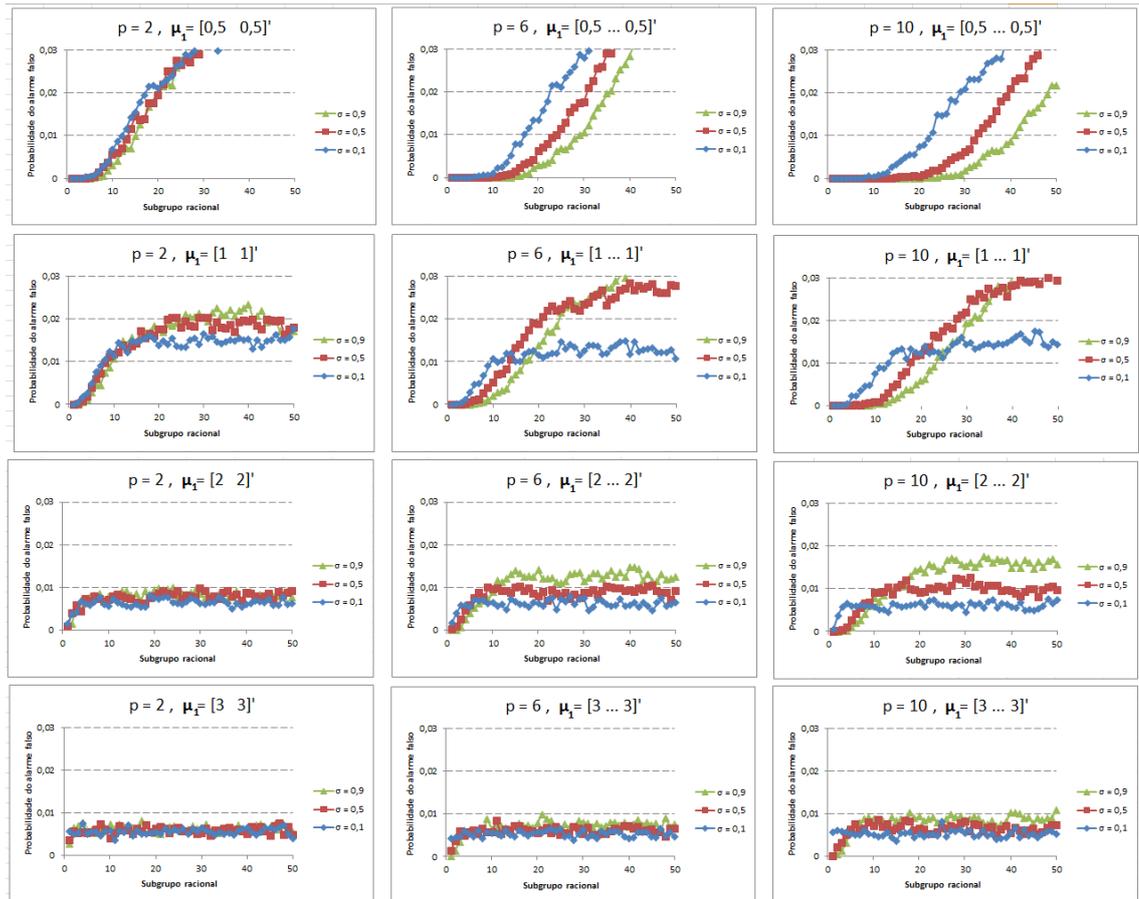
probabilidade do alarme falso aumentou à medida que os subgrupos racionais foram produzidos. Entretanto, quanto maior foi o vetor de médias a ser considerado como fora de controle, menor foi a taxa de crescimento do  $\alpha$  ao longo dos subgrupos racionais, levando-o a um patamar constante, o que justificou o efeito negativo da interação  $\mu_1 \times i$ .

Por meio da Figura 5.3, construída a partir das funções Est\_MCUSUM, ARL\_IC\_medio e AF\_por\_SR, em que foram gerados valores simulados para um processo sob controle estatístico, estão apresentadas as probabilidades dos alarmes falsos ao longo dos 50 primeiros subgrupos racionais. Já as suas médias, considerando-se os 200 subgrupos racionais, estão apresentados na Tabela 5.6.

Considerando-se todas as combinações testadas entre  $\mu_1$ ,  $i$ ,  $p$  e  $\sigma_{ww'}$  ( $\Sigma_0$ ), a probabilidade média do alarme falso foi, conforme esperado, proporcional ao inverso do *ARL IC* (Equação 3.49), obtendo-se valores entre 0 a 0,008 (Figura 5.3).

**Tabela 5.6.** Médias das probabilidades dos alarmes falsos do MCUSUM em função de  $p$ ,  $\mu_1$  e  $\sigma_{ww'}$

| $\mu_1 \backslash \sigma_{ww'}$ | $p = 2$ |        |        | $p = 6$ |        |        | $p = 10$ |        |        |
|---------------------------------|---------|--------|--------|---------|--------|--------|----------|--------|--------|
|                                 | 0,1     | 0,5    | 0,9    | 0,1     | 0,5    | 0,9    | 0,1      | 0,5    | 0,9    |
| 0,5                             | 0,0369  | 0,0427 | 0,0517 | 0,0372  | 0,0653 | 0,0871 | 0,0383   | 0,0818 | 0,1030 |
| 1                               | 0,0145  | 0,0169 | 0,0187 | 0,0126  | 0,0250 | 0,0309 | 0,0133   | 0,0320 | 0,0468 |
| 2                               | 0,0065  | 0,0075 | 0,0081 | 0,0061  | 0,0090 | 0,0126 | 0,0063   | 0,0108 | 0,0152 |
| 3                               | 0,0054  | 0,0058 | 0,0059 | 0,0053  | 0,0063 | 0,0074 | 0,0054   | 0,0068 | 0,0090 |

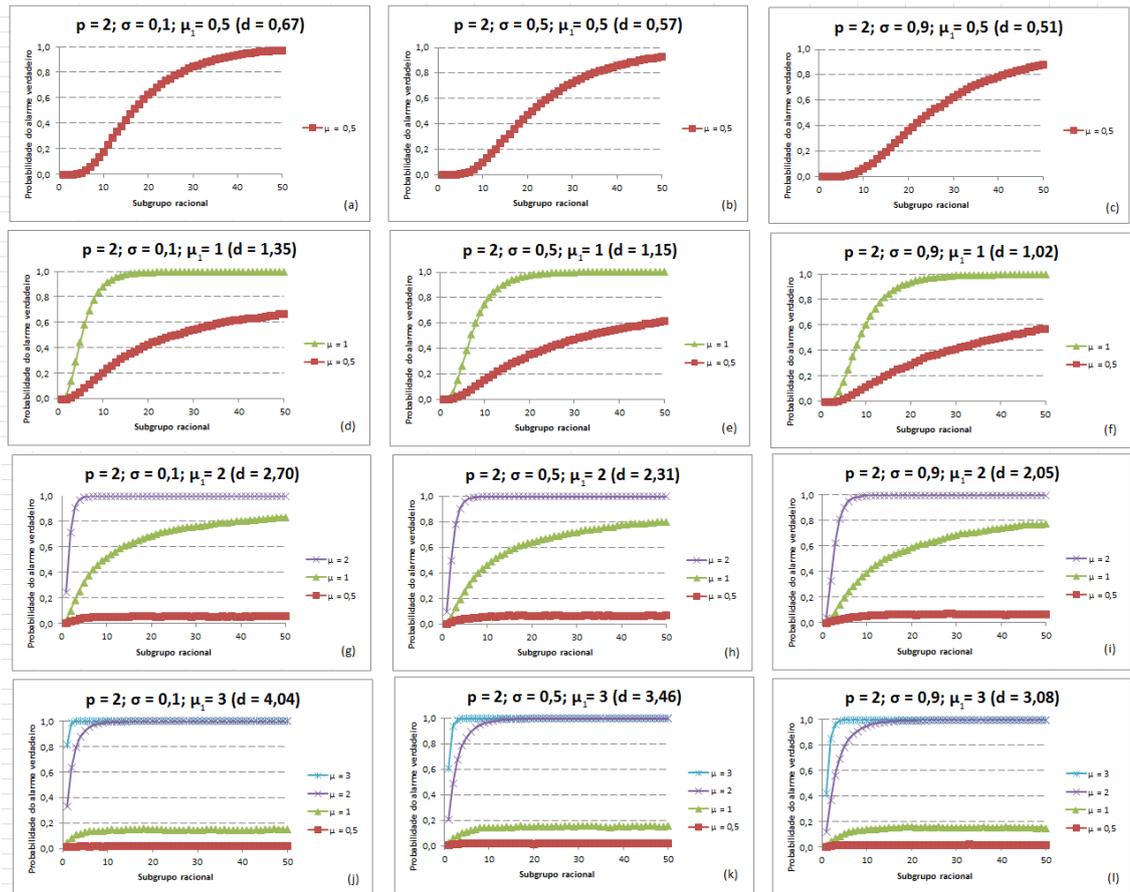


**Figura 5.3.** Estimativas das probabilidades dos alarmes falsos ao longo dos primeiros 50 subgrupos racionais para o gráfico de controle MCUSUM.

### 5.2.3 Alarme Verdadeiro

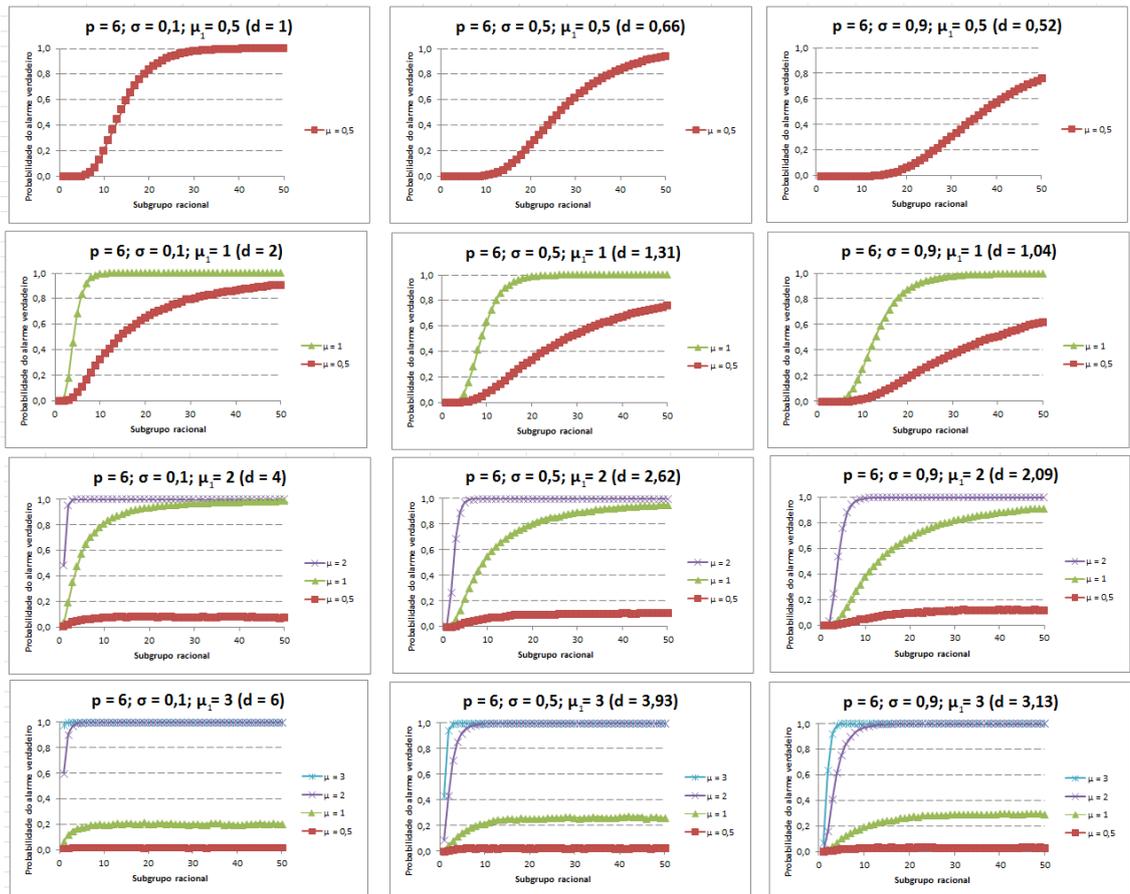
Para o processo com duas características de qualidade ( $p = 2$ ), com o descontrole de interesse no vetor de médias dado por  $\mu_1 = [0,5 \ 0,5]'$ , e com o vetor de médias fora de controle  $\mu_Y = [0,5 \ 0,5] = \mu_1$ , o MCUSUM apresentou  $\widehat{Pd} \geq 0,90$  para os subgrupos racionais de ordens  $i \geq 35$ ,  $i \geq 46$  e  $i \geq 55$  (Figura 5.4a, b e c) correspondentes às respectivas matrizes de covariâncias de 0,1; 0,5 e 0,9 (Equações 4.2a, b e c) e  $h = 7,20$ ; 8,00 e 8,50 (Tabela 5.5). Para o caso em que o descontrole de interesse no vetor de médias foi dado por  $\mu_1 = [1 \ 1]'$ , o MCUSUM apresentou  $\widehat{Pd} \geq 0,90$  para os subgrupos racionais de ordens  $i \geq 11$ ,  $i \geq 15$  e  $i \geq 18$  correspondentes às respectivas matrizes de covariâncias de 0,1; 0,5 e 0,9 e  $h = 4,30$ ; 4,90 e 5,40 (Tabela 5.5), para  $\mu_Y = [1 \ 1] = \mu_1$ . Já para  $\mu_Y = [0,5 \ 0,5]'$ , a estimativa do poder do MCUSUM mostrou-se abaixo de 0,90

para todos os 200 subgrupos racionais, obtendo assim um baixo poder de detecção de um descontrole que não era do interesse (Figura 5.4d, e e f). Para o caso em que o descontrole de interesse no vetor de médias foi dado por  $\boldsymbol{\mu}_1 = [2 \ 2]'$ , o MCUSUM apresentou  $\widehat{Pd} \geq 0,90$  para os subgrupos racionais de ordens  $i \geq 3$ ,  $i \geq 4$  e  $i \geq 5$  correspondentes às respectivas matrizes de covariâncias de 0,1; 0,5 e 0,9 e  $h = 2,20$ ; 2,60 e 2,94, para  $\boldsymbol{\mu}_Y = [2 \ 2]' = \boldsymbol{\mu}_1$ . Já para  $\boldsymbol{\mu}_Y = [0,5 \ 0,5]'$ , a estimativa do poder do MCUSUM mostrou-se abaixo de 0,01 para todos os 200 subgrupos racionais, obtendo-se convenientemente um baixo poder de detecção de um descontrole que não era de interesse. Já para o outro vetor de descontrole de não interesse,  $\boldsymbol{\mu}_Y = [1 \ 1]'$ , o poder mostrou-se acima de 0,90 somente a partir dos subgrupos racionais de ordem 103, 126 e 142 correspondentes às respectivas matrizes de covariâncias (Equações 4.4a, b e c). E, para o caso em que o descontrole de interesse no vetor de médias foi dado por  $\boldsymbol{\mu}_1 = [3 \ 3]'$ , o MCUSUM apresentou  $\widehat{Pd} \geq 0,90$  para os subgrupos racionais de ordens  $i \geq 2$ ,  $i \geq 2$  e  $i \geq 3$  correspondentes às respectivas matrizes de covariâncias de 0,1; 0,5 e 0,9 e  $h = 1,26$ ; 1,61 e 1,87, para  $\boldsymbol{\mu}_Y = [3 \ 3]' = \boldsymbol{\mu}_1$  (Figura 5.4g, h e i). Já para  $\boldsymbol{\mu}_Y = [0,5 \ 0,5]'$ , a estimativa do poder do MCUSUM mostrou-se abaixo de 0,03 para todos os 200 subgrupos racionais, enquanto que para  $\boldsymbol{\mu}_Y = [1 \ 1]'$  esse limitante superior sobe para 0,20. Já para o outro vetor de descontrole de não interesse,  $\boldsymbol{\mu}_Y = [2 \ 2]'$ , a estimativa do poder mostrou-se acima de 0,90 a partir dos subgrupos racionais de ordem 5, 7 e 8 correspondentes às respectivas matrizes de covariâncias (Equações 4.6a, b e c), evidenciando que a escolha  $k = d/2$  não é adequada para detecção de grandes mudanças no vetor de médias (Figura 5.4j, k e l).

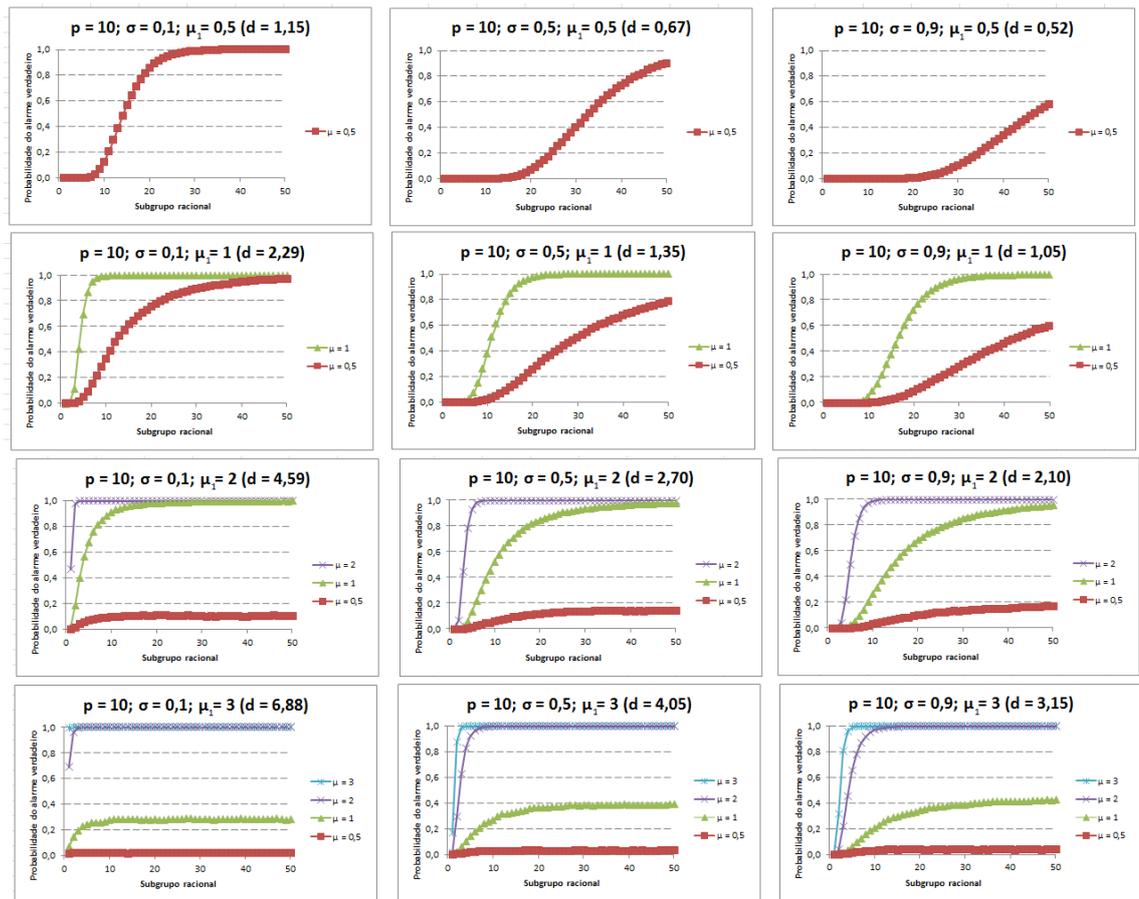


**Figura 5.4.** Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do MCUSUM de acordo com  $\mu_1 = [0,5 \ 0,5]'$ ;  $[1 \ 1]'$ ;  $[2 \ 2]'$  e  $[3 \ 3]'$  ao longo dos primeiros 50 subgrupos racionais, para  $p = 2$ .

Resultados semelhantes aos obtidos para  $p = 2$  foram obtidos para  $p = 6$  e 10 e estão apresentados nas Figuras 5.5 e 5.6. É importante destacar que a semelhança existente entre as Figuras 5.4 a 5.6 se deve aos diferentes planejamentos realizados para o MCUSUM, de acordo com o valor de referência  $k$  e intervalo de decisão  $h$ , de modo que truncou os resultados obtidos para o poder.



**Figura 5.5.** Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do MCUSUM de acordo com  $\mu_1 = [0,5 \dots 0,5]'$ ;  $[1 \dots 1]'$ ;  $[2 \dots 2]'$  e  $[3 \dots 3]'$  ao longo dos primeiros 50 subgrupos racionais, para  $p = 6$ .



**Figura 5.6.** Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do MCUSUM de acordo com  $\mu_1 = [0,5 \dots 0,5]'$ ;  $[1 \dots 1]'$ ;  $[2 \dots 2]'$  e  $[3 \dots 3]'$  ao longo dos primeiros 50 subgrupos racionais, para  $p = 10$ .

Nas Tabelas 5.6. e 5.7 estão apresentadas as médias dos poderes para cada uma das combinações descritas nas Figuras 5.4, 5.5 e 5.6 em que se tem  $\mu_Y = \mu_1$ .

**Tabela 5.7.** Médias dos poderes por subgrupo racional do MCUSUM do primeiro ao quinquagésimo subgrupo racional

| $\mu_1 \setminus \sigma_{ww'}$ | $p = 2$ |        |        | $p = 6$ |        |        | $p = 10$ |        |        |
|--------------------------------|---------|--------|--------|---------|--------|--------|----------|--------|--------|
|                                | 0,1     | 0,5    | 0,9    | 0,1     | 0,5    | 0,9    | 0,1      | 0,5    | 0,9    |
| 0,5                            | 0,6249  | 0,5288 | 0,4592 | 0,7138  | 0,4424 | 0,2724 | 0,7095   | 0,3358 | 0,1496 |
| 1                              | 0,8881  | 0,8486 | 0,8118 | 0,9205  | 0,8220 | 0,7325 | 0,9208   | 0,7803 | 0,6606 |
| 2                              | 0,9768  | 0,9643 | 0,9526 | 0,9886  | 0,9564 | 0,9274 | 0,9890   | 0,9442 | 0,9044 |
| 3                              | 0,9960  | 0,9907 | 0,9848 | 0,9997  | 0,9875 | 0,9722 | 0,9999   | 0,9809 | 0,9616 |

**Tabela 5.8.** Médias dos poderes por subgrupo racional do MCUSUM do primeiro ao ducentésimo subgrupo racional

| $\mu_1 \setminus \sigma_{ww'}$ | $p = 2$ |        |        | $p = 6$ |        |        | $p = 10$ |        |        |
|--------------------------------|---------|--------|--------|---------|--------|--------|----------|--------|--------|
|                                | 0,1     | 0,5    | 0,9    | 0,1     | 0,5    | 0,9    | 0,1      | 0,5    | 0,9    |
| 0,5                            | 0,9047  | 0,8768 | 0,8531 | 0,9284  | 0,8575 | 0,7999 | 0,9274   | 0,8293 | 0,7541 |
| 1                              | 0,9720  | 0,9621 | 0,9530 | 0,9801  | 0,9555 | 0,9331 | 0,9802   | 0,9451 | 0,9151 |
| 2                              | 0,9942  | 0,9911 | 0,9882 | 0,9972  | 0,9891 | 0,9818 | 0,9972   | 0,9860 | 0,9761 |
| 3                              | 0,9990  | 0,9977 | 0,9962 | 0,9999  | 0,9969 | 0,9931 | 1,0000   | 0,9952 | 0,9904 |

Nota-se que os valores da Tabela 5.7 são menores que os correspondentes da Tabela 5.8, condizendo com os resultados obtidos por Lara (2012) em que o autor afirma que a ordem do subgrupo racional possui relação direta com o poder.

As recomendações finais para cada um dos cenários de descontroles no vetor de médias estão apresentadas nas Tabelas 5.9, 5.10 e 5.11.

**Tabela 5.9.** Valores recomendados dos pares  $k$  e  $h$  do MCUSUM, considerando-se a matriz de covariâncias sob controle e o vetor de médias fora de controle, para  $p = 2$ .

| $\sigma_{ww'}$ | $\mu_1$ | $k$  | $h$  | $\hat{\alpha}$ | $\widehat{Pd} > 0,90$ |
|----------------|---------|------|------|----------------|-----------------------|
| 0,1            | 0,5     | 0,34 | 7,20 | 0,037          | $\forall i \geq 35$   |
|                | 1       | 0,68 | 4,30 | 0,014          | $\forall i \geq 11$   |
|                | 2       | 1,35 | 2,20 | 0,006          | $\forall i \geq 3$    |
|                | 3       | 2,02 | 1,26 | 0,005          | $\forall i \geq 2$    |
| 0,5            | 0,5     | 0,29 | 8,00 | 0,042          | $\forall i \geq 46$   |
|                | 1       | 0,58 | 4,90 | 0,017          | $\forall i \geq 15$   |
|                | 2       | 1,16 | 2,60 | 0,007          | $\forall i \geq 4$    |
|                | 3       | 1,73 | 1,61 | 0,006          | $\forall i \geq 2$    |
| 0,9            | 0,5     | 0,26 | 8,50 | 0,052          | $\forall i \geq 55$   |
|                | 1       | 0,51 | 5,40 | 0,020          | $\forall i \geq 18$   |
|                | 2       | 1,03 | 2,94 | 0,008          | $\forall i \geq 5$    |
|                | 3       | 1,54 | 1,87 | 0,006          | $\forall i \geq 3$    |

**Tabela 5.10.** Valores recomendados dos pares  $k$  e  $h$  do MCUSUM, considerando-se a matriz de covariâncias sob controle e o vetor de médias fora de controle, para  $p = 6$ .

| $\sigma_{ww'}$ | $\mu_1$ | $k$  | $h$   | $\hat{\alpha}$ | $\widehat{Pd} > 0,90$ |
|----------------|---------|------|-------|----------------|-----------------------|
| 0,1            | 0,5     | 0,50 | 10,50 | 0,0375         | $\forall i \geq 23$   |
|                | 1       | 1,00 | 5,88  | 0,0128         | $\forall i \geq 7$    |
|                | 2       | 2,00 | 2,64  | 0,0064         | $\forall i \geq 2$    |
|                | 3       | 3,00 | 1,32  | 0,0052         | $\forall i \geq 1$    |
| 0,5            | 0,5     | 0,33 | 14,10 | 0,0703         | $\forall i \geq 46$   |
|                | 1       | 0,66 | 8,50  | 0,0252         | $\forall i \geq 15$   |
|                | 2       | 1,31 | 4,45  | 0,0093         | $\forall i \geq 5$    |
|                | 3       | 1,97 | 2,71  | 0,0062         | $\forall i \geq 2$    |
| 0,9            | 0,5     | 0,26 | 16,30 | 0,0844         | $\forall i \geq 64$   |
|                | 1       | 0,52 | 10,20 | 0,0336         | $\forall i \geq 22$   |
|                | 2       | 1,05 | 5,60  | 0,0122         | $\forall i \geq 7$    |
|                | 3       | 1,57 | 3,62  | 0,0076         | $\forall i \geq 3$    |

**Tabela 5.11.** Valores recomendados dos pares  $k$  e  $h$  do MCUSUM, considerando-se a matriz de covariâncias sob controle e o vetor de médias fora de controle, para  $p = 10$ .

| $\sigma_{ww'}$ | $\mu_1$ | $k$  | $h$   | $\hat{\alpha}$ | $\widehat{Pd} > 0,90$ |
|----------------|---------|------|-------|----------------|-----------------------|
| 0,1            | 0,5     | 0,58 | 13,49 | 0,0384         | $\forall i \geq 22$   |
|                | 1       | 1,15 | 7,35  | 0,0136         | $\forall i \geq 7$    |
|                | 2       | 2,30 | 3,27  | 0,0063         | $\forall i \geq 2$    |
|                | 3       | 3,44 | 1,61  | 0,0052         | $\forall i \geq 1$    |
| 0,5            | 0,5     | 0,34 | 19,60 | 0,0860         | $\forall i \geq 51$   |
|                | 1       | 0,68 | 11,80 | 0,0301         | $\forall i \geq 17$   |
|                | 2       | 1,35 | 6,26  | 0,0103         | $\forall i \geq 5$    |
|                | 3       | 2,05 | 3,89  | 0,0067         | $\forall i \geq 3$    |
| 0,9            | 0,5     | 0,26 | 22,75 | 0,1046         | $\forall i \geq 74$   |
|                | 1       | 0,53 | 14,39 | 0,0464         | $\forall i \geq 26$   |
|                | 2       | 1,05 | 8,04  | 0,0149         | $\forall i \geq 8$    |
|                | 3       | 1,58 | 5,28  | 0,0087         | $\forall i \geq 4$    |

É importante ressaltar que a escolha  $k = \frac{d}{2}$  visa detectar com alta probabilidade um deslocamento  $d$  (Equação 3.63) no vetor de médias de  $\mu_0$  para  $\mu_1$  ou deslocamentos maiores que  $d$ , caso ocorram. Porém, o processo pode sofrer mudanças menores no vetor de médias, ou seja, sofrer um deslocamento  $d'$  tal que  $d' < d$ .

## 5.3 MEWMA

### 5.3.1 Planejamento

Para os processos sob controle estatístico, os valores obtidos de  $h$  do gráfico de controle MEWMA que proporcionaram  $ARL IC = 200$  estão apresentados na Tabela 5.12.

**Tabela 5.12.** Intervalos de decisão  $h$  para o gráfico de controle MEWMA que proporcionam  $ARL IC = 200$

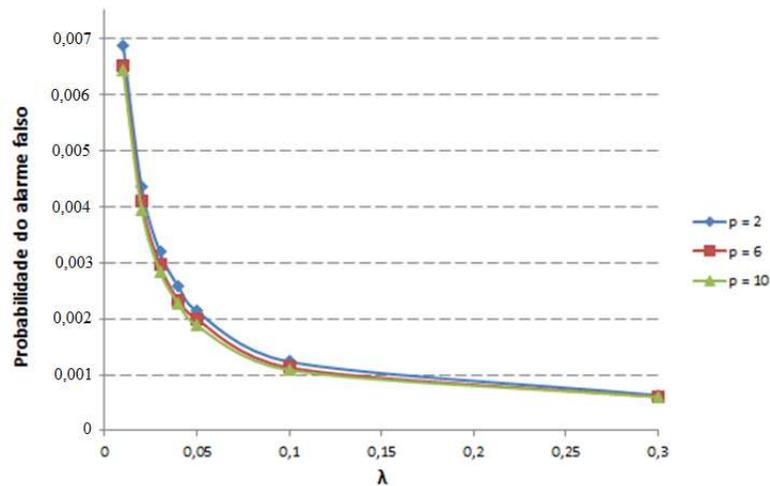
| $p \setminus \lambda$ | 0,01  | 0,02  | 0,03  | 0,04  | 0,05  | 0,1   | 0,3   |
|-----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 2                     | 5,35  | 6,24  | 6,88  | 7,33  | 7,69  | 8,79  | 10,12 |
| 6                     | 11,84 | 13,17 | 14,02 | 14,62 | 15,08 | 16,49 | 18,06 |
| 10                    | 17,48 | 19,08 | 20,08 | 20,82 | 21,30 | 22,96 | 24,66 |

No MEWMA, o  $ARL IC$  diminui com o aumento do número de variáveis monitoradas e com o aumento da correlação entre elas, e aumenta com o aumento de  $\lambda$ . Por isso, o valor de  $h$  relacionado ao  $ARL IC = 200$  variou conforme as relações anteriores (Tabela 5.12). A partir dos valores previamente estabelecidos para  $h$ , obteve-se os resultados para as probabilidades dos alarmes falsos e verdadeiros apresentados nas seções seguintes (5.3.2 e 5.3.3).

Os resultados apresentados nas Tabelas 5.8, 5.9 e 5.10 equiparam-se àqueles obtidos por Lowry et al. (1992). Por exemplo, para  $p = 2$  características de qualidade, visando obter um  $ARL IC = 200$  para  $\lambda = 0,2$ , os autores obtiveram  $h = 9,65$ , valor que se encontra adequadamente entre aqueles obtidos no presente trabalho para  $\lambda$  igual a 0,1 e 0,3.

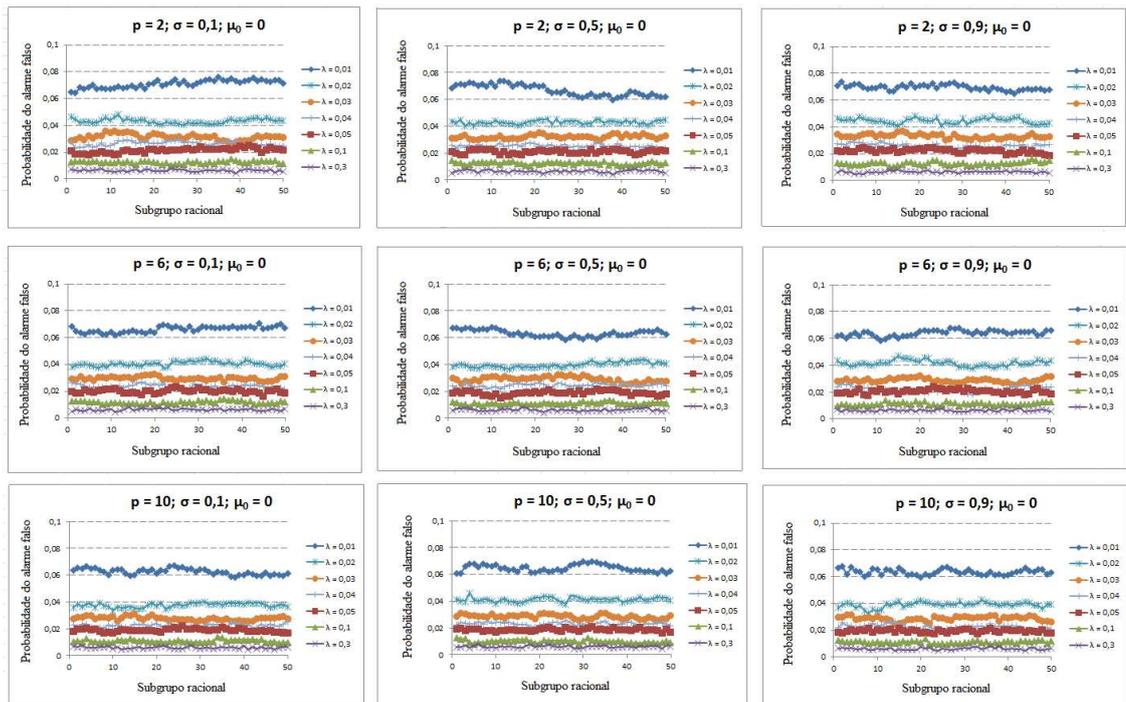
### 5.3.2 Alarme Falso

Para  $p = 2$ , a estimativa da probabilidade do alarme falso, em média, foi de 0,0687; 0,0434; 0,0318; 0,0257; 0,0213; 0,0123 e 0,0063 para os respectivos valores de  $\lambda$  iguais a 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05; 0,1 e 0,3. Já para  $p = 6$  as probabilidades também se mantiveram semelhantes: 0,0651; 0,0409; 0,0318; 0,0257; 0,0213; 0,0123 e 0,0063. E, do mesmo modo, para  $p = 10$ : 0,0642; 0,0394; 0,0284; 0,0226; 0,0188; 0,0108 e 0,0060 (Figuras 5.7 e 5.8).



**Figura 5.7.** Estimativas das probabilidades dos alarmes falsos do MEWMA em função do parâmetro de suavização  $\lambda$  e quantidade  $p$  de características monitoradas.

A probabilidade do alarme falso proporcionada pelo MEWMA não depende ( $P > 0,05$ ) da correlação  $\sigma_{ww}$ , entre as variáveis e nem da ordem  $i$  do subgrupo racional.



**Figura 5.8.** Estimativas das probabilidades dos alarmes falsos do MEWMA ao longo dos primeiros 50 subgrupos racionais em função do parâmetro de suavização  $\lambda$ , matriz de covariâncias  $\Sigma_0$  e quantidade  $p$  de características monitoradas.

A equação de regressão estimada foi dada por:

$$\hat{\alpha}(\%) = 4,16 - 0,0471 p - 14,3 \lambda + 0,161 p\lambda \quad (R^2 = 0,45), \quad (5.3)$$

para  $2 \leq p \leq 10$  e  $0,01 \leq \lambda \leq 0,3$ .

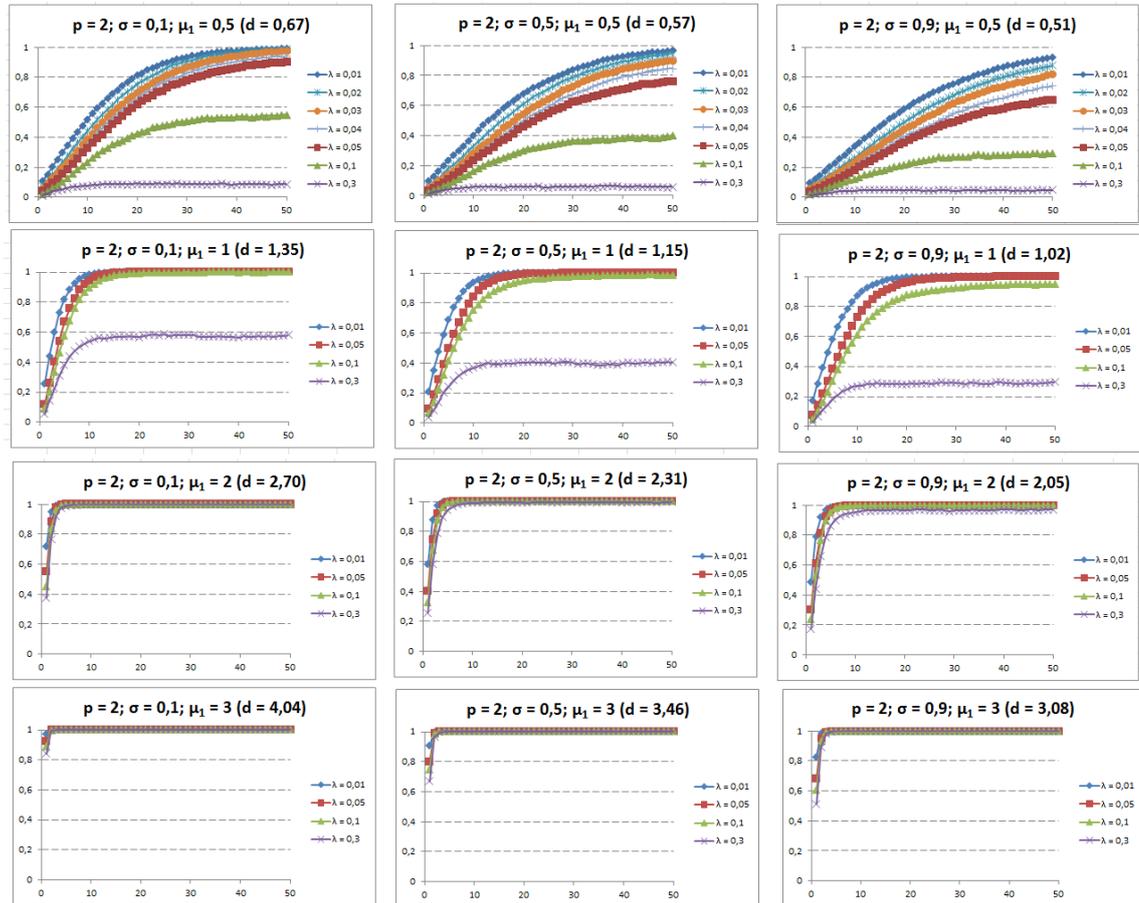
O fator de maior efeito, em módulo, sobre o  $\alpha$  foi o parâmetro de suavização  $\lambda$ , sendo que quanto maior o seu valor, menor a probabilidade do alarme falso. Esse efeito negativo do  $\lambda$  sobre o  $\alpha$  pode ser visualizado em cada um dos gráficos da Figura 5.8.

Outro fator individual que influencia negativamente a probabilidade do alarme falso é a quantidade  $p$  de características avaliadas. A segunda parcela do lado direito da igualdade da Equação 5.3 corrobora com os resultados apresentados na Figura 5.7.

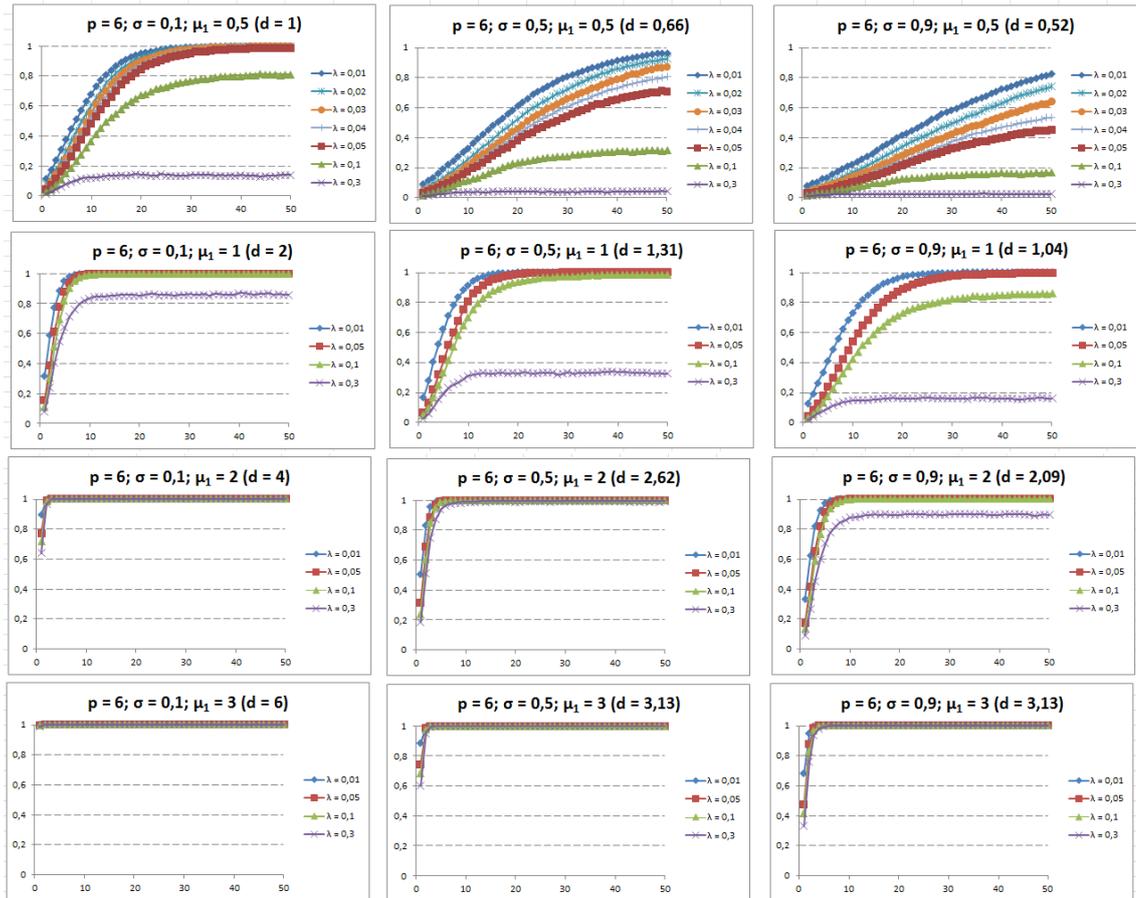
Uma vez que a probabilidade do alarme falso não pode ser negativa, é sensato a ocorrência da interação  $p \times \lambda$ , de sinal contrário à  $p$  e  $\lambda$ , para garantir a positividade do  $\alpha$ .

### 5.3.3 Alarme Verdadeiro

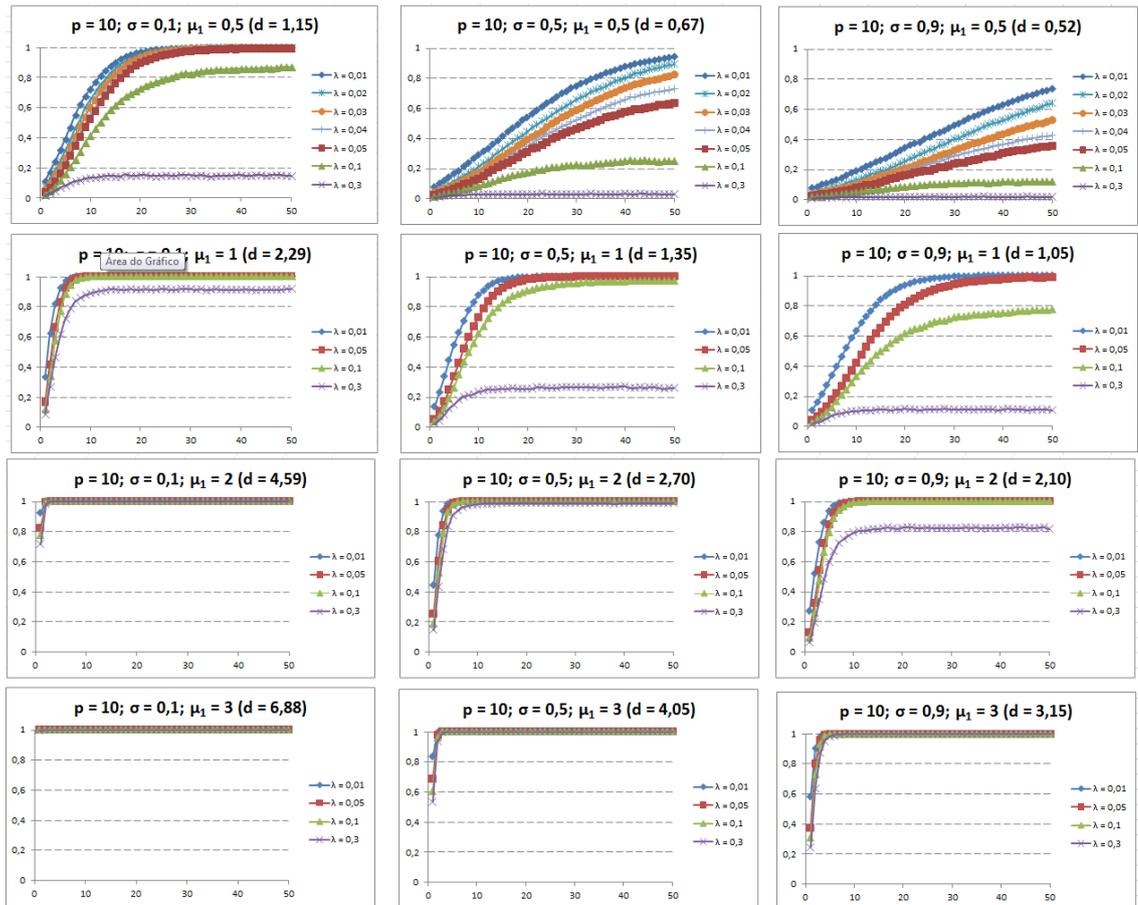
Nas Figuras 5.9, 5.10 e 5.11 estão apresentadas as probabilidades dos alarmes verdadeiros em função da ordem do subgrupo racional para o gráfico de controle MEWMA, configurado com diferentes combinações entre  $\lambda$  e  $h$ .



**Figura 5.9.** Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do MEWMA ao longo dos primeiros 50 subgrupos racionais, em função do parâmetro de suavização  $\lambda$ , vetor de médias fora de controle  $\mu_1$  e matriz de covariâncias  $\Sigma_0$ , para  $p = 2$ .



**Figura 5.10.** Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do MEWMA ao longo dos primeiros 50 subgrupos racionais, em função do parâmetro de suavização  $\lambda$ , vetor de médias fora de controle  $\mu_1$  e matriz de covariâncias  $\Sigma_0$ , para  $p = 6$ .



**Figura 5.11.** Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do MEWMA ao longo dos primeiros 50 subgrupos racionais, em função do parâmetro de suavização  $\lambda$ , vetor de médias fora de controle  $\mu_1$  e matriz de covariâncias  $\Sigma_0$ , para  $p = 10$ .

As recomendações finais para cada um dos cenários de descontrole no vetor de médias estão apresentadas nas Tabelas 5.13, 5.14 e 5.15. Pode-se observar que o aumento da quantidade  $p$  de características avaliadas dificultou o monitoramento do processo para os casos de altas covariâncias entre as  $p$  variáveis. Por exemplo, para  $\mu_1 = 0,5$  e  $\sigma_{ww'} = 0,9$ , obtiveram-se distâncias de Mahalanobis próximas entre si para os três valores  $p$  estudados. Entretanto, à medida que se aumentou  $p$ , diminuiu-se o poder do gráfico em detectar o descontrole.

**Tabela 5.13.** Valores recomendados dos pares  $\lambda$  e  $h$  do MEWMA, considerando-se a matriz de covariâncias sob controle e o vetor de médias fora de controle, para  $p = 2$

| $\sigma_{ww'}$ | $\mu_1$ | $\lambda$ | $h$   | $\hat{\alpha}$ | $\widehat{Pd} \geq 0,90$ |
|----------------|---------|-----------|-------|----------------|--------------------------|
| 0,1            | 0,5     | 0,04      | 7,33  | 0,0258         | $i \geq 39$              |
|                | 1       | 0,1       | 8,79  | 0,0122         | $i \geq 11$              |
|                | 2       | 0,3       | 10,12 | 0,0062         | $i \geq 3$               |
|                | 3       | 0,3       | 10,12 | 0,0062         | $i \geq 2$               |
| 0,5            | 0,5     | 0,04      | 7,33  | 0,0255         | $i \geq 71$              |
|                | 1       | 0,05      | 7,69  | 0,0215         | $i \geq 12$              |
|                | 2       | 0,3       | 10,12 | 0,0063         | $i \geq 5$               |
|                | 3       | 0,3       | 10,12 | 0,0063         | $i \geq 2$               |
| 0,9            | 0,5     | 0,04      | 7,33  | 0,0257         | $i \geq 67^*$            |
|                | 1       | 0,05      | 7,69  | 0,0213         | $i \geq 16$              |
|                | 2       | 0,3       | 10,12 | 0,0065         | $i \geq 6$               |
|                | 3       | 0,3       | 10,12 | 0,0065         | $i \geq 3$               |

\*  $\widehat{Pd} \geq 0,80$ .

**Tabela 5.14.** Valores recomendados dos pares  $\lambda$  e  $h$  do MEWMA, considerando-se a matriz de covariâncias sob controle e o vetor de médias fora de controle, para  $p = 6$

| $\sigma_{ww'}$ | $\mu_1$ | $\lambda$ | $h$   | $\hat{\alpha}$ | $\widehat{Pd} \geq 0,90$ |
|----------------|---------|-----------|-------|----------------|--------------------------|
| 0,1            | 0,5     | 0,05      | 15,08 | 0,0234         | $i \geq 24$              |
|                | 1       | 0,1       | 16,49 | 0,0114         | $i \geq 6$               |
|                | 2       | 0,3       | 18,06 | 0,0062         | $i \geq 2$               |
|                | 3       | 0,3       | 18,06 | 0,0062         | $i \geq 1$               |
| 0,5            | 0,5     | 0,03      | 14,02 | 0,0292         | $i \geq 57$              |
|                | 1       | 0,05      | 15,08 | 0,0202         | $i \geq 13$              |
|                | 2       | 0,3       | 18,06 | 0,0059         | $i \geq 5$               |
|                | 3       | 0,3       | 18,06 | 0,0059         | $i \geq 2$               |
| 0,9            | 0,5     | 0,03      | 14,02 | 0,0294         | $i \geq 87^*$            |
|                | 1       | 0,05      | 15,08 | 0,0200         | $i \geq 21$              |
|                | 2       | 0,1       | 16,49 | 0,0112         | $i \geq 6$               |
|                | 3       | 0,3       | 18,06 | 0,0061         | $i \geq 3$               |

\*  $\widehat{Pd} \geq 0,80$ .

**Tabela 5.15.** Valores recomendados dos pares  $\lambda$  e  $h$  do MEWMA, considerando-se a matriz de covariâncias sob controle e o vetor de médias fora de controle, para  $p = 10$

| $\sigma_{ww'}$ | $\mu_1$ | $\lambda$ | $h$   | $\hat{\alpha}$ (%) | $Pd \geq 0,90$ |
|----------------|---------|-----------|-------|--------------------|----------------|
| 0,1            | 0,5     | 0,04      | 20,82 | 0,0225             | $i \geq 20$    |
|                | 1       | 0,1       | 22,96 | 0,0108             | $i \geq 6$     |
|                | 2       | 0,3       | 24,66 | 0,0060             | $i \geq 2$     |
|                | 3       | 0,3       | 24,66 | 0,0060             | $i \geq 1$     |
| 0,5            | 0,5     | 0,03      | 20,08 | 0,0289             | $i \geq 68$    |
|                | 1       | 0,05      | 21,30 | 0,0189             | $i \geq 14$    |
|                | 2       | 0,3       | 24,66 | 0,0060             | $i \geq 5$     |
|                | 3       | 0,3       | 24,66 | 0,0060             | $i \geq 2$     |
| 0,9            | 0,5     | 0,03      | 20,08 | 0,0280             | $i \geq 107^*$ |
|                | 1       | 0,05      | 21,30 | 0,0185             | $i \geq 26$    |
|                | 2       | 0,1       | 22,96 | 0,0110             | $i \geq 7$     |
|                | 3       | 0,3       | 24,66 | 0,0061             | $i \geq 4$     |

\*  $\widehat{Pd} \geq 0,75$ .

Analogamente ao caso de altas covariâncias, o aumento da quantidade  $p$  de características avaliadas contribuiu positivamente para o monitoramento do processo para os casos de baixas covariâncias entre as  $p$  variáveis. Os resultados apresentados nas Tabelas 5.13 a 5.15 complementam-se àqueles obtidos por Prabhu e Runger (1999, apud MONTGOMERY 2016), em que os autores fizeram recomendações a partir dos valores de ARL IC iguais a 500 ( $\lambda = 0,085$  e  $h = 25,42$ ) e 1.000 ( $\lambda = 0,075$  e  $h = 27,38$ ), para  $p = 10$  e  $d \approx 1$ .

## 5.4 Lin-MEWMA

### 5.4.1 Planejamento

Para os processos sob controle estatístico, os valores obtidos de  $h$  do gráfico de controle Lin-MEWMA que proporcionaram  $ARL IC = 200$ , em função de diferentes valores de  $\lambda$ , estão apresentados na Tabela 5.16.

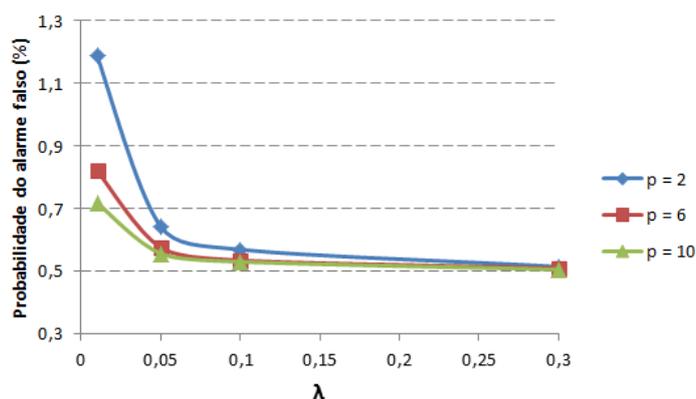
**Tabela 5.16.** Intervalos de decisão  $h$  para o Lin-MEWMA que proporcionaram  $ARL IC = 200$  para um processo sob controle estatístico

| $p$ | $\lambda$ |       |       |       |
|-----|-----------|-------|-------|-------|
|     | 0,01      | 0,05  | 0,1   | 0,3   |
| 2   | 0,295     | 0,961 | 1,587 | 3,680 |
| 6   | 0,514     | 1,615 | 2,677 | 6,317 |
| 10  | 0,674     | 2,121 | 3,531 | 8,482 |

Do mesmo modo que no MEWMA, o  $ARL IC$  diminui com o aumento do número de variáveis monitoradas e com o aumento da correlação entre elas, e aumenta com o aumento de  $\lambda$ . Por isso, o valor de  $h$  relacionado ao  $ARL IC = 200$  variou conforme as relações anteriores (Tabela 5.16). A partir dos valores previamente estabelecidos para  $h$ , obteve-se os resultados para as probabilidades dos alarmes falsos e verdadeiros apresentados nas seções 5.4.2 e 5.4.3 seguintes.

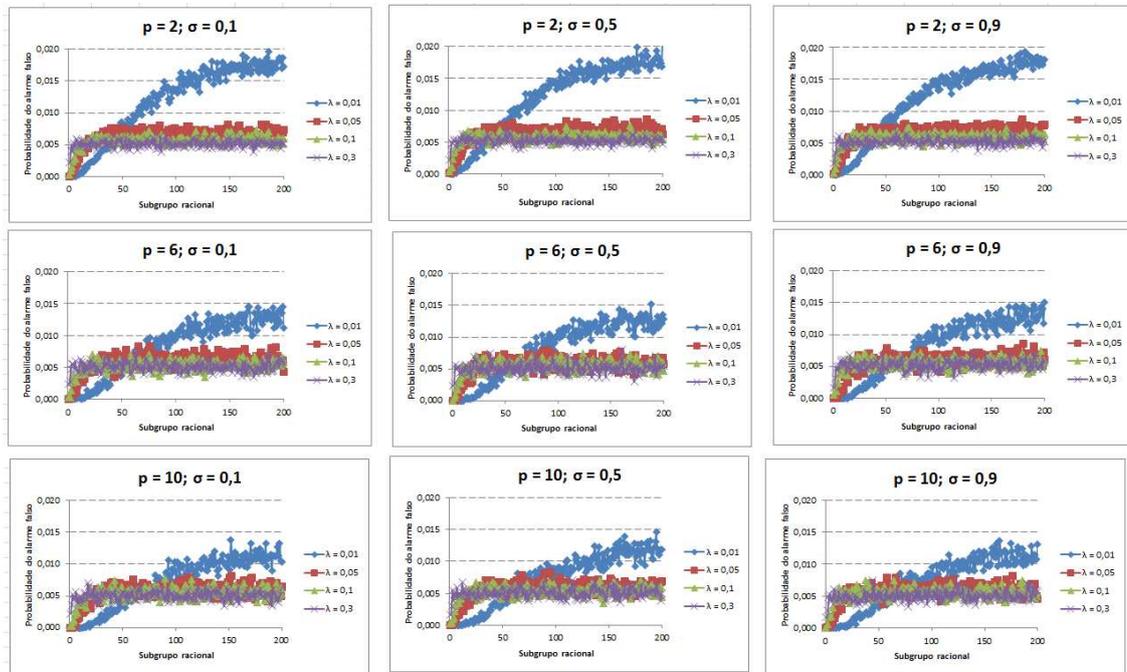
### 5.4.2 Alarme Falso

Para  $p = 2$ , a estimativa da probabilidade do alarme falso foi de 0,0119; 0,0064; 0,0057 e 0,0051 para os respectivos valores de  $\lambda$  iguais a 0,01; 0,05; 0,1 e 0,3. Já para  $p = 6$  houve uma diminuição somente até  $\lambda = 0,01$ : 0,0082; 0,0058; 0,0053 e 0,0051. E, para  $p = 10$ , houve mais um pequeno decréscimo, porém até  $\lambda = 0,05$ : 0,0072; 0,0056; 0,0053 e 0,0051 (Figura 5.12).



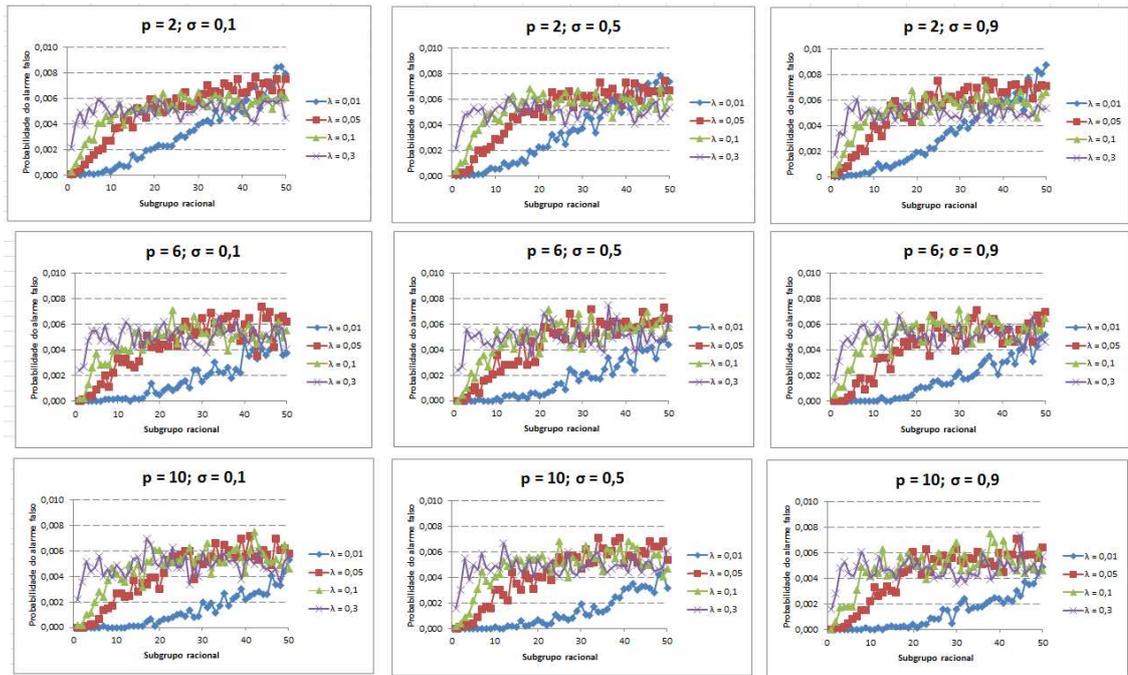
**Figura 5.12.** Estimativas das probabilidades dos alarmes falsos do Lin-MEWMA em função do parâmetro de suavização  $\lambda$  e quantidade  $p$  de características monitoradas.

Na Figura 5.13 são apresentadas as probabilidades dos alarmes falsos para os 200 subgrupos racionais, enquanto que na Figura 5.14, mais específica, visualizam-se apenas a dos 50 primeiros subgrupos racionais.



**Figura 5.13.** Estimativas das probabilidades dos alarmes falsos do Lin-MEWMA ao longo dos primeiros 200 subgrupos racionais em função do parâmetro de suavização  $\lambda$ , matriz de covariâncias  $\Sigma_0$  e quantidade  $p$  de características monitoradas.

A probabilidade do alarme falso não sofreu mudanças em função da matriz de covariâncias. Para  $p = 2$ , a probabilidade média do alarme falso ao longo dos 200 subgrupos racionais se manteve em 0,0119; 0,0064; 0,0057 e 0,0051 para  $\lambda$  igual a 0,01; 0,05; 0,1 e 0,3, respectivamente, para os três casos de covariâncias ( $\sigma_{ww} = 0,1; 0,5$  e 0,9. Para  $p = 6$ , a probabilidade média do alarme falso se manteve em 0,0082; 0,0058; 0,0054 e 0,0051 para  $\lambda$  igual a 0,01; 0,05; 0,1 e 0,3 respectivamente para os três casos de covariâncias. E, para  $p = 10$ , a probabilidade média do alarme falso se manteve em 0,0072; 0,0056; 0,0053 e 0,0051 para  $\lambda$  igual a 0,01; 0,05; 0,1 e 0,3 respectivamente (Figura 5.13).



**Figura 5.14.** Estimativas das probabilidades dos alarmes falsos do Lin-MEWMA ao longo dos primeiros 50 subgrupos racionais em função do parâmetro de suavização  $\lambda$ , matriz de covariâncias  $\Sigma_0$  e quantidade  $p$  de características monitoradas.

A equação de regressão para a probabilidade do alarme falso foi dada por:

$$\hat{\alpha}(\%) = 0,458 - 0,0254 p + 0,00496 i + 0,135 p \times \lambda - 0,00009 p \times i - 0,0176 \lambda \times i \quad (R^2 = 0,50), \quad (5.3)$$

para  $2 \leq p \leq 10$ ;  $1 \leq i \leq 200$  e  $0,01 \leq \lambda \leq 0,3$ .

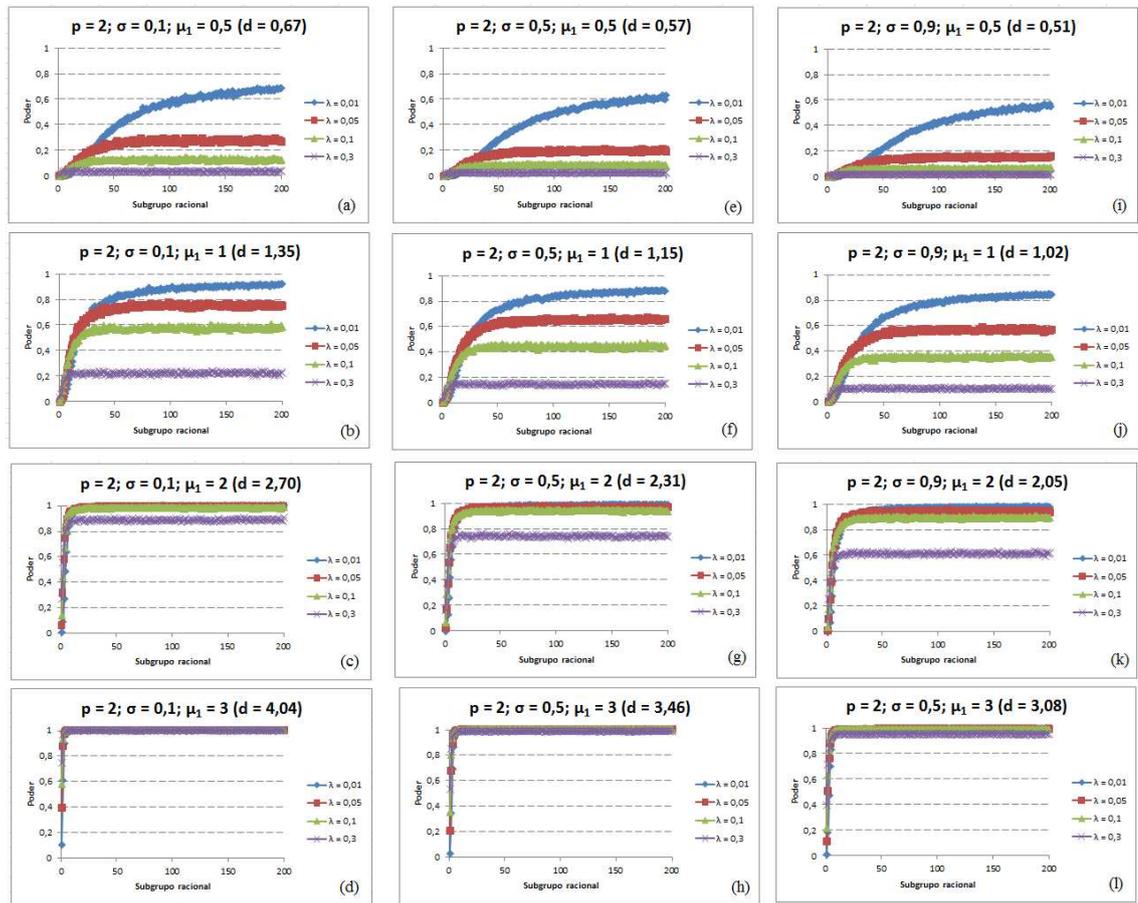
A segunda parcela do lado direito da igualdade da Equação 5.3 corrobora com os resultados apresentados na Figura 5.12, cujo aumento da quantidade  $p$  de características avaliadas contribui para a diminuição da probabilidade do alarme falso. Já a terceira parcela do lado direito da igualdade da Equação 5.3 corrobora com os resultados apresentados nas Figuras 5.13 e 5.14, cujo aumento da ordem  $i$  do subgrupo racional contribui para o aumento da probabilidade do alarme falso.

Para  $p = 2$ , a probabilidade média do alarme falso ao longo dos primeiros 50 subgrupos racionais se manteve em 0,0032; 0,0051; 0,0052 e 0,0050 para  $\lambda$  igual a 0,01; 0,05; 0,1 e 0,3, respectivamente, para os três casos de covariâncias ( $\sigma_{ww} = 0,1$ ; 0,5 e 0,9). Para  $p = 6$ , a probabilidade média do alarme falso se manteve em 0,0016; 0,0044; 0,0048 e 0,0050 para  $\lambda$  igual a 0,01; 0,05; 0,1 e 0,3,

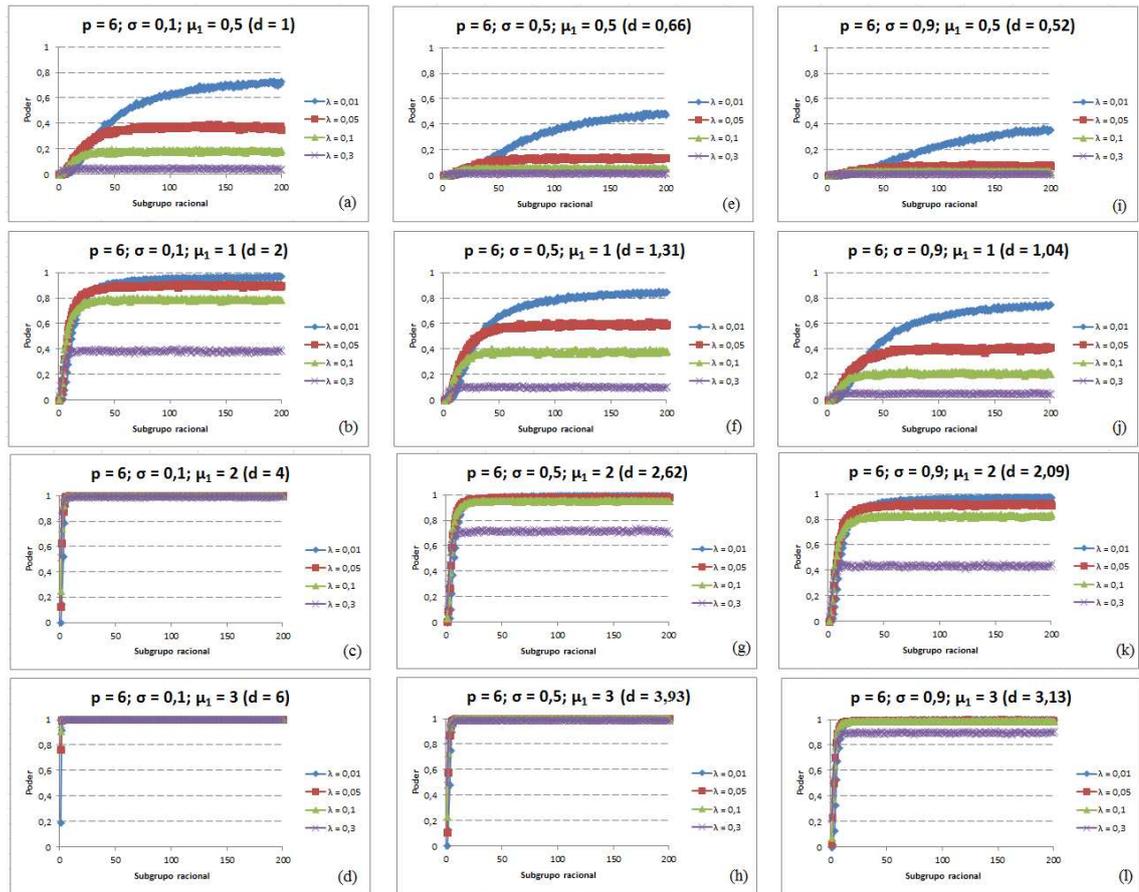
respectivamente, também para os três casos de covariâncias. E, para  $p = 10$ , a probabilidade média do alarme falso se manteve em 0,0013; 0,0042; 0,0047 e 0,0049 para  $\lambda$  igual a 0,01; 0,05; 0,1 e 0,3, respectivamente.

### 5.4.3 Alarme Verdadeiro

Nas Figuras 5.15, 5.16 e 5.17 estão apresentadas as probabilidades dos alarmes verdadeiros em função da ordem do subgrupo racional ( $1 \leq i \leq 200$ ) para o gráfico de controle Lin-MEWMA configurado com diferentes combinações entre  $\lambda$  e  $h$  (Tabela 5.16).



**Figura 5.15.** Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do Lin-MEWMA ao longo dos primeiros 200 subgrupos racionais, em função do parâmetro de suavização  $\lambda$ , vetor de médias fora de controle  $\mu_1$  e matriz de covariâncias  $\Sigma_0$ , para  $p = 2$ .

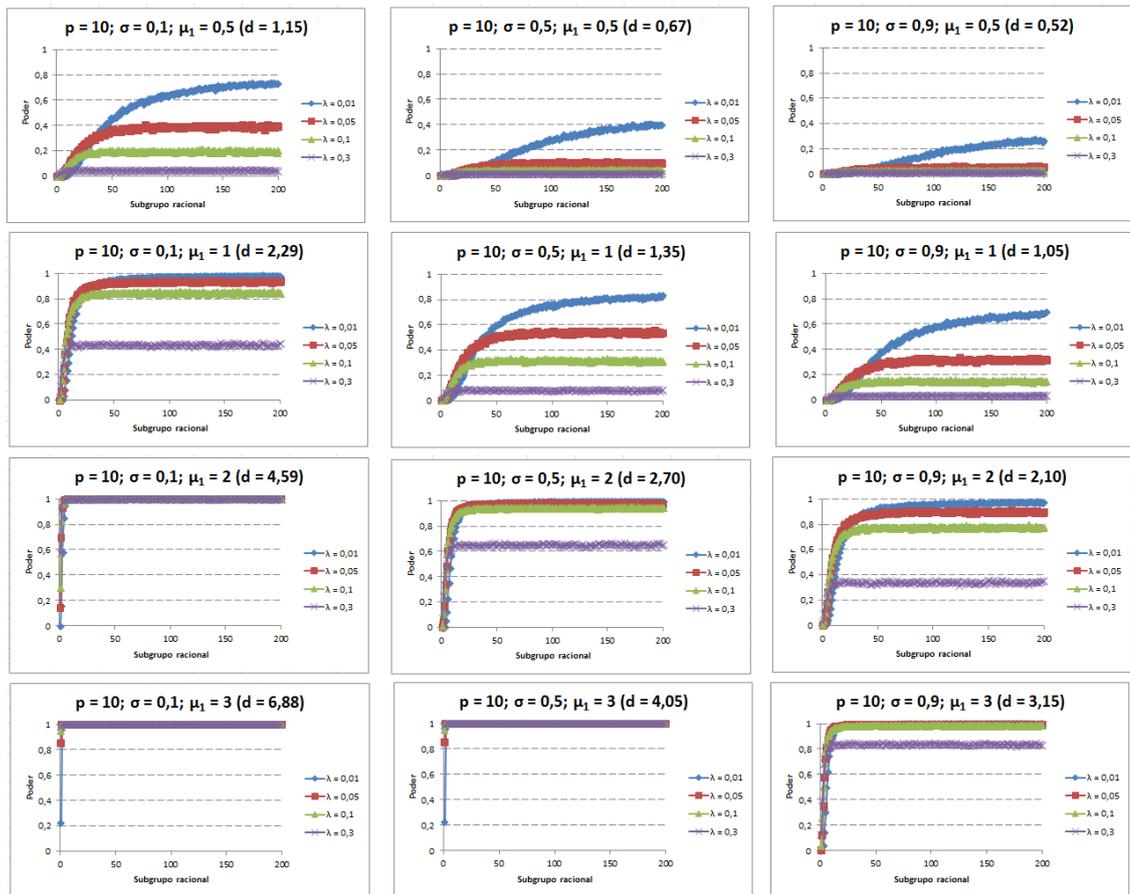


**Figura 5.16.** Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do Lin-MEWMA ao longo dos primeiros 200 subgrupos racionais, em função do parâmetro de suavização  $\lambda$ , vetor de médias fora de controle  $\mu_1$  e matriz de covariâncias  $\Sigma_0$ , para  $p = 6$ .

Observou-se que para a baixa covariância entre as  $p$  variáveis ( $\sigma_{ww'} = 0,1$ ), o poder do Lin-MEWMA aumenta com o aumento de  $p$ . Por exemplo, para  $p = 2$  e  $\mu_1 = [1 \ 1]'$ , os poderes médios do Lin-MEWMA para valores de  $\lambda$  iguais a 0,01; 0,05; 0,1 e 0,3, são, respectivamente, de 0,8422; 0,7320; 0,5712 e 0,2246. Já para  $p = 6$  e  $\mu_1 = [1 \ \dots \ 1]'$ , os poderes médios sobem, respectivamente, para 0,9243; 0,8844; 0,7844 e 0,3869. E, para  $p = 10$  e  $\mu_1 = [1 \ \dots \ 1]'$ , os poderes médios sobem ainda mais, respectivamente, para 0,9459; 0,9206; 0,8411 e 0,4365 (Figuras 5.15b, 5.16b e 5.17b).

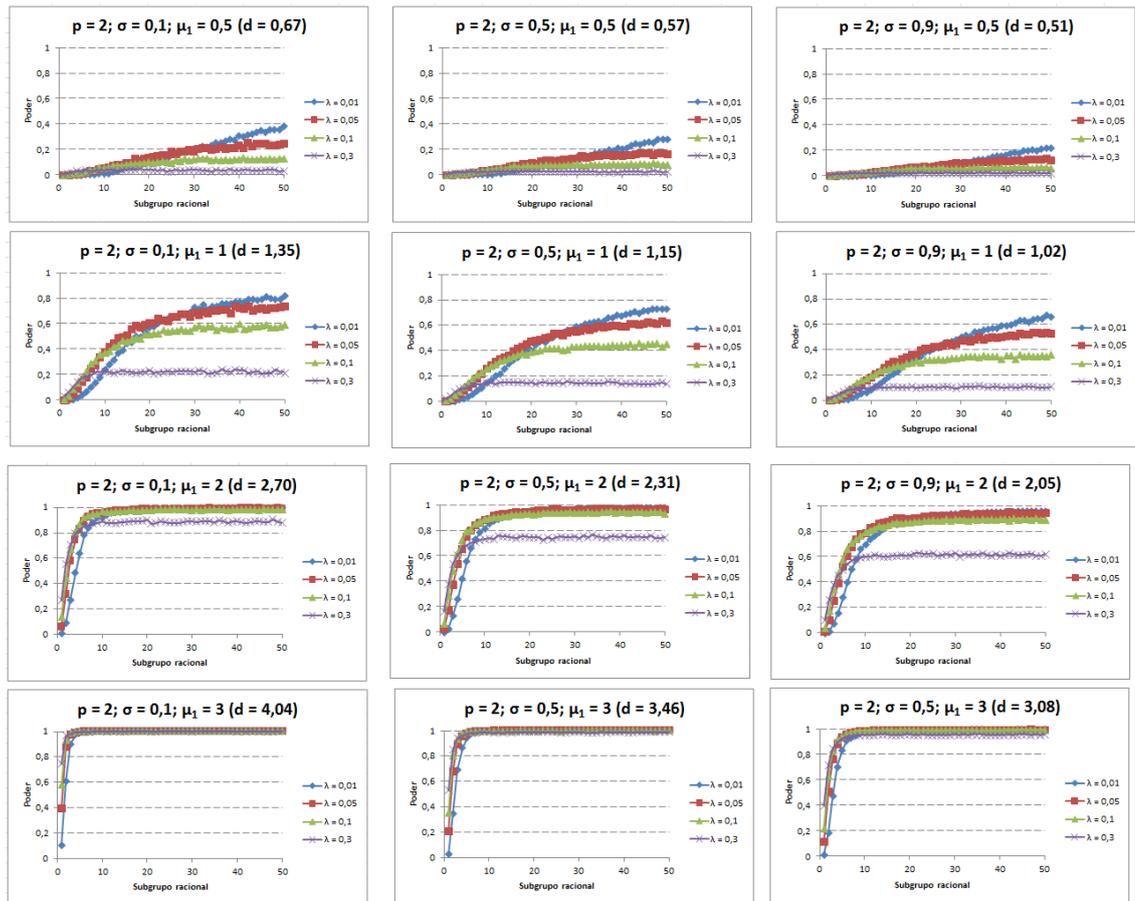
Por outro lado, para altas covariâncias entre as  $p$  variáveis ( $\sigma_{ww'} = 0,5$  e  $0,9$ ), observou-se que o poder do Lin-MEWMA diminui com o aumento de  $p$ . Por exemplo, para  $p = 2$ ,  $\sigma_{ww'} = 0,9$  e  $\mu_1 = [2 \ 2]'$  os poderes médios do Lin-MEWMA para valores de  $\lambda$  iguais a 0,01; 0,05; 0,1 e 0,3, são, respectivamente, de

0,9648; 0,9414; 0,8939 e 0,6150. Já para  $p = 6$ ,  $\sigma_{ww'} = 0,9$  e  $\boldsymbol{\mu}_1 = [2 \cdots 2]'$ , os poderes médios decaem, respectivamente, para 0,9372; 0,9053; 0,8230 e 0,4386. E, para  $p = 10$ ,  $\sigma_{ww'} = 0,9$  e  $\boldsymbol{\mu}_1 = [2 \cdots 2]'$  os poderes médios diminuem ainda mais e, respectivamente, para 0,9155; 0,8724; 0,7614 e 0,3357 (Figuras 5.15k, 5.16k e 5.17k).

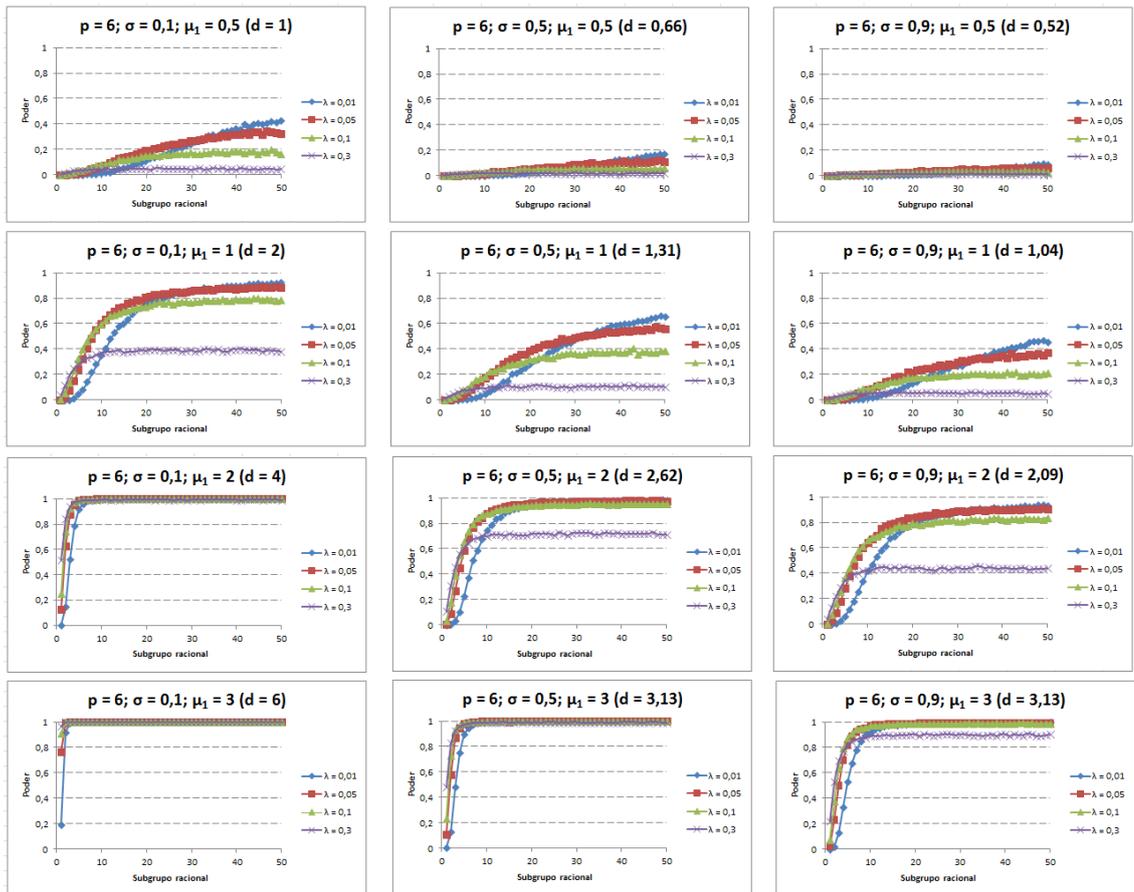


**Figura 5.17.** Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do Lin-MEWMA ao longo dos primeiros 200 subgrupos racionais, em função do parâmetro de suavização  $\lambda$ , vetor de médias fora de controle  $\boldsymbol{\mu}_1$  e matriz de covariâncias  $\boldsymbol{\Sigma}_0$ , para  $p = 10$ .

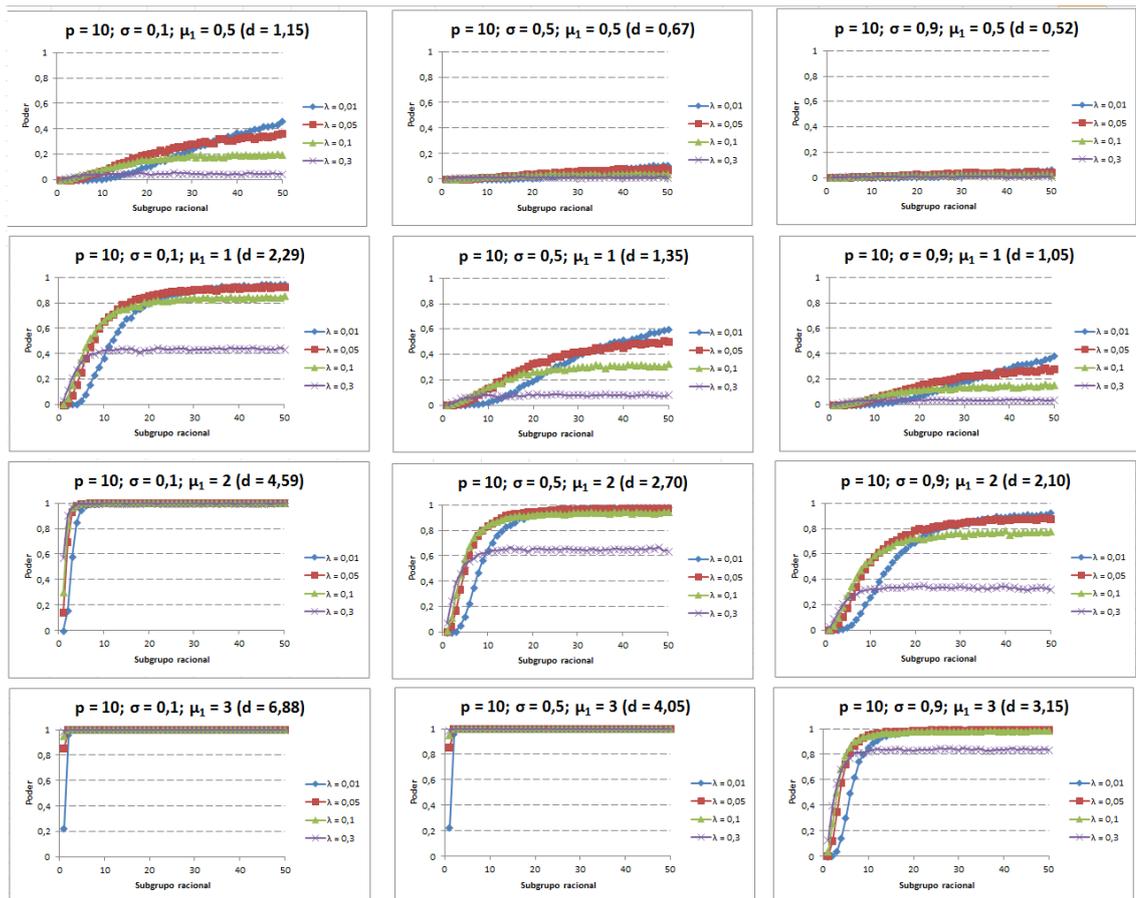
Nas Figuras 5.15, 5.16 e 5.17 são apresentadas as probabilidades dos alarmes verdadeiros para os 200 subgrupos racionais, enquanto que nas Figuras 5.18, 5.19 e 5.20, mais específicas, visualizam-se apenas a dos primeiros 50 subgrupos racionais.



**Figura 5.18.** Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do Lin-MEWMA ao longo dos 50 primeiros subgrupos racionais em função do parâmetro de suavização  $\lambda$ , vetor de médias fora de controle  $\mu_1$ , matriz de covariâncias  $\Sigma_0$ , para  $p = 2$  características monitoradas.



**Figura 5.19.** Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do Lin-MEWMA ao longo dos 50 primeiros subgrupos racionais em função do parâmetro de suavização  $\lambda$ , vetor de médias fora de controle  $\mu_1$ , matriz de covariâncias  $\Sigma_0$ , para  $p = 6$  características monitoradas.



**Figura 5.20.** Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do Lin-MEWMA ao longo dos 50 primeiros subgrupos racionais em função do parâmetro de suavização  $\lambda$ , vetor de médias fora de controle  $\mu_1$ , matriz de covariâncias  $\Sigma_0$ , para  $p = 10$  características monitoradas.

As recomendações finais para cada um dos cenários de descontrole no vetor de médias do Lin-MEWMA estão apresentadas nas Tabelas 5.17, 5.18 e 5.19.

Observou-se que não foi possível obter um bom planejamento para o Lin-MEWMA para detectar pequenas variações no vetor de médias. Essa característica também foi apontada por Moraes et al. (2014) ao compararem o Lin-MEWMA com o MCUSUM e MEWMA em termos de *ARL OC*.

**Tabela 5.17.** Valores recomendados dos pares  $\lambda$  e  $h$  do Lin-MEWMA considerando-se a matriz de covariâncias sob controle e o vetor de médias fora de controle,  $p = 2$

| $\sigma_{ww'}$ | $\mu_1$ | $\lambda$ | $h$   | $\hat{\alpha}$ | $\widehat{Pd} \geq 0,90$ |
|----------------|---------|-----------|-------|----------------|--------------------------|
| 0,1            | 0,5     | 0,01      | 0,295 | 0,0119         | $i \geq 117$ *           |
|                | 1       | 0,01      | 0,295 | 0,0119         | $i \geq 124$             |
|                | 2       | 0,1       | 1,587 | 0,0056         | $i \geq 6$               |
|                | 3       | 0,3       | 3,680 | 0,0051         | $i \geq 2$               |
| 0,5            | 0,5     | 0,01      | 0,295 | 0,0119         | $i \geq 182$ *           |
|                | 1       | 0,01      | 0,295 | 0,0119         | $i \geq 56$ **           |
|                | 2       | 0,1       | 1,587 | 0,0057         | $i \geq 12$              |
|                | 3       | 0,3       | 3,680 | 0,0052         | $i \geq 3$               |
| 0,9            | 0,5     | -         | -     | -              | -                        |
|                | 1       | 0,01      | 0,295 | 0,0119         | $i \geq 77$ **           |
|                | 2       | 0,05      | 0,961 | 0,0065         | $i \geq 21$              |
|                | 3       | 0,3       | 3,680 | 0,0051         | $i \geq 5$               |

\* $\widehat{Pd} \geq 0,60$  ; \*\*  $\widehat{Pd} \geq 0,75$  .

**Tabela 5.18.** Valores recomendados dos pares  $\lambda$  e  $h$  do Lin-MEWMA considerando-se a matriz de covariâncias sob controle e o vetor de médias fora de controle,  $p = 6$

| $\sigma_{ww'}$ | $\mu_1$ | $\lambda$ | $h$   | $\hat{\alpha}$ | $\widehat{Pd} \geq 0,90$ |
|----------------|---------|-----------|-------|----------------|--------------------------|
| 0,1            | 0,5     | 0,01      | 0,514 | 0,0082         | $i \geq 86$ **           |
|                | 1       | 0,01      | 0,514 | 0,0082         | $i \geq 43$              |
|                | 2       | 0,3       | 6,317 | 0,0050         | $i \geq 3$               |
|                | 3       | 0,3       | 6,317 | 0,0050         | $i \geq 1$               |
| 0,5            | 0,5     | -         | -     | -              | -                        |
|                | 1       | 0,01      | 0,514 | 0,0082         | $i \geq 73$ *            |
|                | 2       | 0,1       | 2,677 | 0,0054         | $i \geq 12$              |
|                | 3       | 0,3       | 6,317 | 0,0051         | $i \geq 3$               |
| 0,9            | 0,5     | -         | -     | -              | -                        |
|                | 1       | 0,01      | 0,514 | 0,0083         | $i \geq 75$ **           |
|                | 2       | 0,05      | 1,615 | 0,0058         | $i \geq 35$              |
|                | 3       | 0,1       | 2,677 | 0,0055         | $i \geq 6$               |

\*  $\widehat{Pd} \geq 0,75$ ; \*\*  $\widehat{Pd} \geq 0,60$ .

**Tabela 5.19.** Valores recomendados dos pares  $\lambda$  e  $h$  do Lin-MEWMA considerando-se a matriz de covariâncias sob controle e o vetor de médias fora de controle,  $p = 10$

| $\sigma_{ww'}$ | $\mu_1$ | $\lambda$ | $h$   | $\hat{\alpha}$ | $\widehat{Pd} \geq 0,90$ |
|----------------|---------|-----------|-------|----------------|--------------------------|
| 0,1            | 0,5     | 0,01      | 0,674 | 0,0072         | $i \geq 86$ **           |
|                | 1       | 0,05      | 2,121 | 0,0056         | $i \geq 30$              |
|                | 2       | 0,3       | 8,482 | 0,0051         | $i \geq 2$               |
|                | 3       | 0,3       | 8,482 | 0,0051         | $i \geq 1$               |
| 0,5            | 0,5     | -         | -     | -              | -                        |
|                | 1       | 0,01      | 0,674 | 0,0072         | $i \geq 106$ *           |
|                | 2       | 0,1       | 3,531 | 0,0053         | $i \geq 14$              |
|                | 3       | 0,3       | 8,482 | 0,0051         | $i \geq 3$               |
| 0,9            | 0,5     | -         | -     | -              | -                        |
|                | 1       | 0,01      | 0,674 | 0,0072         | $i \geq 115$ **          |
|                | 2       | 0,01      | 0,674 | 0,0072         | $i \geq 45$              |
|                | 3       | 0,1       | 3,531 | 0,0053         | $i \geq 7$               |

\*  $\widehat{Pd} \geq 0,75$ ; \*\*  $\widehat{Pd} \geq 0,60$

## 5.5 ELR

### 5.5.1 Planejamento

Para os processos sob controle estatístico, os valores obtidos de  $h$  do gráfico de controle ELR que proporcionaram  $ARL IC = 200$  em função de  $\lambda$ ,  $\sigma_{ww'}$  e  $p$  estão apresentados na Tabela 5.20.

Nesse GCM, os aumentos de  $p$ ,  $\sigma_{ww'}$  e  $\lambda$  proporcionam diminuição no  $ARL IC$ . Portanto, para manter o  $ARL IC$  alto e, conseqüentemente, a probabilidade do alarme falso baixa (Equação 3.31), é necessário aumentar o valor de  $h$ .

### 5.5.2 Alarme Falso

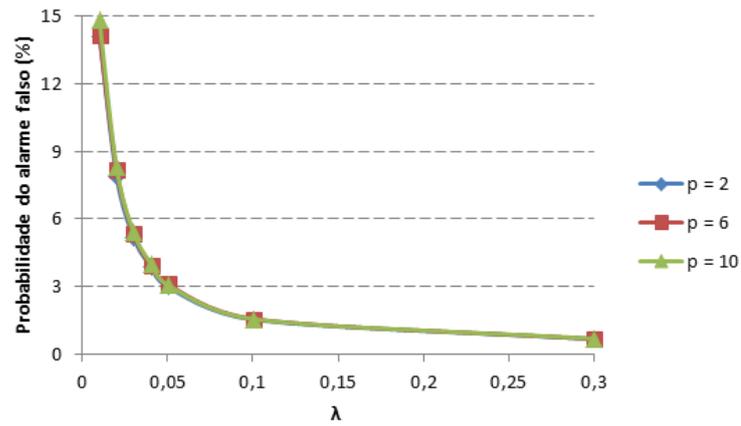
Estimou-se a probabilidade do alarme falso do ELR ao longo dos 200 primeiros subgrupos racionais, para o processo em que há duas, seis e dez características de qualidade a serem avaliadas ( $p = 2; 6$  e  $10$ ).

**Tabela 5.20.** Intervalos de decisão  $h$  para o gráfico de controle ELR que proporcionam  $ARL_{IC} = 200$  para um processo sob controle estatístico

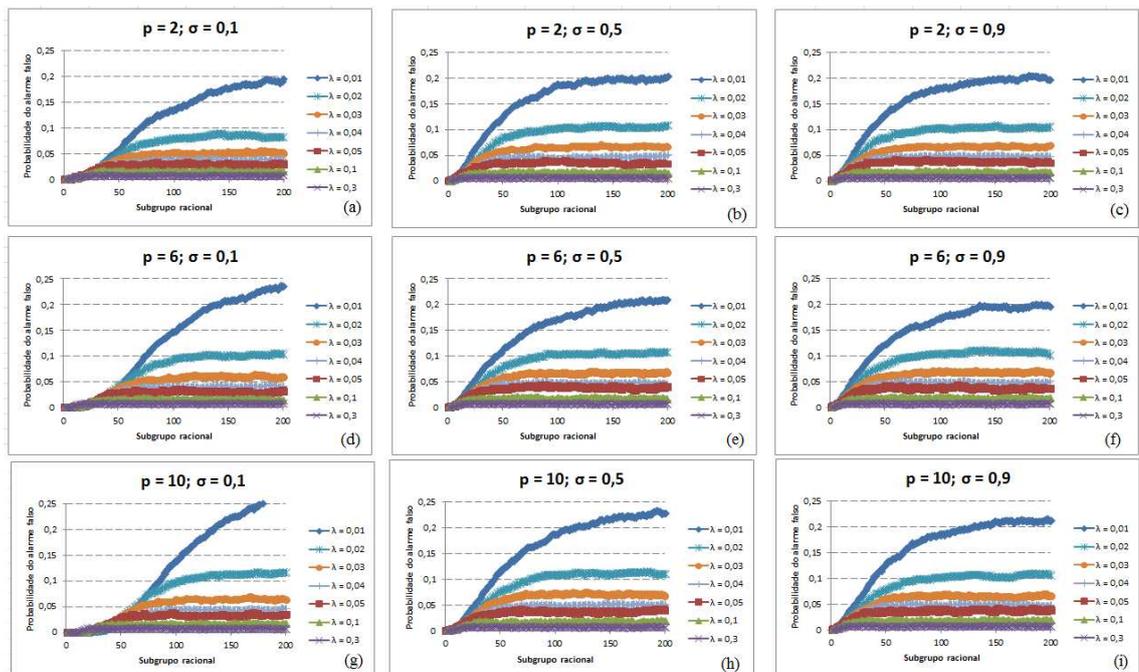
| $p$ | $\sigma_{wwr}$ | $\lambda$ |        |        |        |        |        |        |
|-----|----------------|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|     |                | 0,01      | 0,02   | 0,03   | 0,04   | 0,05   | 0,1    | 0,3    |
| 2   | 0,1            | 0,052     | 0,117  | 0,189  | 0,265  | 0,345  | 0,772  | 2,850  |
| 2   | 0,5            | 0,369     | 0,471  | 0,573  | 0,673  | 0,775  | 1,270  | 3,500  |
| 2   | 0,9            | 1,790     | 1,940  | 2,083  | 2,217  | 2,248  | 2,960  | 5,490  |
| 6   | 0,1            | 0,299     | 0,535  | 0,783  | 1,035  | 1,295  | 2,650  | 9,240  |
| 6   | 0,5            | 2,560     | 2,979  | 3,392  | 3,781  | 4,161  | 6,008  | 13,910 |
| 6   | 0,9            | 10,350    | 10,960 | 11,550 | 12,110 | 12,660 | 15,150 | 24,920 |
| 10  | 0,1            | 0,692     | 1,185  | 1,695  | 2,211  | 2,741  | 5,510  | 19,290 |
| 10  | 0,5            | 5,200     | 6,020  | 6,820  | 7,590  | 8,350  | 12,080 | 28,480 |
| 10  | 0,9            | 19,510    | 20,700 | 21,820 | 22,870 | 23,920 | 28,790 | 48,610 |

Para  $p = 2$ , a estimativa da probabilidade do alarme falso foi de 0,1413; 0,0790; 0,0518; 0,0389; 0,0299; 0,0153 e 0,0066 para os respectivos valores de  $\lambda$  iguais a 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05; 0,1 e 0,3. Já para  $p = 6$  as probabilidades se mostraram semelhantes: 0,1416; 0,0817; 0,0534; 0,0394; 0,0310; 0,0156 e 0,0066. E, para  $p = 10$ , também: 0,1482; 0,0829; 0,0540; 0,0402; 0,0307; 0,0155 e 0,0067 (Figuras 5.21).

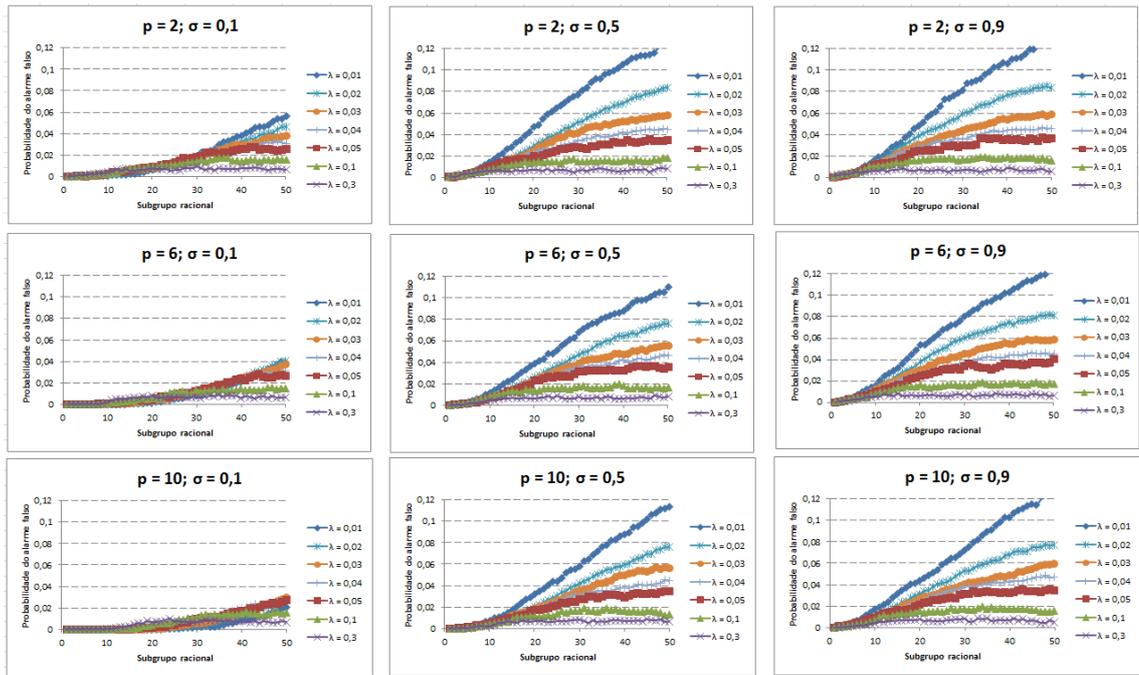
Na Figura 5.22 são apresentadas as probabilidades dos alarmes falsos do ELR para os 200 subgrupos racionais, enquanto que na Figura 5.23, mais específica, são apresentadas as dos 50 primeiros subgrupos racionais.



**Figura 5.21.** Estimativas das probabilidades dos alarmes falsos do ELR em função do parâmetro de suavização  $\lambda$  e quantidade  $p$  de características monitoradas.



**Figura 5.22.** Estimativas das probabilidades dos alarmes falsos do ELR ao longo dos primeiros 200 subgrupos racionais, em função do parâmetro de suavização  $\lambda$ , matriz de covariâncias  $\Sigma_0$  e quantidade  $p$  de características monitoradas.



**Figura 5.23.** Estimativas das probabilidades dos alarmes falsos do ELR ao longo dos primeiros 50 subgrupos racionais em função do parâmetro de suavização  $\lambda$ , matriz de covariâncias  $\Sigma_0$  e quantidade  $p$  de características monitoradas.

Observou-se que independente da quantidade  $p$  de características avaliadas ( $p = 2; 6$  ou  $10$ ), a probabilidade do alarme falso do ELR aumenta com o aumento da covariância  $\sigma_{ww'}$ . Por exemplo, para  $p = 2$  e  $\sigma_{ww'} = 0,1$  as probabilidades médias dos alarmes falsos do Lin-MEWMA para valores de  $\lambda$  iguais a 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05; 0,1 e 0,3, são, respectivamente, iguais a 0,1172; 0,0631; 0,0411; 0,0314; 0,0248; 0,0136 e 0,0066 (Figura 5.22a). Já para  $p = 2$  e  $\sigma_{ww'} = 0,5$ , essas probabilidades médias sobem para 0,1532; 0,0864; 0,0565; 0,0417; 0,0312; 0,0155 e 0,0066 (Figura 5.22b). E, para  $p = 2$  e  $\sigma_{ww'} = 0,9$ , as probabilidades médias dos alarmes falsos do Lin-MEWMA são, respectivamente, iguais a 0,1536; 0,0875; 0,0578; 0,0435; 0,0337; 0,0166 e 0,0066 (Figura 5.22c).

A equação de regressão para a probabilidade do alarme falso foi dada por:

$$\hat{\alpha}(\%) = 1,07 + 4,33 \sigma - 4,50 \lambda + 0,0483 i - 0,102 p\sigma + 0,000852 p\lambda - 0,0154 \sigma\lambda - 8,74 \sigma i - 0,196 \lambda i \quad (R^2 = 0,41), \quad (5.4)$$

para  $0,1 \leq \sigma \leq 0,9$ ;  $0,01 \leq \lambda \leq 0,3$ ;  $1 \leq i \leq 200$  e  $2 \leq p \leq 10$ .

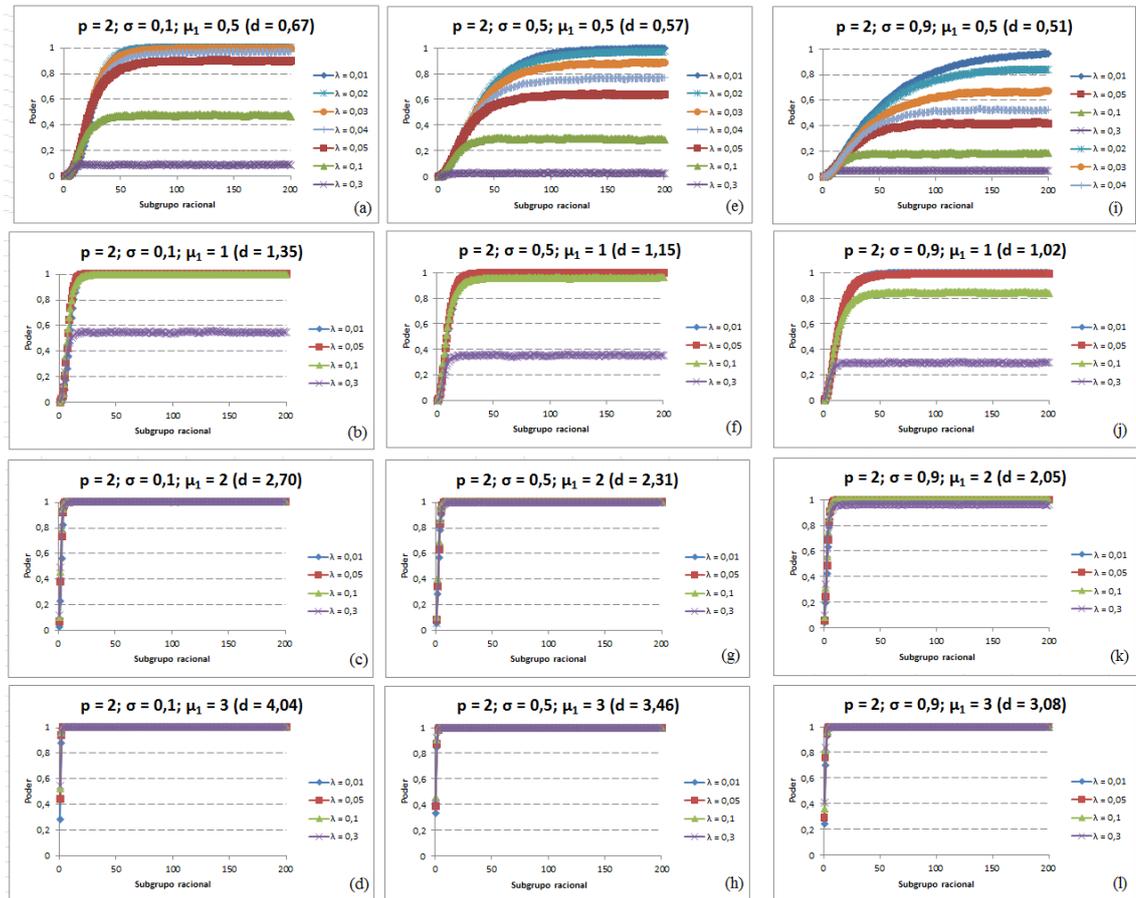
A segunda parcela do lado direito da igualdade da Equação 5.4 corrobora com os resultados apresentados no parágrafo anterior em que se verifica que a probabilidade do alarme falso aumenta com o aumento da correlação entre as variáveis ( $P < 0,05$ ). Por outro lado, a probabilidade do alarme falso diminui com o aumento do parâmetro de suavização  $\lambda$ . Essa relação pode ser observada em cada um dos gráficos das Figuras 5.22 e 5.23 em que as curvas dos menores  $\lambda$ s estão sempre acima das curvas dos maiores  $\lambda$ s. O sinal negativo presente na terceira parcela do lado direito da igualdade da Equação 5.4 reafirma essa relação inversa entre os efeitos de  $\lambda$  e  $\alpha$  ( $P < 0,05$ ). A probabilidade do alarme falso aumenta com o aumento da ordem  $i$  do subgrupo racional. Essa relação pode ser observada em cada um dos gráficos das Figuras 5.22 e 5.23 em que as curvas possuem comportamento crescente, principalmente nos cinquenta primeiros subgrupos racionais. O sinal positivo presente na quarta parcela do lado direito da igualdade da Equação 5.4 reafirma essa relação direta entre os efeitos de  $i$  e  $\alpha$  ( $P < 0,05$ ).

### 5.5.3 Alarme Verdadeiro

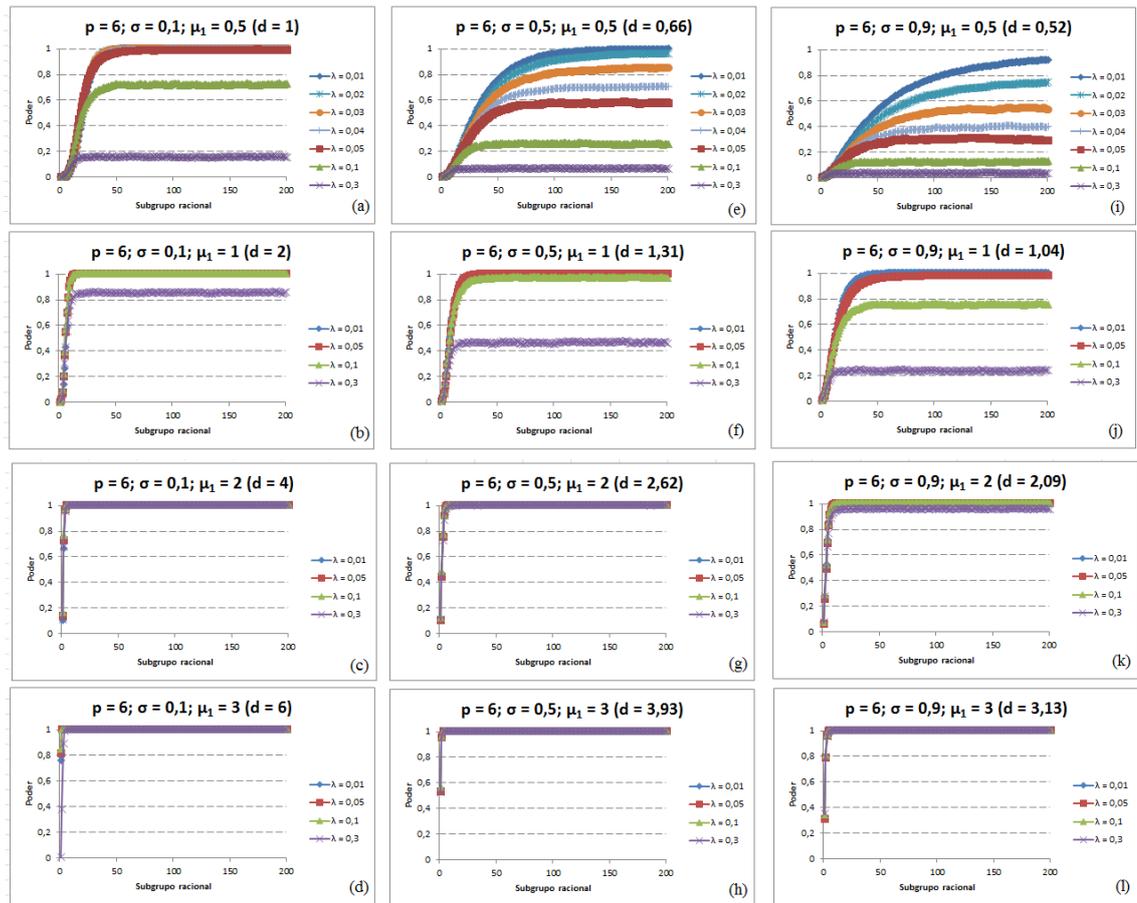
Nas Figuras 5.24, 5.25 e 5.26 estão apresentadas as probabilidades dos alarmes verdadeiros em função da ordem do subgrupo racional para o gráfico de controle ELR configurado com cada um dos pares  $(\lambda, h)$  anteriormente abordados na Tabela 5.20.

Observou-se que para a baixa correlação entre as  $p$  variáveis ( $\sigma_{wwr} = 0,1$ ), o poder do ELR aumenta com o aumento de  $p$ . Por exemplo, para  $p = 2$  e  $\mu_1 = [0,5 \ 0,5]'$  os poderes médios do ELR ao longo dos 200 primeiros subgrupos racionais para  $\lambda$  iguais a 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05; 0,1 e 0,3 são, respectivamente, de 0,8685; 0,8730; 0,8684; 0,8410; 0,7857; 0,4326; e 0,0840 (Figura 5.24a), levando-se em consideração o uso dos respectivos intervalos de decisão  $h$  iguais a 0,052; 0,117; 0,189; 0,265; 0,345; 0,772 e 2,850. Já para  $p = 6$  e  $\mu_1 = [0,5 \ \dots \ 0,5]'$  os poderes médios para  $\lambda$  iguais a 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05; 0,1 e 0,3 sobem, respectivamente, para 0,8949; 0,8992; 0,9018; 0,9009; 0,8913; 0,6563 e 0,1480 (Figura 5.25a) em que  $h$  é igual a 0,299; 0,535; 0,783; 1,035; 1,295; 2,650 e 9,240, respectivamente. E, para  $p = 10$  e  $\mu_1 =$

$[0,5 \dots 0,5]'$  o, poderes médios para  $\lambda$  igual a 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05; 0,1 e 0,3 deslocam, respectivamente, para 0,8951; 0,8995; 0,9017; 0,9028; 0,9000; 0,7286; e 0,1923 (Figura 5.26a), em que  $h$  é, respectivamente, igual a 0,692; 1,185; 1,695; 2,211; 2,741; 5,510 e 19,290 (Tabela 5.20).



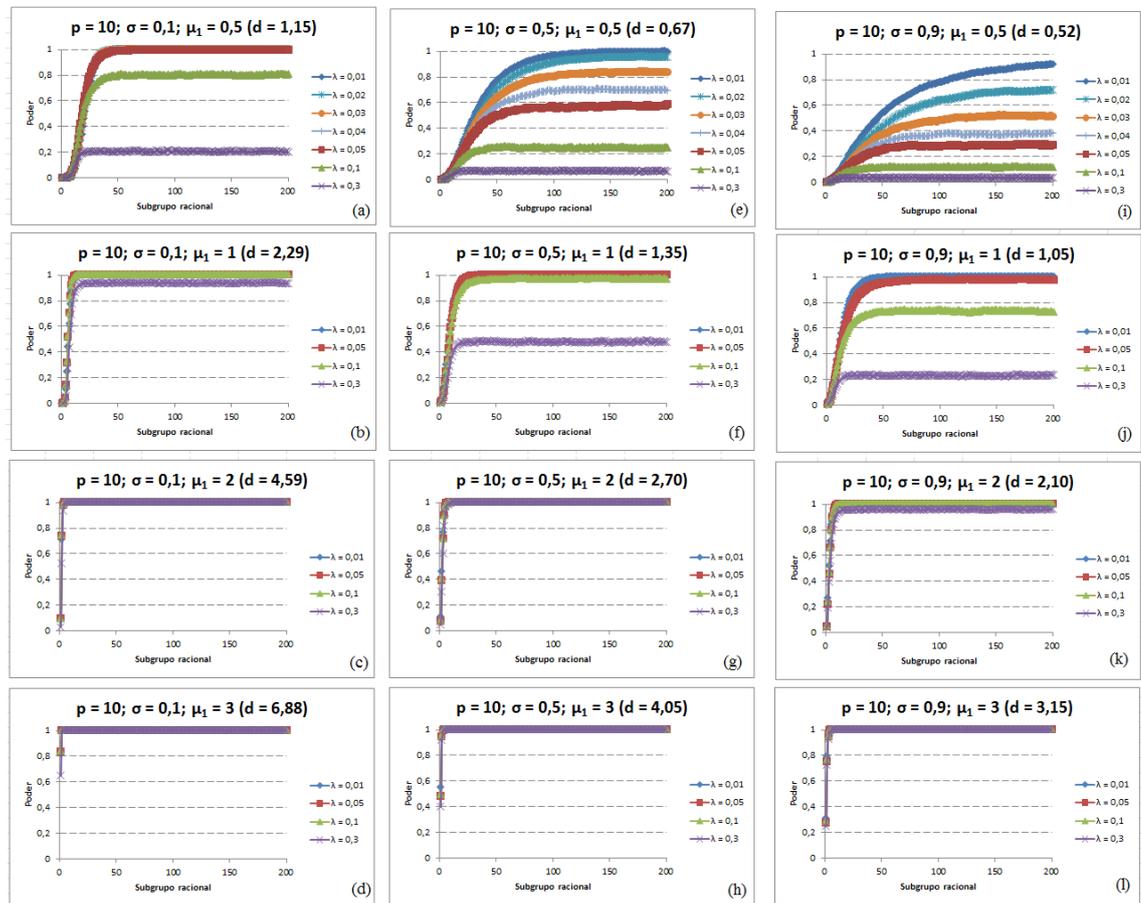
**Figura 5.24.** Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do ELR ao longo dos primeiros 200 subgrupos racionais em função do parâmetro de suavização  $\lambda$ , vetor de médias fora de controle  $\mu_1$ , matriz de covariâncias  $\Sigma_0$ , para  $p = 2$  características monitoradas.



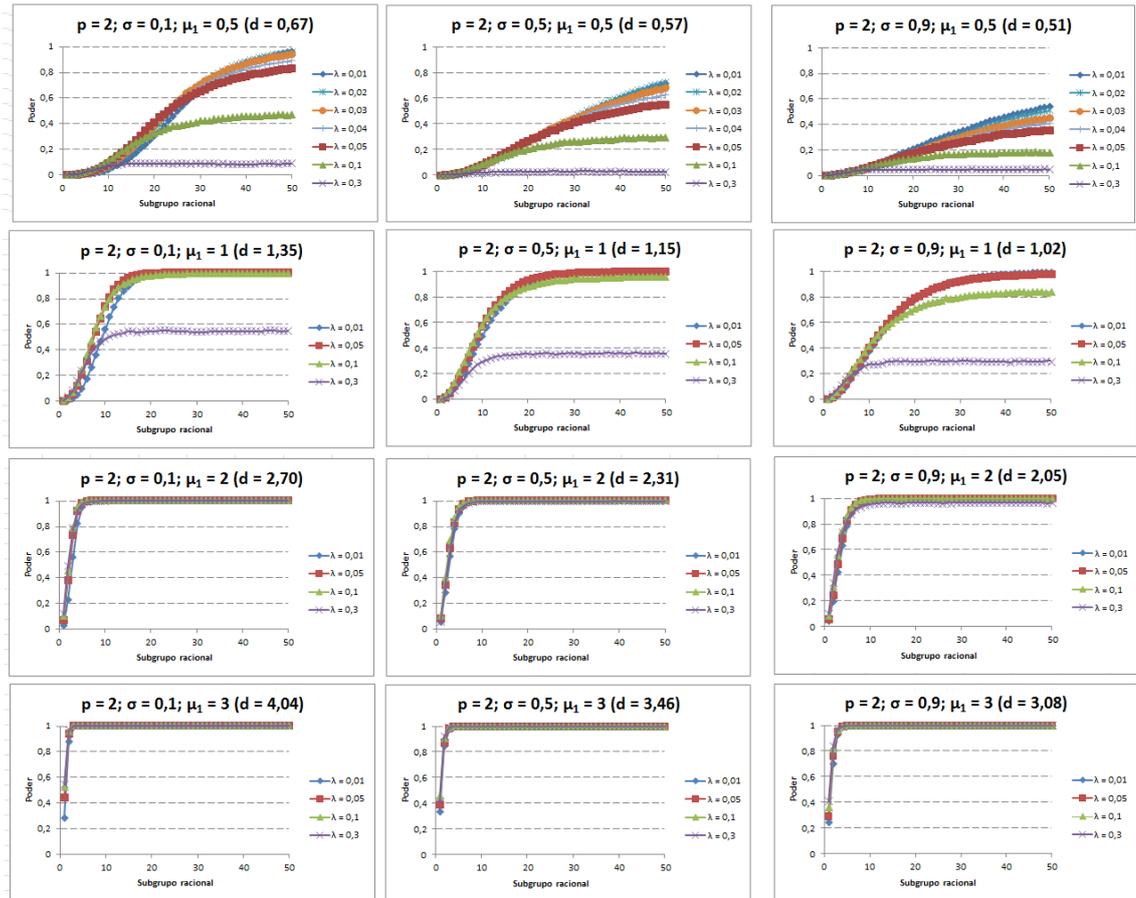
**Figura 5.25.** Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do ELR ao longo dos primeiros 200 subgrupos racionais em função do parâmetro de suavização  $\lambda$ , vetor de médias fora de controle  $\mu_1$ , matriz de covariâncias  $\Sigma_0$ , para  $p = 6$  características monitoradas.

Por outro lado, para altas correlações entre as  $p$  variáveis ( $\sigma_{ww'} = 0,5$  e  $0,9$ ), observou-se que o poder do ELR diminui com o aumento de  $p$ . Por exemplo, para  $p = 2$ ,  $\sigma_{ww'} = 0,9$  e  $\mu_1 = [1 \ 1]'$  os poderes médios do ELR ao longo dos 200 primeiros subgrupos racionais para  $\lambda$  igual a 0,01; 0,05; 0,1 e 0,3 são, respectivamente, iguais a 0,9305; 0,9251; 0,7966 e 0,2926 (Figura 5.24j) em que  $h$  é igual a 1,790; 1,940; 2,083; 2,217; 2,248; 2,960 e 5,490, respectivamente. Já para  $p = 6$ ,  $\sigma_{ww'} = 0,9$  e  $\mu_1 = [1 \ \dots \ 1]'$  os poderes médios para  $\lambda$  igual a 0,01; 0,05; 0,1 e 0,3 deslocam-se, respectivamente, para 0,9340; 0,9046; 0,7076 e 0,2308 (Figura 5.25j) em que  $h$  é igual a 10,350; 10,960; 11,550; 12,110; 12,660; 15,150 e 24,920, respectivamente. E, para  $p = 10$ ,  $\sigma_{ww'} = 0,9$  e  $\mu_1 = [1 \ \dots \ 1]'$  os poderes médios para  $\lambda$  igual a 0,01; 0,05; 0,1 e 0,3 deslocam-se, respectivamente, para 0,9343; 0,8996; 0,6857 e 0,2226 (Figura 5.26j), em que é  $h$

igual a 19,510; 20,700; 21,820; 22,870; 23,920; 28,790 e 48,610, respectivamente (Tabela 5.20).

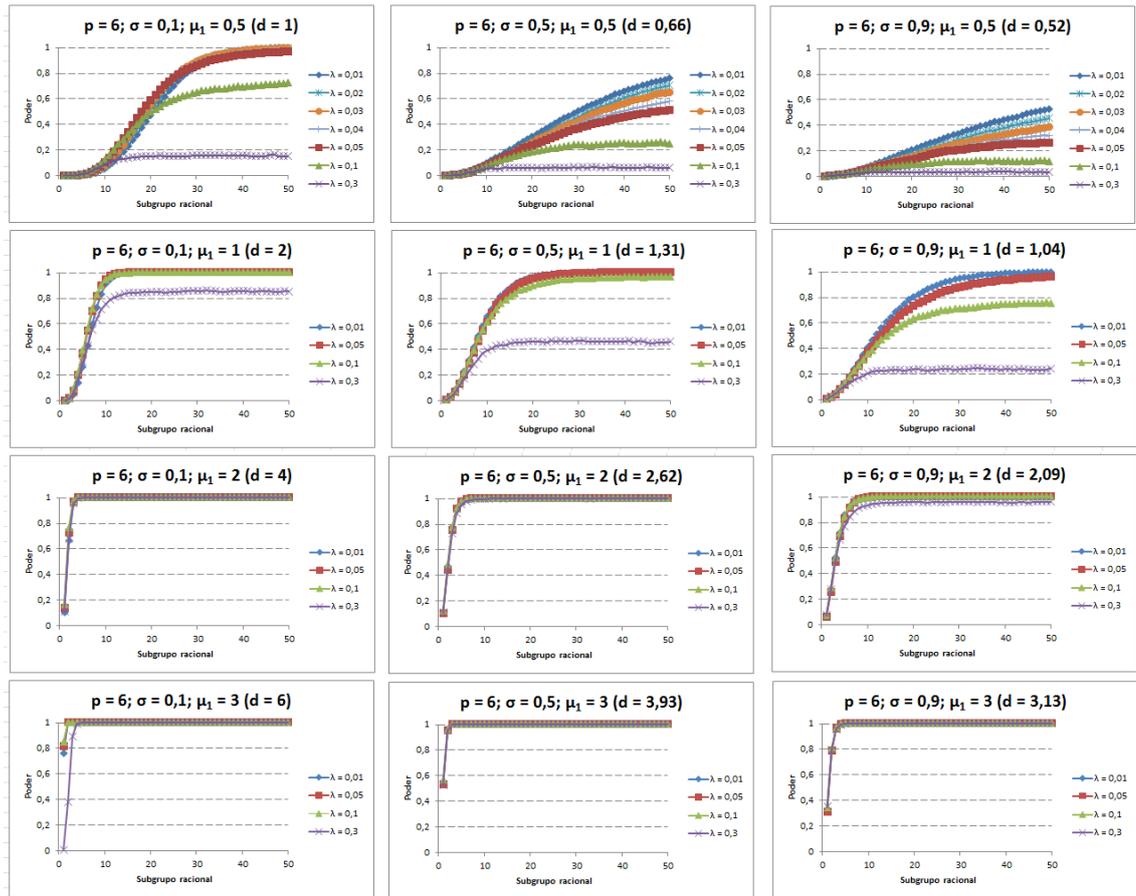


**Figura 5.26.** Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do ELR ao longo dos primeiros 200 subgrupos racionais em função do parâmetro de suavização  $\lambda$ , vetor de médias fora de controle  $\mu_1$ , matriz de covariâncias  $\Sigma_0$ , para  $p = 10$  características monitoradas.

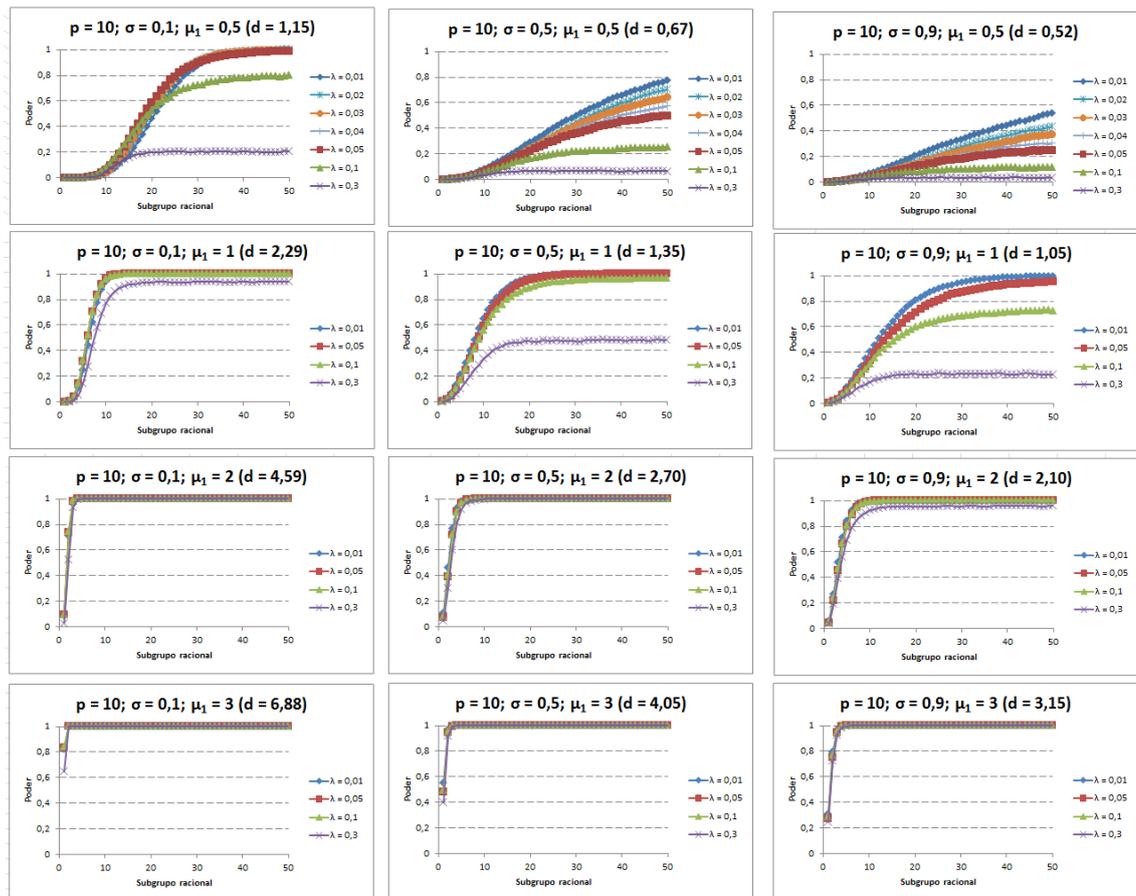


**Figura 5.27.** Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do ELR ao longo dos primeiros 50 subgrupos racionais em função do parâmetro de suavização  $\lambda$ , vetor de médias fora de controle  $\mu_1$ , matriz de covariâncias  $\Sigma_0$ , para  $p = 2$  características monitoradas.

Nas Figuras 5.24, 5.25 e 5.26 são apresentadas as probabilidades dos alarmes verdadeiros do ELR para os 200 subgrupos racionais, enquanto que nas Figuras 5.27, 5.28 e 5.29, mais específicas, são apresentadas as dos 50 primeiros subgrupos racionais.



**Figura 5.28.** Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do ELR ao longo dos primeiros 50 subgrupos racionais em função do parâmetro de suavização  $\lambda$ , vetor de médias fora de controle  $\mu_1$ , matriz de covariâncias  $\Sigma_0$ , para  $p = 6$  características monitoradas.



**Figura 5.29.** Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros (poder) do ELR ao longo dos primeiros 50 subgrupos racionais em função do parâmetro de suavização  $\lambda$ , vetor de médias fora de controle  $\mu_1$ , matriz de covariâncias  $\Sigma_0$ , para  $p = 10$  características monitoradas.

As recomendações finais para cada um dos cenários de descontrole no vetor de médias do ELR estão apresentadas nas Tabelas 5.21, 5.22 e 5.23.

Levando-se em consideração os casos em que há pequeno deslocamento no vetor de médias, Zhang et al. (2010) observaram que para baixa correlação sob controle ( $\sigma_{ww'} = 0,1$ ) o ELR opera bem para detectar a mudança. Essa característica do ELR também foi observada no presente trabalho, e observou-se também que o gráfico opera com dificuldade de detectar pequenas mudanças no vetor de médias quando a correlação sob controle das variáveis é alta ( $\sigma_{ww'} = 0,5$  ou  $0,9$ ).

**Tabela 5.21.** Valores recomendados dos pares  $\lambda$  e  $h$  do ELR, considerando-se a matriz de covariâncias sob controle e o vetor de médias fora de controle, para  $p = 2$

| $\sigma_{ww'}$ | $\mu_1$ | $\lambda$ | $h$   | $\hat{\alpha}$ | $\widehat{Pd} \geq 0,90$ |
|----------------|---------|-----------|-------|----------------|--------------------------|
| 0,1            | 0,5     | 0,05      | 0,345 | 0,0248         | $i \geq 132$             |
|                | 1       | 0,1       | 0,772 | 0,0136         | $i \geq 14$              |
|                | 2       | 0,3       | 2,850 | 0,0066         | $i \geq 4$               |
|                | 3       | 0,3       | 2,850 | 0,0066         | $i \geq 2$               |
| 0,5            | 0,5     | -         | -     | -              | -                        |
|                | 1       | 0,1       | 1,270 | 0,0155         | $i \geq 22$              |
|                | 2       | 0,3       | 3,50  | 0,0065         | $i \geq 5$               |
|                | 3       | 0,3       | 3,50  | 0,0065         | $i \geq 2$               |
| 0,9            | 0,5     | -         | -     | -              | -                        |
|                | 1       | 0,1       | 2,96  | 0,0166         | $i \geq 23$ *            |
|                | 2       | 0,3       | 5,49  | 0,0066         | $i \geq 7$               |
|                | 3       | 0,3       | 5,49  | 0,0066         | $i \geq 3$               |

\*  $\widehat{Pd} \geq 0,75$

**Tabela 5.22.** Valores recomendados dos pares  $\lambda$  e  $h$  do ELR, considerando-se a matriz de covariâncias sob controle e o vetor de médias fora de controle, para  $p = 6$

| $\sigma_{ww'}$ | $\mu_1$ | $\lambda$ | $h$   | $\hat{\alpha}$ | $\widehat{Pd} \geq 0,90$ |
|----------------|---------|-----------|-------|----------------|--------------------------|
| 0,1            | 0,5     | 0,05      | 1,295 | 0,0250         | $i \geq 34$              |
|                | 1       | 0,1       | 2,650 | 0,0136         | $i \geq 10$              |
|                | 2       | 0,1       | 2,650 | 0,0136         | $i \geq 3$               |
|                | 3       | 0,3       | 9,240 | 0,0066         | $i \geq 4$               |
| 0,5            | 0,5     | -         | -     | -              | -                        |
|                | 1       | 0,1       | 6,008 | 0,0163         | $i \geq 21$              |
|                | 2       | 0,3       | 13,91 | 0,0066         | $i \geq 5$               |
|                | 3       | 0,3       | 13,91 | 0,0066         | $i \geq 2$               |
| 0,9            | 0,5     | -         | -     | -              | -                        |
|                | 1       | 0,1       | 15,15 | 0,0168         | $i \geq 43$ *            |
|                | 2       | 0,3       | 24,92 | 0,0066         | $i \geq 8$               |
|                | 3       | 0,3       | 24,92 | 0,0066         | $i \geq 3$               |

\*  $\widehat{Pd} \geq 0,75$ .

**Tabela 5.23.** Valores recomendados dos pares  $\lambda$  e  $h$  do ELR, considerando-se a matriz de covariâncias sob controle e o vetor de médias fora de controle, para  $p = 10$

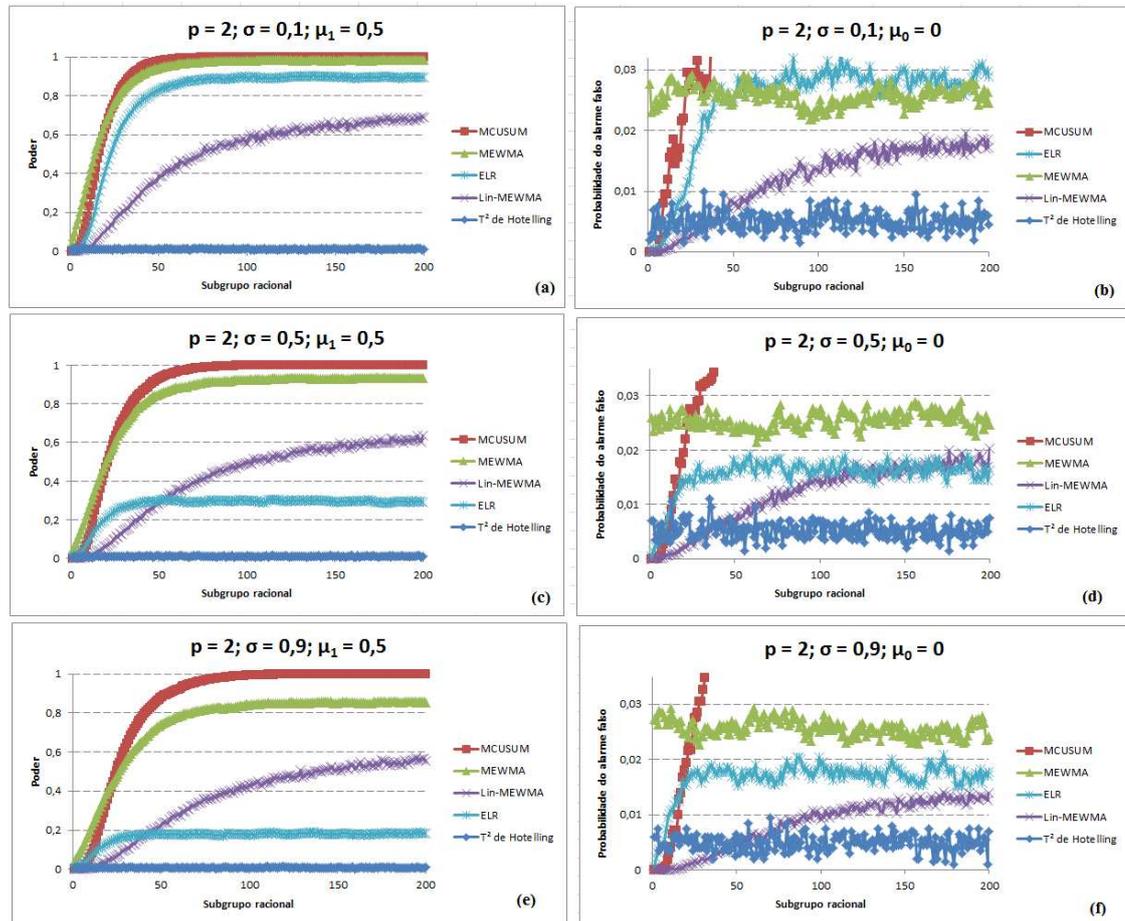
| $\sigma_{ww'}$ | $\mu_1$ | $\lambda$ | $h$   | $\hat{\alpha}$ | $\widehat{Pd} \geq 0,90$ |
|----------------|---------|-----------|-------|----------------|--------------------------|
| 0,1            | 0,5     | 0,05      | 2,741 | 2,61           | $i \geq 31$              |
|                | 1       | 0,1       | 5,51  | 1,41           | $i \geq 9$               |
|                | 2       | 0,3       | 19,29 | 0,70           | $i \geq 3$               |
|                | 3       | 0,3       | 19,29 | 0,70           | $i \geq 2$               |
| 0,5            | 0,5     | -         | -     | -              | -                        |
|                | 1       | 0,1       | 12,08 | 1,58           | $i \geq 21$              |
|                | 2       | 0,3       | 28,48 | 0,66           | $i \geq 5$               |
|                | 3       | 0,3       | 28,48 | 0,66           | $i \geq 2$               |
| 0,9            | 0,5     | -         | -     | -              | -                        |
|                | 1       | 0,1       | 28,79 | 1,65           | $i \geq 34$ *            |
|                | 2       | 0,3       | 48,61 | 0,66           | $i \geq 9$               |
|                | 3       | 0,3       | 48,61 | 0,66           | $i \geq 3$               |

\* $\widehat{Pd} \geq 0,70$ .

## 5.6 Considerações Gerais

Para  $p = 2$ ,  $\sigma_{ww'} = 0,1$  e descontrole no vetor de médias  $\mu_1$  igual a  $[0,5 \dots 0,5]'$ , os GCMs MCUSUM, MEWMA, ELR, Lin-MEWMA e  $T^2$  de Hotelling proporcionaram poderes médios iguais a 0,905; 0,899; 0,786; 0,486 e 0,012, respectivamente (Figura 5.30a). Já as probabilidades médias dos alarmes falsos, respectivamente, iguais a 0,037; 0,026; 0,025; 0,012 e 0,005 (Figura 5.30b). Logo, para esse cenário de descontrole, os GCMs MCUSUM e MEWMA foram considerados os melhores. Mudando-se para  $\sigma_{ww'} = 0,5$ , os poderes médios foram iguais a 0,877; 0,825; 0,272; 0,415 e 0,01, respectivamente (Figura 5.30c) e, as probabilidades médias dos alarmes falsos foram, respectivamente, iguais a 0,042; 0,026; 0,016; 0,012 e 0,005 (Figura 5.30d). Logo, para esse cenário de descontrole, o MEWMA apresentou maior poder com  $\hat{\alpha} < 0,03$ , sendo considerado o melhor dentre os GCMs anteriores para monitorar o processo. E para  $\sigma_{ww'} = 0,9$ , os poderes médios foram iguais a 0,853; 0,740; 0,168; 0,362 e

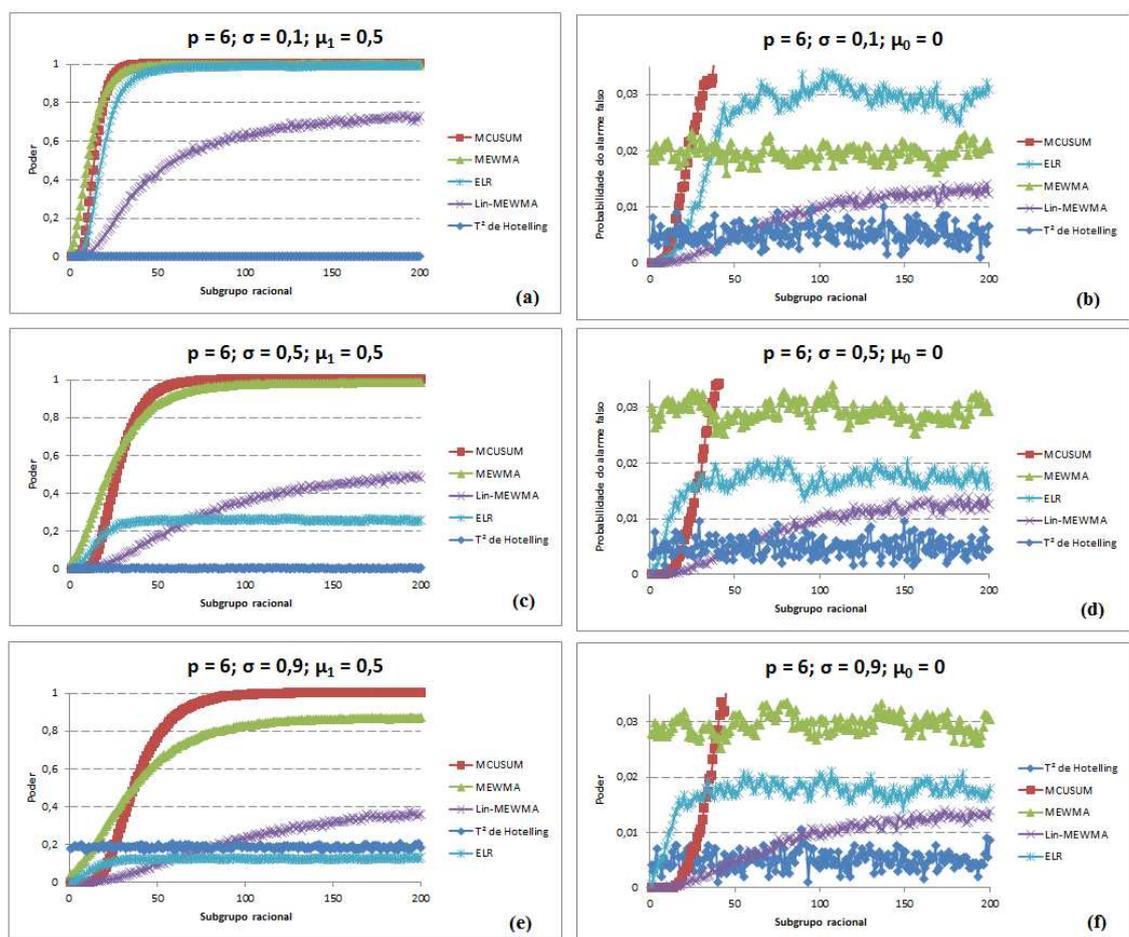
0,009, respectivamente (Figura 5.30e) e, as probabilidades médias dos alarmes falsos foram, respectivamente, iguais a 0,052; 0,026; 0,017; 0,008 e 0,005 (Figura 5.30f). Do mesmo modo, é recomendado o MEWMA.



**Figura 5.30.** Desempenhos dos GCMs T<sup>2</sup> de Hotelling, MCUSUM, MEWMA, Lin-MEWMA e ELR a partir de suas respectivas recomendações, para  $p = 2$  e  $\mu_1 = [0,5 \ 0,5]'$ .

Para  $p = 6$ ,  $\sigma_{www} = 0,1$  e descontrolo no vetor de médias  $\mu_1 = [0,5 \ \dots \ 0,5]'$ , os GCMs MCUSUM, MEWMA, ELR, Lin-MEWMA e T<sup>2</sup> de Hotelling proporcionaram poderes médios iguais a 0,928; 0,940; 0,891; 0,532 e 0,00, respectivamente (Figura 5.31a). Já as probabilidades médias dos alarmes falsos, respectivamente, iguais a 0,038; 0,019; 0,025; 0,008 e 0,005 (Figura 5.31b). Logo, para esse cenário de descontrolo, o MEWMA apresentou maior poder com  $\hat{\alpha} < 0,03$ , sendo considerado o melhor dentre os GCMs anteriores para monitorar o processo. Mudando-se para  $\sigma_{www} = 0,5$  os poderes médios foram iguais a 0,858; 0,856; 0,237; 0,304 e 0,003, respectivamente (Figura 5.31c) e, as

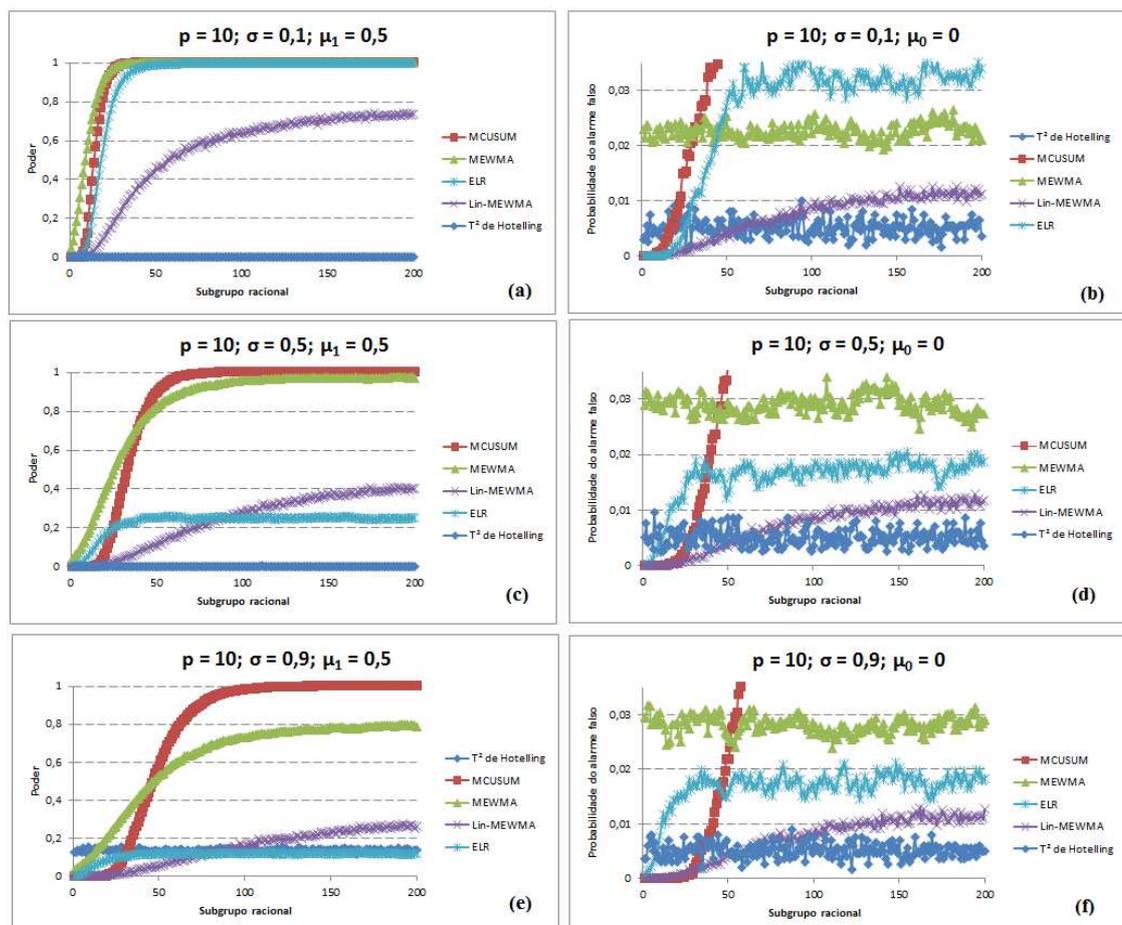
probabilidades médias dos alarmes falsos, respectivamente iguais a 0,070; 0,029; 0,016; 0,008 e 0,005 (Figura 5.31d). Logo, para esse cenário de descontrole, o MEWMA apresentou maior estimativa de poder com  $\hat{\alpha} < 0,03$ , sendo considerado o melhor dentre os GCMs anteriores para monitorar o processo. E, para  $\sigma_{w_{w'}} = 0,9$ , os poderes médios foram iguais a 0,800; 0,705; 0,115; 0,205 e 0,185, respectivamente (Figura 5.31e) e, as probabilidades médias dos alarmes falsos, respectivamente, iguais a 0,084; 0,029; 0,017; 0,008 e 0,005 (Figura 5.31f). Novamente, para esse cenário de descontrole, o MEWMA apresentou maior estimativa de poder com  $\hat{\alpha} < 0,03$ , sendo considerado o melhor dentre os GCMs.



**Figura 5.31.** Desempenhos dos GCMs T<sup>2</sup> de Hotelling, MCUSUM, MEWMA, Lin-MEWMA e ELR a partir de suas respectivas recomendações para  $p = 6$  e  $\mu_1 = [0,5 \cdots 0,5]'$ .

Para  $p = 10$ ,  $\sigma_{w_{w'}} = 0,1$  e descontrole no vetor de médias  $\mu_1$  igual a  $[0,5 \cdots 0,5]'$ , os GCMs MCUSUM, MEWMA, ELR, Lin-MEWMA e T<sup>2</sup> de Hotelling proporcionaram poderes médios iguais a 0,927; 0,952; 0,900; 0,539 e

0,000, respectivamente (Figura 5.32a). Já as probabilidades médias dos alarmes falsos foram, respectivamente, iguais a 0,038; 0,023; 0,026; 0,007 e 0,005 (Figura 5.32b). Para esse cenário de descontrolo, o MEWMA e MCUSUM apresentaram poder acima de 0,90 com  $\hat{\alpha} < 0,03$ , sendo considerados, portanto, os melhores dentre os GCMs anteriores para monitorar esse processo. Mudando-se para  $\sigma_{wwr} = 0,5$  os poderes médios foram iguais a 0,829; 0,829; 0,228; 0,239 e 0,001, respectivamente (Figura 5.32c) e, as probabilidades médias dos alarmes falsos foram, respectivamente, iguais a 0,086; 0,029; 0,016; 0,007 e 0,005 (Figura 5.32d). Novamente o MEWMA mostrou-se melhor em termos de desempenho. E para  $\sigma_{wwr} = 0,9$  os poderes médios foram iguais a 0,754; 0,618; 0,109; 0,144 e 0,135, respectivamente (Figura 5.32e) e, as probabilidades médias dos alarmes falsos foram, respectivamente, iguais a 0,105; 0,028; 0,017; 0,007 e 0,005 (Figura 5.32f). Do mesmo modo, o MEWMA apresentou maior estimativa de poder com  $\hat{\alpha} < 0,03$ .

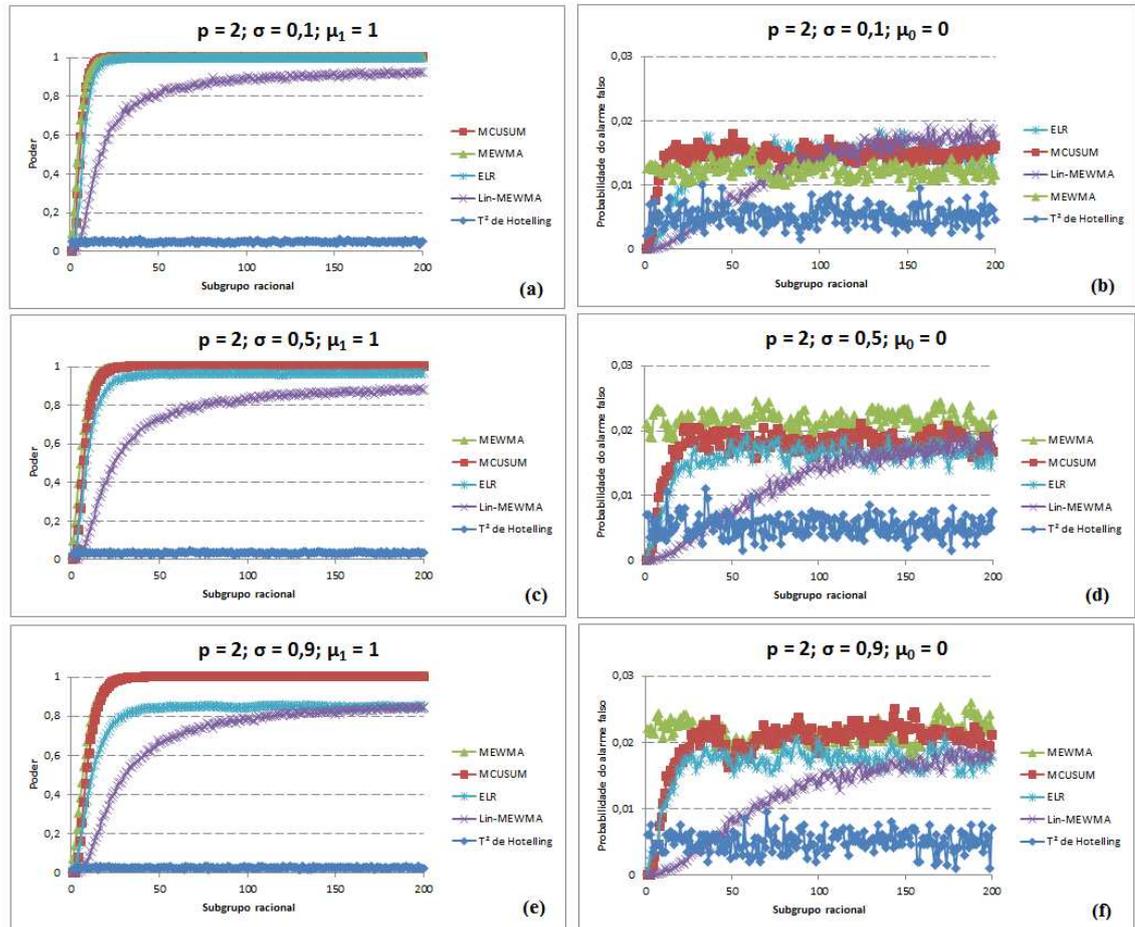


**Figura 5.32.** Desempenhos dos GCMs T<sup>2</sup> de Hotelling, MCUSUM, MEWMA, Lin-MEWMA e ELR a partir de suas respectivas recomendações para  $p = 10$  e  $\mu_1 = [0,5 \cdots 0,5]'$ .

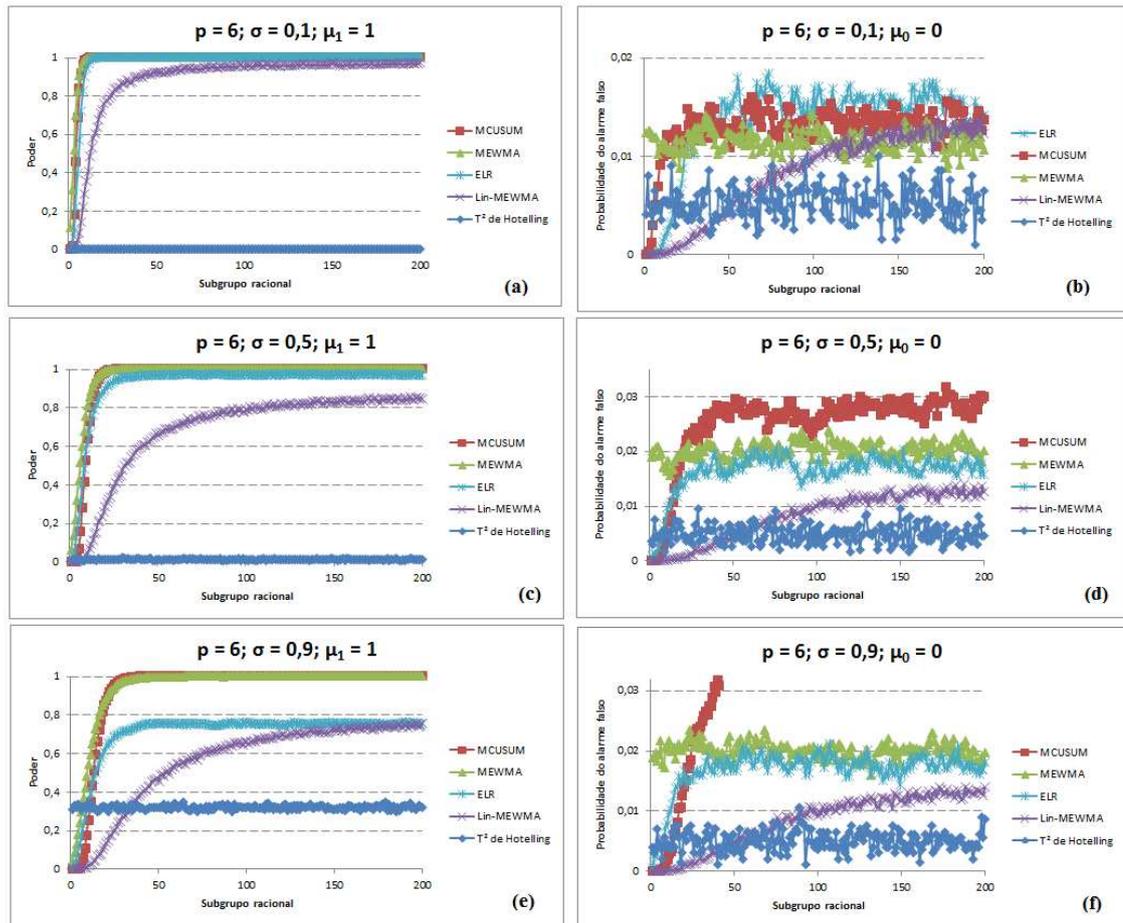
Para  $p = 2$ ,  $\sigma_{ww'} = 0,1$  e descontrolo no vetor de médias  $\boldsymbol{\mu}_1 = [1 \cdots 1]'$ , os GCMs MCUSUM, MEWMA, ELR, Lin-MEWMA e  $T^2$  de Hotelling proporcionaram poderes médios iguais a 0,972; 0,976; 0,959; 0,804 e 0,048, respectivamente (Figura 5.33a). Já as probabilidades médias dos alarmes falsos foram, respectivamente, iguais a 0,014; 0,012; 0,014; 0,012 e 0,005 (Figura 5.33b). Para esse cenário de descontrolo, o MEWMA, MCUSUM e ELR apresentaram poder acima de 0,90 com  $\hat{\alpha} < 0,03$ , sendo considerados, portanto, os melhores dentre os GCMs anteriores para monitorar esse processo. Mudando-se para  $\sigma_{ww'} = 0,5$ , os poderes médios foram iguais a 0,962; 0,973; 0,916; 0,740 e 0,033, respectivamente (Figura 5.33c) e, as probabilidades médias dos alarmes falsos foram, respectivamente, iguais a 0,017; 0,022; 0,016; 0,012 e 0,005 (Figura 5.33d). Novamente o MEWMA, MCUSUM e ELR apresentaram os melhores desempenhos. E, para  $\sigma_{ww'} = 0,9$ , os poderes médios foram iguais a 0,953; 0,964; 0,797; 0,688 e 0,025, respectivamente (Figura 5.33e) e, as probabilidades médias dos alarmes falsos foram, respectivamente, iguais a 0,021; 0,020; 0,017; 0,012 e 0,005 (Figura 5.33f). Logo, para esse cenário de descontrolo, o MEWMA e MCUSUM são considerados os melhores.

Para  $p = 6$ ,  $\sigma_{ww'} = 0,1$  e descontrolo no vetor de médias  $\boldsymbol{\mu}_1$  igual a  $[1 \cdots 1]'$ , os GCMs MCUSUM, MEWMA, ELR, Lin-MEWMA e  $T^2$  de Hotelling proporcionaram poderes médios iguais a 0,980; 0,986; 0,973; 0,884 e 0,001, respectivamente (Figura 5.34a) e, as probabilidades médias dos alarmes falsos foram, respectivamente, iguais a 0,013; 0,011; 0,014; 0,008 e 0,005 (Figura 5.34b). Para esse cenário de descontrolo, o MEWMA, MCUSUM e ELR apresentaram poder acima de 0,90 com  $\hat{\alpha} < 0,03$ , sendo considerados, portanto, os melhores dentre os GCMs anteriores para monitorar esse processo. Mudando-se para  $\sigma_{ww'} = 0,5$ , os poderes médios foram iguais a 0,956; 0,969; 0,925; 0,686 e 0,011, respectivamente (Figura 5.34c) e, as probabilidades médias dos alarmes falsos foram, respectivamente, iguais a 0,025; 0,020; 0,016; 0,008 e 0,005 (Figura 5.34d). Novamente o MEWMA, MCUSUM e ELR foram considerados os melhores GCMs. E, para  $\sigma_{ww'} = 0,9$ , os poderes médios foram iguais a 0,933; 0,947; 0,708; 0,558 e 0,319, respectivamente (Figura 5.34e) e, as probabilidades médias dos alarmes falsos respectivamente iguais a 0,034; 0,020; 0,017; 0,008 e 0,005 (Figura 5.34f). Nota-se que para esse cenário de descontrolo o MEWMA

apresentou maior poder com  $\hat{\alpha} < 0,03$ , sendo considerado, portanto, o melhor dentre os GCMs anteriores para monitorar o processo.



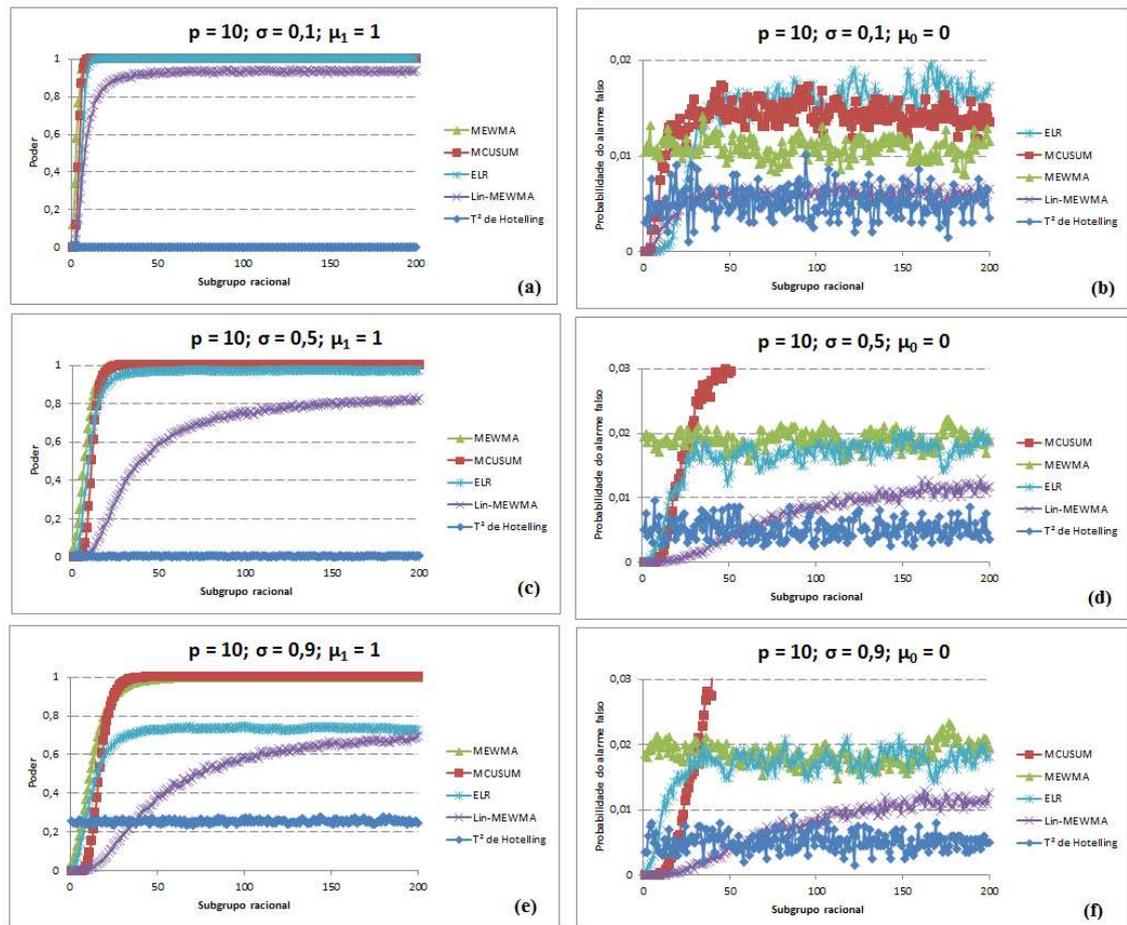
**Figura 5.33.** Desempenhos dos GCMs T<sup>2</sup> de Hotelling, MCUSUM, MEWMA, Lin-MEWMA e ELR a partir de suas respectivas recomendações para  $p = 2$  e  $\mu_1 = [1 \ 1]'$ .



**Figura 5.34.** Desempenhos dos GCMs T<sup>2</sup> de Hotelling, MCUSUM, MEWMA, Lin-MEWMA e ELR a partir de suas respectivas recomendações para  $p = 6$  e  $\mu_1 = [1 \dots 1]'$ .

Para  $p = 10$ ,  $\sigma_{w_{w'}} = 0,1$  e descontrole no vetor de médias  $\mu_1$  igual a  $[1 \dots 1]'$ , os GCMs MCUSUM, MEWMA, ELR, Lin-MEWMA e T<sup>2</sup> de Hotelling proporcionaram poderes médios iguais a 0,980; 0,988; 0,972; 0,890 e 0,000, respectivamente (Figura 5.35a). Já as probabilidades médias dos alarmes falsos foram, respectivamente, iguais a 0,014; 0,011; 0,014; 0,006 e 0,005 (Figura 5.35b). Para esse cenário de descontrole, o MEWMA, MCUSUM e ELR apresentaram poder acima de 0,90 com  $\hat{\alpha} < 0,03$ , sendo considerados, portanto, os melhores dentre os GCMs anteriores para monitorar esse processo. Mudando-se para  $\sigma_{w_{w'}} = 0,5$ , os poderes médios foram iguais a 0,945; 0,965; 0,923; 0,641 e 0,003, respectivamente (Figura 5.35c) e, as probabilidades médias dos alarmes falsos foram, respectivamente, iguais a 0,030; 0,019; 0,016; 0,007 e 0,005 (Figura 5.35d). Nesse cenário de descontrole, o MEWMA e ELR apresentaram melhores desempenhos. E, para  $\sigma_{w_{w'}} = 0,9$ , os poderes médios foram iguais a 0,915; 0,933;

0,686; 0,484 e 0,254, respectivamente (Figura 5.35e), e as probabilidades médias dos alarmes falsos foram, respectivamente, iguais a 0,046; 0,019; 0,017; 0,007 e 0,005 (Figura 5.34f). Nesse cenário de descontrole o MEWMA apresentou poder acima de 0,90 com  $\hat{\alpha} < 0,03$ , sendo considerados, portanto, o melhor dentre os GCMs anteriores para monitorar o processo.



**Figura 5.35.** Desempenhos dos GCMs T<sup>2</sup> de Hotelling, MCUSUM, MEWMA, Lin-MEWMA e ELR a partir de suas respectivas recomendações para  $p = 10$  e  $\mu_1 = [1 \dots 1]'$ .

Os resultados relatados nessa seção estão resumidos nas Tabelas 5.24, 5.25 e 5.26.

Por outro lado, os desempenhos ( $\alpha$  e  $Pd$ ) relacionados aos descontroles para os vetores de médias  $\mu_1 = [2 \dots 2]'$  e  $[3 \dots 3]'$  foram, em sua maioria, semelhantes e satisfatórios para todos os GCMs estudados, desde que obedecidas as recomendações para os valores dos seus termos.

**Tabela 5.24.** Recomendações para uso dos GCMs em função de  $\mu_1$  e  $\sigma_{ww'}(\Sigma_0)$  para  $p = 2$

| $\sigma_{ww'}$ | $\mu_1$ | GCM   | $\hat{\alpha}$ | $\widehat{Pd}$ |
|----------------|---------|---|----------------|----------------|
| 0,1            | 0,5     | MEWMA ( $\lambda = 0,04; h = 7,33$ )                                    | 0,026          | 0,899          |
|                | 1       | MEWMA ( $\lambda = 0,1; h = 8,79$ )                                     | 0,012          | 0,976          |
|                |         | MCUSUM ( $k = 0,68; h = 4,30$ )<br>ELR ( $\lambda = 0,1; h = 0,772$ )   | 0,014<br>0,012 | 0,972<br>0,959 |
| 0,5            | 0,5     | MEWMA ( $\lambda = 0,04; h = 7,33$ )                                    | 0,026          | 0,825          |
|                | 1       | MEWMA ( $\lambda = 0,05; h = 7,69$ )                                    | 0,022          | 0,973          |
|                |         | MCUSUM ( $k = 0,58; h = 4,90$ )<br>ELR ( $\lambda = 0,1; h = 1,270$ )   | 0,017<br>0,016 | 0,962<br>0,916 |
| 0,9            | 0,5     | MEWMA ( $\lambda = 0,04; h = 7,33$ )                                    | 0,026          | 0,740          |
|                | 1       | MEWMA ( $\lambda = 0,05; h = 7,69$ )<br>MCUSUM ( $k = 0,51; h = 5,40$ ) | 0,020<br>0,021 | 0,964<br>0,953 |

**Tabela 5.25.** Recomendações para uso dos GCMs em função de  $\mu_1$  e  $\sigma_{ww'}(\Sigma_0)$  para  $p = 6$

| $\sigma_{ww'}$ | $\mu_1$ | GCM   | $\hat{\alpha}$ | $\widehat{Pd}$ |
|----------------|---------|---|----------------|----------------|
| 0,1            | 0,5     | MEWMA ( $\lambda = 0,05; h = 15,08$ )                                 | 0,019          | 0,940          |
|                | 1       | MEWMA ( $\lambda = 0,1; h = 16,49$ )                                  | 0,011          | 0,986          |
|                |         | MCUSUM ( $k = 1,00; h = 5,88$ )<br>ELR ( $\lambda = 0,1; h = 2,650$ ) | 0,013<br>0,014 | 0,980<br>0,973 |
| 0,5            | 0,5     | MEWMA ( $\lambda = 0,03; h = 14,02$ )                                 | 0,029          | 0,856          |
|                | 1       | MEWMA ( $\lambda = 0,05; h = 15,08$ )                                 | 0,020          | 0,969          |
|                |         | MCUSUM ( $k = 0,66; h = 8,50$ )<br>ELR ( $\lambda = 0,1; h = 6,008$ ) | 0,025<br>0,016 | 0,956<br>0,925 |
| 0,9            | 0,5     | MEWMA ( $\lambda = 0,03; h = 14,02$ )                                 | 0,029          | 0,705          |
|                | 1       | MEWMA ( $\lambda = 0,05; h = 7,69$ )                                  | 0,020          | 0,947          |

**Tabela 5.26.** Recomendações para uso dos GCMs em função de  $\mu_1$  e  $\sigma_{ww'}(\Sigma_0)$  para  $p = 10$

| $\sigma_{ww'}$ | $\mu_1$ | GCM   | $\hat{\alpha}$          | $\widehat{Pd}$          |
|----------------|---------|---|-------------------------|-------------------------|
| 0,1            | 0,5     | MEWMA ( $\lambda = 0,04; h = 20,82$ )<br>ELR ( $\lambda = 0,05; h = 2,741$ )                                  | 0,023<br>0,026          | 0,952<br>0,900          |
|                | 1       | MEWMA ( $\lambda = 0,01; h = 22,96$ )<br>MCUSUM ( $k = 1,15; h = 7,35$ )<br>ELR ( $\lambda = 0,1; h = 5,51$ ) | 0,011<br>0,014<br>0,014 | 0,988<br>0,980<br>0,972 |
| 0,5            | 0,5     | MEWMA ( $\lambda = 0,03; h = 20,08$ )   | 0,029                   | 0,829                   |
|                | 1       | MEWMA ( $\lambda = 0,05; h = 21,30$ )<br>ELR ( $\lambda = 0,1; h = 12,08$ )                                   | 0,019<br>0,016          | 0,965<br>0,923          |
| 0,9            | 0,5     | MEWMA ( $\lambda = 0,03; h = 20,08$ )   | 0,028                   | 0,618                   |
|                | 1       | MEWMA ( $\lambda = 0,05; h = 21,30$ )   | 0,019                   | 0,933                   |

## 6. CONCLUSÕES

O  $T^2$  de Hotelling é o mais ineficaz dos GCMs estudados. Isso evidencia a importância dos subsequentes trabalhos para a criação dos novos GCMs.

O Lin-MEWMA possui baixa probabilidade de alarme falso em comparação aos demais GCMs estudados. Em consequência, ele apresenta baixa probabilidade do alarme verdadeiro para pequenas variações no vetor de médias, revelando-se assim ser um gráfico conservador.

O ELR apresenta desempenho superior ao  $T^2$  de Hotelling e ao Lin-MEWMA, possuindo baixa probabilidade do alarme falso e alta do verdadeiro, para a maioria dos casos. Porém, para pequenas variações no vetor de médias e alta correlação entre as variáveis, ele possui dificuldade em detectar as mudanças.

O MCUSUM apresenta poder satisfatório em todas as combinações estudadas. Porém, para alta correlação entre as variáveis, ele também apresenta alta probabilidade do alarme falso, proporcionando assim interferências desnecessárias no processo sob controle estatístico. O uso de valores para  $k$  diferentes de  $d/2$  pode proporcionar desempenho ainda melhor para esse GCM, assunto possível de ser estudado em trabalhos futuros.

O MEWMA revela-se como o melhor dos GCMs estudados e capaz de detectar variações no vetor de médias, tanto pequenas, médias ou grandes, e sem acarretar alta probabilidade do alarme falso. O uso de valores  $\lambda$  iguais a 0,03 e 0,04, pouco citados na literatura, contribuíram para a reafirmação desse GCM.

A variação do intervalo de decisão  $h$  para proporcionar  $ARL_{IC} = 200$  em função de diferentes quantidades de variáveis e correlações não impede as ocorrências de altas probabilidades dos alarmes verdadeiros.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALT, F. B.; BEDEWI, G. E. SPC of dispersion for multivariate data. In *Annual Quality Congress Transactions*. 40th Annual Quality Congress. Anaheim, CA. Vol. 40, n. 0, p. 248-254, 1986.

ANDERSON, M. J.; THOMPSON, A. A. Multivariate control charts for ecological and environmental monitoring. *Ecological Applications*. Vol. 14, n. 6, p. 1921-1935, 2004.

ALWAN, L. C.; ROBERTS, H. V. The problem of misplaced control limits. *Applied Statistics*. Vol. 44, n. 3, p. 269-278, 1995.

CHANG, L. K.; ZHANG, J. Cumulative sum control chart for the covariance matrix. *Statistica Sinica*. Vol. 11, n. 3, p. 767-790, 2001.

COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI, L. C. R. *Controle Estatístico de Qualidade*. 2 ed. Atlas. São Paulo, 2005. 336 p.

COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. A control chart based on sample ranges for monitoring the covariance matrix of the multivariate process. *Journal of Applied Statistics*. Vol. 38, n. 2, p. 233-245, 2011.

COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. A single chart with supplementary runs rules for monitoring the mean vector and the covariance matrix of multivariate processes. *Computers & Industrial Engineering*. Vol. 66, p. 431-437, 2013.

COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G.; CLARO, F. A. E. Gráfico de controle MCMAX para o monitoramento simultâneo do vetor de médias e da matriz de covariâncias. *Gestão & Produção*. Vol. 17, n. 1, p. 149-156. São Carlos, 2010.

CROSIER, R. B. Multivariate generalizations of cumulative sum quality-control schemes. *Technometrics*. Vol. 30, n. 3, p. 291-303, 1988.

EYVAZIAN, M.; NAINI, S. G. J.; VAGHEFI, A. Monitoring process variability using exponentially weighted moving sample variance control charts. *The*

*International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. Vol. 39, n. 3/4, p. 261-270, 2007.

FERNANDEZ, E. S. *Multivariate Statistical Quality Control: 'MSQC' Package*. Disponível em <<https://cran.r-project.org/web/packages/MSQC/MSQC.pdf>> Acesso em 12 Ago 2015.

FERREIRA, D. F. *Estatística Multivariada*. 2 ed. Lavras: Editora UFLA, 2011. 675 p.

HAWKINS, D. M. A CUSUM for a Scale Parameter. *Journal of Quality Technology*. Vol. 13, 1981.

HAWKINS, D. M. Self-Starting Cusum Charts for Location and Scale. *Journal of the Royal Statistical Society*. Vol. 36, n. 4, p. 299-316, 1987.

HAWKINS, D. M.; MABOUDOU-TCHAO, E. M. Self-starting multivariate exponentially weighted moving average control charting. *Technometrics*. Vol. 49, n. 2, p. 199-209, 2007.

HAWKINS, D. M.; MABOUDOU-TCHAO, E. M. Multivariate exponentially weighted moving covariance matrix. *Technometrics*. Vol. 50, n. 2, p. 155-166, 2008.

HEALY, J. D. A note on multivariate CUSUM procedures. *Technometrics*. Vol. 29, n. 4, p. 409-412, 1987.

HINES, W. W.; MONTGOMERY, D. C.; GOLDSMAN, D. M.; BORROR, C. M. *Probabilidade e Estatística na Engenharia*. 4 ed. Tradução Vera Regina Lima de Farias e Flores. LTC. Rio de Janeiro, 2006. 604 p.

HOTELLING, H. Multivariate quality control - illustrated by air testing of sample bombsights. *Techniques of statistical analysis*. New York: Mc Graw Hill, p. 111-184, 1947.

LARA, R. L. P. *Desempenho do Gráfico de Controle CUSUM Tabular para o Monitoramento da Média*. Viçosa, 2012. 85 p. Dissertação (Mestrado em

Estatística Aplicada e Biometria) – Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria – PPESTBIO/UFV, Universidade Federal de Viçosa, 2012.

LARA, R. L. P.; RIBEIRO JÚNIOR, J. I.; OLIVEIRA, R. L. R. Uma análise de desempenho de gráficos de controle multivariados. *Sigmae*. Vol. 3, n. 2, p. 55-59. Alfenas, 2014.

LARA, R. L. P.; SOUZA, V. B. C. Um comparativo de desempenho entre gráficos de controle univariados e multivariados. *Revista da Estatística da Universidade Federal de Ouro Preto*. Vol. 3, n. 3, p. 764-768, 2014.

LEE, M. H.; KHOO, M. B. C.; XIE, M. An Optimal Control Procedure based on Multivariate Synthetic Cumulative Sum. *Quality and Reliability Engineering International*. Vol. 30, p. 1049-1058, 2013.

LOWRY, C. A.; WOODALL, W. H.; CHAMP, C. W.; RIGDON, S. E. A multivariate exponentially weighted moving average control chart. *Technometrics*. Vol. 34, n. 1, p. 46-53, 1992.

LUCAS, J. M.; CROSIER, R. B. Fast initial response for CUSUM quality-control schemes: give your CUSUM a head start. *Technometrics*. Vol. 24, n. 3, p. 199-205, 1982.

LUCAS, J. M.; SACCUCCI, M. S. Exponentially weighted moving average control schemes: properties and enhancements. *Technometrics*. Vol. 2, n. 1, p. 1-8, 1990.

MABOUDOU-TCHAO, E. M.; HAWKINS, D. M. Self-starting multivariate control charts for location and scale. *Journal of Quality Technology*. Vol. 43, n. 2, p. 113-126, 2011.

MELO, M. S.; HO, L. L.; MEDEIROS, P. G. Max D: an attribute control chart to monitor a bivariate process mean. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. Vol. 90, p. 489-498, 2017.

MONTGOMERY, D. C. *Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade*. 7 ed. Tradução Ana Maria Lima de Farias e Vera Regina Lima de Farias e Flores. Rio de Janeiro: LTC, 2016. 572 p.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. *Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros*. 5 ed. Tradução Verônica Calado. Rio de Janeiro: LTC, 2012. 476 p.

MORAES, D. A. O.; OLIVEIRA, F. L. P.; QUININO, R. C.; DUCZMAL, L. H. Self-oriented control charts for efficient monitoring of mean vectors. *Computers & Industrial Engineering*. Vol. 75, p. 102-105, 2014.

PAGE, E. S. Continuous Inspection Schemes. *Biometrika*. Cambridge, vol. 41, p. 100-114, jun. 1954.

PIGNATIELLO J. J.; RUNGER, G. C. Comparison of multivariate CUSUM charts. *Journal of Quality Technology*. Vol. 22, n. 3, p. 173-178, 1990.

R Development Core Team. *R: A Language and Environmental for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 2013. Disponível em: <<http://www.R-project.org/>>

RIBEIRO JÚNIOR, J. I. *Métodos Estatísticos Aplicados ao Controle da Qualidade*. Editora UFV. Viçosa, 2013. 274 p.

ROBERTS, S. W. Control chart tests based on geometric moving averages. *Technometrics*. Vol. 1, p. 239-250, 1959.

RUNGER, M. R.; PRABHU, S. S. A Markov chain model for the multivariate exponentially weighted moving averages control chart. *Journal of American Statistical Association*. Vol. 91, p. 1701-1706, 1996.

SOUZA, L. M.; RIBEIRO JÚNIOR, J. I.; REIS, G. M.; IDE, M. S. Eficiência dos Gráficos de Controle XBARRA, EWMA e CUSUM. *Revista Eletrônica Produção & Engenharia*. Vol. 1, n. 1, p. 81-94, 2008.

TANG, P. F.; BARNETT, N. Dispersion control for multivariate processes. *Australian Journal of Statistics*. Vol. 38, n. 3, p. 235-251, 1996.

UMIT, F.; CIGDEM, A. *Multivariate quality control: a historical perspective*. Assoc. Prof. Umit Oktay Firat Res. Ass. Çigdem Aricigil. p. 54-67, 2001.

WADSWORTH, H. M.; STEPHENS, K. S.; GODFREY, A. B. *Modern Methods for Quality Control and Improvement*. 2 ed. John Wiley & Sons, 2002. 683 p.

WALPOLE, R.; MYERS, R.; MYERS, S.; YE, K. *Probabilidade e estatística para engenharia e ciências*. 8 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009. 491p.

WERKEMA, M. C. C. *Criando a cultura Seis Sigma*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012. 264 p.

WILLIAMS, J. D.; BIRCH, J. B.; WOODALL, W. H.; FERRY, N. M. Statistical monitoring of heteroscedastic dose-response profiles from high-throughput screening. *Journal of Agricultural, Biological and Environmental*. Vol. 12, n. 2, p. 216-235, 2007.

WOODALL, W. H. Controversies and Contradictions in Statistical Process Control *Journal of Quality Technology*. Vol. 32, n. 4, p. 341-350, 2000.

WOODALL, W. H.; NCUBE, M. M. Multivariate CUSUM quality-control procedures. *Technometrics*. Vol. 27, n. 3, p. 285-292, 1985.

YEH, A. B.; HUWANG, L. C.; WU, C. W. A multivariate EWMA control chart for monitoring process variability with individual observations. *IIE Transactions on Quality and Reliability Engineering*. Vol. 37, n. 11, p. 1023-1035, 2005.

YEH, A. B.; HUWANG, L. C.; WU, Y. F. A likelihood ratio based EWMA control chart for monitoring multivariate process variability. *IIE Transactions in Quality and Reliability Engineering*. Vol. 36, n. 9, p. 865-879, 2004.

YEH, A. B.; LIN, D. K. J.; MCGRATH, R. N. Multivariate control charts for monitoring covariance matrix: a review. *Quality Technology and Quantitative Management*. Vol. 3, n. 4, p. 415-436, 2006.

YEH, A. B.; LIN, D. K. J.; ZHOU, H.; VENKATARAMANI, C. A multivariate exponentially weighted moving average control chart for monitoring process variability. *Journal of Applied Statistics*. Vol. 30, n. 5, p. 507-536, 2003.

ZHANG, J.; LI, Z.; WANG, Z. A multivariate control chart for simultaneously monitoring process mean and variability. *Computational Statistics and Data Analysis*. Vol. 54, n. 10, p. 2244-2252, 2010.

ZHANG, J.; LI, Z.; WANG, Z. A New Adaptive Control Chart for Monitoring Process Mean and Variability. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. Vol. 60, n. 9, p. 1031-1038, 2012.

## Anexo A – Funções desenvolvidas para o planejamento do gráfico de controle $T^2$ de Hotelling

```
# FUNÇÕES PARA O PLANEJAMENTO DO GRÁFICO DE CONTROLE  $T^2$  DE HOTELLING.
# DESENVOLVIDAS POR RODRIGO LUIZ PEREIRA LARA EM 12/02/2016.

library(MASS)

# 1) Função que retorna as estatísticas do  $T^2$  DE HOTELLING.
Est_Hotelling = function(dados, matrizMedia, matrizCov, p) {

  t_calc = 0
  vetor = matrix (c(0), p, 1)

  for (i in 1:p) {
    vetor[i,1] = dados[i,]
  }

  t_calc = t(vetor - matrizMedia) %*% solve(matrizCov) %*% (vetor -
matrizMedia)
  return(t_calc)
}

# -----

# 2) Função para obtenção do intervalo de decisão h.
ARL_IC_medio = function (Media, Sigma, totalSim, totalSR, alfa, p, h) {

  dados = 0
  matriz_Hot = matrix (c(0), totalSim, totalSR)
  total_alfa = 0
  qui_tab = qchisq (alfa, p, lower.tail = F)
  vetor_ARL_IC_por_Sim = matrix(c(0), totalSim, 1)

  for (i in 1:totalSim) {
    for (j in 1:totalSR) {

      total_alfa = total_alfa + 1

      dados = mvrnorm(1, Media, Sigma)
      dados = as.matrix(dados)
      # head(dados)

      # Matriz_Hot receberá as estatísticas de Hotelling do
      # processo descrito em dados.
      matriz_Hot[i,j] = Est_Hotelling(dados, Media, Sigma, p)

      # DETERMINANDO EM QUAL SR OCORREU A PRIMEIRA SINALIZAÇÃO
      if (matriz_Hot[i,j] > h) { break }
    }
    vetor_ARL_IC_por_Sim[i,1] = total_alfa
    total_alfa = 0
  }
  return(vetor_ARL_IC_por_Sim)
}

# -----

# 3) Função que retorna a probabilidade do alarme falso, em média,
# ao longo dos subgrupos racionais.
AF_por_SR = function (Media, Sigma, totalSim, totalSR, alfa, p, h) {

  dados = 0
  matriz_Hot = matrix (c(0), totalSim, totalSR)
  total_alfa = 0
```

```

qui_tab = qchisq (alfa, p, lower.tail = F)
vetor_alfa_por_SR = matrix (c(0), totalSR, 1)

for (j in 1:totalSR) {
  for (i in 1:totalSim) {

    dados = mvrnorm(1, Media, Sigma)
    dados = as.matrix(dados)
    # head(dados)

    # Matriz_Hot receberá as estatísticas de Hotelling do
    # processo descrito em dados
    matriz_Hot[i,j] = Est_Hotelling(dados, Media, Sigma, p)

    # ESTIMANDO O ALARME FALSO DESSA SIMULACAO
    # (Uma das 2 linhas abaixo deve ficar comentada)

    if (matriz_Hot[i,j] > h) {

      total_alfa = total_alfa + 1
    }
  }
  vetor_alfa_por_SR[j,1] = total_alfa / totalSim
  total_alfa = 0
}
return(vetor_alfa_por_SR)
}

# -----

# 4) Função que retorna a probabilidade do alarme verdadeiro, em média,
# ao longo dos subgrupos racionais.

AV_por_SR = function (Media, Sigma, totalSim, totalSR, alfa, p, h) {

  dados = 0
  matriz_Hot = matrix (c(0), totalSim, totalSR)
  total_poder = 0
  qui_tab = qchisq (alfa, p, lower.tail = F)
  vetor_poder_por_SR = matrix (c(0), totalSR, 1)

  Media_0 = matrix (c(0), p, 1)

  for (j in 1:totalSR) {
    for (i in 1:totalSim) {

      dados = mvrnorm(1, Media, Sigma)
      dados = as.matrix(dados)
      # head(dados)

      # Matriz_Hot receberá as estatísticas de Hotelling do
      # processo descrito em dados.
      matriz_Hot[i,j] = Est_Hotelling(dados, Media_0, Sigma)

      # ESTIMANDO O ALARME VERDADEIRO DESSA SIMULACAO
      # (Uma das 2 linhas abaixo deve ficar comentada)

      if (matriz_Hot[i,j] > h) {
        # if (matriz_Hot[i,j] > qui_tab) {

          total_poder = total_poder + 1
        }
      }
    }
    vetor_poder_por_SR[j,1] = total_poder / totalSim
    total_poder = 0
  }
  return(vetor_poder_por_SR)
}

# -----

```

## Anexo B – Funções desenvolvidas para o planejamento do gráfico de controle MCUSUM

```
# FUNÇÕES PARA O PLANEJAMENTO DO GRÁFICO DE CONTROLE MCUSUM.
# DESENVOLVIDAS POR RODRIGO LUIZ PEREIRA LARA EM 17/04/2016.

library(MASS)

# 1) Função que retorna as estatísticas do MCUSUM.
Est_MCUSUM = function(dados, vetorMedia, matrizCov, m, p, k) {

  # O parâmetro "dados" expresso na linha acima é uma matriz 'm=totalSR x p'
  # e representa o conjunto de observações de 1 simulação.

  if (k <= 0) {
    print("Erro! O valor k deve ser maior que zero!")
    return()
  }

  Y_calc = matrix(c(0), m, 1)

  # o escalar c foi inicializado apenas a título de declaração
  c = 0

  # inicialização referente a S[0] = [0 0 ... 0]
  S_inicial = matrix (c(0), 1, p)

  S = matrix (c(0), m+1, p)

  aux_1 = matrix(c(0), 1, p)
  aux_2 = 0
  aux_3 = matrix(c(0), 1, p)

  for (i in 1:m) {

    c = sqrt( (S[i,] + dados[i,] - vetorMedia) %*%
              solve(matrizCov) %*% t(S[i,] + dados[i,] - vetorMedia) )

    if (c <= k) {
      S[i+1,] = S_inicial
    }

    else if (c > k) {

      aux_2 = 1 - k/c
      aux_3 = S[i,] + dados[i,] - vetorMedia

      aux_2 = as.matrix(aux_2)
      aux_3 = as.matrix(aux_3)

      S[i+1,] = aux_2 %*% aux_3
      # S[i+1,] = (S[i,] + dados[i,] - vetorMedia) %*% as.matrix(1 - k/c)
    }

    for (j in 1:p) {
      aux_1[1,j] = S[i+1,j]
    }

    Y_calc[i,1] = sqrt( (S[i+1,]) %*% solve(matrizCov) %*% t(aux_1) )

  }
  return(t(Y_calc))
}

# -----
```

```

# 2) Função para obtenção do intervalo de decisão h.
ARL_IC_MEDIO = function (Media, Sigma, totalSim, totalSR, alfa, p, h) {

  dados = matrix(c(0), totalSR, p)
  matriz_MCUSUM = matrix (c(0), totalSim, totalSR)
  total_alfa = 0
  vetor_ARL_IC_por_Sim = matrix(c(0), totalSim, 1)

  for (i in 1:totalSim) {

    dados = mvrnorm(totalSR, Media, Sigma)
    matriz_MCUSUM[i,] = t(Est_MCUSUM(dados, Media, Sigma, totalSR, p,
k))
  }

  for (i in 1:totalSim) {
    for (j in 1:totalSR) {

      total_alfa = total_alfa + 1

      # DETERMINANDO EM QUAL SR OCORREU A PRIMEIRA SINALIZAÇÃO
      if (matriz_MCUSUM[i,j] > h) {break}
    }
    vetor_ARL_IC_por_Sim[i,1] = total_alfa
    total_alfa = 0
  }
  return(vetor_ARL_IC_por_Sim)
}

# -----

# 3) Função que retorna a probabilidade do alarme falso, em média,
# ao longo dos subgrupos racionais.
AF_por_SR = function (Media, Sigma, totalSim, totalSR, p, h, k) {

  dados = matrix(c(0), totalSR, p)
  matriz_MCUSUM = matrix (c(0), totalSim, totalSR)
  vetor_alfa_por_SR = matrix (c(0), totalSR, 1)

  for (i in 1:totalSim) {

    dados = mvrnorm(totalSR, Media, Sigma)
    dados = as.matrix(dados)
    # head(dados)

    # Matriz_MCUSUM receberá as estatísticas do MCUSUM do processo
    # descrito em dados

    matriz_MCUSUM[i,] = Est_MCUSUM(dados, Media, Sigma, totalSR, p, k)
  }

  # AQUI A MATRIZ 'matriz_MCUSUM' JÁ ESTÁ TOTALMENTE PREENCHIDA.
  # PORTANTO, JÁ SE PODE CALCULAR O PERCENTUAL DE ALARMES FALSOS.

  total_alfa = 0

  for (j in 1: totalSR) {
    for (i in 1: totalSim) {

      if (matriz_MCUSUM[i,j] > h) {

        total_alfa = total_alfa + 1
      }
    }
    vetor_alfa_por_SR[j,1] = total_alfa / totalSim
    total_alfa = 0
  }

  return(vetor_alfa_por_SR)
}

# -----

```

```

# 4) Função que retorna a probabilidade do alarme verdadeiro, em média,
# ao longo dos subgrupos racionais.

AV_por_SR = function (Media, Sigma, totalSim, totalSR, p, h, k) {

  Media0 = matrix (c(0), 1, p)
  dados = matrix(c(0), totalSR, p)
  matriz_MCUSUM = matrix (c(0), totalSim, totalSR)
  vetor_poder_por_SR = matrix (c(0), totalSR, 1)

  for (i in 1:totalSim) {

    dados = mvrnorm(totalSR, Media, Sigma)
    dados = as.matrix(dados)
    # head(dados)

    # Matriz_MCUSUM receberá as estatísticas do MCUSUM do processo
    # descrito em dados

    matriz_MCUSUM[i,] = Est_MCUSUM(dados, Media0, Sigma, totalSR, p, k)
  }

  # AQUI A MATRIZ 'matriz_MCUSUM' JÁ ESTÁ TOTALMENTE PREENCHIDA.
  # PORTANTO, JÁ POSSO CALCULAR O PERCENTUAL DE ALARMES VERDADEIROS.

  total_poder = 0

  for (j in 1: totalSR) {
    for (i in 1: totalSim) {

      if (matriz_MCUSUM[i,j] > h) {

        total_poder = total_poder + 1

      }
    }
    vetor_poder_por_SR[j,1] = total_poder / totalSim
    total_poder = 0
  }

  return(vetor_poder_por_SR)
}

# -----

```

## Anexo C – Funções desenvolvidas para o planejamento do gráfico de controle MEWMA

```
# FUNÇÕES PARA O PLANEJAMENTO DO GRÁFICO DE CONTROLE MEWMA.
# DESENVOLVIDAS POR RODRIGO LUIZ PEREIRA LARA EM 19/04/2016.

library(MASS)

# 1) Função que retorna a estatística do MEWMA.

Est_MEWMA = function (dados, vetorMedia, matrizCov, m, p, lambda) {

  # O parâmetro "dados" expresso na linha acima é uma matriz 'm=totalSR x p'
  # e representa o conjunto de observações de 1 simulação.

  Z = matrix (c(0), p, m+1)

  # Definindo o valor do primeiro Z
  # "Z indice zero é igual à média-alvo"
  Z[,1] = vetorMedia

  R = matrix (c(0), p, p)
  I = matrix (c(0), p, p)

  for (i in 1:p) {

    R[i,i] = lambda
    I[i,i] = 1
  }

  for (i in 1:m) {

    Z[,i+1] = (R %*% dados[i,]) + (I - R) %*% Z[,i]
  }

  # Aqui o vetor Z já está bem definido.
  # A partir de agora, definiremos a matriz de covariâncias de Zi
  matrizCov_Z = matrix(c(0), p, m)

  t_calc = matrix(c(0), m, 1)

  aux = 1
  for(i in 1: m) {

    aux = (1 - lambda) ^ (2*i)
    matrizCov_Z = (lambda * (1 - aux) * matrizCov) / (2 - lambda)

    t_calc[i,1] = Z[,i+1] %*% solve(matrizCov_Z) %*% Z[,i+1]
  }

  return (t_calc)
}

#-----

# 2) Função para a obtenção do intervalo de decisão h.

ARL_IC_medio = function (Media, Sigma, totalSim, totalSR, p, lambda, h) {

  dados = matrix(c(0), totalSR, p)
  matriz_MEWMA = matrix (c(0), totalSim, totalSR)
  total_alfa = 0
  vetor_ARL_IC_por_Sim = matrix(c(0), totalSim, 1)

  for (i in 1:totalSim) {

    # MÉDIA SOB CONTROLE
    dados = mvrnorm(totalSR, Media, Sigma)
    matriz_MEWMA[i,] = t(Est_MEWMA(dados, Media, Sigma, totalSR, p,
lambda))
  }
}
```

```

for (i in 1:totalSim) {
  for (j in 1:totalSR) {

    total_alfa = total_alfa + 1

    # DETERMINANDO EM QUAL SR OCORREU A PRIMEIRA SINALIZAÇÃO
    if (matriz_MEWMA[i,j] > h) {break}
  }
  vetor_ARL_IC_por_Sim[i,1] = total_alfa
  total_alfa = 0
}
return(vetor_ARL_IC_por_Sim)
}

#-----

# 3) Função que retorna a probabilidade do alarme falso, em média,
# por subgrupo racional.

AF_por_SR = function (Media, Sigma, totalSim, totalSR, p, lambda, h) {

  Dados = matrix(c(0), totalSR, p)
  matriz_MEWMA = matrix (c(0), totalSim, totalSR)
  vetor_alfa_por_SR = matrix (c(0), totalSR, 1)

  for (i in 1:totalSim) {

    Dados = mvrnorm(totalSR, Media, Sigma)
    Dados = as.matrix(Dados)

    # Matriz_MEWMA receberá as estatísticas do MEWMA do processo
    # descrito em dados

    matriz_MEWMA[i,] = Est_MEWMA(Dados, Media, Sigma, totalSR, p,
lambda)
  }

  # AQUI A MATRIZ 'matriz_MEWMA' JÁ ESTÁ TOTALMENTE PREENCHIDA
  # PORTANTO, JÁ SE PODE CALCULAR O PERCENTUAL DE ALARMES FALSOS

  total_alfa = 0

  for (j in 1: totalSR) {
    for (i in 1: totalSim) {

      if (matriz_MEWMA[i,j] > h) {

        total_alfa = total_alfa + 1

      }
    }
    vetor_alfa_por_SR[j,1] = total_alfa / totalSim
    total_alfa = 0
  }

  return(vetor_alfa_por_SR)
}

#-----

# 4) Função que retorna a probabilidade do alarme verdadeiro, em média,
# por subgrupo racional.

AV_por_SR = function (Media, Sigma, totalSim, totalSR, p, lambda, h) {

  Media0 = matrix(c(0), p, 1)
  Dados = matrix(c(0), totalSR, p)
  matriz_MEWMA = matrix (c(0), totalSim, totalSR)
  vetor_poder_por_SR = matrix (c(0), totalSR, 1)

  for (i in 1:totalSim) {

    Dados = mvrnorm(totalSR, Media, Sigma)
    Dados = as.matrix(Dados)
    # head(Dados)

```

```

# Matriz_MEWMA receberá as estatísticas do MEWMA do processo
# descrito em dados

matriz_MEWMA[i,] = Est_MEWMA(Dados, Media0, Sigma, totalSR, p,
lambda)
}

# AQUI A MATRIZ 'matriz_MEWMA' JÁ ESTÁ TOTALMENTE PREENCHIDA
# PORTANTO, JÁ SE PODE CALCULAR O PERCENTUAL DE ALARMES VERDADEIROS

total_poder = 0

for (j in 1: totalSR) {
  for (i in 1: totalSim) {
    if (matriz_MEWMA[i,j] > h) {
      total_poder = total_poder + 1
    }
  }
  vetor_poder_por_SR[j,1] = total_poder / totalSim
  total_poder = 0
}

return(vetor_poder_por_SR)
}

```

## Anexo D – Funções desenvolvidas para o planejamento do gráfico de controle Lin-MEWMA

```
# FUNÇÕES PARA O PLANEJAMENTO DO GRÁFICO DE CONTROLE LIN-MEWMA.
# DESENVOLVIDAS POR RODRIGO LUIZ PEREIRA LARA EM 05/05/2016.

# 1) Função que retorna a estatística do Lin-MEWMA.

library(MASS)

Est_LinMEWMA = function (dados, vetorMedia, matrizCov, m, p, lambda) {

  # O parâmetro "dados" expresso na linha acima é uma matriz 'm=totalSR x p'
  # e representa o conjunto de observações de 1 simulação.

  Z = matrix (c(0), p, m+1)

  # Definindo o valor do primeiro Z
  # "Z indice zero é igual à média-alvo"
  Z[,1] = vetorMedia

  R = matrix (c(0), p, p)
  I = matrix (c(0), p, p)

  for (i in 1:p) {

    R[i,i] = lambda
    I[i,i] = 1
  }

  for (i in 1:m) {

    Z[,i+1] = (R %*% dados[i,]) + (I - R) %*% Z[,i]
  }

  # Aqui o vetor Z já está bem definido.

  t_calc = matrix(c(0), m, 1)

  for(i in 1: m) {
    dados[i,]
    t_calc[i,1] = t(solve(matrizCov) %*% (Z[,i+1] - Z[,1])) %*%
  }

  return (t_calc)
}

# -----

# 2) Função para a obtenção do intervalo de decisão h.

ARL_IC_medio = function (Media, Sigma, totalSim, totalSR, p, lambda, h) {

  dados = matrix(c(0), totalSR, p)
  matriz_LinMEWMA = matrix (c(0), totalSim, totalSR)
  total_alfa = 0
  vetor_ARL_IC_por_Sim = matrix(c(0), totalSim, 1)

  for (i in 1:totalSim) {

    # MÉDIA FORA DE CONTROLE
    # dados = mvrnorm(totalSR, (Media + sqrt(3/16)), Sigma)

    # MÉDIA SOB CONTROLE
    dados = mvrnorm(totalSR, Media, Sigma)
    matriz_LinMEWMA[i,] = t(Est_LinMEWMA(dados, Media, Sigma, totalSR,
p, lambda))
  }

  for (i in 1:totalSim) {
    for (j in 1:totalSR) {

      total_alfa = total_alfa + 1
    }
  }
}
```

```

        # DETERMINANDO EM QUAL SR OCORREU A PRIMEIRA SINALIZAÇÃO
        if (matriz_LinMEWMA[i,j] > h || matriz_LinMEWMA[i,j] < -h)
        {break}
    }
    vetor_ARL_IC_por_Sim[i,1] = total_alfa
    total_alfa = 0
}
return(vetor_ARL_IC_por_Sim)
}

# -----

# 3) Função que retorna a probabilidade do alarme falso, em média,
# por subgrupo racional.

AF_por_SR = function (Media, Sigma, totalSim, totalSR, p, lambda, h) {

    Dados = matrix(c(0), totalSR, p)
    matriz_LinMEWMA = matrix (c(0), totalSim, totalSR)
    vetor_alfa_por_SR = matrix (c(0), totalSR, 1)

    for (i in 1:totalSim) {

        Dados = mvrnorm(totalSR, Media, Sigma)
        Dados = as.matrix(Dados)

        # Matriz_LinMEWMA receberá as estatísticas do LinMEWMA do processo
        # descrito em dados

        matriz_LinMEWMA[i,] = Est_LinMEWMA(Dados, Media, Sigma, totalSR, p,
lambda)
    }

    # AQUI A MATRIZ 'matriz_MEWMA' JÁ ESTÁ TOTALMENTE PREENCHIDA
    # PORTANTO, JÁ SE PODE CALCULAR O PERCENTUAL DE ALARMES FALSOS

    total_alfa = 0

    for (j in 1: totalSR) {
        for (i in 1: totalSim) {

            if (matriz_LinMEWMA[i,j] > h || matriz_LinMEWMA[i,j] < -h) {

                total_alfa = total_alfa + 1
            }
        }
        vetor_alfa_por_SR[j,1] = total_alfa / totalSim
        total_alfa = 0
    }

    return(vetor_alfa_por_SR)
}

# -----

# 4) Função que retorna a probabilidade do alarme verdadeiro, em média,
# por subgrupo racional.

AV_por_SR = function (Media, Sigma, totalSim, totalSR, p, lambda, h) {

    Dados = matrix(c(0), totalSR, p)
    matriz_LinMEWMA = matrix (c(0), totalSim, totalSR)
    vetor_poder_por_SR = matrix (c(0), totalSR, 1)

    Media_0 = matrix(c(0), p, 1)

    for (i in 1:totalSim) {

        Dados = mvrnorm(totalSR, Media, Sigma)
        Dados = as.matrix(Dados)

        # Matriz_LinMEWMA receberá as estatísticas do LinMEWMA do processo
        # descrito em dados

```

```

        matriz_LinMEWMA[i,] = Est_LinMEWMA(Dados, Media_0, Sigma, totalSR,
p, lambda)
    }

    # AQUI A MATRIZ 'matriz_MEWMA' JÁ ESTÁ TOTALMENTE PREENCHIDA
    # PORTANTO, JÁ SE PODE CALCULAR O PERCENTUAL DE ALARMES VERDADEIROS

    total_poder = 0

    for (j in 1: totalSR) {
        for (i in 1: totalSim) {

            if (matriz_LinMEWMA[i,j] > h || matriz_LinMEWMA[i,j] < -h) {

                total_poder = total_poder + 1

            }

        }
        vetor_poder_por_SR[j,1] = total_poder / totalSim
        total_poder = 0
    }

    return(vetor_poder_por_SR)
}

# -----

```

## Anexo E – Funções desenvolvidas para o planejamento do gráfico de controle ELR

```
# FUNÇÕES PARA O PLANEJAMENTO DO GRÁFICO DE CONTROLE ELR.
# DESENVOLVIDAS POR RODRIGO LUIZ PEREIRA LARA EM 21/05/2016.

library(MASS)

# 1) FUNÇÃO QUE RETORNA O TRAÇO DE UMA MATRIZ
tr = function (matriz) {

  dim = sqrt (length (matriz) )
  soma = 0
  for (i in 1:dim) { soma = soma + matriz[i,i] }
  return(soma)
}

# -----

# 2) FUNÇÃO QUE RETORNA O QUADRADO DA NORMA DE UM VETOR
norma_quad = function (vetor) {

  dim = length(vetor)
  soma = 0
  for (i in 1:dim) { soma = soma + (vetor[i]^2) }
  return (soma)
}

# -----

# 3) Função que retorna a estatística do ELR.

Est_ELRL = function (dados, vetorMedia, matrizCov, m, p, lambda) {

  # O parâmetro "dados" expresso na linha acima é uma matriz 'm=totalSR x p'
  # e representa o conjunto de observações de 1 simulação.

  vetor_U = matrix (c(0), p, 1)
  vetor_U = vetorMedia

  I = matrix (c(0), p, p)
  for (i in 1:p) { I[i,i] = 1 }

  V = matrix (c(0), p, p)
  V = matrizCov

  S = matrix (c(0), p, p)
  U_antigo = matrix (c(0), p, 1)
  V_antigo = matrix (c(0), p, p)

  g = 0; a = 0
  elr = matrix (c(0), m, 1)

  for (i in 1: m) {

    U_antigo = vetor_U
    V_antigo = V

    vetor_U = lambda * dados[i,] + (1 - lambda) * U_antigo

    S = (dados[i,] - vetor_U) %*% t(dados[i,] - vetor_U)
    V = lambda * S + (1 - lambda) * V_antigo
    g = det(V) ^ (1/p)
    a = tr(V) / p
    elr[i,1] = p * (a - log(g) - 1) + norma_quad(vetor_U)
  }
  return(elr)
}

# -----

# 4) Função que retorna a probabilidade do alarme falso, em média,
# por subgrupo racional.
```

```

AF_por_SR = function (Media, Sigma, totalSim, totalSR, p, h, lambda) {

  dados = matrix(c(0), totalSR, p)
  matriz_ELR = matrix (c(0), totalSim, totalSR)
  vetor_alfa_por_SR = matrix (c(0), totalSR, 1)

  for (i in 1:totalSim) {

    dados = mvrnorm(totalSR, Media, Sigma)
    dados = as.matrix(dados)

    # Matriz_ELR receberá as estatísticas do ELR do processo
    # descrito em dados

    matriz_ELR[i,] = Est_ELR(dados, Media, Sigma, totalSR, p, lambda)
  }

  # AQUI A MATRIZ 'matriz_ELR' JÁ ESTÁ TOTALMENTE PREENCHIDA
  # PORTANTO, JÁ SE PODE CALCULAR O PERCENTUAL DE ALARMES FALSOS

  total_alfa = 0

  for (j in 1: totalSR) {
    for (i in 1: totalSim) {

      if (matriz_ELR[i,j] > h) {
        total_alfa = total_alfa + 1
      }
    }
    vetor_alfa_por_SR[j,1] = total_alfa / totalSim
    total_alfa = 0
  }
  return(vetor_alfa_por_SR)
}

# -----

# 5) Função que retorna a probabilidade do alarme verdadeiro, em média,
# por subgrupo racional.

AV_por_SR = function (Media, Sigma, totalSim, totalSR, p, h, lambda) {

  Media0 = matrix(c(0), p, 1)
  dados = matrix(c(0), totalSR, p)
  matriz_ELR = matrix (c(0), totalSim, totalSR)
  vetor_alfa_por_SR = matrix (c(0), totalSR, 1)

  for (i in 1:totalSim) {

    dados = mvrnorm(totalSR, Media, Sigma)
    dados = as.matrix(dados)

    # Matriz_ELR receberá as estatísticas do ELR do processo
    # descrito em dados

    matriz_ELR[i,] = Est_ELR(dados, Media0, Sigma, totalSR, p, lambda)
  }

  # AQUI A MATRIZ 'matriz_ELR' JÁ ESTÁ TOTALMENTE PREENCHIDA
  # PORTANTO, JÁ SE PODE CALCULAR O PERCENTUAL DE ALARMES FALSOS

  total_alfa = 0

  for (j in 1: totalSR) {
    for (i in 1: totalSim) {

      if (matriz_ELR[i,j] > h) {
        total_alfa = total_alfa + 1
      }
    }
    vetor_alfa_por_SR[j,1] = total_alfa / totalSim
    total_alfa = 0
  }
  return(vetor_alfa_por_SR)
}

# -----

```