

MATHEUS MAIA DE ARAÚJO PAIXÃO

CONSTRUÇÃO DE UM MODELO DE CHERN-SIMONS PARA GRAVITAÇÃO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, para obtenção do título *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2019

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

P149c
2019 Paixão, Matheus Maia de Araújo, 1994-
Construção de um modelo de Chern-Simons para gravitação
/ Matheus Maia de Araújo Paixão. – Viçosa, MG, 2019.
vii, 104 f. : il. ; 29 cm.

Inclui apêndices.

Orientador: Olivier Piguet.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f. 103-104.

1. Gravitação. 2. Chern-Simons, Teoria de. 3. Sistemas hamiltonianos. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Física. Programa de Pós-Graduação em Física. II. Título.

CDD 22. ed. 531.14

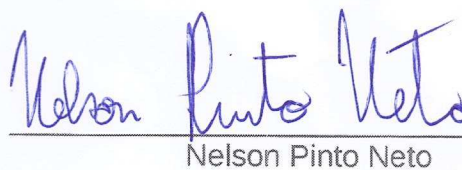
MATHEUS MAIA DE ARAÚJO PAIXÃO

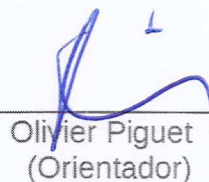
CONSTRUÇÃO DE UM MODELO DE CHERN-SIMONS PARA GRAVITAÇÃO

Dissertação apresentada à
Universidade Federal de Viçosa, como
parte das exigências do Programa de
Pós-Graduação em Física, para
obtenção do título de *Magister
Scientiae*.

APROVADA: 27 de fevereiro de 2019.


Afrânio Rodrigues Pereira


Nelson Pinto Neto


Olivier Piguet
(Orientador)

“You’re gonna see me for who I am, because I need to change who I’m not...

The darkness is exactly what I need.”

David Goggins

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por tudo. Quero agradecer a minha família, que sempre me incentivou a buscar aquilo em que acredito. Aos meus pais, que me ensinaram que os valores essenciais não estão nos títulos ou no dinheiro, mas sim no processo. Se tomas o caminho errado para chegar ao lugar correto, nunca poderás orgulhar-se do que se tornou. Porém se tomas o caminho correto, mesmo que não chegue onde almejas, pode-se orgulhar daquilo que és e viver em paz pelo resto da vida. O caminho que tomas fala muito sobre si. Ao meu irmão, que pela convivência me mostrou novamente a beleza da física.

Gostaria de agradecer ao professor Olivier Piguet, que tanto me ensinou durante esse tempo que trabalhamos juntos. Agradeço pela confiança em minha pessoa, ao propor um tema de pesquisa tão amplo e ao mesmo tempo complexo, uma vez que tive que aprender tudo praticamente do zero. Agradeço pela paciência e prontidão em que me ajudava, mesmo nas coisas mais banais. Aprendi muito podendo estar ao seu lado. Profissionalmente e como pessoa. Desejo-lhe minhas mais sinceras felicidades.

Queria fazer um agradecimento especial aos professores Oswaldo Monteiro Del Cima e Daniel Heber Theodoro Franco, pelos ensinamentos, pelas aulas, pelos conselhos, pela disponibilidade de sempre nos ajudar quando preciso e, sobretudo, pela convivência. Duas personalidades diametralmente opostas, eu diria, mas que tanto se completam. Tive o imenso prazer de poder compartilhar esse momento que passei na UFV ao lado de vocês. Muito obrigado.

Gostaria de agradecer aos professores que aceitaram compor esta banca. O professor Afrânio Rodrigues Pereira e, novamente o professor Oswaldo. Em especial ao professor Nelson Pinto Neto, que aceitou o convite de vir do Rio até nossa cidade.

Aos amigos de curso que junto comigo travaram essa jornada, Lázaro e Rodrigo. Ao final, por maior que fosse o sofrimento e a dificuldade em que nos encontrávamos sempre achamos um jeito de nos divertir com a situação. Sempre lembrarei de nossas histórias/aventuras, especialmente as mais comprometedoras. Também ao Émerson que desde o primeiro momento se mostrou muito solícito, sempre nos aconselhando com seu jeito irreverente.

Por fim, ao Goku, por ter salvo a Terra inúmeras vezes.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Sumário

Resumo	vi
Abstract	vii
1 Introdução e motivação	1
2 Formas diferenciais, uma visão geral	3
2.1 O que são formas diferenciais?	4
2.2 Operações com formas diferenciais	7
2.2.1 Soma de formas diferenciais	7
2.2.2 Produto de formas diferenciais	8
2.2.3 A derivada exterior	9
2.2.4 A derivada interior	10
2.2.5 A derivada de Lie	11
2.2.6 Integração de formas diferenciais	13
2.3 Formas fechadas, formas exatas e Lema de Poincaré	15
3 Grupos, álgebras e expansões de álgebras	16
3.1 O conceito de grupo	16
3.2 Grupos de Lie e álgebras de Lie	18
3.3 Um exemplo importante: o grupo $(A)dS_5$	20
3.4 A expansão S	23
3.5 A redução H	25

3.6	Tensores invariantes	26
4	Ações de Chern-Simons	35
4.1	A conexão 1-forma A	36
4.2	Curvatura	37
4.3	Polinômios Invariantes	38
4.4	Formas de Chern-Simons	41
4.5	Porquê usar formas de Chern-Simons na gravitação?	44
4.6	Ações de Chern-Simons em gravitação	50
4.7	Dinâmica das teorias de Chern-Simons	53
4.7.1	Genericidade	59
4.7.2	Dinâmica da teoria de Chern-Simons em $5D$ para o caso $(A)dS_5$	59
5	Gravitação de Chern-Simons para a álgebra C_5	63
5.1	Construindo a ação de Chern-Simons para C_5	64
5.2	Dinâmica	73
5.3	Difeomorfismos cruzados	78
5.4	Vínculos associados aos difeomorfismos cruzados	82
6	Conclusões e Perspectivas	85
A	Formalismo de Dirac	87
B	Exemplo Banados	92
C	Cálculo de Omega e K	95
D	Resolvendo os vínculos	98

Resumo

PAIXAO, Matheus Maia de Araújo, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2019. **Construção de um modelo de Chern-Simons para gravitação.** Orientador: Olivier Piguet.

Neste trabalho estudamos a teoria de Chern-Simons para a gravitação em 5 dimensões. Nós usamos como álgebra de Lie a álgebra $(a)dS_5$ (de Sitter ou anti-de Sitter) expandida a partir de um semigrupo finito via o produto direto entre $(a)dS_5$ e o semigrupo considerado. A motivação de se usar uma álgebra expandida é para se obter uma teoria mais geral, com a possibilidade de se obter outros campos além do campo de gravitação na teoria. Estes outros campos podem ser vistos como uma possível matéria que interage com o campo de gravitação. Basicamente esse trabalho será dividido em três partes. Na primeira, que abrange os capítulos 2 e 3, faremos uma breve introdução às formas diferenciais e à teoria de grupos, dois ferramentais essenciais na compreensão de uma teoria de Chern-Simons para a gravitação. Nesta parte traremos alguns resultados recentes sobre expansões de álgebra que são fundamentais para este trabalho. Faremos a expansão mencionada, mostrando que se trata realmente de uma álgebra de Lie, calculando as constantes de estrutura e os tensores invariantes e, em seguida, faremos um comparativo dos nossos resultados com trabalhos similares na literatura. Na segunda parte, que abrange todo capítulo 4, faremos uma introdução sobre teorias de Chern-Simons, mostrando sua importância para a física, bem como abordaremos alguns resultados já conhecidos sobre a gravitação de Chern-Simons em $5D$ usando como álgebra de Lie $(a)dS_5$ simplesmente. Por fim, na última parte, aplicaremos os resultados do capítulo 4 considerando a álgebra expandida, obtendo a ação de Chern-Simons para tal álgebra. Após isso estudaremos a estrutura dinâmica da teoria, fazendo uso do formalismo hamiltoniano de Dirac. Um resultado importante do quarto e último capítulo é a descoberta de uma classe mais geral de difeomorfismos espaciais, chamados por nós de difeomorfismos generalizados, que abrange os difeomorfismos espaciais usuais. Estes novos difeomorfismos são uma consequência do método de expansão. Este trabalho ainda contém um anexo sobre o formalismo Hamiltoniano de Dirac utilizado nos capítulos 4 e 5 para o estudo da dinâmica das respectivas teorias, além de dois outros anexos contendo programas computacionais que utilizamos.

Abstract

PAIXAO, Matheus Maia de Araújo, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2019.
Construction of a Chern-Simons model for gravity. Advisor: Olivier Piguet.

In this work we study the Chern-Simons theory for gravitation in 5 dimensions. We use as Lie algebra the algebra $(a)dS_5$ (de Sitter or anti-de Sitter) expanded from a finite semigroup via the direct product between $(a)dS_5$ and the semigroup considered. The motivation of using an expanded algebra is to obtain a more general theory, with the possibility of obtaining other fields beyond the field of gravitation in the theory. These other fields can be seen as a possible matter that interacts with the field of gravitation. Basically this work will be divided into three parts. In the first, which covers the chapters 2 and 3, we will briefly introduce differential forms and group theory, two essential tools for understanding a Chern-Simons theory of gravitation. In this part we will bring some recent results on algebra expansions that are fundamental to this work. We will make the expansion mentioned, showing that it is really a Lie algebra, calculating the constants of structure and the invariant tensors, and then we will make a comparison of our results with similar works in the literature. In the second part, which covers the whole of chapter 4, we will make an introduction about Chern-Simons theories, showing their importance to physics, as well as discuss some already known results on Chern-Simons gravitation in $5D$ using as Lie algebra $(a)dS_5$ simply. Finally, in the last part, we will apply the results of chapter 4 considering the expanded algebra, obtaining the Chern-Simons action for such algebra. After this we will study the dynamic structure of the theory, making use of the Hamiltonian formalism of Dirac. An important result of the fourth and final chapter is the discovery of a more general class of spatial diffeomorphisms, called by us of generalized diffeomorphisms, which include the usual spatial diffeomorphisms. These new diffeomorphisms are a consequence of the method of expansion adopted by us. This work also contains an annex about the Hamiltonian formalism of Dirac used in chapters 4 and 5 to study the dynamics of the respective theories, as well as two other annexes containing computational programs that we use.

Capítulo 1

Introdução e motivação

Por uma série de fatores, a muito tempo tem-se tentado obter uma teoria quântica para a gravitação que seja compatível tanto com a teoria da Relatividade Geral de Einstein como com a mecânica quântica de Heisenberg, Dirac, Schrödinger e companhia. A principal razão seria compreender o universo na escala de Planck ($10^{-35}m$, $10^{19}GeV$, $10^{-43}s$), escala esta onde a RG clássica não seria mais válida. Essa tentativa já demandou uma série de esforços, contudo ainda não entendemos muito bem a física que está por trás dessa escala, sendo preciso muito estudo e reflexão para chegarmos em um resultado.

Nesse aspecto as teorias de Chern Simons [1] [2] se mostram bastante promissoras. Estas explicam o Efeito Hall Quântico, tem aplicações em estudos recentes sobre supercondutividade, em teoria quântica de campos e mais recentemente na gravitação. [3] [4] [5] [6] [7] Dois aspectos são importantes para essa ampla gama de aplicações das ditas formas de Chern-Simons na física. O primeiro deve-se ao fato de que estas permitem uma extensão da simetria de Lorentz, utilizando-se por exemplo o grupo $(A)dS$, onde é possível a introdução de novos campos, de modo a se ter uma teoria onde unifica-se a matéria com o campo de gravitação. O segundo, de particular importância para a gravitação deve-se ao fato de que, tal como ocorre na relatividade geral, as teorias de Chern-Simons não dependem de uma estrutura métrica pré-definida: a geometria, que é identificada como campo de gravitação, seria dinâmica. [3]

Uma curiosidade é que estas teorias só ocorrem em dimensão ímpar. Temos um bom entendimento da gravitação em 3 dimensões [8], portanto é natural pensar que seja possível generalizar para dimensões maiores. Contudo a próxima dimensão seria 5, sendo necessário portanto compactificar uma dimensão para compararmos com a RG. [6] [7] [9] Uma diferença significativa entre a gravitação de Chern Simons em $D = 3$ e $D = 5$ é o fato de que para três dimensões não temos graus de liberdade locais, enquanto que para cinco dimensões (bem como para dimensões superiores a 5) temos um número de graus de liberdade diferente de zero. [5]

Recentemente obteve-se avanços significativos no que diz respeito ao entendimento da estrutura dinâmica das teorias de Chern-Simons para a gravitação [4] [5], avanços estes que motivaram a realização deste trabalho. Nestes artigos destacados definem-se as condições necessárias para se ter aquilo que é chamado de teoria genérica. Basicamente trata-se de uma teoria em que o vínculo Hamiltoniano, geralmente de tão difícil tratamento [10], é apenas uma combinação dos demais vínculos existentes, de modo a tornar a análise Hamiltoniana de Dirac, a princípio, menos trabalhosa.

Outra motivação são os trabalhos referentes a expansões de álgebras [11] [12], os quais apresentam outros campos além dos campos de gravitação, na tentativa de talvez se introduzir uma espécie de matéria que interage com o próprio campo de gravitação, tratando-se portanto de uma teoria mais geral. Estes trabalhos chegam a reproduzir a relatividade geral, de modo que seriam bons candidatos na tentativa de se obter uma teoria quântica para a gravitação que seja condizente com a teoria de Einstein. Contudo, adiantamos que na tentativa de se reproduzir os resultados obtidos nestes artigos, encontramos um pequeno problema que nos impossibilita de obter a relatividade geral tal como neles nos é apresentado. Este problema tem haver com os tensores invariantes da álgebra expandida, que discutiremos mais adiante.

Portanto, para entendermos sobre teorias de Chern-Simons em gravitação e, em particular, para introduzirmos uma possível matéria numa teoria em 5 dimensões, o trabalho será estruturado da seguinte forma: No segundo capítulo faremos uma revisão sobre o cálculo exterior de formas diferenciais. No terceiro capítulo faremos uma revisão sobre teoria de grupos e apresentaremos o grupo $(A)dS_5$, muito importante para nós. Além disso apresentaremos resultados sobre novas álgebras obtidas via a extensão da álgebra $(a)dS_5$. No quarto capítulo falaremos sobre formas de Chern-Simons em si e sua importância para a física, bem como apresentaremos resultados importantes de artigos sobre teorias de Chern-Simons em gravitação. Por fim, no último capítulo construiremos uma ação de Chern-Simons para a gravitação em 5 dimensões onde usaremos a álgebra $(a)dS_5$ expandida como álgebra de Lie.

Capítulo 2

Formas diferenciais, uma visão geral

Brevemente falando, para construirmos uma teoria de Chern-Simons nós precisamos das chamadas formas de Chern-Simons, que designaremos por Q , que nada mais são do que objetos a partir dos quais podemos construir uma ação que é invariante de gauge (a menos de termos de borda). No caso da tridimensional essa ação é dada por

$$S = \int \left\langle A, dA + \frac{2}{3}A^2 \right\rangle, \quad (2.1)$$

onde $A = A_\mu dx^\mu$ é uma 1-forma e, além disso é uma conexão do tipo Yang-Mills. O símbolo \langle, \rangle denota uma forma quadrática invariante sob o grupo de calibre considerado (notações explicitadas mais a frente).

Numa teoria de Yang-Mills A faz o papel do potencial de gauge, ao qual está associada uma curvatura F dada por $F = dA + A^2$. No caso particular de uma teoria de gravitação onde o grupo de calibre considerado é o grupo de Poincaré, o grupo de Sitter ou o anti-de Sitter, as componentes de A são a conexão de spin ω e o 3-bein e , F seria a curvatura R e a ação é equivalente a ação de Einstein-Hilbert [8].

Para já uma forma de Chern-Simons num espaço D dimensional é uma D -forma, bastando tomar sua integral para obtermos a referida ação de Chern-Simons. Portanto para entendermos uma teoria de Chern-Simons, principalmente uma teoria de Chern-Simons voltada para a gravitação, é necessário que entendamos bem o que são esses objetos, ditos formas diferenciais. E é justamente nesse âmbito que se baseia esse capítulo.

2.1 O que são formas diferenciais?

Antes de introduzirmos o conceito de formas diferenciais, devemos introduzir o conceito de variedade, pois, de grosso modo, as formas diferenciais são objetos que são funções em alguma determinada variedade. Mais precisamente, elas são elementos do espaço cotangente de uma variedade. Para simplificarmos, daremos todas as definições num sistema de coordenadas específico, apesar destas independentem do sistema de coordenadas adotado.

Dizemos que o conjunto de pontos M é uma variedade diferenciável de dimensão D se primeiramente, trata-se de um espaço topológico. Além disso, para cada ponto P de M , existe uma vizinhança aberta U de P que pode ser mapeada até algum aberto de \mathbb{R}^D , de modo que podemos representar U pelo sistema de coordenadas (x^1, x^2, \dots, x^D) de \mathbb{R}^D . Este mapeamento deve ser um homeomorfismo, ou seja, deve ser contínuo e admitir um inverso também contínuo. Além disso, se tomarmos dois abertos U_1 e U_2 distintos em M que se intersectam, eles nos levarão a dois abertos disjuntos de \mathbb{R}^D , portanto um mesmo ponto da variedade pertencente a $U_1 \cap U_2$ pode ser descrito por dois sistemas de coordenadas diferentes em \mathbb{R}^D . Para termos uma variedade a função que relaciona estes dois sistemas de coordenadas deve ser de classe C^∞ e sua inversa deve existir e ser também de classe C^∞ .

Consideremos agora uma curva $p(t)$, $t \in I$ que passa num aberto U de M . As coordenadas dessa curva são $x^i(p(t))$, $i = 1, \dots, D$. Consideremos também uma função $f(p) : M \rightarrow \mathbb{R}^D$ e definamos o operador diferencial $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, onde $X^i = \frac{dx^i(p(t))}{dt}$. A variação da função f ao longo da curva é dada por

$$\frac{d}{dt} f(p(t)) = \frac{\partial}{\partial x^i} f \frac{dx^i(p(t))}{dt} = Xf \quad (2.2)$$

Nesse sentido consideramos o operador diferencial X como o vetor tangente da variedade M no ponto $p = p(t_0)$, com t_0 agora fixo. Para cada curva diferenciável que passa por p existe um vetor tangente, de modo que podemos definir o espaço tangente de M em p como o espaço de todas as curvas tangentes ao ponto p , o qual denotaremos por $T_p(M)$. Trata-se portanto de um espaço vetorial cuja base, em termos das coordenadas locais é

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}, \quad i = 1, \dots, D \quad (2.3)$$

Podemos ainda definir um espaço vetorial que é dual ao espaço tangente, chamado de espaço cotangente, sendo denotado por $T_p^*(M)$, onde a dualidade é definida a partir do produto interno

$$\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \delta^i_j \quad (2.4)$$

Desse modo a base do espaço cotangente é dada pelas diferenciais

$$\{ dx^i \}, \quad i = 1, \dots, D \quad (2.5)$$

Assim, um elemento qualquer de $T_p^*(M)$, que chamamos de uma 1-forma é dado por

$$\omega = \omega_i dx^i \quad (2.6)$$

com ω_i um tensor covariante cujas componentes podem ser vistas como as componentes da referida forma (fazendo-se uma alusão as componentes de um vetor que é expandido em termos de seus vetores de base).

A fim de definirmos as formas de grau superior a 1 precisamos definir o produto das diferenciais que formam a base de $T_p^*(M)$. Chamamos de "wedge" o produto tensorial completamente antissimétrico entre estas diferenciais e o definimos da seguinte maneira: (FATOR 1/2)

$$dx^\mu \wedge dx^\nu := \frac{1}{2}(dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu) \quad (2.7)$$

onde o símbolo \wedge foi usado para representar a operação wedge. Deste modo fica nítido que $dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu$ e, conseqüentemente, $dx^\mu \wedge dx^\mu = 0$.

O produto wedge para mais de duas formas diferenciais é definido de maneira análoga

$$dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} = \frac{1}{p!} \left(\sum_{\pi} (-1)^{\sigma(\pi)} \pi(dx^{\mu_1}, dx^{\mu_2}, \dots, dx^{\mu_p}) \right) \quad (2.8)$$

onde π representa as permutações de $dx^{\mu_1}, dx^{\mu_2}, \dots, dx^{\mu_p}$ e $\sigma(\pi)$ representa o grau da permutação, valendo +1 de for uma permutação par ou -1 se for uma permutação ímpar.

Feitas essas considerações, podemos definir finalmente o que são as formas diferenciais. De modo geral uma p -forma é um elemento do espaço vetorial de dimensão $\binom{D}{p} = \frac{D!}{p!(D-p)!}$ denotado por $\Lambda^p L$ (D é a dimensão da variedade) tendo o seguinte aspecto

$$\begin{aligned}
0 - \text{forma} & \quad \omega = \omega(x) \\
1 - \text{forma} & \quad \omega = \omega_\mu(x) dx^\mu \\
2 - \text{forma} & \quad \omega = \frac{1}{2!} \omega_{\mu_1 \mu_2}(x) dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \\
& \quad \dots \quad \dots \\
p - \text{forma} & \quad \omega = \frac{1}{p!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}(x) dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}. \quad (2.9)
\end{aligned}$$

O termo $1/p!$ aparece na definição a fim de não contarmos repetidas vezes duas ou mais bases que são equivalentes (as bases $dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}$ e $dx^{\mu_2} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}$ são equivalentes, apenas "apontando" para direções opostas uma vez que $dx^{\mu_2} \wedge dx^{\mu_1} = -dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2}$).

Como o produto wedge é totalmente antissimétrico nos índices das diferenciais, temos então que $\omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}$ representa um tensor covariante totalmente antissimétrico. Além disso os coeficientes das formas são funções suaves da variedade considerada.

Note que não podemos ter uma forma com grau maior que a dimensão da variedade, pois a base do espaço cotangente tem D componentes, e como o produto das diferenciais é totalmente antissimétrico, não podemos construir um objeto totalmente antissimétrico com um número de índices superior a quantidade de elementos de base disponíveis. Algum índice haveria de se repetir, levando portanto a $\omega = 0$.

Apesar do conceito de formas diferenciais ser bastante abstrato, estes objetos são muito úteis e de certa forma, reproduz os resultados do cálculo diferencial e integral, como será visto em alguns exemplos posteriormente. Nesse aspecto, se considerarmos um espaço de dimensão $D = 3$ teremos, analisando-se apenas as componentes, que uma 0-forma é um tensor de grau $(0, 0)$, logo um escalar $A^{(0)}$, com somente uma componente. Uma 1-forma seria um vetor $A^{(1)}_\mu$ com 3 componentes, uma vez que estamos num espaço tridimensional. Uma 2-forma seria uma matriz $A^{(2)}_{\mu\nu}$, mas devido a antissimetria $A^{(2)}_{\mu\nu} = -A^{(2)}_{\nu\mu}$, tendo portanto apenas 3 elementos independentes, logo 3 componentes. Por fim uma 3 forma seria um objeto $A^{(3)}_{\mu\nu\rho}$ de 3 índices inferiores completamente antissimétrico nesse trio de índices, tendo portanto apenas uma componente ou elemento independente. Como não é possível se construir um objeto completamente antissimétrico com mais de 3 índices num espaço tridimensional, todas as formas de grau maior que 3 são nulas.

De maneira geral, o número de "vetores de base" independentes em (2.9), ou seja, o número de produtos de diferenciais distintos, é igual a quantidade de conjuntos de p elementos distintos que se pode formar com um total de D elementos. Em outras palavras, trata-se da quantidade de maneiras de se combinar D elementos distintos tomados p a p . É importante que os elementos

sejam distintos do contrário teríamos o produto de duas diferenciais iguais, o que devido a antissimetria de \wedge seria automaticamente 0. Portanto, a dimensão de $\Lambda^p L$ é de fato dada por

$$\dim \Lambda^p L = \binom{D}{p} = \frac{D!}{p!(D-p)!}, \quad (2.10)$$

como havíamos afirmado anteriormente.

A fim de mostrar posteriormente que de fato esse formalismo pode reproduzir o cálculo diferencial e integral consideremos o caso em que a variedade em questão é o espaço euclidiano tridimensional E_3 . As 1-formas são então dadas por $A^{(1)} = a_x dx + a_y dy + a_z dz$. Temos que todas as 1-formas desse espaço tridimensional são elementos de $\Lambda^1 L$. Por sua vez as 2-formas são dadas por $A^{(2)} = a_{xy} dx \wedge dy + a_{yz} dy \wedge dz + a_{zx} dz \wedge dx$, todas pertencendo ao espaço $\Lambda^2 L$. Por fim, as 3-formas são dadas por $A^{(3)} = a_{xyz} dx \wedge dy \wedge dz$. Devido a antissimetria associada ao produto \wedge , o espaço gerado pelas 3-formas tem dimensão 1, sendo denotado por $\Lambda^3 L$. Como já mencionamos anteriormente, todas as formas de grau maior que a dimensão do espaço considerado são nulas. Vale ressaltar que o coeficientes das formas dependem da posição do espaço onde se encontram (logo são funções de x, y, z).

A partir desse momento, a fim tornar a notação mais sucinta, irei omitir os \wedge 's que aparecem entre as diferenciais, a menos que seja extremamente necessário ou elucidativo tê-los. Mas devemos ter em mente que trata-se de um produto exterior completamente antissimétrico.

2.2 Operações com formas diferenciais

O leitor pode eventualmente estar se perguntando o porquê de se introduzir esse formalismo abstrato e a utilidade do mesmo. Ao longo deste capítulo tentarei indicar alguns fatores que levam a utilização do mesmo, especialmente no contexto da gravitação. Para já asseguro que trata-se de um formalismo bastante poderoso e econômico. Como exemplo consideremos as seguintes operações que podemos fazer com as formas diferenciais.

2.2.1 Soma de formas diferenciais

Tal como podemos somar e subtrair vetores, podemos somar e subtrair formas diferenciais, pois uma vez que estas fazem parte de um espaço vetorial, a soma ou subtração destas nos dá outro elemento do mesmo espaço vetorial. Portanto, de forma esquemática

$$S : \quad (\Lambda^p L) \quad \times \quad (\Lambda^p L) \quad \longrightarrow \quad \Lambda^p L$$

$$\left(\frac{1}{p!} a_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_p} \right) + \left(\frac{1}{p!} b_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_p} \right) = \frac{1}{p!} c_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_p} \quad (2.11)$$

onde é fácil ver que $c_{\mu_1 \dots \mu_p} = a_{\mu_1 \dots \mu_p} + b_{\mu_1 \dots \mu_p}$. Note que a soma de formas diferenciais sempre relaciona dois elementos de um mesmo espaço vetorial. Não faz sentido por exemplo somarmos uma 1-forma com uma 2-forma, uma vez que fazem parte de dois espaços vetoriais diferentes. Seria análogo ao fato de tentarmos por exemplo somar a um escalar um vetor. Contudo, ainda é sempre possível multiplicar um escalar a um vetor, mesmo sendo de espaços distintos, o que nos motiva a próxima operação.

2.2.2 Produto de formas diferenciais

Partindo desse ponto de vista podemos estabelecer uma operação entre formas pertencentes a espaços diferentes. Podemos definir o produto de duas formas diferenciais por meio do produto \wedge . Dessa maneira, se $A^{(p)}$ é uma p -forma e $B^{(q)}$ é uma q -forma, então $C^{(p+q)} = A^{(p)} \wedge B^{(q)}$ é uma $(p+q)$ -forma, de tal modo que

$$\wedge : \quad (\Lambda^p L) \quad \times \quad (\Lambda^q L) \quad \longrightarrow \quad \Lambda^{(p+q)} L$$

$$\left(\frac{1}{p!} a_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_p} \right) \wedge \left(\frac{1}{q!} b_{\nu_1 \dots \nu_q} dx^{\nu_1} \dots dx^{\nu_q} \right) = \frac{1}{(p+q)!} c_{\rho_1 \dots \rho_{p+q}} dx^{\rho_1} \dots dx^{\rho_{p+q}} \quad (2.12)$$

onde $c_{\rho_1 \dots \rho_{p+q}}$ é a antissimetriação de $a_{\rho_1 \dots \rho_p} b_{\rho_{p+1} \dots \rho_{p+q}}$.

Pode-se mostrar que o produto exterior de formas diferenciais é distributivo e associativo, contudo nem sempre é comutativo. Dadas as formas A , B e C elas obedecem a

1. $A \wedge (B + C) = A \wedge B + A \wedge C$, com B e C formas de mesmo grau
2. $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$
3. $A \wedge B = (-1)^{pq} B \wedge A$, com p e q os graus de A e B respectivamente.

Portanto, se uma das formas for de grau par elas comutam. Contudo se ambas forem de grau ímpar elas anticomutam.

No caso tridimensional, por exemplo, se considerarmos as formas $A = a_1 dx^1 + a_2 dx^2 + a_3 dx^3$, $B = b_1 dx^1 + b_2 dx^2 + b_3 dx^3$ e $C = c_1 dx^2 dx^3 + c_2 dx^3 dx^1 + c_3 dx^1 dx^2$ o produto exterior

de $A \wedge B = (a_2b_3 - a_3b_2)dx^2dx^3 + (a_3b_1 - a_1b_3)dx^3dx^1 + (a_1b_2 - a_2b_1)dx^1dx^2$ e o produto de $A \wedge C = (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)dx^1dx^2dx^3$. Logo é notável que o produto exterior de duas 1-formas corresponde ao produto vetorial usual, enquanto o produto exterior de uma 1-forma com uma 2-forma corresponde ao produto escalar. Portanto podemos dizer que os produtos escalar e vetorial no caso tridimensional estão contidos na operação \wedge .

2.2.3 A derivada exterior

Em geral uma forma diferencial, e portanto os coeficientes que acompanham seus vetores de base, são funções numa variedade M . Podemos portanto levantar a seguinte questão: como estas quantidades variam no espaço onde se encontram? De forma similar à derivada de uma função, nós podemos introduzir a derivada de uma forma diferencial, chamada de derivada exterior e representada simplesmente pelo símbolo d . Operacionalmente ela tem a seguinte representação

$$d = \frac{\partial}{\partial x^\mu} dx^\mu \quad (2.13)$$

sendo que a derivada parcial atua nos coeficientes que acompanham as diferenciais das formas, ao mesmo tempo em que estas últimas são multiplicadas por dx^μ . Portanto se $A^{(p)}$ é uma p -forma, então $dA^{(p)}$ é uma $(p + 1)$ -forma. Dessa maneira,

$$d : \Lambda^p L \longrightarrow \Lambda^{p+1} L$$

$$dA^{(p)} = \frac{1}{p!} \frac{\partial}{\partial x^\mu} a_{\mu_1 \dots \mu_p}(x) dx^\mu dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_p} \quad (2.14)$$

onde coloquei a dependência explícita em x para deixar claro que a forma é uma função na variedade que estamos considerando.

Para elucidar um pouco esta operação e para mostrar quão poderoso é esse operador d , consideremos novamente o caso de um espaço tridimensional, onde temos como possíveis formas

$$A^{(0)} = a$$

$$A^{(1)} = a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

$$A^{(2)} = a_{xy} dx dy + a_{yz} dy dz + a_{zx} dz dx$$

$$A^{(3)} = a_{xyz} dx dy dz$$

A atuação de d nas formas irá nos retornar

$$\begin{aligned}
 dA^{(0)} &= \frac{\partial a}{\partial x} dx + \frac{\partial a}{\partial y} dy + \frac{\partial a}{\partial z} dz \\
 dA^{(1)} &= \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) dz dx \\
 dA^{(2)} &= \left(\frac{\partial a_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial a_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial a_{xy}}{\partial z} \right) dx dy dz \\
 dA^{(3)} &= 0
 \end{aligned}$$

Assim, o operador d nos retorna o gradiente, o rotacional e o divergente consoante atua numa 0-forma, 1-forma ou 2-forma respectivamente, de modo que podemos dizer que estes três operadores estão contidos no operador derivada exterior. Portanto a derivada exterior é um operador muito mais geral que estes operadores diferenciais tão importantes para nós.¹

Podemos citar ainda duas propriedades importantes de d . A primeira é que a derivada exterior do produto (wedge) de duas formas obedece a regra de Leibniz graduada: se A é uma p -forma e B uma q -forma, então

$$d(A^{(p)} B^{(q)}) = (dA^{(p)}) B^{(q)} + (-1)^p A^{(p)} dB^{(q)}. \quad (2.15)$$

Dizemos que se uma operação de derivada carrega esse sinal $(-1)^p$ no segundo termo da regra de Leibniz, ela é chamada de antiderivada. Assim a propriedade anterior também é conhecida como regra de antiderivação.

A segunda notável identidade, e muito usual no cálculo exterior, é a nilpodência do operador d , ou seja, $d^2 = 0$, independente do grau da forma em que atua. Isso é fácil de se verificar devido a antissimetria do produto entre as diferenciais. Ora, aplicando d novamente a (2.14) teremos

$$d^2 A^{(p)} = \frac{1}{p!} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\nu} a_{\mu_1 \dots \mu_p}(x) dx^\sigma dx^\nu dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_p} = 0, \quad (2.16)$$

uma vez que as derivadas parciais são simétricas no par σ, ν e o produto wedge $dx^\sigma dx^\nu$ é antissimétrico.

2.2.4 A derivada interior

Vimos que a derivada exterior, operacionalmente falando, introduz uma diferencial a base da forma que atua, levando uma p -forma a uma $(p+1)$ -forma. A operação chamada de derivada

¹ $dA^{(3)} = 0$ pois é uma 4-forma num espaço de dimensão 3

interior percorre o sentido contrário. Ela leva uma $(p + 1)$ -forma a uma p -forma. Desse modo, em termos operacionais, o que esta operação faz é contrair um dos índices da forma em que atua via a multiplicação por um campo vetorial do espaço tangente. Assim, se $\omega \in \Lambda^p L$ é uma p -forma e $X \in T(M)$ um campo vetorial, a operação derivada interior, denotada por i_X é definida por

$$i_X : \Lambda^p L \longrightarrow \Lambda^{p-1} L$$

- 1) i_X é uma antiderivada
 - 2) $i_X f = 0$
 - 3) $i_X dx^\mu = X^\mu,$
- (2.17)

onde f representa alguma função.

Aplicando a derivada interior seguindo essas propriedades a uma 1-forma, o que obtemos é

$$i_X \omega = \omega_\mu X^\mu = \omega(X),$$
(2.18)

sendo $\omega(X)$ o que chamamos de uma 1-forma calculada num campo vetorial, de modo que $\omega(X) = \omega_\mu dx^\mu X^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \omega_\mu X^\nu \delta^\mu_\nu = \omega_\mu X^\mu.$

Aplicando i_X agora a uma 2-forma temos (o sinal de menos aparece devido i_X ser uma antiderivada)

$$i_X \omega = \frac{1}{2!} \omega_{\mu\nu} (X^\mu dx^\nu - dx^\mu X^\nu).$$
(2.19)

Por fim, podemos generalizar a derivada interior para uma p -forma, de modo que

$$\begin{aligned} i_X \omega &= \frac{1}{p!} \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \dots X^{\mu_k} \dots dx^{\mu_p} \\ &= \frac{1}{(p-1)!} X^\nu \omega_{\nu \mu_2 \dots \mu_p} dx^{\mu_2} \dots dx^{\mu_p}. \end{aligned}$$
(2.20)

2.2.5 A derivada de Lie

Um conceito muito importante para a gravitação são as transformações gerais de coordenadas, chamadas de difeomorfismos. Veremos nesta seção que no formalismo das formas diferen-

ciais o conceito de difeomorfismo é equivalente a derivada de Lie das formas diferenciais, de modo que não necessitamos introduzir uma conexão afim para que as formas se transformem de forma covariante.

Sabemos da relatividade geral que um campo vetorial em alguma variedade M descreve um fluxo nessa variedade. Desse modo, consideremos a curva $\lambda(x, t)$ que passa por x num tempo t definida por um campo vetorial X do espaço tangente de modo que X é o vetor tangente a curva. Se considerarmos um outro campo vetorial Y , podemos nos perguntar como ele varia ao longo do fluxo $\lambda(x, t)$ devido a X . Contudo, isso implica em comparar o campo $Y(x)$, que está inicialmente num ponto x , sendo portanto um elemento do espaço tangente definido naquele ponto, denotado por exemplo por $T_x(M)$, com o mesmo campo $Y(x')$ num ponto x' distinto de x , sendo portanto um elemento de $T_{x'}(M)$.

A maneira usual de fazer isto é arrastar $Y(x')$ até x , subtrair ambas as quantidades e dividi-las por t , no limite em que t tende a 0. A fim de não tomar muito o tempo do leitor com cálculos apresentarei apenas o resultado final de todo esse processo. A derivada de Lie de um campo vetorial Y ao longo de X é

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y], \quad (2.21)$$

com

$$[X, Y] = [X, Y]^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu},$$

sendo $[X, Y]^\nu = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} Y^\nu - Y^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} X^\nu$.

Procedendo de maneira análoga podemos calcular a derivada de Lie de uma forma diferencial. Se $\omega(x) \in \Lambda_x^p(M)$ é uma forma, para compararmos como esta muda em dois pontos próximos x e x' ao longo do fluxo $\lambda(x, t)$, precisamos arrastar $\omega(x')$ até x , subtrair ambas as quantidades e dividir o resultado por t no limite em que este tende a zero. Novamente apresentarei apenas o resultado final desse processo. Assim a derivada de Lie de uma p -forma ao longo do fluxo do campo vetorial X é dada por

$$\mathcal{L}_X \omega = (i_X d + di_X)\omega, \quad (2.22)$$

onde i_X é a derivada interior com respeito ao campo vetorial X e d é a derivada exterior. Note que enquanto uma diminui um grau da forma, a outra aumenta, de modo que a derivada de Lie de uma p -forma qualquer é um mapa $\mathcal{L}_X : \Lambda^p L \rightarrow \Lambda^p L$.

Nesse formalismo, as derivadas de Lie são equivalentes a transformações gerais de coordenadas, ou seja, a difeomorfismos. Como exemplo tomemos a derivada de Lie de uma 0-forma. Temos que

$$\mathcal{L}_X \phi = (i_X d + di_X) \phi = i_X d\phi = i_X (\partial_\mu \phi dx^\mu) = X^\mu \partial_\mu \phi, \quad (2.23)$$

que é a transformação geral de coordenadas de um escalar. Para uma 1-forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X (A_\mu dx^\mu) &= i_X (dA_\mu dx^\mu) + d(A_\mu X^\mu) \\ &= \partial_\nu A_\mu X^\nu dx^\mu - \partial_\nu A_\mu dx^\nu X^\mu + \partial_\nu A_\mu dx^\nu X^\mu + A_\mu \partial_\nu X^\mu dx^\nu \\ &= dx^\mu (X^\nu \partial_\nu A_\mu + \partial_\mu X^\nu A_\nu). \end{aligned} \quad (2.24)$$

O termo entre parenteses é exatamente um difeomorfismo de A_μ na direção do campo X , podendo ser representado por $\delta_X A_\mu$.

Procedendo da mesma maneira para uma p -forma podemos mostrar que

$$\mathcal{L}_X \omega_p = \frac{1}{p!} (\delta_X \omega_{\mu_1 \dots \mu_p}) dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_p}. \quad (2.25)$$

Logo concluímos que a derivada de Lie é equivalente a um difeomorfismo.

Agora, no contexto da relatividade geral, as derivadas parciais de um tensor são substituídas pelas derivadas covariantes do mesmo tensor, de modo que o objeto que estamos calculando a derivada se transforme como um tensor. Para isso introduzimos uma conexão dada pelo símbolo de Christoffel, que basicamente são definidos em termos das derivadas da métrica.

Contudo, no formalismo das formas diferenciais, fomos capazes de definir uma derivada de tal modo que a derivada de Lie é equivalente a uma transformação geral de coordenadas, sendo que ω e $d\omega$ se transformam de modo covariante. Logo não há a necessidade nesse formalismo de introduzirmos nenhuma conexão e, não o fazendo, não fazemos menção alguma a métrica. Note que essa propriedade carrega uma informação física muito valiosa. A distância entre os pontos do espaço não é relevante nesse contexto do cálculo exterior. Tudo se passa como se não houvesse ideia de distâncias. Portanto, as propriedades do sistema dependem apenas de aspectos topológicos do espaço-tempo, ou mais precisamente, da topologia da variedade.

2.2.6 Integração de formas diferenciais

Uma vez que mostramos ser possível definir a derivada de uma forma diferencial é natural imaginar que também possamos definir sua integral. De fato já vimos que uma ação de Chern-Simons é uma integral de uma forma diferencial, tal como mostra a equação (2.1). A eventual questão portanto é como definir essa operação.

Sabemos que no cálculo quando queremos realizar alguma integral sempre temos associada a função a qual queremos integrar uma medida de integração, que é dada justamente por diferenciais. O que fazemos basicamente é multiplicar a função, escalar ou vetorial, a esta medida de integração e tomar o operador integral. Agora devemos nos lembrar que os "vetores de base" das formas diferenciais são diferenciais, e por esse motivo suas componentes já carregam consigo essa medida de integração. Desse modo a expressão

$$\int_{\Sigma_p} A^{(p)}, \quad (2.26)$$

onde a integral se dá num subespaço p -dimensional Σ_p , pode ser definida sem a necessidade de se multiplicar $A^{(p)}$ por nenhuma diferencial. Portanto podemos dizer que há um acoplamento muito natural entre p -formas e variedades orientadas de dimensão p , uma vez que podemos integrar p -formas nesses espaços da seguinte maneira

$$\int_{\Sigma_p \subset M} A^{(p)} = \frac{1}{p!} \int A_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} := \frac{1}{p!} \int_{\Sigma_p} A_{\mu_1 \dots \mu_p} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_p} dx^1 \dots dx^p, \quad (2.27)$$

sendo que a integral se dá num subespaço p -dimensional Σ_p da variedade M , também de dimensão p . O lado direito é a usual integral de Lebesgue em \mathbb{R}^p e as diferenciais que ali aparecem não são formas, e sim diferenciais usuais (por isso não há \wedge 's do lado direito), constituindo portanto um volume de integração. O tensor de Levi-Civita que aparece na definição dá conta da antissimetria do produto wedge, sendo dado por

$$\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_p} = \begin{cases} 1, & \text{para permutações pares dos índices} \\ -1, & \text{para permutações ímpares dos índices} \\ 0, & \text{se apresentar índices repetidos} \end{cases} \quad (2.28)$$

Um fato importante, e que mais uma vez mostra o poder desse formalismo, é que podemos relacionar a integral de uma $(p - 1)$ -forma $A \in \Lambda^{p-1}$, calculada na fronteira de uma variedade M p -dimensional com a integral da derivada exterior da forma calculada em toda a variedade, uma vez que a derivada exterior leva uma $(p - 1)$ -forma até uma p -forma. Essa relação é o teorema de Stokes para formas diferenciais e é dada por

$$\int_M dA = \int_{\partial M} A. \quad (2.29)$$

A partir desta relação, no caso em que a variedade considerada é o espaço euclidiano E_3 , nós podemos obter a versão mais familiar do teorema de Stokes no caso do cálculo integral,

o teorema da divergência e o teorema fundamental do cálculo, mostrando mais uma vez que o cálculo exterior é mais abrangente do que o cálculo diferencial e integral ao qual estamos acostumados, tendo este último como um caso particular.

$$\int A^{(p)} = \frac{1}{p!} \int A_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} \varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p} d^p x, \quad (2.30)$$

sendo $\varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}$ o tensor de Levi-Civita p -dimensional.

2.3 Formas fechadas, formas exatas e Lema de Poincaré

Na seção onde falaremos de formas de Chern-Simons, será mostrado a importância destas teorias para a física. Mas para isso é necessário entendermos o lema de Poincaré algébrico, o que nos leva a dois conceitos chaves: o de formas fechadas e o de formas exatas.

Considere o conjunto de todas as p -formas $A^{(p)}$ pertencentes a $\Lambda^p L$ de alguma variedade M tais que $dA^{(p)} = 0$. A essas formas cuja derivada exterior é nula damos o nome de **formas fechadas**. Agora, tal como antes, considere o conjunto de todas as p -formas $B^{(p)}$ pertencentes a $\Lambda^p L$ de alguma variedade M , mas desta vez considere que existe alguma $(p-1)$ -forma $C^{(p-1)}$ tal que $B^{(p)} = dC^{(p-1)}$. Essas formas que podem ser escritas como a derivada exterior de alguma outra forma damos o nome de **formas exatas**.

Note que todas as formas exatas são necessariamente fechadas, pois $dB^{(p)} = d^2 C^{(p-1)} = 0$ devido a nilpotência do operador d .

Além destas definições temos um importante resultado muito útil quando estudamos as formas de Chern-Simons, chamado de Lema de Poincaré algébrico. Basicamente ele admite que temos uma família de p -formas A^I e uma família de $(p+1)$ -formas dA^I onde A^I possui um grau ímpar e dA^I um grau par, e um mapa linear que chamaremos de d tal que $d(A^I) = dA^I$, $d(dA^I) = 0$ e d obedece a fórmula de Leibniz graduada. Portanto, podemos construir um polinômio $P(A^I, dA^I)$ com A^I e dA^I que seja função destas grandezas. O lema reza que, se $dP = 0$, então existe um polinômio $Q(A^I, dA^I)$ tal que $P = dQ$.

Assim, é natural identificarmos d com a derivada exterior que definimos nesse capítulo, uma vez que esta apresenta as propriedades exigidas pelo lema. Como mostraremos futuramente, as teorias de Chern-Simons são construídas em cima de polinômios deste tipo, que levam via o lema de Poincaré algébrico a ações de extrema importância para física, especialmente no contexto da gravitação, conforme mostraremos no capítulo 4.

Capítulo 3

Grupos, álgebras e expansões de álgebras

3.1 O conceito de grupo

Na física estamos constantemente interessados em quantidades que se conservam, pois as leis de conservação são bastante úteis e nos ajudam a resolver diversos problemas. Pelo teorema de Noether, conseguimos relacionar tais quantidades com o conceito de simetria. Basicamente ele diz que, dado um sistema descrito por uma lagrangeana $L(q, \dot{q}, t)$, podemos construir uma ação $S = \int L(q, \dot{q}, t) dt$. Se S for invariante sob um conjunto de transformações de campos ou de coordenadas, então o Lagrangeano define um conjunto de invariantes dinâmicos. Assim, a invariância da ação (simetria) está intimamente ligada às quantidades conservadas.

Chamamos de simetrias externas aquelas ligadas as transformações de coordenadas, como é o caso da simetria temporal, que está associada a conservação de energia, da simetria espacial, relacionada a conservação do momento linear e da simetria de rotação, ligada a conservação do momento angular, dentre outros exemplos. Por outro lado, chamamos simetrias internas as simetrias que ocorrem devido a transformações sob os campos, como é o caso da simetria de gauge.

Nesse contexto, o conceito de grupo é importante para estudarmos essas invariâncias mediante determinadas transformações. Para entendermos isso é bom elucidarmos com um exemplo. Tomemos o grupo de rotações no espaço euclidiano bidimensional. Imagine que descrevemos todos os objetos de nosso interesse num determinado sistema de coordenadas. Porém queremos ver como esses objetos são descritos num segundo sistema de coordenadas rotacionado de um ângulo θ em relação ao primeiro. Suponha que no primeiro sistema o objeto seja representado por um vetor v , enquanto no segundo por um vetor v' . Sabemos que v' relaciona-se com v através da matriz de rotação R dada por

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

de modo que $v' = Rv$.

Suponha que tenhamos uma partícula a se mover no espaço, livre de qualquer potencial. A lagrangeana do ponto de vista do primeiro referencial é portanto $L = \frac{1}{2}mv^2$, com v representando o vetor velocidade. Do ponto de vista do segundo referencial, $L' = \frac{1}{2}mv'^2$. Contudo $v'^2 = v'^T R^T R v = v^2$, onde usei o fato de que $RR^T = R^T R = I$. Logo a ação é invariante sob essas transformações que definem rotações. Assim há uma grandeza associada a essa invariância, que podemos verificar explicitamente ser o momento angular, como é de se esperar, uma vez que é uma partícula livre clássica.

Dessa forma, as quantidades conservadas em física estão relacionadas às transformações que deixam invariante a ação, que por sua vez estão relacionadas com a ideia de um grupo.

Matematicamente precisamos de dois elementos para definir um grupo: um conjunto G e uma operação $*$, que a cada dois elementos x e y de G associa um terceiro elemento $z = x * y$ também pertencente a G .

Para que G defina um grupo, ele deve satisfazer a 4 condições:

- 1) Fechamento: Se $x, y \in G$, então $z = x * y \in G$
- 2) Associatividade: Dados três elementos x, y, z de G , eles devem satisfazer a $(x * y) * z = x * (y * z)$
- 3) Existência da identidade: Existe $e \in G$ tal que para todo $x \in G$, $x * e = e * x = x$
- 4) Existência de inverso: Para todo x de G existe x^{-1} em G de modo que $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$

Como exemplo podemos citar o grupo das matrizes quadradas de dimensão n ortogonais e de determinante $+1$. Essa condição de se ter $\det = +1$ chamamos de especial, e por isso denominamos esse grupo de $SO(n)$.¹ Tal como vimos anteriormente o grupo de rotações bidimensional pode ser representado pelo grupo de matrizes $SO(2)$, uma vez que este atende a todos os requisitos matemáticos para ser um grupo.

Outros exemplos importantes para a física são os grupos $O(n)$, que é o grupo das matrizes reais ortogonais de dimensão n , $U(n)$, que seria o grupo das matrizes complexas unitárias de dimensão n , $SU(n)$, que é o grupo de matrizes complexas unitárias de dimensão n e $\det = +1$,

¹A letra S vem da palavra em Inglês special.

$Sp(n)$, que trata-se do grupo de matrizes simpléticas de dimensão n , $SO(1, 3)$, que é o grupo de Lorentz, $\mathcal{P}^{1,3}$, que é o grupo de Poincaré, dentre outros.

Aos grupos que além das condições anteriores atendem ao fato de que $x*y = y*x$ chamamos de grupos abelianos.

3.2 Grupos de Lie e álgebras de Lie

Dois conceitos usualmente importantes para a física são os grupos e álgebras de Lie. Uma álgebra g de elementos a, b, c, \dots é dita de Lie se as seguintes propriedades acontecem:

- É um espaço vetorial real. Se $a, b \in g$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $\alpha a + \beta b \in g$.
- Temos um produto antissimétrico denotado por $[a, b]$ tal que se $a, b \in g$ então $[a, b] = -[b, a] \in g$
- O produto assim definido obedece a identidade de Jacobi para quaisquer três elementos de g , ou seja, se $a, b, c \in g$

$$[a, [b, c]] + [c, [a, b]] + [b, [c, a]] = 0 \quad (3.1)$$

Tal como em um espaço vetorial nós podemos escrever os elementos do espaço como uma combinação linear dos chamados vetores de base, os elementos de uma álgebra de Lie podem ser escritos como a combinação linear de elementos específicos dessa álgebra. Desse modo, se g é uma álgebra de Lie de base M_a , um elemento genérico u dessa álgebra pode ser escrito da seguinte forma

$$u = \lambda^a M_a. \quad (3.2)$$

Logo uma combinação linear dos M_a , sendo os λ_a s os elementos que parametrizam u (na analogia ao caso vetorial os λ_a s seriam as componentes de u na base M_a).

Um grupo de Lie G é uma estrutura matemática que abrange outras três classes de estruturas. Primeiramente, como o próprio nome indica, trata-se de um grupo, satisfazendo portanto os axiomas de grupo e possuindo as propriedades derivadas dessa classe. Além disso os elementos deste grupo formam um espaço topológico. Por fim eles constituem uma variedade analítica, de modo que ele pode ser localmente especificado por um número específico de parâmetros igual a dimensão da variedade.

Como o próprio nome indica existe uma relação íntima entres os grupos e álgebras de Lie.

De fato, a todo grupo de Lie G existe uma álgebra de Lie g , de mesma dimensão. Essa conexão entre álgebras de Lie e grupos de Lie é dada pelo seguinte mapa exponencial ²

$$A = e^{\lambda^a M_a}, \quad (3.3)$$

onde A é um elemento do grupo de Lie e $\lambda^a M_a$ é um elemento genérico da associada álgebra. Note portanto que todo elemento da álgebra de Lie pode ser mapeado em algum elemento do grupo de Lie, contudo vale frisar que o oposto não é necessariamente verdade. Nem todo elemento de um grupo de Lie pode ser mapeado num elemento da respectiva álgebra.

Dito isto, o produto de Lie dentre quaisquer dois geradores é uma combinação linear dos geradores de G , de modo que

$$[M_A, M_B] = f_{AB}^C M_C \quad (3.4)$$

onde f_{AB}^C são as chamadas constantes de estrutura do grupo, que caracterizam completamente a estrutura local de G . Calculando os colchetes na identidade de Jacobi somos induzidos imediatamente a seguinte relação entre as constantes de estrutura

$$f_{BC}^E f_{AE}^F + f_{AB}^E f_{CE}^F + f_{CA}^E f_{BE}^F = 0. \quad (3.5)$$

Um importante conceito para a construção dos chamados tensores invariantes, importantes na construção de uma teoria de Chern-Simons é o de representação adjunta de uma álgebra de Lie G . Se para todo $a \in g$ existe uma matriz $d \times d$ representada por $\Gamma(a)$ tal que

- Para todo $a, b \in g$ e α, β escalares, $\Gamma(\alpha a + \beta b) = \alpha \Gamma(a) + \beta \Gamma(b)$ e
- Para todo $a, b \in g$, $\Gamma([a, b]) = \Gamma(a)\Gamma(b)$,

então essas matrizes formam uma representação d -dimensional de g .

Se $\Gamma(a)$ é definida de modo que

$$\Gamma(a) = ad(a) = [a, M_a], \quad (3.6)$$

com M_a um elemento da álgebra, chamamos essa representação especial de representação adjunta da álgebra de Lie G .

Portanto, podemos definir a representação adjunta da seguinte forma: Se M é um elemento da álgebra de Lie G , a representação adjunta é um $M \rightarrow ad_M$, atuando em qualquer elemento a

²Quando trata-se de uma matriz o mapa exponencial é dado por uma expansão em série de Taylor do respectivo argumento.

de Lie G como $\text{ad}_M(a) = [a, M]$.

3.3 Um exemplo importante: o grupo $(A)dS_5$

Antes de construirmos qualquer grupo de simetria devemos ter em mente qual espaço estamos trabalhando e qual sua dimensão. Num contexto clássico está de certa forma imbutido que estamos a considerar o espaço euclidiano real, que nos leva a grupos como $O(n)$, ou o espaço complexo, que pode nos levar a $U(n)$. Num contexto relativístico é importante tomarmos conta que o espaço em questão é o espaço de Minkowski.

Quando falamos porém em relatividade geral, o espaço trata-se de uma variedade, não necessariamente minkowskiana. A fim de que seja válido o princípio de equivalência, devemos exigir que em cada ponto do espaço haja invariância de Lorentz. Uma vez que a variedade não é necessariamente plana, isto implica em considerarmos que em cada ponto P , de coordenadas $x = x^\mu$, da variedade, consideramos um plano tangente $T_P(M)$ que é localmente minkowskiano, portanto podemos definir nesse ponto um sistema inercial de coordenadas $X^I(x)$, $I = 0, \dots, 3$ onde valem as transformações de Lorentz, onde os X^I são coordenadas cartesianas de T_P . Desse modo estamos a simular a variedade na vizinhança de P . A não linearidade do movimento indica a presença de um campo gravitacional, de modo que faz sentido definir a grandeza

$$e_\mu^I(x) = \frac{\partial X^I}{\partial x^\mu} \quad (3.7)$$

chamada de vielbein, como o campo de gravitação no ponto x .

Como $T_P(x)$ é um espaço de Minkowski local, de métrica $\eta_{IJ} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, com o intervalo invariante

$$ds^2 = \eta_{IJ} dX^I dX^J, \quad (3.8)$$

ele induz uma métrica $g_{\mu\nu}$ em M através de $e_\mu^I(x)$. Logo temos

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu, \quad (3.9)$$

com $g_{\mu\nu}$ a métrica do espaço-tempo dada por

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu^I(x) \eta_{IJ} e_\nu^J(x). \quad (3.10)$$

Fazendo-se uma transformação de Lorentz, o vielbein transforma-se da seguinte maneira

$$e'^I_\mu(x) = \Lambda^I_J(x)e^J_\mu(J) \quad (3.11)$$

onde $\Lambda(x)$ é a transformação que deixa a métrica η_{IJ} do espaço tangente invariante. Portanto, $\Lambda(x)$ é tal que

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \quad (3.12)$$

No formalismo que desenvolvemos neste trabalho, não usamos o grupo de Lorentz $SO(1, 3)$ como grupo de gauge, mas sim uma extensão deste. Neste contexto três casos têm particular importância: o grupo de Poincaré $ISO(1, 3)$ (também denotado por $\mathcal{P}^{1,3}$), que acrescenta translações espaço-temporais ao grupo de Lorentz, num contexto onde temos a constante cosmológica $\Lambda = 0$ ³ ou os grupos de de Sitter ou anti-de Sitter, onde temos $\Lambda > 0$ e $\Lambda < 0$ respectivamente.

As transformações de gauge para a gravitação em $5D$ serão aquelas que, de forma análoga ao grupo de Lorentz, deixam a métrica η_{IJ} invariante. A diferença agora é que estaremos a usar extensões do grupo de Lorentz (que em $5D$ é o grupo $SO(1, 4)$), de modo que η_{IJ} não possui apenas 5 entradas, mas sim 6, uma vez que os grupos mais naturais de serem usados que contém o grupo $SO(1, 4)$ como subgrupo são os grupos $SO(1, 5)$, $SO(2, 4)$ ou até mesmo $ISO(1, 4)$. Portanto a métrica agora deixa de ser a métrica do espaço tangente e passa a ser a métrica de um espaço interno associado a cada ponto da variedade (fibrado). Assim, as matrizes envolvidas são matrizes 6×6 . O caso onde η_{IJ} tem 1 entrada com sinal -1 correspondente a dimensão temporal e as demais cinco entradas correspondentes as dimensões espaciais com entrada $+1$, chamamos de grupo de de Sitter, ou simplesmente $SO(1, 5)$, ou ainda dS_5 . Já o caso em que η_{IJ} tem 2 entradas com sinal -1 , correspondentes novamente a dimensões temporais, e as quatro entradas restantes $+1$ damos o nome grupo de anti-de Sitter, ou $SO(2, 4)$, ou também AdS_5 . Usualmente representamos ambos os grupos pelo símbolo $(A)dS_5$, sendo a métrica dada por

$$\eta = \text{diag} (-1, 1, 1, 1, 1, s) \quad (3.13)$$

Temos que a entrada 0 refere-se ao tempo, as entradas 1, 2, 3, 4 referem-se ao espaço e a entrada 5, $s = 0, \pm 1$ é um suplementar, que define o grupo como sendo Poincaré, para $s = 0$, de Sitter, para $s = 1$ e anti-de Sitter para $s = -1$.

³não confunda a notação usada para a constante cosmológica com a matriz que representa as transformações de Lorentz. Apesar de terem a mesma simbologia elas possuem significado completamente diferentes. Ficará claro qual é qual pelo contexto, não sendo portanto necessário usar uma notação diferente para ambas

A próxima questão a se fazer é: dada a lei de formação do grupo, qual a correspondente álgebra? O grupo $(A)dS_5$ trata-se de um grupo de Lie, portanto a álgebra associada é chamada de álgebra de Lie G , e a representaremos por $(a)ds_5$. Se Λ é um elemento genérico do grupo, temos que sua transformação infinitesimal é

$$\Lambda = I + M \implies \Lambda^T = I + M^T, \quad (3.14)$$

onde estamos a considerar apenas os termos lineares em M . Dizemos que os M são os geradores de $(A)dS_5$. Logo, substituindo em (3.12), ficamos com

$$(I + M^T)\eta(I + M) = \eta, \quad (3.15)$$

o que nos dá

$$(\eta M)^T = -\eta M \implies M_{IK} = -M_{KI}. \quad (3.16)$$

Portanto, ηM deve ser uma matriz antissimétrica. Como estamos a considerar matrizes 6×6 temos um total de 15 elementos independentes. Logo toda matriz M poderá ser escrita como uma combinação linear de 15 matrizes antissimétricas independentes. Portanto, podemos escolher 15 elementos T^{MN} que são uma base de $(a)ds_5$, definidos por:

$$(T^{MN})_{PQ} = -\delta_P^M \delta_Q^N + \delta_P^N \delta_Q^M \quad (3.17)$$

onde os índices MN referem-se ao número da matriz e PQ as componentes da associada matriz. Por exemplo, $(T^{12})_{PQ}$ seria a matriz 12, ou seja, a matriz antissimétrica cujos únicos elementos diferentes de 0 são $a_{12} = -a_{21} = 1$. $(T^{13})_{PQ}$ seria a matriz 13, ou seja, a matriz antissimétrica cujos únicos elementos diferentes de 0 são $a_{13} = -a_{31} = 1$, e assim por diante.

Esta é a base da álgebra de Lie associada ao grupo $(A)dS_5$. A esta álgebra damos o nome de $(a)ds_5$. Calculando os comutadores obtemos

$$[M_{MN}, M_{PQ}] = M_{MP}\eta_{NQ} - M_{MQ}\eta_{NP} - M_{NP}\eta_{MQ} + M_{NQ}\eta_{MP}, \quad (3.18)$$

o que nos leva as seguintes constantes de estrutura

$$f_{MN,PQ}^{RS} = \frac{1}{2} \{ \eta_{MP}(\delta_N^R \delta_Q^S - \delta_N^S \delta_Q^R) + \eta_{NQ}(\delta_M^R \delta_P^S - \delta_M^S \delta_P^R) + \eta_{PN}(\delta_Q^R \delta_M^S - \delta_Q^S \delta_M^R) + \eta_{QM}(\delta_P^R \delta_N^S - \delta_P^S \delta_N^R) \}. \quad (3.19)$$

Substituindo essas constantes de estrutura em (3.5) verificamos que de fato a igualdade de Jacobi para as constantes de estrutura obtidas acontece. Nesse caso, os índices A, B, C de (3.5) são índices coletivos e devem ser identificados como $A = MN, B = PQ, C = RS$.

3.4 A expansão S

Suponha que conhecemos uma álgebra de $g = \text{Lie } G$ com base $\{T_A\}$ e constantes de estrutura dadas por f_{AB}^C . Então os comutadores são

$$[T_A, T_B] = f_{AB}^C T_C. \quad (3.20)$$

Agora, dado um semigrupo abeliano $S = \{\lambda_\alpha\}$, com $\alpha = 0, 1, \dots, n$, nós podemos mostrar que o produto direto $S \times g$ é outra álgebra de Lie, chamada álgebra S-expandida de g , com base $T_{A\alpha} = \lambda_\alpha T_A$. [11] [12] Basicamente definimos um produto entre todos os elementos de base de g com cada um dos elementos de S . Desse modo obtemos uma álgebra mais ampla que g , sendo que esta pode ser vista como uma subálgebra de $S \times g$.

O produto de Lie, é definido de modo que

$$[T_{A\alpha}, T_{B\beta}] = [\lambda_\alpha T_A, \lambda_\beta T_B] := \lambda_\alpha \lambda_\beta [T_A, T_B] = K_{\alpha\beta}^\gamma f_{AB}^C \lambda_\gamma T_C \quad (3.21)$$

onde a quantidade $K_{\alpha\beta}^\gamma$ chamamos de 2-seletor, sendo dado por

$$K_{\alpha\beta}^\gamma = \begin{cases} 1, & \lambda_\alpha \lambda_\beta = \lambda_\gamma \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (3.22)$$

Da relação (3.21) fica claro que as constantes de estrutura dessa álgebra expandida são

$$f_{A\alpha, B\beta}^{C\gamma} = K_{\alpha\beta}^\gamma f_{AB}^C. \quad (3.23)$$

É nítido que a combinação linear de dois elementos de $S \times g$ ainda pertence a $S \times g$, bem como seu comutador. Menos nítido é o fato de que a identidade de Jacobi realmente acontece. Calculando os colchetes do lado esquerdo de (3.1) somos levados a

$$(K_{\beta\gamma}^\delta K_{\alpha\delta}^\epsilon f_{BC}^E f_{AE}^F + K_{\alpha\beta}^\delta K_{\gamma\delta}^\epsilon f_{AB}^E f_{CE}^F + K_{\gamma\alpha}^\delta K_{\beta\delta}^\epsilon f_{CA}^E f_{BE}^F) T_{F\epsilon} \quad (3.24)$$

De acordo com a definição de seletor vemos que o produto $K_{\beta\gamma}{}^\delta K_{\alpha\delta}{}^\varepsilon = 1$ se $\lambda_\alpha\lambda_\beta\lambda_\gamma = \lambda_\varepsilon$, o que nos induz a definição do tri-seletor

$$K_{\alpha\beta\gamma}{}^\varepsilon = \begin{cases} 1, \lambda_\alpha\lambda_\beta\lambda_\gamma = \lambda_\varepsilon \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}, \quad (3.25)$$

de modo a deixar claro que $K_{\alpha\beta\gamma}{}^\varepsilon = K_{\beta\gamma}{}^\delta K_{\alpha\delta}{}^\varepsilon$.

Como o semigrupo é abeliano, não importa a ordem dos λ , pois teremos sempre o mesmo tri-seletor, de modo que obtemos como resultado que

$$K_{\alpha\beta\gamma}{}^\varepsilon (f_{BC}{}^E f_{AE}{}^F + f_{AB}{}^E f_{CE}{}^F + f_{CA}{}^E f_{BE}{}^F) T_{F\varepsilon} = 0, \quad (3.26)$$

devido a relação (3.5), verificando assim a identidade de Jacobi. Como conclusão temos que $S \times g$ é de fato uma álgebra de Lie.

Como exemplo podemos tomar o caso de interesse particular onde $g = (a)dS_5$ e $S = Z_2 = \{\lambda_0, \lambda_1\}$ é um grupo abeliano com a tabela de multiplicação

Z_2	λ_0	λ_1
λ_0	λ_0	λ_1
λ_1	λ_1	λ_0

Seja $B = Z_2 \times (a)dS_5$. Os geradores e as constantes de estrutura são portanto $T_{\alpha MN} = \lambda_\alpha T_{MN}$ e $f_{MN\alpha, PQ\beta}{}^{RS\gamma} = K_{\alpha\beta}{}^\gamma f_{MN, PQ}{}^{RS}$, com T_{MN} e $f_{MN, PQ}{}^{RS}$ dados por (3.17) e (3.19). Note que $M, N, \dots = 0, 1, \dots, 5$ e $\alpha, \beta, \dots = 0, 1$.

Portanto passamos a ter uma álgebra com o dobro de geradores. Isto implica o dobro de campos na teoria. A teoria de gravitação de Chern-Simons em $5D$ que usa o grupo de Lorentz como grupo associado, ou extensões deste como Poincaré e $(A)dS_5$, de modo que os campos da teoria são campos de gravitação. Uma vez que usamos uma álgebra expandida passamos a ter mais campos na teoria, campos estes que interagem com os campos de gravitação. Isso nos faz interpretar esses novos campos como uma possibilidade de se introduzir a matéria nas teorias de gravitação.

Vamos mostrar posteriormente que as teorias de Chern-Simons para a gravitação em $5D$ com o grupo de calibre $(A)dS_5$ leva a uma ação que é a soma da ação de Einstein-Hilbert, da ação com termo devido a constante cosmológica e um termo quadrático na curvatura R , conhecido como termo de Gauss-Bonnet. Nesse contexto as componentes da conexão A são os campos de gravitação no formalismo chamado de formalismo de primeira ordem.

3.5 A redução H

Inspirados na seção anterior tomemos o semigrupo S como sendo o grupo cíclico de $2n$ elementos $Z_{2n} = \{\lambda_0, \dots, \lambda_{2n-1}\}$. Como vimos na seção anterior o produto $Z_{2n} \times (a)dS_5$ é uma álgebra de Lie. Se impormos a condição sobre os geradores de que $T_{A,\alpha+n} = -T_{A,\alpha}$, com $\alpha = 0, \dots, n-1$, obteremos novamente uma nova álgebra de Lie, dessa vez com a metade dos geradores de $Z_{2n} \times (a)dS_5$. Esta condição sobre os geradores é equivalente a se impor a condição de que $\lambda_{\alpha+n} = -\lambda_\alpha$ sobre os elementos do subgrupo. Esta condição é chamada na literatura como condição H e portanto denotamos essa nova álgebra por $(Z_{2n} \times (a)dS_5)_H$. [11]

Podemos calcular os comutadores dos geradores da maneira abaixo (o índice Γ abaixo representa uma soma implícita sobre todos os geradores do grupo, logo $\Gamma = 0, \dots, 2n-1$, enquanto o índice γ é uma soma implícita com $\gamma = 0, \dots, n-1$):

$$\begin{aligned}
 [T_{A\alpha}, T_{B\beta}] &= f_{A\alpha, B\beta}{}^{C\Gamma} T_{C\Gamma} \\
 &= K_{\alpha\beta}{}^\Gamma f_{AB}{}^C T_{C\Gamma} \\
 &= K_{\alpha\beta}{}^\gamma f_{AB}{}^C T_{C\gamma} + K_{\alpha\beta}{}^{\gamma+n} f_{AB}{}^C T_{C,\gamma+n} \\
 &= (K_{\alpha\beta}{}^\gamma - K_{\alpha\beta}{}^{\gamma+n}) f_{AB}{}^C T_{C\gamma} \\
 &= \bar{K}_{\alpha\beta}{}^\gamma f_{AB}{}^C T_{C\gamma}
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

onde nós definimos $\bar{K}_{\alpha\beta}{}^\gamma = K_{\alpha\beta}{}^\gamma - K_{\alpha\beta}{}^{\gamma+n}$. Logo, é claro que as constantes de estrutura são $f_{MN\alpha, PQ\beta}{}^{RS\gamma} = \bar{K}_{\alpha\beta}{}^\gamma f_{MN, PQ}{}^{RS}$

Como exemplo tomemos novamente $g = (a)dS_5$ e S o semigrupo $Z_4 = \{\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, com a seguinte tabela de multiplicação:

Z_4	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3
λ_0	λ_0	λ_1	λ_2	λ_3
λ_1	λ_1	λ_2	λ_3	λ_0
λ_2	λ_2	λ_3	λ_0	λ_1
λ_3	λ_3	λ_0	λ_1	λ_2

A condição H é equivalente a termos $\lambda_2 = -\lambda_0$ e $\lambda_3 = -\lambda_1$. Desse modo $C = (Z_4 \times (a)dS_5)_H$ é uma álgebra de Lie⁴ cujos geradores e constantes de estrutura são $T_{MN\alpha} = \lambda_\alpha T_{MN}$ e $f_{MN\alpha, PQ\beta}{}^{RS\gamma} = \bar{K}_{\alpha\beta}{}^\gamma f_{MN, PQ}{}^{RS} = (K_{\alpha\beta}{}^\gamma - K_{\alpha\beta}{}^{\gamma+2}) f_{MN, PQ}{}^{RS}$, respectivamente, com T_{MN} e $f_{MN, PQ}{}^{RS}$ referindo-se a $(a)dS_5$. Note que imposta a condição H os índices α, β, γ assumem apenas dois valores, 0 ou 1, mesmo o grupo discreto possuindo quatro elementos. Isso se deve

⁴Na literatura essa álgebra é chamada de C_5 , contudo como veremos adiante podemos trabalhar tanto com $B = Z_2 \times (a)dS_5$ quanto com $C = (Z_4 \times (a)dS_5)_H$ de maneira equivalente, de modo que guardaremos a simbologia C_5 para quando estivermos trabalhando com ambas simultaneamente.

ao fato desta condição amarrar a segunda metade do semigrupo com a primeira metade, de modo que os quatro elementos desse exemplo não são todos independentes.

Tal como antes temos o dobro de geradores de $(a)dS_5$. No capítulo 5 mostraremos que isso implica em termos o dobro de campos, de modo que também podemos interpretar esses campos extras como uma possível tentativa de se introduzir uma matéria na teoria.

Notamos ainda que como temos um número de geradores igual a metade dos elementos de Z_4 podemos, para efeitos práticos considerar o semigrupo \bar{Z}_2 com a seguinte tabela de multiplicação

$Z_4^{(H)}$	λ_0	λ_1
λ_0	λ_0	λ_1
λ_1	λ_1	$-\lambda_0$

Basicamente fizemos um recorte no quarto superior esquerdo da tabela de multiplicação de Z_4 , uma vez que toda a informação da tabela inteira está contida nesta parte (basta usar a condição H em toda a tabela para se verificar isso).

3.6 Tensores invariantes

Como citamos no início do capítulo, um ingrediente importante para se construir uma ação de Chern-Simons seria os tensores invariantes da álgebra considerada. Basicamente, se g_{ABC} é um tensor invariante na representação adjunta de qualquer álgebra (A, B, C podem representar índices coletivos) com constantes de estrutura f_{DE}^F , então ele obedece a relação [3]

$$f_{DA}^E g_{EBC} + f_{DB}^E g_{AEC} + f_{DC}^E g_{ABE} = 0. \quad (3.28)$$

Podemos generalizar a expressão anterior considerando um tensor com n índices: $g_{a_1 a_2 \dots a_n}$ será invariante na representação adjunta se obedecer a

$$f_{ba_1}^c g_{ca_2 \dots a_n} + f_{ba_2}^c g_{a_1 c \dots a_n} + \dots + f_{ba_n}^c g_{a_1 a_2 \dots c} = 0 \quad (3.29)$$

Desse modo, a condição de invariância do caso $(a)dS_5$ nos mostra que

$$f_{MN, M_1 N_1}^{PQ} g_{PQM_2 N_2 M_3 N_3} + f_{MN, M_2 N_2}^{PQ} g_{M_1 N_1 PQM_3 N_3} + f_{MN, M_3 N_3}^{PQ} g_{M_1 N_1 M_2 N_2 PQ} = 0 \quad (3.30)$$

Das constantes de estrutura obtidas em (3.19) e da relação anterior podemos mostrar que $g_{MNPQRS} = \varepsilon_{MNPQRS}$, ou seja, o tensor invariante para a álgebra $(a)dS_5$ é o tensor de Levi-Civita de seis índices.

A fim de obtermos uma teoria expandida da gravitação, usando como álgebras de Lie $B = Z_2 \times (a)dS_5$ e $C = (Z_4 \times (a)dS_5)_H$, devemos portanto calcular o tensor invariante em cada uma dessas álgebras. Contudo vale notar que ambas as álgebras tem a mesma quantidade de geradores (um todo de 30 geradores), sendo que as constantes de estrutura tem uma forma bem similar.

Para a álgebra B temos

$$f_{MN\alpha, PQ\beta}^{(B)RS\gamma} = K_{\alpha\beta}{}^\gamma f_{MN,PQ}^{RS} \quad (3.31)$$

enquanto para a álgebra C

$$\begin{aligned} f_{MN\alpha, PQ\beta}^{(C)RS\gamma} &= \bar{K}_{\alpha\beta}{}^\gamma f_{MN,PQ}^{RS} \\ &= (K_{\alpha\beta}{}^\gamma - K_{\alpha\beta}{}^{\gamma+2}) f_{MN,PQ}^{RS} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Uma vez que os $K's$ e os $\bar{K}'s$ são sempre 0, 1 ou -1 , as constantes de estrutura serão quase todas iguais, exceto quando os índices α, β, γ corresponderem a $\bar{K} = -1$. Portanto basta nos atentarmos as diferenças entre os $K's$ e os $\bar{K}'s$ para diferenciarmos as álgebras B e C . Dito isto temos que os $K's$ não nulos são $K_{00}^0 = 1$, $K_{01}^1 = K_{10}^1 = 1$ e $K_{11}^0 = 1$, enquanto os $\bar{K}'s$ não nulos são $\bar{K}_{00}^0 = 1$, $\bar{K}_{01}^1 = \bar{K}_{10}^1 = 1$ e $\bar{K}_{11}^0 = -1$. Desse modo B e C apresentarão resultados diferentes apenas quando $\alpha = \beta = 1$ e $\gamma = 0$.

Entretanto podemos considerar ambos os casos de uma só vez se abrangermos a definição de seletor. Consideremos S o semigrupo de dois elementos $\bar{Z}_2 = \{\lambda_0, \lambda_1\}$ com a seguinte tabela de multiplicação onde $\varepsilon = \pm 1$, onde $+1$ corresponde a álgebra B e -1 corresponde a álgebra

S	λ_0	λ_1
λ_0	λ_0	λ_1
λ_1	λ_1	$\varepsilon\lambda_0$

C . Note que se $\varepsilon = +1$, teremos Z_2 , que é de fato um grupo. Contudo para $\varepsilon = -1$, temos o semigrupo \bar{Z}_2 .

Desse modo é natural definirmos o bi-seletor da seguinte maneira:

$$K_{\alpha\beta}{}^\gamma = \begin{cases} 1, & \lambda_\alpha \lambda_\beta = \lambda_\gamma \\ \varepsilon, & \lambda_\alpha \lambda_\beta = \varepsilon \lambda_\gamma \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (3.33)$$

Note que para $\varepsilon = +1$ essa definição abrange a definição inicial de bi-seletor. Agora, quando $\varepsilon = -1$ esta definição nos dá exatamente o \bar{K} . Assim, podemos tratar ambas as álgebras de uma maneira única. Passaremos a designá-las por C_5 , sendo as constantes de estrutura ⁵

$$f_{MN\alpha, PQ\beta}{}^{RS\gamma} = K_{\alpha\beta}{}^\gamma f_{MN, PQ}{}^{RS} \quad (3.34)$$

com K dado pela definição (3.33).

Feita esta consideração, a condição de invariância (3.28) para C_5 escreve-se como:

$$\begin{aligned} & K_{\alpha\alpha_1}{}^\beta f_{MN, M_1 N_1}{}^{PQ} g_{PQ\beta, M_2 N_2 \alpha_2, M_3 N_3 \alpha_3} + \\ & K_{\alpha\alpha_2}{}^\beta f_{MN, M_2 N_2}{}^{PQ} g_{M_1 N_1 \alpha_1, PQ\beta, M_3 N_3 \alpha_3} + \\ & K_{\alpha\alpha_3}{}^\beta f_{MN, M_3 N_3}{}^{PQ} g_{M_1 N_1 \alpha_1, M_2 N_2 \alpha_2, PQ\beta} = 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Os K 's não nulos são exatamente $K_{00}^0 = 1$, $K_{01}^1 = K_{10}^1 = 1$ e $K_{11}^0 = \varepsilon$ e, uma vez que os índices $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 0, 1$ somente, temos 16 possibilidades de combinação desses índices, levando a 16 equações que os tensores invariantes precisam obedecer. Em especial, o seguinte caso

$$\alpha = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$$

nos leva a

$$\begin{aligned} & K_{00}^0 f_{MN, M_1 N_1}{}^{PQ} g_{PQ0, M_2 N_2 0, M_3 N_3 0} + \\ & K_{00}^0 f_{MN, M_2 N_2}{}^{PQ} g_{M_1 N_1 0, PQ0, M_3 N_3 0} + \\ & K_{00}^0 f_{MN, M_3 N_3}{}^{PQ} g_{M_1 N_1 0, M_2 N_2 0, PQ0} = 0, \end{aligned} \quad (3.36)$$

Como $g_{PQ0, M_2 N_2 0, M_3 N_3 0}$ obedece a condição de invariância para $(a)dS_5$ dada por (3.30), nós podemos concluir que $g_{M_1 N_1 0, M_2 N_2 0, M_3 N_3 0} = x_{000} \varepsilon_{M_1 N_1 M_2 N_2 M_3 N_3}$. Agora o caso

$$\alpha = 0, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$$

⁵Na literatura o símbolo C_5 é usado apenas para a álgebra $(Z_4 \times (a)dS_5)_H$, contudo como vimos que ambas podem ser tratadas da mesma forma, decidimos chamar tanto $(Z_4 \times (a)dS_5)_H$ como $Z_2 \times (a)dS_5$ por C_5

Nos mostra que

$$\begin{aligned}
 & K_{01}^1 f_{MN, M_1 N_1}^{PQ} g_{PQ1, M_2 N_2 0, M_3 N_3 0} + \\
 & K_{00}^0 f_{MN, M_2 N_2}^{PQ} g_{M_1 N_1 1, PQ0, M_3 N_3 0} + \\
 & K_{00}^0 f_{MN, M_3 N_3}^{PQ} g_{M_1 N_1 1, M_2 N_2 0, PQ0} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Como $K_{01}^1 = K_{00}^0 = 1$, e como $g_{PQ1, M_2 N_2 0, M_3 N_3 0}$ também obedece a condição de invariância para $(a)dS_5$, concluímos que $g_{M_1 N_1 1, M_2 N_2 0, M_3 N_3 0} = x_{100} \varepsilon_{M_1 N_1 M_2 N_2 M_3 N_3}$. Ainda, como g_{ABC} deve ser um tensor simétrico, temos que $g_{M_1 N_1 1, M_2 N_2 1, M_3 N_3 0}$ deve ser da forma $g_{M_1 N_1 0, M_2 N_2 1, M_3 N_3 0} = x_{010} \varepsilon_{M_1 N_1 M_2 N_2 M_3 N_3}$, assim como deveremos ter $g_{M_1 N_1 0, M_2 N_2 0, M_3 N_3 1} = x_{001} \varepsilon_{M_1 N_1 M_2 N_2 M_3 N_3}$, com $x_{100} = x_{010} = x_{001}$.

Outro caso de interesse é

$$\alpha = 0, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1$$

$$\begin{aligned}
 & K_{01}^1 f_{MN, M_1 N_1}^{PQ} g_{PQ1, M_2 N_2 1, M_3 N_3 1} + \\
 & K_{01}^1 f_{MN, M_2 N_2}^{PQ} g_{M_1 N_1 1, PQ1, M_3 N_3 1} + \\
 & K_{01}^1 f_{MN, M_3 N_3}^{PQ} g_{M_1 N_1 1, M_2 N_2 1, PQ1} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Pelos mesmos argumentos temos $g_{M_1 N_1 1, M_2 N_2 1, M_3 N_3 1} = x_{111} \varepsilon_{M_1 N_1 M_2 N_2 M_3 N_3}$. Por fim, se considerarmos

$$\alpha = 0, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0$$

$$\begin{aligned}
 & K_{01}^1 f_{MN, M_1 N_1}^{PQ} g_{PQ1, M_2 N_2 1, M_3 N_3 0} + \\
 & K_{01}^1 f_{MN, M_2 N_2}^{PQ} g_{M_1 N_1 1, PQ1, M_3 N_3 0} + \\
 & K_{00}^0 f_{MN, M_3 N_3}^{PQ} g_{M_1 N_1 1, M_2 N_2 1, PQ0} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Pelas mesmas razões de invariância e simetria $g_{M_1 N_1 1, M_2 N_2 1, M_3 N_3 0} = x_{110} \varepsilon_{M_1 N_1 M_2 N_2 M_3 N_3}$, $g_{M_1 N_1 1, M_2 N_2 0, M_3 N_3 1} = x_{101} \varepsilon_{M_1 N_1 M_2 N_2 M_3 N_3}$ e $g_{M_1 N_1 0, M_2 N_2 1, M_3 N_3 1} = x_{011} \varepsilon_{M_1 N_1 M_2 N_2 M_3 N_3}$, com $x_{011} = x_{101} = x_{110}$.

Como conclusão provisória desta análise nós temos que o tensor invariante de C_5 deve ter a seguinte forma

$$g_{M_1 N_1 \alpha_1, M_2 N_2 \alpha_2, M_3 N_3 \alpha_3} = x_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \varepsilon_{M_1 N_1 M_2 N_2 M_3 N_3} \quad (3.40)$$

com 4 parâmetros independentes: x_{000} , x_{100} , x_{011} e x_{111} . Contudo, analisamos apenas 4 das 16 combinações possíveis para os índices do subgrupo em (3.35). Falta-nos ainda analisar as outras 12. Para fazer isso vamos nos focar em apenas 6 delas, visto que as demais são equivalentes a alguma destas. Usando a expressão anterior para o tensor invariante temos os seguintes casos (os casos equivalentes estão indicados em parênteses):

Caso 1)

$$\alpha = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1$$

$$(\alpha = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0)$$

$$x_{001} (f_{MN, M_1 N_1}{}^{PQ} \varepsilon_{PQM_2 N_2 M_3 N_3} + f_{MN, M_2 N_2}{}^{PQ} \varepsilon_{M_1 N_1 PQM_3 N_3} + f_{MN, M_3 N_3}{}^{PQ} \varepsilon_{M_1 N_1 M_2 N_2 PQ}) = 0 \quad (3.41)$$

O lado esquerdo desta equação é identicamente zero por causa da condição de invariância de $(a)dS_5$, dada pela equação (3.30). Portanto não tem nada de novo a acrescentar, uma vez que nos leva a uma relação do tipo $0 = 0$.

Caso 2)

$$\alpha = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1$$

$$(\alpha = 0, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1)$$

$$x_{011} (f_{MN, M_1 N_1}{}^{PQ} \varepsilon_{PQM_2 N_2 M_3 N_3} + f_{MN, M_2 N_2}{}^{PQ} \varepsilon_{M_1 N_1 PQM_3 N_3} + f_{MN, M_3 N_3}{}^{PQ} \varepsilon_{M_1 N_1 M_2 N_2 PQ}) = 0 \quad (3.42)$$

Pelo mesmo motivo teremos novamente uma relação do tipo $0 = 0$.

Caso 3)

$$\alpha = 1, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$$

$$(f_{MN, M_1 N_1}{}^{PQ} x_{100} \varepsilon_{PQM_2 N_2 M_3 N_3} + f_{MN, M_2 N_2}{}^{PQ} x_{010} \varepsilon_{M_1 N_1 PQM_3 N_3} + x_{001} f_{MN, M_3 N_3}{}^{PQ} \varepsilon_{M_1 N_1 M_2 N_2 PQ}) = 0 \quad (3.43)$$

Esta equação também nos leva a uma relação do tipo $0 = 0$, uma vez que $x_{100} = x_{010} = x_{001}$.

Caso 4)

$$\alpha = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1$$

$$\begin{aligned} (f_{MN, M_1 N_1}{}^{PQ} x_{011} \varepsilon_{PQM_2 N_2 M_3 N_3} + f_{MN, M_2 N_2}{}^{PQ} x_{101} \varepsilon_{M_1 N_1 PQM_3 N_3} \\ x_{110} f_{MN, M_3 N_3}{}^{PQ} \varepsilon_{M_1 N_1 M_2 N_2 PQ}) = 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

Mais uma vez somos levados $0 = 0$, uma vez que $x_{011} = x_{101} = x_{110}$.

Caso 5)

$$\alpha = 1, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1$$

$$(\alpha = 1, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0 \text{ ou } \alpha = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0)$$

$$\begin{aligned} x_{011} (f_{MN, M_1 N_1}{}^{PQ} \varepsilon_{PQM_2 N_2 M_3 N_3} + f_{MN, M_2 N_2}{}^{PQ} \varepsilon_{M_1 N_1 PQM_3 N_3}) + \\ \varepsilon x_{000} f_{MN, M_3 N_3}{}^{PQ} \varepsilon_{M_1 N_1 M_2 N_2 PQ} = 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde ε é devido a definição de bi-seletor (3.33). Usando (3.30) nós temos

$$\begin{aligned} -x_{011} f_{MN, M_3 N_3}{}^{PQ} \varepsilon_{M_1 N_1 M_2 N_2 PQ} + \varepsilon x_{000} f_{MN, M_3 N_3}{}^{PQ} \varepsilon_{M_1 N_1 M_2 N_2 PQ} = 0 \\ (-x_{011} + \varepsilon x_{000}) f_{MN, M_3 N_3}{}^{PQ} \varepsilon_{M_1 N_1 M_2 N_2 PQ} = 0, \end{aligned}$$

e como $f_{MN, M_3 N_3}{}^{PQ} \varepsilon_{M_1 N_1 M_2 N_2 PQ}$ não é zero, nós temos que $x_{011} = \varepsilon x_{000}$.

Caso 6)

$$\alpha = 1, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1$$

$$(\alpha = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1 \text{ ou } \alpha = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0)$$

$$\begin{aligned} x_{111} f_{MN, M_1 N_1}{}^{PQ} \varepsilon_{PQM_2 N_2 M_3 N_3} + \varepsilon x_{001} (f_{MN, M_2 N_2}{}^{PQ} \varepsilon_{M_1 N_1 PQM_3 N_3} \\ f_{MN, M_3 N_3}{}^{PQ} \varepsilon_{M_1 N_1 M_2 N_2 PQ}) = 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Usando novamente (3.30), nós obtemos

$$\begin{aligned} x_{111} f_{MN, M_1 N_1}{}^{PQ} \varepsilon_{PQM_2 N_2 M_3 N_3} - \varepsilon x_{001} f_{MN, M_1 N_1}{}^{PQ} \varepsilon_{PQM_2 N_2 M_3 N_3} = 0 \\ (x_{111} - \varepsilon x_{001}) f_{MN, M_1 N_1}{}^{PQ} \varepsilon_{PQM_2 N_2 M_3 N_3} = 0, \end{aligned}$$

e, uma vez que $f_{MN, M_1 N_1}{}^{PQ} \varepsilon_{PQM_2 N_2 M_3 N_3}$ também não é zero, nós temos que $x_{111} = \varepsilon x_{001}$, ou

ainda, $x_{001} = \varepsilon x_{111}$

Depois de todos esses cálculos nós concluímos que os tensores invariantes de C_5 não possuem mais 4 termos independentes, mas em vez disso eles apresentam apenas 2. Nomeadamente x_{000} e x_{111} . Todos os outros fatores advindos do semigrupo podem ser escritos em termos destes.

Agora, podemos reescrever o tensor invariante (3.40) de forma a tomarmos essa interdependência entre os x 's se também abrangermos a definição do tri-seletor para a seguinte:

$$K_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta = \begin{cases} 1, \lambda_\alpha\lambda_\beta\lambda_\gamma = \lambda_\delta \\ \varepsilon, \lambda_\alpha\lambda_\beta\lambda_\gamma = \varepsilon\lambda_\delta \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}, \quad (3.47)$$

Desse modo, podemos escrever $x_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = c_\delta K_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{}^\delta$, com c_δ constante. A vantagem de se escrever os x 's dessa maneira é porque fica explícito a dependência entre eles. Como exemplo $x_{000} = c_0 K_{000}{}^0 + c_1 K_{000}{}^1 = c_0$, enquanto $x_{011} = c_0 K_{011}{}^0 + c_1 K_{011}{}^1 = \varepsilon c_0$ que é exatamente o que obtemos. Com isso escrevemos o tensor invariante de uma maneira mais simples com apenas dois parâmetros independentes. Logo, como conclusão

$$g_{MN\alpha,PQ\beta,RS\gamma} = c_\delta K_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta \varepsilon_{MNPQRS}. \quad (3.48)$$

A referência [11] considera o caso em que $\varepsilon = -1$, contudo o resultado obtido distoa do encontrado neste trabalho. Os autores obtiveram um tensor invariante com 4 parâmetros independentes ao invés de 2. A expressão obtida por eles é bem similar a expressão (3.48), contudo com $\delta = 0, 1, 2, 3$, o que leva a 4 constantes arbitrárias (no nosso caso $\delta = 0, 1$). Desse modo o tensor invariante obtido em [11] para o caso considerado, dado por

$$g_{MN\alpha,PQ\beta,RS\gamma} = \sum_{\delta=0}^3 c_\delta K_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta \varepsilon_{MNPQRS},$$

não está correto.

De fato mostramos explicitamente que não se trata de um tensor invariante. Caso fosse, deveria obedecer a condição de invariância (3.28). Porém ele não obedece. O único modo de que a condição de invariância seja satisfeita é se tivermos relações entres os possíveis valores de c , como mostraremos. Calculando o lado esquerdo de (3.28) temos

$$\sum_{\delta=0}^3 c_{\delta} (\bar{K}_{\alpha\alpha_1}^{\beta} K_{\beta\alpha_2\alpha_3}^{\delta} f_{MN, M_1 N_1}^{PQ} \varepsilon_{PQM_2 N_2 M_3 N_3} + \bar{K}_{\alpha\alpha_2}^{\beta} K_{\alpha_1\beta\alpha_3}^{\delta} f_{MN, M_2 N_2}^{PQ} \varepsilon_{M_1 N_1 PQM_3 N_3} + \bar{K}_{\alpha\alpha_3}^{\beta} K_{\alpha_1\alpha_2\beta}^{\delta} f_{MN, M_3 N_3}^{PQ} \varepsilon_{M_1 N_1 M_2 N_2 PQ}).$$

Calculando explicitamente a soma implícita em β ficamos com

$$\sum_{\delta=0}^3 c_{\delta} [(\bar{K}_{\alpha\alpha_1}^0 K_{0\alpha_2\alpha_3}^{\delta} + \bar{K}_{\alpha\alpha_1}^1 K_{1\alpha_2\alpha_3}^{\delta}) f_{MN, M_1 N_1}^{PQ} \varepsilon_{PQM_2 N_2 M_3 N_3} + (\bar{K}_{\alpha\alpha_2}^0 K_{\alpha_1 0\alpha_3}^{\delta} + \bar{K}_{\alpha\alpha_2}^1 K_{\alpha_1 1\alpha_3}^{\delta}) f_{MN, M_2 N_2}^{PQ} \varepsilon_{M_1 N_1 PQM_3 N_3} + (\bar{K}_{\alpha\alpha_3}^0 K_{\alpha_1\alpha_2 0}^{\delta} + \bar{K}_{\alpha\alpha_3}^1 K_{\alpha_1\alpha_2 1}^{\delta}) f_{MN, M_3 N_3}^{PQ} \varepsilon_{M_1 N_1 M_2 N_2 PQ}].$$

Fazendo agora a soma implícita em δ , para a maioria das possíveis combinações de α , α_1 , α_2 e α_3 , somos levados a 0. Contudo para alguns casos particulares, a expressão anterior não é identicamente 0. Por exemplo, consideremos a seguinte combinação (os casos entre parênteses são equivalentes):

$$\alpha = 1, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1$$

$$(\alpha = 1, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0 \text{ or } \alpha = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0)$$

Ela nos retorna que

$$\begin{aligned} & -c_0 f_{MN, M_3 N_3}^{PQ} \varepsilon_{M_1 N_1 M_2 N_2 PQ} + c_2 (f_{MN, M_1 N_1}^{PQ} \varepsilon_{PQM_2 N_2 M_3 N_3} + f_{MN, M_2 N_2}^{PQ} \varepsilon_{M_1 N_1 PQM_3 N_3}) \\ & = -(c_0 + c_2) f_{MN, M_3 N_3}^{PQ} \varepsilon_{M_1 N_1 M_2 N_2 PQ}, \end{aligned}$$

que não é igual a 0 a menos que $c_2 = -c_0$. Outro caso é

$$\alpha = 1, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1$$

$$(\alpha = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1 \text{ or } \alpha = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0).$$

Ele nos dá que

$$\begin{aligned}
& -c_1(f_{MN,M_2N_2}^{PQ}\varepsilon_{M_1N_1PQM_3N_3} + f_{MN,M_3N_3}^{PQ}\varepsilon_{M_1N_1M_2N_2PQ}) + c_3f_{MN,M_1N_1}^{PQ}\varepsilon_{PQM_2N_2M_3N_3} \\
& = (c_1 + c_3)f_{MN,M_1N_1}^{PQ}\varepsilon_{PQM_2N_2M_3N_3},
\end{aligned}$$

de modo que so será 0 se $c_3 = -c_1$.

Logo podemos concluir que não podemos ter 4 parâmetros independentes, pois isso não nos daria um tensor invariante. Em vez disso teremos apenas duas constantes independentes, confirmando assim o resultado encontrado anteriormente.

Capítulo 4

Ações de Chern-Simons

Vimos que uma ação de Chern-Simons é definida a partir de objetos chamados de formas diferenciais. Estes objetos carregam consigo uma medida de integração, de modo que se torna natural integrar uma forma de grau p em um espaço de mesma dimensão. Assim podemos expandir esses objetos em termos de suas componentes espaciais, de modo que (2.1) fica da seguinte maneira

$$S = \int \left\langle A_{\mu_1} \partial_{\mu_2} A_{\mu_3} + \frac{2}{3} A_{\mu_1} A_{\mu_2} A_{\mu_3} \right\rangle \varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} dx^3. \quad (4.1)$$

Contudo, podemos expandir ainda mais essa ação, pois a conexão A é tanto uma forma quanto um elemento da álgebra de Lie associada ao respectivo grupo de Lie. Sendo assim ela pode ser escrita em termos de suas componentes referentes a forma diferencial, que representarei pelos índices inferiores, e de suas componentes associadas a álgebra, que representarei por índices superiores. Dizemos que A é uma 1-forma valorada numa álgebra de Lie, de modo que

$$A = A_{\mu}^a M_a dx^{\mu}, \quad (4.2)$$

com M_a uma base da álgebra de Lie associada.

Com essa nova representação, os termos quadráticos em A são substituídos pelo comutador graduado $[A, A]$, que basicamente é o comutador usual quando a forma avaliada é de grau par e o anticomutador quando a forma é de grau ímpar. De modo geral, para uma p -forma ω_p e para uma q -forma ω_q , temos que

$$[\omega_p, \omega_q] = \omega_p \omega_q + (-1)^{pq} \omega_q \omega_p. \quad (4.3)$$

Uma vez que A é uma 1-forma, temos que $[A, A] = A \wedge A + A \wedge A$, de modo que

$$A^2 = A \wedge A = \frac{1}{2}[A, A]. \quad (4.4)$$

Logo, a ação expandida é

$$S = g_{ab} \int \left(A_{\mu_1}^a \partial_{\mu_2} A_{\mu_3}^b + \frac{1}{3} A_{\mu_1}^a [A_{\mu_2}, A_{\mu_3}]^b \right) \varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} dx^3 \quad (4.5)$$

onde g_{ab} é um tensor invariante da referida álgebra de Lie.

4.1 A conexão 1-forma A

Seja φ uma p -forma que também é um elemento de alguma álgebra de Lie G . Dizemos portanto que φ -é uma p -forma valorada na álgebra de Lie G . Assim, podemos escrever que

$$\varphi = \frac{1}{p!} \varphi_{\mu_1 \dots \mu_p}^a M_a dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}, \quad (4.6)$$

onde M_a é uma base da respectiva álgebra de Lie.

A fim de termos uma teoria de calibre, devemos impor a condição de que tanto φ quanto sua derivada se transformem do mesmo modo sob a ação do grupo G . Contudo, se $g(x) \in G$,

$$\varphi' = g\varphi, \quad (4.7)$$

enquanto,

$$d\varphi' = gd\varphi + dg\varphi, \quad (4.8)$$

que não possui a mesma lei de transformação de φ devido ao termo $dg\varphi$. Logo precisamos introduzir a partir de d uma derivada D , chamada de derivada covariante, tal que φ e $D\varphi$ tenham a mesma lei de transformação.

Como d nesse contexto trata-se da derivada exterior de formas diferenciais definida no capítulo 2, quando atua numa p -forma nos retorna uma $(p + 1)$ -forma. Assim, necessitamos do auxílio de um campo de calibre $A(x)$ que além de ser um elemento de g , é uma 1-forma, tal que quando multiplicado por φ nos retornará uma $(p + 1)$ -forma. Dizemos com isso que $A \in g \otimes T_p^*(M)$ Desse modo, definimos

$$D = d + A \wedge . \quad (4.9)$$

Portanto, impondo que

$$\begin{aligned} (D\varphi)' &= gD\varphi \\ gd\varphi + dg\varphi + A'g\varphi &= gd\varphi + gA\varphi, \end{aligned} \quad (4.10)$$

obtemos

$$A'g\varphi = gA\varphi - dg\varphi \quad \forall \varphi. \quad (4.11)$$

Desse modo, como essa equação é válida para todo φ , temos que

$$A'g = gA - dg. \quad (4.12)$$

Logo, usando que $gg^{-1} = 1$, obtemos finalmente que

$$A' = gAg^{-1} + gdg^{-1}. \quad (4.13)$$

Portanto, para A' tomado dessa maneira obtemos que $D\varphi$ se transforma do mesmo modo que φ . Para teorias de gauge, A é identificado como o potencial de gauge, tal como o potencial eletromagnético A . Futuramente, quando definirmos ações de Chern-Simons, mostraremos um exemplo desse formalismo usando o caso eletromagnético.

Se considerarmos uma transformação de gauge infinitesimal, de modo que g venha a diferir da unidade por um parâmetro infinitesimal, ou seja $g = 1 + \varepsilon$, temos por (4.13) que

$$\delta A = A - A' = d\varepsilon + [A, \varepsilon] = D\varepsilon. \quad (4.14)$$

4.2 Curvatura

Associada a conexão A , temos o que chamamos de curvatura. Basicamente, a curvatura 2-forma denotada por F é a derivada covariante da conexão 1-forma A . Assim, para que F se transforme de maneira covariante, ou seja, para que

$$F' = gFg^{-1} \quad (4.15)$$

deve ter a forma:

$$F = dA + A \wedge A. \quad (4.16)$$

A curvatura aparece naturalmente ao calcularmos a derivada covariante de $D\varphi$, pois

$$\begin{aligned}
DD\varphi &= d^2\varphi + d(A \wedge \varphi) + A \wedge d\varphi + A \wedge A \wedge \varphi \\
&= (dA + A \wedge A)\varphi = F\varphi
\end{aligned} \tag{4.17}$$

A curvatura F também é conhecida na física como o *field strength* das interações não abelianas, que generaliza os campos elétrico e magnético do eletromagnetismo.

A covariância de F é uma propriedade fundamental para construirmos os chamados polinômios invariantes na conexão de gauge e na curvatura, objetos estes que dão origem as formas de Chern-Simons.

De modo análogo ao da seção anterior, podemos calcular como F se transforma infinitesimalmente usando a condição de covariância, de modo a obtermos

$$\delta F = [\varepsilon, F]. \tag{4.18}$$

4.3 Polinômios Invariantes

Nesta seção traremos a definição de polinômios invariantes e algumas de suas características, para que na seção seguinte possamos introduzir as formas de Chern-Simons via a fórmula de transgressão. Para tal, antes de definirmos um polinômio invariante utilizando formas diferenciais valoradas numa determinada álgebra de Lie, penso ser elucidativo definir um polinômio invariante para matrizes representativas de uma determinada álgebra de Lie e, em seguida, abrangermos a definição para as formas diferenciais, tal como feito em [2][13].

Um polinômio invariante basicamente é uma função polinomial que atende determinados requisitos. Seja g um elemento de um determinado grupo G e $\{\omega_i\}$ um conjunto de elementos da álgebra de Lie G associada, se transformando portanto como $\omega'_i = g\omega_i g^{-1}$. Se considerarmos $g = 1 + \varepsilon^a M_a$, onde os ε^a são apenas parâmetros infinitesimais e M_a os geradores de G , temos, infinitesimalmente que $\delta\omega_i = \varepsilon^a [M_a, \omega_i]$, que define a representação adjunta.

Podemos ainda expandir ω_i em termos de M_a , de modo a obtermos

$$\begin{aligned}
\delta\omega_i &= \varepsilon^a [M_a, \omega_i^b M_b] = \varepsilon^a \omega_i^b [M_a, M_b] \\
&= \varepsilon \omega_i^b f_{ab}{}^c M_c \\
&= \delta\omega_i^c M_c,
\end{aligned} \tag{4.19}$$

com $\delta\omega_i^c = \varepsilon\omega_i^b f_{ab}^c$.

Dizemos que o polinômio

$$P(\omega_1, \dots, \omega_i, \dots, \omega_n) = \tilde{g}_{a_1 \dots a_i \dots a_n} \omega^{a_1} \dots \omega^{a_i} \dots \omega^{a_n}, \quad (4.20)$$

sendo $\tilde{g}_{a_1 \dots a_i \dots a_n}$ um tensor na representação adjunta, é um **polinômio invariante** ou um **polinômio característico** se

1. P é linear e simétrico em cada par $\{\omega_i, \omega_j\}$ ou seja, se

$$P(\omega_1, \dots, \omega_i, \dots, \omega_j, \dots, \omega_n) = P(\omega_1, \dots, \omega_j, \dots, \omega_i, \dots, \omega_n), \quad (4.21)$$

2. A invariância se escreve como

$$P(g\omega_1 g^{-1}, g\omega_2 g^{-1}, \dots, g\omega_n g^{-1}) = P(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n). \quad (4.22)$$

Portanto, se fizermos uma variação infinitesimal devemos obter que $\delta P = 0$, logo

$$\begin{aligned} \delta P &= \tilde{g}_{a_1 \dots a_i \dots a_n} (\delta\omega^{a_1} \omega^{a_2} \dots \omega^{a_n} + \omega^{a_1} \delta\omega^{a_2} \dots \omega^{a_n} + \dots + \omega^{a_1} \omega^{a_2} \dots \delta\omega^{a_n}) = 0 \\ &\tilde{g}_{a_1 \dots a_i \dots a_n} (\varepsilon^b \omega^c f_{bc}^{a_1} \omega^{a_2} \dots \omega^{a_n} + \omega^{a_1} \varepsilon^b \omega^c f_{bc}^{a_2} \dots \omega^{a_n} + \dots + \\ &\quad \omega^{a_1} \omega^{a_2} \dots \varepsilon^b \omega^c f_{bc}^{a_n}) = 0 \\ &\varepsilon^b (f_{bc}^{a_1} \tilde{g}_{a_1 a_2 \dots a_n} \omega^c \omega^{a_2} \dots \omega^{a_n} + f_{bc}^{a_2} \tilde{g}_{a_1 a_2 \dots a_n} \omega^{a_1} \omega^c \dots \omega^{a_n} + \\ &\quad f_{bc}^{a_n} \tilde{g}_{a_1 a_2 \dots a_n} \omega^{a_1} \omega^{a_2} \dots \omega^c) = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde usamos (4.19). Ainda, no primeiro termo da soma podemos fazer a troca $a_1 \rightarrow c, c \rightarrow a_1$, uma vez que os índices são mudos. Do mesmo modo podemos fazer, no segundo termo, a troca $a_2 \rightarrow c, c \rightarrow a_2$ e assim por diante, até o último termo, onde teremos $a_n \rightarrow c, c \rightarrow a_n$. Portanto, ficamos com

$$\delta P = \varepsilon^b (f_{ba_1}^c \tilde{g}_{ca_2 \dots a_n} + f_{ba_2}^c \tilde{g}_{a_1 c \dots a_n} + \dots + f_{ba_n}^c \tilde{g}_{a_1 a_2 \dots c}) \omega^{a_1} \omega^{a_2} \dots \omega^{a_n} = 0 \quad (4.24)$$

Note que a igualdade anterior será verdadeira caso tenhamos $f_{ba_1}^c \tilde{g}_{ca_2 \dots a_n} + f_{ba_2}^c \tilde{g}_{a_1 c \dots a_n} + \dots + f_{ba_n}^c \tilde{g}_{a_1 a_2 \dots c} = 0$, que é justamente a condição definida pela equação (3.29) para que um tensor seja invariante na representação adjunta. Desse modo, para que P seja um polinômio invariante na representação adjunta, $\tilde{g}_{a_1 a_2 \dots a_n}$ deve ser um tensor invariante.

Se todos os ω_i são iguais, podemos usar a seguinte notação

$$P(\omega, \dots, \omega) \equiv P_n(\omega). \quad (4.25)$$

Definido um polinômio invariante na representação adjunta de uma álgebra de Lie G , é direto definirmos um polinômio invariante para formas diferenciais de uma variedade M , valoradas na representação adjunta de uma álgebra de Lie G . Seja ω_i agora uma p_i -forma. Desse modo podemos escrever que

$$\omega_i = \frac{1}{p_i!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_{p_i}}(x) dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_{p_i}} = \omega_{p_i} \sigma^{p_i}, \quad (4.26)$$

sendo $\omega_{p_i} = \frac{1}{p_i!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_{p_i}}$ e $\sigma_{p_i} = dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_{p_i}}$ uma base de $\Lambda_p^{p_i} L$. Contudo, ω_i é também um elemento de \mathcal{G} . Logo ω_{p_i} deve ser tal que possa ser expandido em termos da base M_a . Logo,

$$\omega_{p_i} = \omega_{p_i}^a M_a. \quad (4.27)$$

Dito isto, um polinômio invariante para um conjunto de p_i -formas $\{\omega_{p_i}\}$ na representação adjunta de uma álgebra de Lie, onde p_i representa um grau genérico, é definido por

$$P(\omega_1, \dots, \omega_i, \dots, \omega_n) = P(\omega_{p_1}, \dots, \omega_{p_i}, \dots, \omega_{p_n}) \sigma^{p_1} \dots \sigma^{p_i} \dots \sigma^{p_n}, \quad (4.28)$$

com $P(\omega_{p_1}, \dots, \omega_{p_i}, \dots, \omega_{p_n})$ sendo dado por (4.20) e obedecendo as condições estabelecidas por (4.21) e (4.22), bem como a condição infinitesimal dada por (4.24), que estabelece que $\tilde{g}_{a_1 a_2 \dots a_n}$ deve ser um tensor invariante. Logo fica claro que para trabalharmos com um polinômio invariante de uma forma diferencial, basta separarmos a parte referente as formas (os σ 's à direita referindo-se as bases) da parte matricial, onde esta última é tratada como um polinômio invariante de matrizes representativas de uma álgebra de Lie, definido inicialmente.

Pode-se mostrar que a derivada exterior de um polinômio invariante assim definido satisfaz a [13]

$$dP(\omega_1, \dots, \omega_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{p_1 + \dots + p_{i-1}} P(\omega_1, \dots, \omega_{i-1}, D\omega_i, \omega_{i+1}, \dots, \omega_n), \quad (4.29)$$

onde D é o operador derivada covariante já definido. Esta última expressão é a chave para se demonstrar importantes resultados que levam as formas de Chern-Simons.

4.4 Formas de Chern-Simons

Consideremos um polinômio invariante tal que todas as n formas diferenciais sejam iguais a curvatura 2-forma $F \in \mathcal{G} \otimes \Lambda_p^2 L$, com $F = dA + A^2$. Com isso temos que

$$P(F, \dots, F) \equiv P_n(F) = \tilde{g}_{a_1 a_2 \dots a_n} F^{a_1} \wedge F^{a_2} \wedge \dots \wedge F^{a_n}, \quad (4.30)$$

com $\tilde{g}_{a_1 a_2 \dots a_n}$ um tensor invariante.

É fácil constatar que $P_n(F)$ é de fato invariante. Para isso basta considerarmos outro polinômio $P_n(F')$ tal que

$$P_n(F') = \tilde{g}_{a_1 a_2 \dots a_n} F'^{a_1} \wedge F'^{a_2} \wedge \dots \wedge F'^{a_n}, \quad (4.31)$$

onde $F' = gFg^{-1}$.

Portanto, a única diferença entre P e P' , se é que existe, está no produto das curvaturas F e F' . Escrevendo portanto a transformação de F' para P' e usando o fato de que F é uma forma par, nós obtemos

$$\begin{aligned} P' &= \tilde{g}_{a_1 a_2 \dots a_n} g F^{a_1} g^{-1} g F^{a_2} g^{-1} \dots g F^{a_n} g^{-1} \\ &= \tilde{g}_{a_1 a_2 \dots a_n} g F^{a_1} F^{a_2} \dots F^{a_n} g^{-1} \\ &= \tilde{g}_{a_1 a_2 \dots a_n} F^{a_2} \dots F^{a_n} g^{-1} g F^{a_1} \\ &= \tilde{g}_{a_1 a_2 \dots a_n} F^{a_2} \dots F^{a_n} F^{a_1} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Fazendo a mudança de índices $a_2 \rightarrow a_1, a_3 \rightarrow a_2, \dots, a_n \rightarrow a_{n-1}$ e $a_1 \rightarrow a_n$, juntamente com o fato de \tilde{g} ser um tensor simétrico, obtemos que

$$P' = \tilde{g}_{a_1 a_2 \dots a_n} F^{a_1} F^{a_2} \dots F^{a_n} = P. \quad (4.33)$$

Logo, o polinômio P é invariante mediante a ação do grupo G , ou, de forma mais enfática,

$$P_n(gFg^{-1}) = P_n(F). \quad (4.34)$$

Este polinômio invariante construído a partir do produto das curvaturas possui dois resultados extremamente importantes conhecidos na literatura, os quais citarei a seguir:

Resultado 1)

$P_n(F)$ é fechado, ou seja, $dP_n(F) = 0$.

Uma vez em posse da condição (4.29), basta tomarmos os ω' s todos iguais a curvatura F , pois desse modo teremos que $dP_n(F) = \sum_{i=1}^n P(F, \dots, DF|_i, \dots, F) = 0$ e, usando a identidade de Bianchi $DF = 0$ que demonstraremos mais a seguir [2], concluímos de imediato que $dP_n(F) = 0$.

Resultado 2)

$P_n(F)$ é exata, ou seja, existe um Q_{2n-1} tal que $P_n = dQ_{2n-1}$.

Do item anterior temos que $P_n(F)$ é uma forma fechada. Mas sabemos que do Lema de Poincaré algébrico, apresentado ao final do capítulo 2, que toda forma fechada é exata, ou seja, pode ser escrita como a derivada exterior de alguma outra forma. $P_n(F)$ é o produto de n curvaturas, sendo cada curvatura uma 2-forma. Logo $P_n(F)$ é uma $2n$ -forma. Assim, como a derivada exterior aumenta o grau da forma em 1 unidade, graças ao Lema de Poincaré algébrico, existe uma $(2n - 1)$ -forma tal que $P_n(F) = dQ_{2n-1}(A, F)$.

A esta forma Q_{2n-1} damos o nome de **forma de Chern-Simons**. Pode-se mostrar ainda [13] que as formas de Chern-Simons podem ser calculadas pela seguinte expressão, conhecida como fórmula de transgressão

$$Q_{2n-1}(A, F) = n \int_0^1 P(A, (F_t)^{n-1}) dt, \quad (4.35)$$

sendo

$$\begin{aligned} P(A, (F_t)^{n-1}) &= \tilde{g}_{a_1 a_2 \dots a_n} A^{a_1} \wedge F_t^{a_2} \wedge \dots \wedge F_t^{a_n}, \quad A_t = tA, \quad F_t = dA_t + A_t^2 \\ &= tdA + t^2 A. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Para vermos a aplicação prática da fórmula de transgressão podemos calcular como exemplo as formas de Chern-Simons no caso em que $n = 2$ e $n = 3$, apenas para entendermos como essa maquinaria funciona. Para $n = 2$, temos que

$$\tilde{g}_{a_1 a_2} F^{a_1} \wedge F^{a_2} = dQ_3, \quad (4.37)$$

o que leva a

$$P(A, F_t) = \tilde{g}_{a_1 a_2} A^{a_1} F_t^{a_2} = \tilde{g}_{a_1 a_2} A^{a_1} (tdA^{a_2} + t^2(A^2)^{a_2}), \quad (4.38)$$

e, conseqüentemente a

$$\begin{aligned} Q_3(A, F) &= 2 \int_0^1 (\tilde{g}_{a_1 a_2} A^{a_1} (tdA^{a_2} + t^2(A^2)^{a_2})) dt \\ Q_3(A, F) &= 2\tilde{g}_{a_1 a_2} \left(\frac{t^2}{2} A^{a_1} dA^{a_2} + \frac{t^3}{3} A^{a_1} (A^2)^{a_2} \right) \Big|_0^1 \\ Q_3(A, F) &= \tilde{g}_{a_1 a_2} \left(A^{a_1} dA^{a_2} + \frac{2}{3} A^{a_1} (A^2)^{a_2} \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Agora para $n = 3$ temos que

$$\tilde{g}_{a_1 a_2 a_3} F^{a_1} \wedge F^{a_2} \wedge F^{a_3} = dQ_5, \quad (4.40)$$

de modo que

$$P(A, (F_t)^2) = \tilde{g}_{a_1 a_2 a_3} A^{a_1} F_t^{a_2} F_t^{a_3} = \tilde{g}_{a_1 a_2 a_3} A^{a_1} (tdA^{a_2} + t^2(A^2)^{a_2})(tdA^{a_3} + t^2(A^2)^{a_3}), \quad (4.41)$$

o que implica em

$$\begin{aligned} Q_5(A, F) &= 3\tilde{g}_{a_1 a_2 a_3} \left(\frac{t^3}{3} A^{a_1} dA^{a_2} dA^{a_3} + 2\frac{t^4}{4} A^{a_1} (A^2)^{a_2} dA^{a_3} + \frac{t^5}{5} A^{a_1} (A^2)^{a_2} (A^2)^{a_3} \right) \Big|_0^1 \\ Q_5(A, F) &= \tilde{g}_{a_1 a_2 a_3} \left(A^{a_1} dA^{a_2} dA^{a_3} + \frac{3}{2} A^{a_1} (A^2)^{a_2} dA^{a_3} + \frac{3}{5} A^{a_1} (A^2)^{a_2} (A^2)^{a_3} \right) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Em ambos os casos \tilde{g} representa o tensor invariante da representação adjunta da álgebra de Lie associada ao grupo de calibre considerado. Para formas de Chern-Simons superiores basta procedermos da mesma maneira. Primeiro calculamos $P(A, (F_t)^{n-1})$ e em seguida resolvemos a integral em t a fim de obtermos Q_{2n-1} .

Podemos fazer uma checagem rápida deste resultado a partir do caso tridimensional. Os demais casos podem ser verificados de modo análogo. Para $D = 3$ temos que $P_n(F) = \tilde{g}_{a_1 a_2} F^{a_1} \wedge F^{a_2}$ e Q_3 dado por (4.39). Logo,

$$\begin{aligned} \langle F \wedge F \rangle &= \langle (dA + A^2)(dA + A^2) \rangle = \langle dAdA \rangle + \langle dAA^2 \rangle + \langle A^2dA \rangle + \langle A^4 \rangle \\ &= \langle dAdA \rangle + 2 \langle A^2dA \rangle, \end{aligned}$$

uma vez que $\langle A^4 = 0 \rangle$,

$$\begin{aligned} dQ_3 &= \langle dAdA \rangle + \frac{2}{3} \langle (dAA^2 - Ad(A^2)) \rangle \\ &= \langle dAdA \rangle + \frac{2}{3} \langle (dAA^2 - AdAA + AAdA) \rangle \\ &= \langle dAdA \rangle + \frac{2}{3} \langle (dAA^2 + dAA^2 + dAA^2) \rangle \\ &= \langle dAdA \rangle + 2 \langle A^2 dA \rangle, \end{aligned}$$

o que mostra que (4.37) é de fato válida.

4.5 Porquê usar formas de Chern-Simons na gravitação?

No capítulo 2 vimos que a integral de uma forma diferencial é uma operação bem definida, uma vez que estes objetos carregam já consigo uma medida de integração. Podemos portanto definir ações via a integração de formas de Chern-Simons. Assim, uma forma de Chern-Simons de grau $2n - 1$ define uma ação numa variedade de mesma dimensão. Portanto, como exemplo podemos expandir as formas Q_3 e Q_5 obtidas na seção anterior em termos de suas respectivas bases e integrá-las de acordo com a definição (2.27), de modo a obtermos as seguintes ações:

$$S_3 = \int Q_3 = \tilde{g}_{a_1 a_2} \int \left(A_{\mu_1}^{a_1} (\partial_{\mu_2} A_{\mu_3})^{a_2} + \frac{2}{3} A_{\mu_1}^{a_1} (A_{\mu_2} A_{\mu_3})^{a_2} \right) \varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} dx^3 \quad (4.43)$$

e

$$\begin{aligned} S_5 = \int Q_5 = \tilde{g}_{a_1 a_2 a_3} \int \left(A_{\mu_1}^{a_1} (\partial_{\mu_2} A_{\mu_3})^{a_2} (\partial_{\mu_4} A_{\mu_5})^{a_3} + \frac{3}{2} A_{\mu_1}^{a_1} (A_{\mu_2} A_{\mu_3})^{a_2} (\partial_{\mu_4} A_{\mu_5})^{a_3} \right. \\ \left. + \frac{3}{5} A_{\mu_1}^{a_1} (A_{\mu_2} A_{\mu_3})^{a_2} (A_{\mu_4} A_{\mu_5})^{a_3} \right) \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_5} dx^5 \quad (4.44) \end{aligned}$$

Note que S_3 é exatamente a ação descrita no início do capítulo para o caso tridimensional. Já a ação S_5 será a base para a teoria que desenvolveremos no próximo capítulo, onde usaremos a álgebra C_5 como álgebra de Lie associada.

As ações assim definidas, bem como as ações de qualquer forma de Chern-Simons tem uma importância física muito relevante. Primeiro elas definem ações que são quase-invariantes mediante transformações de gauge, uma vez que a variação infinitesimal da ação mediante essas transformações nos leva a termos de fronteira, que supomos ser nulos no infinito. De fato, se definirmos δ_{gauge} como uma transformação de gauge infinitesimal, então teremos que

$$\delta_{gauge} S = \int_M \delta_{gauge} Q_{2n-1}. \quad (4.45)$$

Da seção anterior vimos que o polinômio invariante $P_n(F)$ definido a partir do produto das curvaturas é invariante mediante a transformação de gauge $A \rightarrow gAg^{-1} + gdg^{-1}$, pois esta implica que F se transforme tal que $F \rightarrow g^{-1}Fg$. Contudo a condição de invariância de $P_n(F)$ nos diz que $P_n(g^{-1}Fg) = P_n(F)$. Desse modo a variação de gauge infinitesimal de $P_n(F)$ deve ser nula, ou seja $\delta_{gauge} P_n(F) = 0$.

Agora, temos também que $P_{2n} = dQ_{2n-1}$. Assim, $\delta_{gauge}(dQ_{2n-1}) = 0$ o que implica em $d(\delta_{gauge} Q_{2n-1}) = 0$ e, do Lema de Poincaré segue que existe um \mathcal{C} tal que $\delta_{gauge} Q_{2n-1} = d\mathcal{C}$. Assim, mediante uma transformação de gauge infinitesimal

$$\delta_{gauge} S = \int_M d\mathcal{C} = \int_{\partial M} \mathcal{C}. \quad (4.46)$$

Se supomos que os termos da fronteira da variedade não contribuem, temos que mediante uma transformação de gauge infinitesimal a variação da ação é nula, de modo que a ação é considerada invariante de gauge (ou quase-invariante de gauge se considerarmos termos de fronteira não nulos). Isso é de extrema importância para a física pois nos leva a equações de movimento que são covariantes.

Um segundo fato importante é que as ações de Chern-Simons não requerem uma estrutura métrica pré-definida. Portanto, teorias definidas a partir de ações deste tipo são promissoras candidatas em teorias para a gravitação, onde a geometria é dinâmica, uma vez que a métrica depende do campo e , que é um campo dinâmico, conforme nos mostra a equação (3.10).

A essa altura, mesmo com as vantagens acima explicitadas podemos nos perguntar o porquê de procurarmos uma teoria alternativa a teoria da gravitação de Einstein, uma vez que as previsões teóricas desta vem se verificando experimentalmente até os dias atuais. Para responder a essa pergunta e vermos a vantagem de se usar uma teoria de Chern-Simons para a gravitação, precisamos voltar ao cenário quadridimensional no qual se baseia a teoria de Einstein. A ação mais geral que obedece os postulados da relatividade geral e que leva a conhecida equação de Einstein é formada pelo chamado termo de Einstein-Hilbert mais um termo devido a constante cosmológica, sendo dada por [3]

$$S = \int \sqrt{-g}(\alpha_1 R + \alpha_0) d^4x, \quad (4.47)$$

onde R é a curvatura escalar e as constantes α_1 e α_0 estão relacionadas com a constante de

Newton da gravitação e com a constante cosmológica do seguinte modo:

$$G = \frac{1}{16\pi\alpha_1}, \quad \Lambda = -\frac{\alpha_0}{2\alpha_1}. \quad (4.48)$$

A este formalismo damos o nome de formalismo de segunda ordem, onde a métrica é o campo fundamental da teoria.

Sabemos que um dos princípios da relatividade geral é o famoso princípio de equivalência, que afirma que, numa região do espaço pequena o bastante e num período de tempo curto o bastante para que qualquer inomogeneidade do campo gravitacional não seja percebida, experimentos realizados em queda livre são indistinguíveis daqueles realizados na ausência de gravitação. Dessa forma, o espaço nessa região de validade considerado é descrito pelo espaço de Minkowisk, de modo a haver uma invariância de Lorentz local.

Em virtude da importância das teorias de gauge para descrição das forças fraca, forte e eletromagnética, mostrou-se [14] que a teoria de Einstein assim descrita pode ser escrita como uma teoria de gauge para o grupo de Lorentz. Isso gerou a expectativa de se descrever a gravitação como uma teoria de gauge para o grupo de Poincaré $ISO(1, 3)$, que consiste das transformações de Lorentz mais as translações espaciais. A ideia para esta possível descrição deve-se ao fato de que os difeomorfismos, ou transformações gerais de coordenadas, são descritos por transformações do tipo

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi(x), \quad (4.49)$$

que se assemelham muito a translações, para algum parâmetro ξ que depende da posição. Por isso a invariância sob difeomorfismos pode ser identificada como uma simetria sobre translações locais que estendem o grupo de Lorentz ao grupo de Poincaré. Entretanto, uma ação local invariante sob (4.49) nunca foi encontrada no formalismo de segunda ordem.

Por conta disso é conveniente tentarmos uma abordagem diferente da descrição dada por Einstein. Em vez de termos a métrica como campo fundamental, passamos a considerar o vielbein e definido por (3.7) e a conexão de Lorentz ω , também conhecida como conexão de spin. A introdução desses campos como campos fundamentais é devida a imposição de validade do princípio de equivalência. De fato, no contexto da geometria diferencial, como discutido no capítulo passado quando abordamos o exemplo do grupo $(A)dS_5$, o espaço trata-se de uma variedade M não necessariamente plana e, ao exigirmos uma região do espaço pequena o suficiente tal que nessa região haja invariância de Lorentz, estamos dizendo que em todo ponto P de M existe um plano tangente $T_P(M)$ com estrutura métrica minkowskiana. Portanto há invariância de Lorentz local, que é uma boa aproximação de M nas vizinhanças de P .

A fim de se usar o formalismo das formas diferenciais, nos traz vantagens se definirmos o vielbein como uma 1-forma local, do seguinte modo:

$$e^a(x) := e_\mu^a(x)dx^\mu, \quad (4.50)$$

com $e_\mu^a(x)$ dado pela equação (3.7).

Mediante uma transformação de gauge infinitesimal o vielbein se transforma como um vetor sob o grupo de Lorentz, pois

$$\delta_\varepsilon e = [\varepsilon, e], \quad (4.51)$$

com ε um campo infinitesimal, dado por $\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon^{MN}T_{MN}$.

A ação do grupo de Lorentz no espaço tangente em cada ponto da variedade faz com que tenhamos uma simetria de gauge: a invariância sobre transformações de $SO(1, 3)$ (rotações de Lorentz) locais. Agora, das teorias de gauge, para levarmos um grupo de simetria do nível global ao nível local devemos introduzir uma derivada covariante, construída com os campos de gauge associados a tal simetria. [15]

Como vimos no início deste capítulo, para introduzirmos uma derivada covariante D foi necessário introduzirmos uma conexão 1-forma, que no contexto da gravitação chamaremos de conexão de Lorentz, ou conexão de spin, e designaremos por ω . Assim, como $D = d + \omega$ e visto que d aumenta o grau da forma em que atua em uma unidade, ω necessita ser uma 1-forma. Assim, para o nosso caso de interesse podemos simplesmente tomar o resultado já obtido para o caso geral aplicando-o ao grupo $SO(1, 3)$. Desse modo, escrevendo a conexão ω em termos dos geradores T_{MN} de $SO(1, 3)$ temos

$$\omega = \frac{1}{2}\omega^{MN}{}_\mu(x)T_{MN}dx^\mu \implies \omega^{MN} = \omega^{MN}{}_\mu(x)dx^\mu \quad (4.52)$$

Temos portanto que ω é uma 1-forma valorada na álgebra de Lie $so(1, 3)$.

A partir da derivada de ω podemos definir a curvatura 2-forma tal como fizemos antes, que no contexto da gravitação designamos por R . Assim,

$$R^{MN} = d\omega^{MN} + \omega^{MP} \wedge \omega_P{}^M = \frac{1}{2}R^{MN}{}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (4.53)$$

Ainda, podemos calcular a derivada covariante do vielbein e , de modo que somos levados a definir a 2-forma T conhecida como torsão. Logo,

$$T^M := De^M = de^M + \omega^M_N e^N \quad (4.54)$$

Nesse formalismo conhecido como formalismo de primeira ordem, todas as propriedades geométricas da variedade M podem ser expressas em termos de e^M, ω^{MN} , suas derivadas exteriores e seus produtos exteriores. Uma vez que estes não carregam índices de coordenadas, eles são invariantes mediante transformações gerais de coordenadas de M . [16]

Para construirmos uma ação nesse formalismo devemos observar que derivadas covariantes sucessivas de e, ω, R e T não nos levam a tensores independentes destes, de modo que este quatro objetos são suficientes para se construir as respectivas ações, juntamente com os tensores invariantes da teoria, uma vez que a derivada covariante destes últimos é nula [3]. De fato já de $D\omega$ somos conduzidos a R e de De somos levados a T . Agora, a derivada covariante de R nos retorna

$$\begin{aligned} DR &= d\omega + [\omega, (d\omega + \omega)] \\ &= d\omega\omega - \omega d\omega + [\omega, d\omega] + [\omega, \omega^2] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (4.55)$$

que é conhecida como a primeira identidade de Bianchi, enquanto a derivada covariante de T nos dá

$$\begin{aligned} DT &= d(de + [\omega, e]) + [\omega, de + [\omega, e]] \\ &= [d\omega, e] - [\omega, de] + [\omega, de] + [\omega, we + ew] \\ &= [d\omega, e] + \omega^2 e + we\omega - \omega e\omega - e\omega^2 \\ &= [d\omega + \omega^2, e] \\ &= [R, e], \end{aligned} \quad (4.56)$$

conhecida como segunda identidade de Bianchi, nos retornando uma combinação dos tensores já citados.

Desse modo temos um número bem limitado de ações invariantes de Lorentz possíveis que podem ser construídas. Para o caso quadridimensional, podemos por exemplo construir a ação

$$S = \int \varepsilon_{MNPQ} (\alpha R^{MN} e^P e^Q + \beta e^M e^N e^P e^Q), \quad (4.57)$$

que é a ação com o termo de Einstein-Hilbert mais o termo devido a constante cosmológica escrita em termos de formas diferenciais. Para uma teoria em $5D$, a ação mais geral possível, conhecida na literatura como ação de Lovelock [3], não envolve termos de torsão, podendo ser escrita do seguinte modo

$$S = \int \varepsilon_{MNPQR} (\alpha e^M e^N e^P e^Q e^R e^S + \beta R^{MN} e^P e^Q e^R e^S + \gamma R^{MN} R^{PQ} e^R). \quad (4.58)$$

O primeiro termo é o termo devido a constante cosmológica em $5D$, o segundo termo é a ação de Einstein-Hilbert e o terceiro é um termo conhecido como termo de Gauss-Bonnet, que é quadrático nas curvaturas.

Apesar de ações desse tipo serem invariantes mediante difeomorfismos dados por (4.49), tentativas de se identificar transformações gerais de coordenadas com traslações locais em 4 dimensões acabaram infelizmente por falhar, pois não existe uma 4-forma construída a partir da conexão da álgebra de Lie de $ISO(1, 3)$ que é invariante mediante transformações locais de Poincaré. [3]

Portanto, uma outra tentativa seria de usar algum outro grupo de simetria diferente de $ISO(1, 3)$ que contenha o grupo de Lorentz como um subgrupo. Portanto uma possível escolha seria se usar os grupos de Sitter ou anti-de Sitter em 4 dimensões, também conhecidos como $SO(1, 4)$ ou $SO(2, 3)$, ou ainda dS_4 e AdS_4 , respectivamente. Todavia, ainda assim não é possível expressar a gravitação, num espaço quadridimensional, como uma teoria de gauge para estas extensões de $SO(1, 3)$, tal como acontece quando consideramos a extensão natural que envolve as traslações, que é o grupo de Poincaré.

O que é animador em toda essa história é que, diferente do que acontece em dimensões pares, quando consideramos um espaço de dimensão ímpar, temos que a gravitação pode ser expressa como uma teoria de gauge para qualquer um dos grupos, de Sitter, anti-de Sitter ou até mesmo Poincaré, uma vez que usamos ações de Chern-Simons para sua descrição. A própria definição de polinômios invariantes toma conta da invariância de gauge da ação, como vimos anteriormente.

Desse modo, as teorias de Chern-Simons são extremamente ricas para a gravitação. Pois, primeiro, são teorias independentes de coordenadas, de modo que as ações são invariantes sob difeomorfismos. Segundo, as ações são definidas a partir de polinômios invariantes, que são invariantes de gauge por construção, de modo que as ações são, também, invariantes de gauge. Por fim, permite-nos estender a invariância de Lorentz local para um grupo de simetria maior de modo natural, com os grupos de Poincaré ou $(A)dS_5$. A vantagem de se usar o grupo $(A)dS_5$, é que este é uma "deformação" do grupo de Poincaré, de modo a considerar uma teoria com

constante cosmológica Λ não nula, que seria justamente o parâmetro de deformação (o caso em que $\Lambda = 0$ nos retorna o grupo de Poincaré).

4.6 Ações de Chern-Simons em gravitação

Nesta seção apresentarei alguns resultados importantes no que diz respeito a gravitação de Chern-Simons. Como os cálculos podem ser bastantes árduos e extensos apenas apresentarei os resultados mais importantes da literatura que são relevantes para esse trabalho, de modo que desenvolverei apenas os cálculos que forem realmente essenciais.

Como vimos anteriormente, para interpretarmos uma teoria de Chern-Simons como uma teoria para gravitação, é importante que usemos extensões do grupo de Lorentz como grupos de gauge associados. Contudo, apesar de termos uma teoria invariante de gauge e invariante sob difeomorfismos, acabamos por pagar um preço: nossa descrição se dá numa variedade de dimensão ímpar. Logo, se quisermos fazer uma descrição quadridimensional necessitamos desenvolver uma teoria em 5 dimensões e, após isso, fazer uma redução dimensional para voltarmos a um cenário de dimensão 4. [6] [9]

Contudo, antes de estudarmos uma teoria em $5D$ faz-se interessante ressaltarmos alguns resultados obtidos para uma gravitação de Chern-Simons em $3D$, uma vez que as teorias em dimensões superiores são construídas de maneira análoga. Uma ação típica para a gravitação em $3D$ usando o grupo $(A)dS_3$ como grupo de gauge associado é descrita por [8]

$$S = \varepsilon_{MNPQ} \int \left(A_{\mu_1}^{MN} (\partial_{\mu_2} A_{\mu_3})^{PQ} + \frac{2}{3} A_{\mu_1}^{MN} (A_{\mu_2} A_{\mu_3})^{PQ} \right) \varepsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} dx^3, \quad (4.59)$$

onde A é a conexão de gauge 1-forma, ao qual está associada uma curvatura 2-forma F e ε_{MNPQ} é o tensor de Levi-Civita completamente antissimétrico (aqui o tensor invariante é $g_{AB} = g_{MN,PQ} \equiv \varepsilon_{MNPQ}$, onde $A = MN$ e $B = PQ$ representam índices coletivos, de modo que temos um polinômio invariante quadrático). O produto $(A_{\mu_2} A_{\mu_3})^{PQ}$ pode ser expresso da forma $A_{\mu_2}^P A_{\mu_3}^{UQ}$, usando para isso a métrica η_{MN} . Os índices são tais que $M, N, \dots = 0, \dots, 3$ e $\mu_1, \mu_2, \mu_3 = 0, 1, 2$ e as equações de movimento provenientes dessa ação são dadas simplesmente por $F^{MN} = 0$, de modo que não há graus de liberdade locais. [17]

Um fato interessante em 3 dimensões é que os difeomorfismos não são independentes do grupo de gauge local, por conta da solução das equações de movimento. Assim, sempre existe uma conexão de gauge tal que, dadas duas configurações que se diferem por um difeomorfismo, consegue conectar ambas por uma transformação de gauge [4, 3], o que, no formalismo canônico de Dirac [19] [20] está relacionado ao fato de não haver novos vínculos independentes oriundos por conta dos difeomorfismos.

Agora, uma ação de Chern-Simons para a gravitação em $5D$, que usa o grupo $(A)dS_5$ como grupo de gauge é dada por (para este caso $M, N, \dots = 0, \dots, 5$ e $\mu_1, \dots, \mu_5 = 0, \dots, 4$)

$$S = \varepsilon_{MNPQRS} \int \left(A_{\mu_1}^{MN} (\partial_{\mu_2} A_{\mu_3})^{PQ} (\partial_{\mu_4} A_{\mu_5})^{RS} + \frac{3}{2} A_{\mu_1}^{MN} (A_{\mu_2} A_{\mu_3})^{PQ} (\partial_{\mu_4} A_{\mu_5})^{RS} + \frac{3}{5} A_{\mu_1}^{MN} (A_{\mu_2} A_{\mu_3})^{PQ} (A_{\mu_4} A_{\mu_5})^{RS} \right) \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_5} dx^5. \quad (4.60)$$

De modo similar ao caso tridimensional, o tensor invariante é $g_{ABC} = g_{MN,PQ,RS} \equiv \varepsilon_{MNPQRS}$, onde $A = MN$, $B = PQ$ e $C = RS$ representam índices coletivos, de modo que temos um polinômio invariante trilinear.

Podemos reescrever os produtos do tipo $(A_{\mu_2} A_{\mu_3})^{PQ}$ em termos do comutador graduado $[A_{\mu_2}, A_{\mu_3}]^{PQ}$, uma vez que $A^2 = \frac{1}{2}[A, A]$. Logo a ação pode ser reescrita do seguinte modo

$$S = \varepsilon_{MNPQRS} \int \left(A_{\mu_1}^{MN} (\partial_{\mu_2} A_{\mu_3})^{PQ} (\partial_{\mu_4} A_{\mu_5})^{RS} + \frac{3}{4} A_{\mu_1}^{MN} [A_{\mu_2}, A_{\mu_3}]^{PQ} (\partial_{\mu_4} A_{\mu_5})^{RS} + \frac{3}{20} A_{\mu_1}^{MN} [A_{\mu_2}, A_{\mu_3}]^{PQ} [A_{\mu_4}, A_{\mu_5}]^{RS} \right) \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_5} dx^5. \quad (4.61)$$

De forma totalmente análoga ao que já vimos antes a conexão pode ser decomposta do seguinte modo

$$A = \frac{1}{2} A^{MN} T_{MN} = \frac{1}{2} A_{\mu}^{MN} T_{MN} dx^{\mu}, \quad (4.62)$$

com a base T_{MN} satisfazendo as relações de comutação calculadas no capítulo 3,

$$[T_{MN}, T_{PQ}] = -T_{MP}\eta_{NQ} + T_{MQ}\eta_{NP} + T_{NP}\eta_{MQ} - T_{NQ}\eta_{MP}. \quad (4.63)$$

Calculando a curvatura encontramos

$$F = \frac{1}{2} F^{MN} T_{MN} = \frac{1}{2} F_{\mu_1 \mu_2}^{MN} T_{MN} dx^{\mu_1} dx^{\mu_2}, \quad (4.64)$$

onde $F^{MN} = dA^{MN} + A^M_U A^{UN}$. Os termos $1/2$ que aparecem nas expansões de A e F devem-se a antissimetria em MN . As equações de movimento obtidas pela variação de A são

$$\varepsilon_{MNPQ} F^{MN} F^{PQ} = 0. \quad (4.65)$$

Do mesmo que para interpretarmos uma teoria de CS em $3D$ para os grupos $SO(1, 3)$ ou $SO(1, 2)$ como uma teoria de gravitação com constante cosmológica [8], precisamos identificar os geradores M_{MN} do grupo $(A)dS_5$ com os geradores do grupo de Lorentz 5-dimensional M_{AB} e com os geradores das translações P_A , onde $A, B = 0, \dots, 4$, do seguinte modo [21][6]

$$M_{AB} = M_{AB}, \quad P_A = \frac{1}{l}M_{A5}, \quad (4.66)$$

de modo que as relações de comutação ficam (lembrando que $\eta_{55} = s$)

$$\begin{aligned} [M_{AB}, M_{CD}] &= +M_{AC}\eta_{BD} - M_{AD}\eta_{BC} - M_{BC}\eta_{AD} + M_{BD}\eta_{AC}, \\ [M_{AB}, P_C] &= -P_A\eta_{BC} + P_B\eta_{AC}, \\ [P_A, P_B] &= \frac{s}{l^2}T_{AB}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Aqui l é um parâmetro com unidades de comprimento ($c = \hbar = 1$), necessário para que as dimensões do vielbein ($[\text{comprimento}]^1$) e da conexão de spin ($[\text{comprimento}]^0$) sejam compatíveis, de maneira que podemos agrupar tanto o vielbein 5-dimensional quanto a conexão de spin na conexão A , de modo que

$$A^{MN} = \begin{cases} A^{AB} = \omega^{AB}, \text{ conexão de spin} \\ A^{A5} = \frac{1}{l}e^A, \text{ vielbein} \end{cases}. \quad (4.68)$$

Assim, podemos propor a seguinte expansão da conexão:

$$A = \frac{1}{2}\omega^{AB}T_{AB} + e^A P_A, \quad (4.69)$$

o que nos leva a seguinte expansão da curvatura

$$F = \frac{1}{2} \left(R^{AB} + \frac{1}{l^2}e^A e^B \right) T_{AB} + \frac{1}{l} \mathcal{T}^A P_A \quad (4.70)$$

onde R^{AB} é a curvatura 2-forma no contexto da gravitação anteriormente apresentada, e \mathcal{T} designa a torsão, a fim de não a confundirmos com os geradores T .

Feitas essas considerações podemos reescrever a ação (4.60) em termos de e e R [6]

$$S = k \int \varepsilon_{ABCDE} \left(e^A R^{BC} R^{DE} - \frac{2s}{3l^2} e^A e^B e^C R^{DE} + \frac{1}{5l^4} e^A e^B e^C e^D e^E \right). \quad (4.71)$$

k e l são parâmetros que estão relacionados com a constante cosmológica Λ e com a constante

da gravitação de Newton G em $5D$. Para verificarmos a relação explícita entre essas grandezas devemos escrever as equações de movimento provenientes da extremização da ação e aplicarmos o limite de baixas velocidades, a fim de compararmos com a gravitação de Newton. Feito isso obtemos que [7]

$$\frac{3s}{l^2} = \Lambda \quad k = -\frac{8\pi}{3}\Lambda G_{5D}. \quad (4.72)$$

O segundo e terceiro termo que aparecem em (4.71) são justamente o termo de Einstein-Hilbert e o termo devido a constante cosmológica, ambos num espaço 5-dimensional, enquanto o primeiro termo é o termo de Gauss-Bonnet já mencionado. Este termo não entra na ação via o acoplamento com uma constante arbitrária, mas relacionado a G e l em virtude da invariância sob $(A)dS_5$. Resultados referentes a equações de campo nesse formalismo bem como soluções de interesse físico foram estudadas em [7].

4.7 Dinâmica das teorias de Chern-Simons

A fim de estudar a dinâmica das teorias de gravitação via ações de Chern-Simons, irei considerar um caso geral onde temos uma variedade de dimensão $2n+1$ e um grupo G qualquer, de dimensão N . Em seguida aplicaremos os resultados obtidos para o caso $(A)dS_5$ de interesse e, no próximo capítulo, usaremos o resultado geral aplicado a teoria que será desenvolvida com o grupo $(A)dS_5$ expandido.

Uma forma de Chern-Simons geral para essa situação é descrita a partir da fórmula de transgressão (ver equação (4.35)), sendo obtida a partir da expressão

$$dQ^{2n+1} = \tilde{g}_{a_1 \dots a_{n+1}} F^{a_1} \dots F^{a_{n+1}}, \quad (4.73)$$

com $\tilde{g}_{a_1 \dots a_{n+1}}$ sendo o tensor invariante na representação adjunta. As equações de movimento são

$$\tilde{g}_{aa_1 \dots a_n} F^{a_1} \dots F^{a_n} = 0, \quad (4.74)$$

que se reduzem a $g_{aa_1} F^{a_1} = 0$ e $g_{aa_1 a_2} F^{a_1} F^{a_2} = 0$, para os casos tri e penta-dimensionais respectivamente, em total acordo com o que obtivemos nessa seção para os casos considerados.

A fim de aplicarmos o formalismo Hamiltoniano de Dirac (apresentado no apêndice A), vamos supor que a variedade M admite a topologia $\mathcal{R} \times \Sigma$, onde \mathcal{R} é o espaço real e Σ é uma variedade de dimensão $2n$. Vamos supor que a dimensão temporal corresponde a \mathcal{R} enquanto

as dimensões espaciais correspondem as coordenadas x^i de Σ . O tratamento que se segue é baseado na referência [4], para uma análise completa e detalhes não citados aqui, recomenda-se a sua leitura. Assim, podemos escrever a conexão como

$$A^a = A_\mu^a dx^\mu = A_0^a dt + A_i^a dx^i, \quad (4.75)$$

sendo que $a = 1, \dots, N$ e $i = 0, \dots, 2n - 1$.

Assim, temos que a ação de Chern-Simons pode ser escrita como

$$S = \int \left(l_a^i (A_j^b) \dot{A}_i^a - A_0^a K_a \right), \quad (4.76)$$

com K_a escrito em termos das curvaturas

$$K_a = -\frac{1}{2^n n} \tilde{g}_{aa_1 \dots a_n} \varepsilon^{i_1 \dots i_{2n}} F_{i_1 i_2}^{a_1} \dots F_{i_{2n-1} i_{2n}}^{a_n}, \quad (4.77)$$

e l_a^i uma função que pode ser escrita em termos da conexão e das curvaturas, sendo dada por

$$l_a^i = -\frac{2}{2^{n-1}} \tilde{g}_{aa_1 \dots a_n} \varepsilon^{i i_1 \dots i_{2n-1}} A_{i_1}^{a_1} F_{i_2 i_3}^{a_2} \dots F_{i_{2n-2} i_{2n-1}}^{a_n}. \quad (4.78)$$

As equações de movimento são portanto

$$K_a = 0 \quad (4.79)$$

$$\Omega_{ab}^{ij} (\dot{A}_j^b - D_j A_0^b) = 0, \quad (4.80)$$

dizendo respeito as variações da ação em relação a A_0^a e A_i^a respectivamente. Ω_{ab}^{ij} é uma matriz formada pelos parênteses de Poisson dos vínculos, a definir em seguida (conforme mostra o apêndice A), sendo dada por

$$\Omega_{ab}^{ij} = -\frac{1}{2^{n-1}} \varepsilon^{ij i_1 \dots i_{2n-2}} \tilde{g}_{aba_1 \dots a_{n-1}} F_{i_1 i_2}^{a_1} \dots F_{i_{2n-3} i_{2n-2}}^{a_{n-1}}. \quad (4.81)$$

A ideia é aplicarmos o formalismo Hamiltoniano de Dirac ao sistema escrito dessa forma para estudarmos a dinâmica do mesmo e, posteriormente, tentarmos passar para uma abordagem quântica [10]. Assumiremos que o leitor já esteja de certa forma familiarizado com tal formalismo. Caso não esteja, o apêndice A traz uma abordagem bem resumida do caso discreto, de modo que a trazer os conceitos e as definições essenciais que serão aqui usadas, com a ligeira diferença que aqui estamos num ambiente contínuo. A transição se dá do seguinte modo: uma vez que estamos num cenário de teoria de campos, as quantidades que calcula-

mos, como os vínculos, são válidas localmente. Por isso, são funções dos pontos da variedade. Assim, devemos escrever os vínculos como quantidades locais: (por isso $\varepsilon^a(\vec{x})$ é um campo infinitesimal)

$$\phi := \int \varepsilon^a(\vec{x}) \phi_a(\vec{x}). \quad (4.82)$$

Analogamente, os parênteses de Poisson das variáveis canônicas é dado agora, por

$$\{A_\mu(\vec{x}), p^\nu(\vec{y})\} = \delta_\mu^\nu \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (4.83)$$

enquanto o parênteses de Poisson de duas funções do espaço de fase é

$$\{U, V\} := \left(\frac{\delta U}{\delta A_\mu(\vec{x})} \frac{\delta V}{\delta p^\mu(\vec{x})} - \frac{\delta U}{\delta p^\mu(\vec{x})} \frac{\delta V}{\delta A_\mu(\vec{x})} \right), \quad (4.84)$$

onde A_μ é a conexão e p^μ são os momentos canonicamente conjugados aos campos A_μ , que calcularemos a seguir.

Dito isto, estamos aptos a utilizar os resultados do apêndice A para nosso caso. Notemos primeiramente que a ação (4.75) é uma ação de primeira ordem no que diz respeito as derivadas em ordem ao tempo. Assim, quando passamos do formalismo Lagrangeano para o Hamiltoniano, somos conduzidos a uma Hessiana de determinante zero, de modo que acabamos por não conseguir inverter todos os momentos conjugados aos campos. [22] Logo, existem relações entre os momentos conjugados e os campos, portanto vínculos, de modo que as equações de movimento não são suficientes para nos dar toda a informação sobre a dinâmica do sistema. Por conta disso, faz-se necessário o uso do formalismo Hamiltoniano de Dirac.

Como a ação é linear nas derivadas temporais de A_i^a , o respectivo momento conjugado canônico é

$$p_a^i = l_a^i, \quad (4.85)$$

estando sujeito, portanto, a $2nN$ vínculos primários dados por

$$\phi_a^i = p_a^i - l_a^i \approx 0. \quad (4.86)$$

Calculando o momento conjugado referente a A_0^a , obtemos

$$p_a^0 = 0, \quad (4.87)$$

cuja condição de consistência nos dá o seguinte vínculo secundário:

$$K_a \approx 0, \quad (4.88)$$

com K_a dado pela equação (4.77).

A fim de classificarmos os vínculos em vínculos de primeira e segunda classe, podemos fazer uma mudança de base dos vínculos K_a para G_a , onde

$$G_a = -K_a + D_i \phi_a^i, \quad (4.89)$$

pois a superfície definida no espaço de fase pelos vínculos ϕ_a^i e K_a é equivalente à superfície definida por ϕ_a^i e G_a . A vantagem de se fazer isso é que podemos identificar os vínculos G_a como vínculos de primeira classe, uma vez que eles geram as transformações de gauge[20]. De fato, uma transformação de gauge infinitesimal, é dada por

$$\delta_\epsilon A_\mu^a = -D_\mu \epsilon^a, \quad (4.90)$$

com ϵ um campo infinitesimal valorado na álgebra de Lie. Contudo, se calcularmos os parênteses de Poisson de A com G , obtemos

$$\left\{ A_i^a(\vec{x}), \int \epsilon^b(\vec{y}) G_b(\vec{y}) \right\} = -D_i \epsilon^a(\vec{x}), \quad (4.91)$$

de maneira que podemos fazer a identificação

$$\delta_\epsilon A_i^a = \left\{ A_i^a(\vec{x}), \int \epsilon^b(\vec{y}) G_b(\vec{y}) \right\}. \quad (4.92)$$

O Hamiltoniano do sistema (equação (A.8)) é dado por

$$H = \int \left(p_a^i \dot{A}_i^a - A_0^a G_a - \lambda_i^a \phi_a^i \right), \quad (4.93)$$

de modo que em posse deste, podemos analisar as condições de consistência, a fim de verificarmos se há novos vínculos. Como G_a é de primeira classe, temos automaticamente que $\dot{G}_0 \approx 0$, logo a condição de consistência referente a este vínculo nos leva a uma equação do tipo $0 \approx 0$, não trazendo nenhum novo vínculo. Relativamente a ϕ_a^i obtemos que $\dot{\phi}_a^i = \Omega_{ab}^{ij} \lambda_j^b = 0$, onde $\lambda_j^b(\vec{x})$ são multiplicadores de Lagrange relativos a ϕ_a^i . Logo somos levados a condições que os multiplicadores de Lagrange devem obedecer a fim de que este vínculo seja estável. Portanto, não obtemos nenhum vínculo novo.

Assim, calculando os parênteses de Poisson, definidos em (A.9), em relação aos vínculos obtidos, encontramos que

$$\begin{aligned} \{G_a(\vec{x}), G_b(\vec{y})\} &= f_{ab}{}^c G_c(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{\phi_a^i(\vec{x}), G_b(\vec{y})\} &= f_{ab}{}^c \phi_c^i(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{\phi_a^i(\vec{x}), \phi_b^j(\vec{y})\} &= \Omega_{ab}^{ij}(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned} \quad (4.94)$$

$f_{ab}{}^c$ são as constantes de estrutura da álgebra de Lie associada. Assim, os parênteses de Poisson de G_a em relação a qualquer um dos vínculos é uma combinação linear de vínculos, logo é fracamente igual a 0, revelando que G_a é de fato de primeira classe. Além disso, temos que os parênteses de Poisson de G_a com o Hamiltoniano é fracamente zero. Logo, eles são os geradores das transformações de gauge.[22].

A questão agora passa a identificarmos dentre os ϕ' s quais são de primeira e de segunda classe. Para isso é conveniente agrupar todos os colchetes de Poisson dos vínculos na seguinte matriz

$$\Omega = \left(\begin{array}{c|c} \{\phi_a^i, \phi_b^j\} & \{G_a, \phi_b^j\} \\ \hline \{\phi_a^i, G_b\} & \{G_a, G_b\} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \Omega_{ab}^{ij} & \approx 0 \\ \hline \approx 0 & \approx 0 \end{array} \right). \quad (4.95)$$

O bloco superior esquerdo é a matriz Ω_{ab}^{ij} , de dimensão $2nN$, podendo agrupar vínculos tanto de primeira classe quanto de segunda. Do mesmo modo, o bloco inferior direito é uma matriz de dimensão N que agrupa os colchetes de vínculos de primeira classe G_a . Os outros dois blocos agrupam colchetes dos vínculos G , de primeira classe, com os vínculos ϕ , que podem ser de primeira quanto de segunda classe, mas que pela definição de vínculos de primeira classe, acabam por ser fracamente iguais a 0.

Com isso, o número de vínculos de segunda classe em nossa teoria será igual ao rank (também chamado de posto) de Ω , que é igual ao rank de Ω_{ij}^{ab} , ou seja, o total de número de linhas linearmente independentes de Ω_{ij}^{ab} . Isso é devido ao fato de que se houver linhas de Ω_{ij}^{ab} que são combinação linear de outras, significa que alguns dos vínculos ϕ_a^i podem ser expressos como combinação de outros. Contudo, podemos diagonalizar a matriz em blocos, de maneira a obtermos uma submatriz referente a todos os parênteses de Poisson não nulos. A quantidade de linhas nulas resultantes do processo de diagonalização nos revela a quantidade de vínculos de primeira classe dentre os ϕ' s.

Assim podemos determinar a natureza dos vínculos ϕ_a^i determinando os autovalores de Ω_{ij}^{ab} .

Sabemos da álgebra linear que uma matriz inversível não admite autovalores nulos. Logo, se encontrarmos algum autovalor de Ω_{ij}^{ab} igual a 0, significa que Ω_{ij}^{ab} não admite inversa, de modo que deve haver ao menos uma linha de Ω_{ij}^{ab} que não é linearmente independente das demais, o que, em decorrência da discussão anterior, leva a algum vínculo de primeira classe.

Mostrou-se em [4] que na superfície $K_a \approx 0$ e $\phi \approx 0$, que é equivalente a superfície $G_a \approx 0$ e $\phi \approx 0$, faz-se presente a relação

$$\Omega_{ab}^{ij} F_{kj}^b \approx 0, \quad (4.96)$$

que é uma relação para autovalores nulos. Logo existem $2n$ autovetores $(v_k)_j^b$ associados a esses autovalores nulos, onde $k = 0, \dots, 2n$. Portanto, dentre os ϕ há um total de $2n$ vínculos de primeira classe.

Ainda segundo a referência [4] estes são dados por

$$H_i = F_{ij}^a \phi_a^j, \quad (4.97)$$

sendo os geradores dos difeomorfismos espaciais. Referentemente aos difeomorfismos temporais, estes não geram vínculos de primeira classe, pois seus geradores são uma combinação dos vínculos G_a e H_i .

Se não há mais vínculos de primeira classe na teoria, podemos contabilizar o número de graus de liberdade locais, conforme expressão contida no apêndice A. Nossas variáveis canônicas que definem o espaço de fase são (A_i^a, p_a^i) . Temos portanto um total de $4nN$ variáveis canônicas. Vimos que temos $N + 2n$ vínculos de primeira classe, referentes aos vínculos G_a e H_i , respectivamente, além de $2nN - 2n = 2n(N - 1)$ vínculos de segunda classe, referentes aos demais ϕ 's que estamos a supor serem todos de segunda classe. Logo, o número de graus de liberdade é

$$\begin{aligned} N_{GL} &= \frac{1}{2}(\dim E_F - 2V_P - V_S) \\ &= \frac{1}{2}(4nN - 2(N + 2n) - 2n(N - 1)) = nN - n - N \end{aligned} \quad (4.98)$$

conforme indica [5].

4.7.1 Genericidade

O conceito de **genericidade** [4] é de extrema importância para uma tentativa de se descrever uma teoria de gravitação no formalismo dos laços quânticos [10], pois numa teoria desse gênero, chamada de **teoria genérica**, o vínculo conhecido como vínculo hamiltoniano ou vínculo escalar é uma consequência dos demais vínculos, tal como ocorreu no caso que acabamos de abordar.

Vamos aqui utilizar a definição de genericidade dada por [21], que apesar de mais simples que a dada em [4], generaliza esta última, uma vez que esta é definida com base no caso desenvolvido nessa seção. Portanto, chamaremos uma teoria de genérica caso *os vínculos correspondentes às transformações de gauge e aos difeomorfismos espaciais formem uma base para todos os vínculos de primeira classe da teoria.*

Dessa forma, se a matriz Ω é a matriz que representa os parênteses de Poisson de todos os vínculos da teoria tem dimensão igual a R e V_P é a dimensão da base dos vínculos de primeira classe, então Ω deve ter o rank máximo r_{max} compatível com a definição de genericidade anterior. Logo,

$$r_{max} := \text{rank } \Omega = R - V_P. \quad (4.99)$$

A maior vantagem dessa abordagem é que se Ω tem o rank máximo, não há outros vínculos de primeira classe na teoria além dos vínculos devidos as transformações de gauge e aos difeomorfismos espaciais, de modo que os vínculos devidos aos difeomorfismos temporais podem ser escritos a partir destes. Essa condição acaba por facilitar a aplicação do formalismo dos laços quânticos.

4.7.2 Dinâmica da teoria de Chern-Simons em $5D$ para o caso $(A)dS_5$

A partir da análise anterior, podemos verificar a dinâmica das teorias de Chern-Simons para gravitação em $5D$ com o grupo $(A)dS_5$ como grupo de gauge. [5] Logo a álgebra de Lie associada é $(a)dS_5$, sendo o tensor invariante ε_{MNPQRS} . Assim, devemos substituir os índices referentes a álgebra de Lie geral por índices coletivos MN . Notemos ainda que para esse caso temos $n = 2$ (pois a dimensão da variedade é 5) e $N = 15$, uma vez que temos 15 geradores associados ao grupo $(A)dS_5$.

Desse modo as equações de movimento são

$$\varepsilon_{MNPQRS} F^{PQ} F^{RS} = 0, \quad (4.100)$$

que são equivalentes a (4.79) e (4.80), no caso particular em que o grupo considerado é o $(A)dS_5$, sendo

$$K_{MN} = -\frac{1}{8}\varepsilon_{MNPQRS}\varepsilon^{ijkl}F_{ij}^{PQ}F_{kl}^{RS} \quad (4.101)$$

e

$$\Omega_{MNPQ}{}^{ij} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{MNPQRS}\varepsilon^{ijkl}F_{kl}^{RS}. \quad (4.102)$$

O resto da análise é feita de forma exatamente igual a desenvolvida para o caso geral. Logo temos 15 vínculos secundários K_{MN} que nos levam aos 15 vínculos de primeira classe G_{MN} . Para além destes temos os ϕ_{MN}^i , que consistem num total de $4 \times 15 = 60$ vínculos, cujos parênteses de Poisson nos dão $\Omega_{MNPQ}{}^{ij} = \Omega_{MN}{}^i{}_{PQ}{}^j$, que por sua vez é uma matriz 60×60 , considerando-se o multi-índice MNi .

Dentre os ϕ_{MN}^i conhecemos 4 vínculos de primeira classe H_i , que geram os difeomorfismos espaciais [5]. Logo, como não temos mais vínculos na teoria, o número de vínculos de segunda classe é $\#_{VS} \leq 56$, de modo que $rank \Omega \leq 56$. Desse modo, para atendermos a condição de genericidade, não podemos ter mais vínculos de primeira classe na teoria, de modo que teremos uma teoria genérica se $rank \Omega = r_{max} = 56$.

Agora, se encontramos uma configuração que obedeça aos vínculos K_a , ela nos retornará um determinado rank r . Contudo, como essa análise é local teremos que o $rank \Omega$ é no mínimo r , ou seja, $rank \Omega \geq r$. Juntando essa condição com a condição anterior obtemos um limitante para o $rank \Omega$, pois $r \leq rank \Omega \leq r_{max}$.

Tomemos, pois, o exemplo dado em [4], onde a curvatura tem a seguinte configuração

$$\begin{aligned} F^{12} &= dx^1 dx^2 + dx^3 dx^4 \\ F^{34} &= dx^1 dx^2 - dx^3 dx^4 \\ F^{56} &= dx^1 dx^3 + dx^2 dx^4 \\ F^{MN} &= 0, \text{ caso contrário.} \end{aligned} \quad (4.103)$$

Precisamos verificar se existe uma conexão A que nos dá tal curvatura. Mas isto é imediato, pois como $F^{MN} = dA^{MN} + A^M{}_K A^{KN}$, basta tomarmos A^{MN} tal que

$$\begin{aligned}
A^{12} &= x^1 dx^2 + x^3 dx^4 \\
A^{34} &= x^1 dx^2 - x^3 dx^4 \\
A^{56} &= x^1 dx^3 + x^2 dx^4 \\
A^{MN} &= 0, \text{ caso contrário.}
\end{aligned} \tag{4.104}$$

Desse modo temos que o vínculo (4.101) é satisfeito, pois para essa escolha de F temos que $F^{12}F^{34} = F^{12}F^{56} = F^{34}F^{56} = 0$.

Queremos portanto saber qual o rank gerado por essa configuração, para termos um limitante inferior para o rank de Ω . Para isso basta olharmos para as soluções da equação de auto-valores

$$\Omega_{MNPQ}{}^{ij} V^{PQ}{}_j = 0, \tag{4.105}$$

pois se Ω possui linhas que são linearmente dependentes de outras (logo nem todos os vínculos são de segunda classe), então $\det \Omega = 0$, de modo que não admite inversa. Assim, podem existir V_j^{RS} que são diferentes de 0. Desse modo, para obtermos o rank de Ω basta calcularmos quantas soluções são não nulas. Mas se usarmos a relação (4.102), a equação anterior nos dá a seguinte condição

$$\varepsilon_{MNPQRS} F^{RS} V^{PQ} dx^i = 0. \tag{4.106}$$

Usando a configuração dada por (4.103), somos conduzidos a

$$\begin{aligned}
& [\varepsilon_{MNPQ12}(dx^1 dx^2 + dx^3 dx^4) + \varepsilon_{MNPQ34}(dx^1 dx^2 - dx^3 dx^4) + \\
& \varepsilon_{MNPQ56}(dx^1 dx^3 + dx^2 dx^4)] V^{PQ}{}_j dx^j dx^i = 0,
\end{aligned} \tag{4.107}$$

cuja solução nos mostra que todos os V_j^{RS} são nulos, excetos os listados abaixo:

$$\begin{aligned}
V^{56}{}_2 &= V^{12}{}_3 = -V^{34}{}_3 \\
V^{56}{}_3 &= V^{12}{}_2 = V^{34}{}_2 \\
V^{56}{}_1 &= -V^{12}{}_4 = V^{34}{}_4 \\
V^{56}{}_4 &= -V^{12}{}_1 = -V^{34}{}_1.
\end{aligned}$$

Logo temos apenas 4 soluções independentes, o que nos revela que o rank de Ω para essa configuração é $r = 60 - 4 = 56$. Portanto, temos que $56 \leq \text{rank } \Omega \leq 56$, ou seja, $\text{rank } \Omega = r_{max} = 56$. Portanto podemos concluir que essa teoria é de fato genérica.

Chegamos a mesma conclusão usando uma abordagem numérica. Para isso construímos um programa de computador, utilizando o software *Mathematica*, que dada uma configuração das curvaturas, verifica se estas obedem as equações de vínculos e, após isso, calcula o respectivo rank de Ω . O resultado obtido pelo programa coincidiu com o cálculo analítico, retornando 56 como resposta. O programa utilizado encontra-se no apêndice B.

Uma vez que sabemos que o número de vínculos de primeira classe é 19 (15 G' s, associados as transformações de gauge, mais 4 combinações dos ϕ que estão ligados aos difeomorfismos espaciais) e o número de vínculos de segunda classe é 56, podemos obter o número de graus de liberdade da teoria, de acordo com (4.98), sabendo que a dimensão do espaço de fase é 120. Assim,

$$N_{GL} = \frac{1}{2} (120 - 38 - 56) = 13. \quad (4.108)$$

Capítulo 5

Gravitação de Chern-Simons para a álgebra C_5

Como vimos no capítulo anterior, as formas de Chern-Simons nos fornecem um bom ferramentário no que diz respeito ao contexto da gravitação: Produzem ações que são invariantes de gauge e invariantes sob transformações gerais de coordenadas, além de permitirem extensões do grupo de Lorentz. A fim de tentarmos obter uma teoria de gravitação que reproduza a teoria de Einstein, necessitamos contruir uma ação em $5D$. Como vimos o menor grupo que contém o grupo de Lorentz como subgrupo num cenário penta-dimensional é o grupo $(A)dS_5$. A vantagem de se usar este grupo é que, tal como comentamos anteriormente, ele pode ser visto como uma deformação do grupo de Poincaré, de maneira que podemos passar para uma teoria com constante cosmológica. Nesse sentido, Λ é o parâmetro de deformação, de modo que se tomarmos $\Lambda = 0$, temos o grupo de Poincaré. Mas ainda podemos pensar também em utilizar extensões de $(A)dS_5$, pois uma vez que estas extensões contenham $(A)dS_5$, também irão conter Lorentz. Desse modo iremos usar as expansões propostas no capítulo 3, que nos levaram a álgebra C_5 .

Mas qual a vantagem dessa extensão para gravitação? Como mostramos no capítulo anterior, no formalismo de primeira ordem, agrupamos tanto o vielbein quanto a conexão de spin na conexão 1-forma A , conforme mostra a equação (4.68). Assim, os campos associados a esta teoria são interpretados como campos de gravitação. Contudo a álgebra C_5 possui o dobro de geradores de $(A)dS_5$, logo o dobro de campos. Assim, os campos extras que aparecem numa teoria de Chern-Simons construída a partir desta álgebra acabam por interagir com os campos de gravitação, de modo que podemos interpretá-los como uma possível matéria. Assim, a vantagem de se usar essa expansão seria justamente a possibilidade de se introduzir a matéria nas teorias de gravitação.

5.1 Construindo a ação de Chern-Simons para C_5

A fim de relembrar o leitor dos resultados obtidos no capítulo 3, vamos resumir as principais características da álgebra C_5 : Possui como base $T_{MN\alpha} = \lambda_\alpha T_{MN}$, com $\alpha = 0, 1$ e MN os índices de $(A)dS_5$, logo um total de 30 geradores, sendo que o semigrupo finito associado possui a seguinte tabela de multiplicação ($\varepsilon = \pm 1$)

S	λ_0	λ_1
λ_0	λ_0	λ_1
λ_1	λ_1	$\varepsilon\lambda_0$

As constantes de estrutura são $f_{MN\alpha, PQ\beta}{}^{RS\gamma} = K_{\alpha\beta}{}^\gamma f_{MN, PQ}{}^{RS}$, onde $K_{\alpha\beta}{}^\gamma$ é dado pela equação (3.33) e $f_{MN, PQ}{}^{RS}$ as constantes de estrutura de $(A)dS_5$ dadas por (3.19). Por fim, o tensor invariante de C_5 na representação adjunta é $g_{MN\alpha, PQ\beta, RS\gamma} = c_\delta K_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta \varepsilon_{MNPQRS}$, com dois parâmetros arbitrários c_0 e c_1 ($\alpha, \beta, \gamma, \delta = 0, 1$).

Assim, a conexão de gauge é escrita do seguinte modo

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\mathcal{A}^{MN\alpha}T_{MN\alpha} = \frac{1}{2}\mathcal{A}^{MN0}T_{MN0} + \frac{1}{2}\mathcal{A}^{MN1}T_{MN1}. \quad (5.1)$$

Assumindo que os campos referentes aos campos de gravitação estão relacionados com o índice 0 da conexão e os campos referentes a matéria com o índice 1, é conveniente para nós separarmos, desde o início, o que seria proveniente da gravitação e o que seria proveniente da matéria, de modo que vamos definir

$$A^{MN} := \mathcal{A}^{MN0} \quad \text{gravitação} \quad (5.2)$$

$$B^{MN} := \mathcal{A}^{MN1} \quad \text{matéria} \quad (5.3)$$

A eventual pergunta que podemos nos fazer é o porquê dessa escolha particular e não a escolha contrária, ou seja, o porquê de não tomarmos B como sendo a parte gravitacional e A como sendo a matéria. A resposta dessa pergunta se torna mais evidente quando calculamos como A e B se transformam mediante transformações de gauge infinitesimais. Como \mathcal{A} é a conexão de C_5 , transforma-se, infinitesimalmente como

$$\delta\mathcal{A} = d\mathcal{O} + [\mathcal{A}, \mathcal{O}], \quad (5.4)$$

onde \mathcal{O} é um campo infinitesimal que admite a expansão $\mathcal{O} = \lambda_0\omega + \lambda_1\eta$. Sendo assim temos

que

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{A} &= \lambda_0 d\omega + \lambda_1 d\eta + [\lambda_0 A + \lambda_1 B, \lambda_0 \omega + \lambda_1 \eta] \\ &= \lambda_0 d\omega + \lambda_1 d\eta + \lambda_0 [A, \omega] + \lambda_1 [A, \eta] + \lambda_1 [B, \omega] + \varepsilon \lambda_0 [B, \eta].\end{aligned}\quad (5.5)$$

Uma vez que $\mathcal{A} = \lambda_0 A + \lambda_1 B$, temos que

$$\delta\mathcal{A} = \lambda_0 \delta A + \lambda_1 \delta B. \quad (5.6)$$

Logo,

$$\delta A = d\omega + [A, \omega] + \varepsilon [B, \eta] = \delta_\omega A + \delta_\eta A \quad (5.7)$$

$$\delta B = d\eta + [A, \eta] + [B, \omega] = \delta_\eta B + \delta_\omega B, \quad (5.8)$$

onde

$$\delta_\omega A = d\omega + [A, \omega], \quad \delta_\omega B = [B, \omega] \quad (5.9)$$

$$\delta_\eta A = \varepsilon [B, \eta], \quad \delta_\eta B = d\eta + [A, \eta]. \quad (5.10)$$

Portanto, podemos observar que $\delta_\omega A$ é a lei de transformação de uma conexão para o grupo $(A)dS_5$, enquanto δ_η é um termo que aparece devido ao processo de expansão. Contudo, não podemos identificar nem $\delta_\omega B$ nem $\delta_\eta B$ como a transformação infinitesimal de uma conexão. Ao invés disso B transforma-se de maneira covariante na representação adjunta. Desse modo não podemos identificar B como sendo o campo de gravitação, podendo identificá-lo apenas como um campo que interage com este, logo um campo de matéria. Assim, A é o campo relacionado a geometria e B o campo associado a matéria.

Poderíamos ainda nos perguntar em relação a natureza da matéria associada ao campo B . Ou seja, se B representa a matéria usual tal como estamos habituados, ou algum outro tipo de matéria, como a matéria escura por exemplo, ou ainda, uma mescla de ambas. Para fazermos essa análise é preciso estudarmos os possíveis modelos cosmológicos provenientes dessa teoria, bem como as possíveis soluções que estes nos apresentam. Contudo não faremos isto neste trabalho, de modo que pretendemos responder essa questão em trabalhos futuros.

Feita essa análise, podemos calcular a curvatura $\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A}^2$, para isso precisamos de

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^2 &= \frac{1}{4} \mathcal{A}^{MN\alpha} \mathcal{A}^{PQ\beta} T_{MN\alpha} T_{PQ\beta} = \frac{1}{8} \mathcal{A}^{MN\alpha} \mathcal{A}^{PQ\beta} [T_{MN\alpha}, T_{PQ\beta}] \\ &= \frac{1}{8} \mathcal{A}^{MN\alpha} \mathcal{A}^{PQ\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta [T_{MN}, T_{PQ}]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Fazendo a soma implícita em α e β e tendo em mente a tabela de multiplicação de S , podemos escrever \mathcal{A}^2 em termos de A e B . Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^2 &= \frac{1}{8} (\lambda_0 A^{MN} A^{PQ} [T_{MN}, T_{PQ}] + \lambda_1 A^{MN} B^{PQ} [T_{MN}, T_{PQ}] - \lambda_1 A^{MN} B^{PQ} [T_{PQ}, T_{MN}] + \\ &\quad \varepsilon \lambda_0 B^{MN} B^{PQ} [T_{MN}, T_{PQ}]) \\ &= \frac{1}{8} \lambda_0 A^{MN} A^{PQ} [T_{MN}, T_{PQ}] + \frac{1}{4} \lambda_1 A^{MN} B^{PQ} [T_{MN}, T_{PQ}] + \\ &\quad \varepsilon \frac{1}{8} \lambda_0 B^{MN} B^{PQ} [T_{MN}, T_{PQ}], \end{aligned} \quad (5.12)$$

ou, de forma mais compacta,

$$\mathcal{A}^2 = \lambda_0 (A^2 + \varepsilon B^2) + \lambda_1 [A, B]. \quad (5.13)$$

Mas ainda, podemos escrever $\mathcal{A} = \lambda_\alpha \mathcal{A}^\alpha$, com $\mathcal{A}^\alpha = \frac{1}{2} \mathcal{A}^{MN\alpha} T_{MN}$. Logo,

$$d\mathcal{A} = \lambda_0 dA + \lambda_1 dB. \quad (5.14)$$

Portanto, a curvatura é escrita do seguinte modo

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \lambda_0 dA + \lambda_1 dB + \lambda_0 (A^2 + \varepsilon B^2) + \lambda_1 [A, B] \\ &= \lambda_0 (dA + A^2 + \varepsilon B^2) + \lambda_1 (dB + [A, B]) \\ &= \lambda_0 F + \lambda_1 G \end{aligned} \quad (5.15)$$

com

$$F := dA + A^2 + \varepsilon B^2, \quad G := dB + [A, B] \quad (5.16)$$

O próximo passo é calcular a ação de Chern-Simons para C_5 . A expressão (4.42) aplicada a álgebra expandida nos permite obter a seguinte ação

$$S = c_\delta K_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta \varepsilon_{MNPQRS} \int \left(\mathcal{A}^{MN\alpha} d\mathcal{A}^{PQ\beta} d\mathcal{A}^{RS\gamma} + \frac{3}{2} \mathcal{A}^{MN\alpha} (\mathcal{A}^2)^{PQ\beta} d\mathcal{A}^{RS\gamma} + \frac{3}{5} \mathcal{A}^{MN\alpha} (\mathcal{A}^2)^{PQ\beta} (\mathcal{A}^2)^{RS\gamma} \right). \quad (5.17)$$

Portanto a ação de Chern-Simons para esse caso possui dois parâmetros independentes: c_0 e c_1 , de modo que temos duas ações possíveis. Assim, a ação mais geral possível é uma combinação destas duas.

A fim de ficar evidente quais termos na ação são devidos a parte gravitacional e quais são devidos a matéria, devemos fazer a expansão de \mathcal{A} em termos de A e B . Para isso temos de nos atentar que os únicos K' s não nulos são $K_{000}^0 = 1$, $K_{001}^1 = K_{010}^1 = K_{100}^1 = 1$, $K_{011}^0 = K_{101}^0 = K_{110}^0 = \varepsilon$ e $K_{111}^1 = \varepsilon$. Assim, a soma implícita em α, β, γ irá retornar termos não nulos apenas quando os índices admitirem uma combinação que nos retorna algum dos K' s listados.

Como temos muitas possibilidades de combinação, penso ser elucidativo separarmos a ação em cada uma das possíveis combinações que nos darão algum termo não nulo, de modo a tornar a análise mais fácil. Para isso irei definir

$$S^{\alpha\beta\gamma} := \varepsilon_{MNPQRS} \int \left(\mathcal{A}^{MN\alpha} d\mathcal{A}^{PQ\beta} d\mathcal{A}^{RS\gamma} + \frac{3}{2} \mathcal{A}^{MN\alpha} (\mathcal{A}^2)^{PQ\beta} d\mathcal{A}^{RS\gamma} + \frac{3}{5} \mathcal{A}^{MN\alpha} (\mathcal{A}^2)^{PQ\beta} (\mathcal{A}^2)^{RS\gamma} \right), \quad (5.18)$$

onde deixei de fora o fator $c_\delta K_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta$, a fim de termos $S = c_\delta K_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta S^{\alpha\beta\gamma}$. Desse modo precisamos obter $S^{000}, S^{011}, S^{010}, \dots, S^{111}$. O primeiro termo nos retorna

$$S^{000} = \varepsilon_{MNPQRS} \int \left(\mathcal{A}^{MN0} d\mathcal{A}^{PQ0} d\mathcal{A}^{RS0} + \frac{3}{2} \mathcal{A}^{MN0} (\mathcal{A}^2)^{PQ0} d\mathcal{A}^{RS0} + \frac{3}{5} \mathcal{A}^{MN0} (\mathcal{A}^2)^{PQ0} (\mathcal{A}^2)^{RS0} \right).$$

De (5.13) e (5.14), fica evidente que $(\mathcal{A}^2)^{MN0} = A^2 + \varepsilon B^2$ e $(\mathcal{A}^2)^{MN1} = [A, B]$, bem como $d\mathcal{A}^{MN0} = dA^{MN}$ e $d\mathcal{A}^{MN1} = dB$. Portanto, substituindo na expressão anterior obtemos que

$$\begin{aligned}
 S^{000} = \varepsilon_{MNPQRS} \int & \left(A^{MN} dA^{PQ} dA^{RS} + \frac{3}{2} A^{MN} (A^2)^{PQ} dA^{RS} + \frac{3}{2} \varepsilon A^{MN} (B^2)^{PQ} dA^{RS} + \right. \\
 & \frac{3}{5} A^{MN} (A^2)^{PQ} (A^2)^{RS} + \frac{3}{5} \varepsilon A^{MN} (A^2)^{PQ} (B^2)^{RS} + \frac{3}{5} \varepsilon A^{MN} (B^2)^{PQ} (A^2)^{RS} + \\
 & \left. \frac{3}{5} A^{MN} (B^2)^{PQ} (B^2)^{RS} \right). \quad (5.19)
 \end{aligned}$$

De forma similar, S^{001} nos retorna

$$\begin{aligned}
 S^{001} = \varepsilon_{MNPQRS} \int & \left(\mathcal{A}^{MN0} d\mathcal{A}^{PQ0} d\mathcal{A}^{RS1} + \frac{3}{2} \mathcal{A}^{MN0} (\mathcal{A}^2)^{PQ0} d\mathcal{A}^{RS1} + \right. \\
 & \left. \frac{3}{5} \mathcal{A}^{MN0} (\mathcal{A}^2)^{PQ0} (\mathcal{A}^2)^{RS1} \right),
 \end{aligned}$$

que em termos dos campos A e B nos dá

$$\begin{aligned}
 S^{001} = \varepsilon_{MNPQRS} \int & \left(A^{MN} dA^{PQ} dB^{RS} + \frac{3}{2} A^{MN} (A^2)^{PQ} dB^{RS} + \frac{3}{2} \varepsilon A^{MN} (B^2)^{PQ} dB^{RS} + \right. \\
 & \left. \frac{3}{5} A^{MN} (A^2)^{PQ} [A, B]^{RS} + \frac{3}{5} \varepsilon A^{MN} (B^2)^{PQ} [A, B]^{RS} \right). \quad (5.20)
 \end{aligned}$$

Procedendo da mesmo modo obtemos os termos restantes:

$$\begin{aligned}
 S^{010} = \varepsilon_{MNPQRS} \int & \left(A^{MN} dB^{PQ} dA^{RS} + \frac{3}{2} A^{MN} [A, B]^{PQ} dA^{RS} + \right. \\
 & \left. \frac{3}{5} A^{MN} [A, B]^{PQ} (A^2)^{RS} + \frac{3}{5} \varepsilon A^{MN} [A, B]^{PQ} (B^2)^{RS} \right). \quad (5.21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S^{100} = \varepsilon_{MNPQRS} \int & \left(B^{MN} dA^{PQ} dA^{RS} + \frac{3}{2} B^{MN} (A^2)^{PQ} dA^{RS} + \frac{3}{2} \varepsilon B^{MN} (B^2)^{PQ} dA^{RS} + \right. \\
 & \frac{3}{5} B^{MN} (A^2)^{PQ} (A^2)^{RS} + \frac{3}{5} \varepsilon B^{MN} (A^2)^{PQ} (B^2)^{RS} + \frac{3}{5} \varepsilon B^{MN} (B^2)^{PQ} (A^2)^{RS} + \\
 & \left. \frac{3}{5} B^{MN} (B^2)^{PQ} (B^2)^{RS} \right). \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

$$S^{011} = \varepsilon_{MNPQRS} \int \left(A^{MN} dB^{PQ} dB^{RS} + \frac{3}{2} A^{MN} [A, B]^{PQ} dB^{RS} + \frac{3}{5} A^{MN} [A, B]^{PQ} [A, B]^{RS} \right). \quad (5.23)$$

$$S^{101} = \varepsilon_{MNPQRS} \int \left(B^{MN} dA^{PQ} dB^{RS} + \frac{3}{2} B^{MN} (A^2)^{PQ} dB^{RS} + \frac{3}{2} \varepsilon B^{MN} (B^2)^{PQ} dB^{RS} + \frac{3}{5} B^{MN} (A^2)^{PQ} [A, B]^{RS} + \frac{3}{5} \varepsilon B^{MN} (B^2)^{PQ} [A, B]^{RS} \right). \quad (5.24)$$

$$S^{110} = \varepsilon_{MNPQRS} \int \left(B^{MN} dB^{PQ} dA^{RS} + \frac{3}{2} B^{MN} [A, B]^{PQ} dA^{RS} + \frac{3}{5} B^{MN} [A, B]^{PQ} (A^2)^{RS} + \frac{3}{5} \varepsilon B^{MN} [A, B]^{PQ} (B^2)^{RS} \right). \quad (5.25)$$

$$S^{111} = \varepsilon_{MNPQRS} \int \left(B^{MN} dB^{PQ} dB^{RS} + \frac{3}{2} B^{MN} [A, B]^{PQ} dB^{RS} + \frac{3}{5} B^{MN} [A, B]^{PQ} [A, B]^{RS} \right). \quad (5.26)$$

Uma vez obtidos todos os termos fica fácil calcular $S = c_\delta K_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta S^{\alpha\beta\gamma}$. Basicamente será a soma dos termos obtidos vezes c_0 ou c_1 , atentando-se para qual destas constantes retornará um K não nulo. Logo, podemos finalmente escrever a ação de Chern-Simons para a álgebra C_5 .

$$S = c_0 [S_{000} + \varepsilon (S_{011} + S_{101} + S_{110})] + c_1 [(S_{001} + S_{010} + S_{100}) + \varepsilon S_{111}]$$

$$\begin{aligned}
 S = c_0 \varepsilon_{MNPQRS} \int & \left\{ A^{MN} dA^{PQ} dA^{RS} + \frac{3}{2} A^{MN} (A^2)^{PQ} dA^{RS} + \frac{3}{2} \varepsilon A^{MN} (B^2)^{PQ} dA^{RS} + \right. \\
 & \frac{3}{5} A^{MN} (A^2)^{PQ} (A^2)^{RS} + \frac{3}{5} \varepsilon A^{MN} (A^2)^{PQ} (B^2)^{RS} + \frac{3}{5} \varepsilon A^{MN} (B^2)^{PQ} (A^2)^{RS} + \\
 & \frac{3}{5} A^{MN} (B^2)^{PQ} (B^2)^{RS} + \varepsilon \left(A^{MN} dB^{PQ} dB^{RS} + \frac{3}{2} A^{MN} [A, B]^{PQ} dB^{RS} + \right. \\
 & \frac{3}{5} A^{MN} [A, B]^{PQ} [A, B]^{RS} + B^{MN} dA^{PQ} dB^{RS} + \frac{3}{2} B^{MN} (A^2)^{PQ} dB^{RS} + \\
 & \frac{3}{2} \varepsilon B^{MN} (B^2)^{PQ} dB^{RS} + \frac{3}{5} B^{MN} (A^2)^{PQ} [A, B]^{RS} + \frac{3}{5} \varepsilon B^{MN} (B^2)^{PQ} [A, B]^{RS} + \\
 & B^{MN} dB^{PQ} dA^{RS} + \frac{3}{2} B^{MN} [A, B]^{PQ} dA^{RS} + \frac{3}{5} B^{MN} [A, B]^{PQ} (A^2)^{RS} + \\
 & \left. \left. \frac{3}{5} \varepsilon B^{MN} [A, B]^{PQ} (B^2)^{RS} \right) \right\} + \\
 c_1 \varepsilon_{MNPQRS} \int & \left\{ A^{MN} dA^{PQ} dB^{RS} + \frac{3}{2} A^{MN} (A^2)^{PQ} dB^{RS} + \frac{3}{2} \varepsilon A^{MN} (B^2)^{PQ} dB^{RS} + \right. \\
 & \frac{3}{5} A^{MN} (A^2)^{PQ} [A, B]^{RS} + \frac{3}{5} \varepsilon A^{MN} (B^2)^{PQ} [A, B]^{RS} + A^{MN} dB^{PQ} dA^{RS} + \\
 & \frac{3}{2} A^{MN} [A, B]^{PQ} dA^{RS} + \frac{3}{5} A^{MN} [A, B]^{PQ} (A^2)^{RS} + \frac{3}{5} \varepsilon A^{MN} [A, B]^{PQ} (B^2)^{RS} + \\
 & B^{MN} dA^{PQ} dA^{RS} + \frac{3}{2} B^{MN} (A^2)^{PQ} dA^{RS} + \frac{3}{2} \varepsilon B^{MN} (B^2)^{PQ} dA^{RS} + \\
 & \frac{3}{5} B^{MN} (A^2)^{PQ} (A^2)^{RS} + \frac{3}{5} \varepsilon B^{MN} (A^2)^{PQ} (B^2)^{RS} + \frac{3}{5} \varepsilon B^{MN} (B^2)^{PQ} (A^2)^{RS} + \\
 & \frac{3}{5} B^{MN} (B^2)^{PQ} (B^2)^{RS} + \varepsilon \left(B^{MN} dB^{PQ} dB^{RS} + \frac{3}{2} B^{MN} [A, B]^{PQ} dB^{RS} + \right. \\
 & \left. \left. \frac{3}{5} B^{MN} [A, B]^{PQ} [A, B]^{RS} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Podemos melhorar o aspecto da expressão anterior se agruparmos os termos que estão multiplicados pela mesma fração, uma vez que são bem similares. Podemos nos atentar também ao fato de que alguns termos são iguais a outros, tais como $B^{MN} dA^{PQ} dB^{RS}$ e $B^{MN} dB^{PQ} dA^{RS}$, que aparecem no termo que contém c_0 , pois como são forma pares o segundo termo é igual a $B^{MN} dA^{RS} dB^{PQ}$ e uma vez que estão sendo multiplicados por ε_{MNPQRS} este último fica invariante a troca $PQ \rightarrow RS$, sendo portanto igual ao primeiro. Assim, a ação pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
 S = & c_0 \varepsilon_{MNPQRS} \int \left\{ A^{MN} dA^{PQ} dA^{RS} + \varepsilon A^{MN} dB^{PQ} dB^{RS} + 2\varepsilon B^{MN} dA^{PQ} dB^{RS} + \right. \\
 & \frac{3}{2} (A^{MN} (A^2)^{PQ} dA^{RS} + \varepsilon A^{MN} (B^2)^{PQ} dA^{RS} + \varepsilon A^{MN} [A, B]^{PQ} dB^{RS} + \\
 & \varepsilon B^{MN} (A^2)^{PQ} dB^{RS} + B^{MN} (B^2)^{PQ} dB^{RS} + \varepsilon B^{MN} [A, B]^{PQ} dA^{RS}) + \\
 & \frac{3}{5} (A^{MN} (A^2)^{PQ} (A^2)^{RS} + A^{MN} (B^2)^{PQ} (B^2)^{RS} + 2\varepsilon A^{MN} (A^2)^{PQ} (B^2)^{RS} + \\
 & \varepsilon A^{MN} [A, B]^{PQ} [A, B]^{RS} + 2\varepsilon B^{MN} [A, B]^{PQ} (A^2)^{RS} + 2B^{MN} [A, B]^{PQ} (B^2)^{RS}) \left. \right\} + \\
 & c_1 \varepsilon_{MNPQRS} \int \left\{ B^{MN} dA^{PQ} dA^{RS} + \varepsilon B^{MN} dB^{PQ} dB^{RS} + 2A^{MN} dA^{PQ} dB^{RS} + \right. \\
 & \frac{3}{2} (A^{MN} (A^2)^{PQ} dB^{RS} + \varepsilon A^{MN} (B^2)^{PQ} dB^{RS} + A^{MN} [A, B]^{PQ} dA^{RS} + \\
 & B^{MN} (A^2)^{PQ} dA^{RS} + \varepsilon B^{MN} (B^2)^{PQ} dA^{RS} + \varepsilon B^{MN} [A, B]^{PQ} dB^{RS}) + \\
 & \frac{3}{5} (B^{MN} (A^2)^{PQ} (A^2)^{RS} + B^{MN} (B^2)^{PQ} (B^2)^{RS} + 2\varepsilon B^{MN} (A^2)^{PQ} (B^2)^{RS} + \\
 & \varepsilon B^{MN} [A, B]^{PQ} [A, B]^{RS} + 2A^{MN} [A, B]^{PQ} (A^2)^{RS} + 2\varepsilon A^{MN} [A, B]^{PQ} (B^2)^{RS}) \left. \right\}. \quad (5.27)
 \end{aligned}$$

Logo, temos uma ação com 30 termos, dos quais 15 são referentes a c_0 e 15 são referentes a c_1 . Perceba que se descartarmos todos os termos com alguma contribuição de matéria, que corresponde a tomar $B = 0$, recuperamos a ação de Chern-Simons em 5 dimensões obtida para o caso puramente gravitacional, dada pela equação (4.60). Podemos concluir que a parte puramente gravitacional é dada por

$$S = c_0 \varepsilon_{MNPQRS} \int \left\{ A^{MN} dA^{PQ} dA^{RS} + \frac{3}{2} A^{MN} (A^2)^{PQ} dA^{RS} + \frac{3}{5} A^{MN} (A^2)^{PQ} (A^2)^{RS} \right\}, \quad (5.28)$$

sendo todo o restante a interação com a matéria.

Assim, podemos proceder do mesmo modo que no capítulo 4 e tentar identificar a teoria de Chern-Simons para C_5 no caso sem matéria ($B = 0$) como uma teoria de gravitação com constante cosmológica. Para isso temos de agrupar tanto o vielbein 5-dimensional e quanto a conexão de spin ω na conexão A , de modo exatamente igual ao dado pela equação (4.68):

$$A^{MN} = \begin{cases} A^{AB} = \omega^{AB}, \text{ conexão de spin} \\ A^{A5} = \frac{1}{l} e^A, \text{ vielbein} \end{cases},$$

com $M, N = 0, \dots, 5$ e $A, B = 0, \dots, 4$, sendo l um parâmetro com a dimensão de um com-

primento.

Uma vez que a ação (5.27) com $B = 0$ é exatamente igual a ação para o grupo $(A)dS_5$, dada por (4.60), quando expandida em termos de ω^{AB} e e^A , nos retornará exatamente o resultado do capítulo anterior, dado pela equação (4.71), ou seja

$$S = k \int \varepsilon_{ABCDE} \left(e^A R^{BC} R^{DE} - \frac{2s}{3l^2} e^A e^B e^C R^{DE} + \frac{1}{5l^4} e^A e^B e^C e^D e^E \right),$$

onde como já mencionamos, k e l são parâmetros relacionados à constante cosmológica e à constante da gravitação de Newton. Como podemos ver temos a presença do termo de Einstein-Hilbert (segundo termo) e do termo da constante cosmológica (terceiro termo), sendo o primeiro termo do tipo Gauss-Bonnet. Logo mostramos que a ação de Chern-Simons para C_5 não é livre do termo de Gauss-Bonnet.

Este resultado contradiz o resultado obtido em [11], uma vez que os autores obtiveram, no caso onde há a ausência de campos de matéria, que a ação não possui o termo de Gauss-Bonnet, consistindo apenas do termo de Einstein-Hilbert mais o termo devido a constante cosmológica. Acontece que, como mostramos no capítulo 3, os autores utilizaram como tensor invariante da teoria um tensor com quatro parâmetros arbitrários para construir a ação de Chern-Simons referente a C_5 . Porém, como vimos, o tensor invariante é dado por (3.48), com apenas dois parâmetros arbitrários. Assim, a escolha específica dos parâmetros tomada pelos autores de [11], leva a uma ação que não é invariante sob C_5 , uma vez que o tensor utilizado não é um tensor invariante, de modo que o resultado obtido por eles não pode estar correto.

Agora, em vez de tomarmos os campos de matéria como sendo nulos na ação (5.27), se tomarmos os campos de gravitação como zero, ou seja, se fizermos $A = 0$, obtemos os termos de auto-interação da matéria, sendo essa ação dada por

$$\varepsilon_{MNPQRS} \left(c_0 \int \frac{3}{2} B^{MN} (B^2)^{PQ} dB^{RS} + c_1 \int \left\{ \varepsilon B^{MN} dB^{PQ} dB^{RS} + \frac{3}{5} B^{MN} (B^2)^{PQ} (B^2)^{RS} \right\} \right), \quad (5.29)$$

onde aparecem os dois parâmetros arbitrários da nossa teoria. Esta ação é bem similar a ação de Chern-Simons para o caso $(A)dS_5$ simples, onde em vez dos campos A temos os campos B . Contudo, para que a ação anterior seja análoga a ação em (4.60) precisamos impor que $c_0 = c_1$ e que $\varepsilon = 1$, confirmando o fato de que B não pode ser tomado como campo de gravitação.

Os demais termos que não contém apenas A ou apenas B são os termos de interação dos campos de gravitação com os campos de matéria.

5.2 Dinâmica

A análise que será feita nesse capítulo é similar ao estudo da dinâmica das teorias de Chern-Simons que fizemos no capítulo passado. Contudo agora tomaremos a álgebra C_5 como álgebra de Lie associada. Desse modo substituiremos os índices a, b, \dots do caso geral pelos multi-índices $MN\alpha, PQ\beta, \dots$ da expansão. Desse modo faremos a troca $a \rightarrow MN\alpha, b \rightarrow PQ\beta$ e assim por diante.

Como estamos num espaço 5-dimensional, iremos assumir que a variedade admite a topologia $\mathbb{R} \times \Sigma$, onde \mathbb{R} corresponde a reta real e corresponde ao tempo, enquanto Σ é uma variedade de dimensão 4, correspondendo as 4 dimensões espaciais, cujas coordenadas admitiremos ser x^i , onde $i = 1, 2, 3, 4$. Uma vez feita essa folheação, podemos decompor a conexão do seguinte modo

$$\mathcal{A}^{MN\alpha} = \mathcal{A}_0^{MN\alpha} dx^0 + \mathcal{A}_i^{MN\alpha} dx^i \quad (5.30)$$

Do mesmo modo que o obtido em [4], a ação pode ser escrita em termos da curvatura \mathcal{F} , da conexão \mathcal{A} e as derivadas temporais de \mathcal{A} , sendo dada por

$$S = \int \left(l_{MN\alpha}^i (\mathcal{A}_j^{PQ\beta}) \dot{\mathcal{A}}_i^{MN\alpha} - \mathcal{A}_0^{MN\alpha} K_{MN\alpha} \right). \quad (5.31)$$

$K_{MN\alpha}$ pode ser escrito como função de \mathcal{F} , sendo dado por

$$K_{MN\alpha} = -\frac{1}{32} c_\delta K_{\alpha\beta\gamma} \delta \varepsilon_{MNPQRS} \varepsilon^{ijkl} \mathcal{F}_{ij}^{PQ\beta} \mathcal{F}_{kl}^{RS\gamma}, \quad (5.32)$$

e l_α^i uma função que pode ser escrita em termos de \mathcal{A} e de \mathcal{F} , sendo dada por

$$l_{MN\alpha}^i = -\frac{1}{4} c_\delta K_{\alpha\beta\gamma} \delta \varepsilon_{MNPQRS} \varepsilon^{ijkl} \mathcal{A}_j^{PQ\beta} \mathcal{F}_{kl}^{RS\gamma}. \quad (5.33)$$

Fazendo-se as variações funcionais da ação em relação a $\mathcal{A}_0^{MN\alpha}$ obtemos a seguinte equação de movimento

$$K_{MN\alpha} = 0, \quad (5.34)$$

enquanto que a variação funcional em respeito a $\mathcal{A}_i^{MN\alpha}$ nos dá

$$\Omega_{MN\alpha PQ\beta}^{ij} (\dot{\mathcal{A}}_j^{PQ\beta} - D_j \mathcal{A}_0^{PQ\beta}) = 0, \quad (5.35)$$

onde

$$\Omega_{MN\alpha PQ\beta}^{ij} = -\frac{1}{4}c_\delta K_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta \varepsilon_{MNPQRS} \varepsilon^{ijkl} \mathcal{F}_{kl}^{RS\gamma}. \quad (5.36)$$

A fim de passarmos da abordagem Lagrangeana para a Hamiltoniana, conforme explicado no apêndice A, necessitamos calcular os momentos conjugados relativamente aos campos. Lembrando que como estamos no caso contínuo, as derivadas parciais serão substituídas por derivadas funcionais. Com isso, uma vez que a ação é linear em $\dot{\mathcal{A}}_i^{MN\alpha}$, o momento canonicamente conjugado a $\mathcal{A}_i^{MN\alpha}$ é

$$p_{MN\alpha}^i = l_{MN\alpha}^i, \quad (5.37)$$

o que nos leva a 120 vínculos primários dados por

$$\phi_{MN\alpha}^i = p_{MN\alpha}^i - l_{MN\alpha}^i \approx 0. \quad (5.38)$$

Agora, visto que a ação não possui termos em $\dot{\mathcal{A}}_0^{MN\alpha}$, o momento canonicamente conjugado a $\mathcal{A}_0^{MN\alpha}$ é

$$p_{MN\alpha}^0 = 0, \quad (5.39)$$

cujas condições de consistência nos dá 30 vínculos secundários dados por

$$K_{MN\alpha} \approx 0. \quad (5.40)$$

Logo, temos um total de 150 vínculos em nossa teoria. Os vínculos dados por (5.40) nos retornam condições que as curvaturas \mathcal{F} devem satisfazer, de modo que nem todos os \mathcal{F} são independentes. Já os vínculos dados por (5.38), uma vez dadas as curvaturas, estabelece quem são os p 's.

Assim, após fazer a soma implícita em β, γ, δ em (5.32), temos que a equação anterior pode ser decomposta em dois casos, $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$, que nos dá, respectivamente

$$K_{MN0} = -\frac{1}{32} \varepsilon_{MNPQRS} \varepsilon^{ijkl} \left[\left(F_{ij}^{PQ} F_{kl}^{RS} + \varepsilon G_{ij}^{PQ} G_{kl}^{RS} \right) c_0 + 2F_{ij}^{PQ} G_{kl}^{RS} c_1 \right] \approx 0, \quad (5.41)$$

$$K_{MN1} = -\frac{1}{32} \varepsilon_{MNPQRS} \varepsilon^{ijkl} \left[2\varepsilon F_{ij}^{PQ} G_{kl}^{RS} c_0 + \left(F_{ij}^{PQ} F_{kl}^{RS} + \varepsilon G_{ij}^{PQ} G_{kl}^{RS} \right) c_1 \right] \approx 0. \quad (5.42)$$

A condição (5.40) quando escrita dessa forma torna mais fácil a análise que faremos a seguir

quando considerarmos uma curvatura específica para calcularmos um limitante para o rank de Ω .

Como vimos é oportuno para nós fazer a mudança na base dos vínculos de $K_{MN\alpha}$ para $\mathcal{G}_{MN\alpha}$, onde este é dado por

$$\mathcal{G}_{MN\alpha} = -K_{MN\alpha} + D_i \phi_{MN\alpha}^i, \quad (5.43)$$

pois podemos identificar os $\mathcal{G}_{MN\alpha}$ como sendo de primeira classe. De fato, é evidente que a superfície de vínculos definida por $K_{MN\alpha}$ e $\phi_{MN\alpha}$ é a mesma que a definida por $\mathcal{G}_{MN\alpha}$ e $\phi_{MN\alpha}$. A vantagem desta mudança pode ser vista quando calculamos os parênteses de Poisson de \mathcal{A} com \mathcal{G} :

$$\left\{ \mathcal{A}_i^{MN\alpha}(\vec{x}), \int \eta^{PQ\beta}(\vec{y}) \mathcal{G}_{PQ\beta}(\vec{y}) \right\} = -D_i \eta^{MN\alpha}(\vec{x}), \quad (5.44)$$

de modo que

$$\delta_\eta A_i^{MN\alpha} = \left\{ \mathcal{A}_i^{MN\alpha}(\vec{x}), \int \eta^{PQ\beta}(\vec{y}) \mathcal{G}_{PQ\beta}(\vec{y}) \right\}, \quad (5.45)$$

sendo η um campo infinitesimal que nos permite calcular o vínculo localmente. Logo os vínculos \mathcal{G} geram as transformações de gauge, sendo portanto de primeira classe.

O Hamiltoniano do sistema é dado, portanto, por

$$H = \int \left(p_{MN\alpha}^i \dot{\mathcal{A}}_i^{MN\alpha} - \mathcal{A}_0^{MN\alpha} \mathcal{G}_{MN\alpha} - \lambda_i^{MN\alpha} \phi_{MN\alpha}^i \right). \quad (5.46)$$

Calculando os parênteses de Poisson, temos, tal como antes, que estes obedecem a

$$\begin{aligned} \{ \mathcal{G}_{MN\alpha}(\vec{x}), \mathcal{G}_{PQ\beta}(\vec{y}) \} &= K_{\alpha\beta}{}^\gamma f_{MNPQ}{}^{RS} \mathcal{G}_{RS\gamma}(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{ \phi_{MN\alpha}^i(\vec{x}), \mathcal{G}_{PQ\beta}(\vec{y}) \} &= K_{\alpha\beta}{}^\gamma f_{MNPQ}{}^{RS} \phi_{RS\gamma}^i(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{ \phi_{MN\alpha}^i(\vec{x}), \phi_{PQ\beta}^j(\vec{y}) \} &= \Omega_{MN\alpha PQ\beta}^{ij}(\vec{x}) \delta(\vec{x} - \vec{y}), \end{aligned} \quad (5.47)$$

com $\Omega_{MN\alpha PQ\beta}^{ij}$ dado por (5.36).

Do mesmo modo que no capítulo anterior, Ω é uma matriz obtida a partir do parênteses de Poisson dos vínculos, sendo desta vez, uma matriz 120×120 , se considerarmos o multi-índice $MN\alpha i$ como um único índice matricial. Isso porque temos 30 geradores associados a álgebra expandida, pois MN possui 15 combinações antissimétricas distintas e α admite apenas 2 valores, 0 e 1. Os índices espaciais admitem 4 possibilidades 0, 1, 2, 3. Desse modo temos

que Ω é uma matriz 120×120 , sendo dada por (5.36).

As constantes de estrutura $K_{\alpha\beta}{}^\gamma f_{MNPQ}{}^{RS}$ que aparecem no cálculo dos parênteses de Poisson são referentes a C_5 . Como os vínculos são fracamente iguais a zero, os dois primeiros parênteses de Poisson são fracamente zero, e como o Hamiltoniano é uma combinação de vínculos, temos que o parênteses de Poisson de \mathcal{G} com H é também fracamente zero, o que mostra que \mathcal{G} é de fato de primeira classe.

A estabilidade do vínculo $\mathcal{G}_{MN\alpha}$, dada por $\dot{\mathcal{G}}_{MN\alpha} = 0$ é automaticamente satisfeita pelo fato de \mathcal{G} ser um vínculo de primeira classe, enquanto a estabilidade referente a $\phi_{MN\alpha}^i$ apenas leva a restrições sobre os multiplicadores de Lagrange, de modo que a teoria não admite mais vínculos.

Com isso temos um total de 30 vínculos de primeira classe, dados pelos \mathcal{G} e mais 120 vínculos dados pelos ϕ^i s que podem ser tanto de primeira quanto de segunda classe. Vimos que o número de vínculos de primeira classe dentre os ϕ^i s é igual ao número de linhas nulas resultantes do processo de diagonalização em blocos da matriz Ω , de acordo com a equação (5.47). Portanto, o número de vínculos de segunda classe será igual ao número de linhas não-nulas resultantes deste processo, logo igual ao rank de Ω . Sabemos ainda, do capítulo anterior, da existência de 4 vínculos de primeira classe dentre os ϕ^i s, dados por

$$H_i = \mathcal{F}_{ij}{}^{MN\alpha} \phi_{MN\alpha}^j, \quad (5.48)$$

de modo que $\text{rank } \Omega \leq 116$. Desse modo, a fim de termos uma teoria genérica, em princípio, deveríamos obter que Ω tem um rank igual a $r_{max} = 116$. Procedemos então de maneira análoga ao capítulo passado e tomamos uma configuração particular a fim de obtermos um limitante para o rank Ω .

Inspirados no exemplo de [4], tomamos uma curvatura com a seguinte configuração

$$\begin{aligned} F^{12} &= dx^1 dx^2 + dx^3 dx^4 = G^{12} \\ F^{34} &= dx^1 dx^2 - dx^3 dx^4 = G^{34} \\ F^{56} &= dx^1 dx^3 + dx^2 dx^4 = G^{56} \\ F^{MN} &= 0 = G^{MN}, \text{ caso contrário.} \end{aligned} \quad (5.49)$$

O primeiro passo seria verificar se existem conexões A e B que nos dão tais curvaturas e, portanto, satisfazem a (5.16). Ora, mas podemos verificar facilmente que para tal basta tomarmos

$$\begin{aligned}
 A^{12} &= x^1 dx^2 + x^3 dx^4 = B^{12} \\
 A^{34} &= x^1 dx^2 - x^3 dx^4 = B^{34} \\
 A^{56} &= x^1 dx^3 + x^2 dx^4 = B^{56} \\
 A^{MN} &= 0 = B^{MN}, \text{ caso contrário.}
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

O segundo passo é verificar se, para a configuração dada, os vínculos dados por (5.41) e (5.42) são obedecidos. Mas isto é fácil de se verificar, uma vez que $F^{12}F^{34} = G^{12}G^{34} = F^{12}G^{34} = G^{12}F^{34} = 0$, bem como $F^{12}F^{56} = G^{12}G^{56} = F^{12}G^{56} = G^{12}F^{56} = 0$ e $F^{34}F^{56} = G^{34}G^{56} = F^{34}G^{56} = G^{34}F^{56} = 0$. Assim, para essa escolha temos $K_{MN0} \approx 0$ e $K_{MN1} \approx 0$.

Feita esta análise podemos passar ao cálculo do rank de Ω nesta configuração. Para isso obtemos o número de soluções não nulas da equação de autovalores

$$\Omega_{MN\alpha PQ\beta}^{ij} V_j^{PQ\beta} = 0, \tag{5.51}$$

com $\Omega_{MN\alpha PQ\beta}^{ij}$ dado pela equação (5.36). Logo

$$c_\delta K_{\alpha\beta\gamma}^\delta \varepsilon_{MNPQRS} \mathcal{F}^{RS\gamma} V^{PQ\beta} dx^i = 0. \tag{5.52}$$

Após realizarmos a soma implícita em δ e reagruparmos alguns termos obtemos que

$$\begin{aligned}
 &[c_0 K_{\alpha\beta 0}^0 + c_1 K_{\alpha\beta 0}^1 + c_0 K_{\alpha\beta 1}^0 + c_1 K_{\alpha\beta 1}^1] [\varepsilon_{IJKL12}(dx^1 dx^2 + dx^3 dx^4) + \\
 &\varepsilon_{IJKL34}(dx^1 dx^2 - dx^3 dx^4) + \varepsilon_{IJKL56}(dx^1 dx^3 + dx^2 dx^4)] V_j^{PQ\beta} dx^j dx^i = 0,
 \end{aligned} \tag{5.53}$$

cuja solução nos dá 8 elementos independentes em vez de 4, de modo que o rank $\Omega = 112$ para esta configuração. Com isso temos que $112 \leq \text{rank } \Omega \leq 116$, para a configuração escolhida. Ao considerar outras possibilidades mais complexas de curvaturas que obedecem aos vínculos e tais que existam conexões A e B que nos retornem essas curvaturas, acabamos por encontrar, analiticamente, um rank no mínimo igual a 112.

Dessa forma, a fim de ver se existem configurações tais que o rank seja superior a 112, passamos para um cálculo computacional onde adaptamos o programa utilizado no capítulo passado quando consideramos o caso $(A)dS_5$. Para isso dividimos o programa em dois sub-programas: No primeiro programa, que encontra-se no apêndice C, calcula-se os vínculos K e a matriz Ω a partir das expressões (5.32) e (5.36) para curvaturas a princípio indeterminadas.

No segundo programa, encontrado no apêndice D, resolvemos os vínculos K em função de \mathcal{F} e depois atribuímos valores aleatórios as 90 curvaturas independentes, pois como temos 30 vínculos dados por $K_{MN\alpha}$ e 120 curvaturas, ao resolver os vínculos ficamos com 90 curvaturas independentes. Por fim, calculamos o rank de Ω .

Nos é permitido atribuir valores aleatórios para as curvaturas pelo seguinte motivo: Imagine que conhecemos a curvatura \mathcal{F} valorada numa álgebra qualquer (de índices a, b, c, \dots) num ponto \bar{x} genérico. Queremos verificar, portanto, se existe alguma conexão \mathcal{A}_μ^a nas proximidades de \bar{x} que nos dá $\mathcal{F}_{\mu\nu}^a(\bar{x})$. Em outras palavras, tal como fizemos antes, dada uma configuração para a curvatura queremos verificar se existe alguma conexão que nos dá essa configuração tomada. Mas o valor de \mathcal{F} num ponto x próximo a \bar{x} pode ser obtida via uma expansão de Taylor, de modo que $\mathcal{F}_{\mu\nu}^a(x) \simeq \mathcal{F}_{\mu\nu}^a(\bar{x}) + \mathcal{O}(x - \bar{x}) = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^a - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^a + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] + \mathcal{O}(x - \bar{x}) = 2d_{[\mu\nu]}^a + f_{bc}^a c_\mu^b c_\nu^c + \mathcal{O}(x - \bar{x})$, onde $d_{[\mu\nu]}^a$ é um parâmetro antissimétrico em μ, ν que representa a antissimetria nas derivadas parciais de \mathcal{A} enquanto os parâmetros c_μ^b e c_ν^c são parâmetros que advém a partir do cálculo do comutador. Assim, como estamos a procura de uma solução particular, podemos tomar simplesmente o caso em que c_μ^b e c_ν^c são nulos. Desse modo a conexão dada por $\mathcal{A}_\mu^a = \frac{1}{2}(x - \bar{x})^\nu \mathcal{F}_{\mu\nu}^a(\bar{x}) + \mathcal{O}((x - \bar{x})^2)$, nos retorna como curvatura justamente $\mathcal{F}_{\mu\nu}^a(\bar{x})$. Mostramos portanto, que dada uma configuração genérica para a curvatura, sempre existe uma conexão que nos retornará tal curvatura. Logo, podemos atribuir valores aleatórias a \mathcal{F} tal como fizemos no programa.

Como todas as amostras de valores de \mathcal{F} utilizadas nos retornaram um rank igual a 112, podemos tomar esse cálculo computacional como uma quase demonstração de que temos $r = 112$. De fato, como mostraremos na seção que se segue, existem mais quatro vínculos de primeira classe associados aos difeomorfismos espaciais, que aparecem de forma natural devido ao processo de expansão utilizado, de modo que o rank máximo não seria 116 como pensávamos, mas sim 112.

5.3 Difeomorfismos cruzados

Para que o modelo expandido nos retorne uma teoria genérica, os 4 vínculos de primeira classe sobressalentes devem ser oriundos ou de transformações de gauge ou de difeomorfismos espaciais. Vimos que a expansão proposta dobra praticamente todas as grandezas quando comparamos com o caso $(A)dS_5$ simples, tais como o número de geradores da álgebra de Lie associada, o número de campos associados, o número de vínculos, etc. sendo que o número de vínculos relacionados a simetria de gauge também é dobrado. Portanto, os vínculos extras ou estão relacionados com alguma simetria a princípio não tão visível, ou, o que é um tanto quanto inesperado, estão associados aos difeomorfismos espaciais, de modo a passar de um total de 4

para 8. Mostraremos nessa seção que é de fato isso que acontece.

Como discutido no capítulo 4, os difeomorfismos espaciais são dados como derivadas de Lie, ou seja, $\delta_\xi \mathcal{A}_\mu^a = \mathcal{L}_\xi \mathcal{A}_\mu^a$, para um campo vetorial ξ . No caso onde a álgebra é C_5 , temos que a conexão admite a expansão $\mathcal{A} = \lambda_\alpha \mathcal{A}^\alpha = \lambda_0 A + \lambda_1 B$, como vimos, bem como $\xi = \lambda_\alpha \xi^\alpha = \lambda_0 u + \lambda_1 v$, onde considerarei $\xi^0 = u$ e $\xi^1 = v$.

Uma vez que operacionalmente $\mathcal{L}_\xi = i_\xi d + di_\xi$, para calcularmos a derivada de Lie de \mathcal{A} precisamos primeiro de $d\mathcal{A}$ bem como $i_\xi \mathcal{A}$. Assim,

$$d\mathcal{A} = \partial_{\mu_1} \mathcal{A}_{\mu_2} dx^{\mu_1} dx^{\mu_2}, \quad (5.54)$$

e

$$\begin{aligned} i_\xi \mathcal{A} &= \xi^\nu \mathcal{A}_\nu = (\lambda_0 u^\nu + \lambda_1 v^\nu)(\lambda_0 A_\nu + \lambda_1 B_\nu) \\ &= u^\nu (\lambda_0 A_\nu + \lambda_1 B_\nu) + v^\nu (\lambda_1 A_\nu + \lambda_0 B_\nu) \\ &= \lambda_0 (u^\nu A_\nu + v^\nu B_\nu) + \lambda_1 (u^\nu B_\nu + v^\nu A_\nu) \\ &= \lambda_0 (i_u A + i_v B) + \lambda_1 (i_u B + i_v A). \end{aligned} \quad (5.55)$$

Portanto podemos calcular

$$\begin{aligned} i_\xi d\mathcal{A} &= \xi^\nu d\mathcal{A}_\nu = \xi^\nu \partial_\nu \mathcal{A}_{\mu_2} dx^{\mu_2} \\ &= (\lambda_0 u^\nu + \lambda_1 v^\nu)(\lambda_0 \partial_\nu A_{\mu_2} + \lambda_1 \partial_\nu B_{\mu_2}) dx^{\mu_2} \\ &= \lambda_0 (u^\nu \partial_\nu A_{\mu_2} + v^\nu \partial_\nu B_{\mu_2}) dx^{\mu_2} + \lambda_1 (u^\nu \partial_\nu B_{\mu_2} + v^\nu \partial_\nu A_{\mu_2}) \\ &= \lambda_0 (i_u dA + i_v dB) + \lambda_1 (i_u dB + i_v dA), \end{aligned} \quad (5.56)$$

e

$$di_\xi \mathcal{A} = \lambda_0 (di_u A + \varepsilon di_v B) + \lambda_1 (di_u B + di_v A), \quad (5.57)$$

de modo que fica claro que

$$\begin{aligned} \delta_\xi \mathcal{A} &= \mathcal{L}_\xi \mathcal{A} = \lambda_0 (\mathcal{L}_u A + \varepsilon \mathcal{L}_v B) + \lambda_1 (\mathcal{L}_u B + \mathcal{L}_v A), \\ &= \lambda_0 \delta A + \lambda_1 \delta B, \end{aligned} \quad (5.58)$$

onde

$$\delta A = \mathcal{L}_u A + \varepsilon \mathcal{L}_v B, \quad \delta B = \mathcal{L}_u B + \mathcal{L}_v A. \quad (5.59)$$

Dessa forma temos que

$$\delta_u A = \mathcal{L}_u A \quad \text{e} \quad \delta_u B = \mathcal{L}_u B \quad (5.60)$$

correspondem aos difeomorfismos espaciais, enquanto os termos

$$\delta_v^\times A = \varepsilon \mathcal{L}_v B \quad \text{e} \quad \delta_v^\times B = \mathcal{L}_v A \quad (5.61)$$

correspondem a uma espécie de difeomorfismo cruzado que aparece como resultado do processo de expansão. Como u e v são vetores, possuem 4 componentes cada, de modo que temos um total de 8 difeomorfismos generalizados, como havíamos adiantado.

Sendo assim, o rank máximo de Ω é 112. A fim de que os únicos vínculos de primeira classe da teoria estejam associados às transformações de gauge e aos difeomorfismos espaciais, devemos ter $\text{rank } \Omega = r_{max} = 112$. Ora, mas este é justamente o rank que obtemos quando tomamos a configuração dada por (5.49), bem como o rank obtido para muitas configurações a partir do nosso cálculo numérico. Sendo assim obtemos que $112 \leq \text{rank } \Omega \leq 112$, de modo que não há outra opção a não ser $\text{rank } \Omega = 112$, mostrando que a teoria é de fato genérica.

É fácil mostrar que a ação de Chern-Simons é de fato invariante sob estes difeomorfismos. Como $S = \int Q_5$ e Q_5 é uma 5-forma num espaço de dimensão 5, sua derivada exterior é nula. Por isso

$$\delta_\xi S = \int (i_\xi dQ_5 + di_\xi Q_5) = \int di_\xi Q_5 = 0, \quad (5.62)$$

uma vez que supomos nulos os termos de fronteira.

Podemos estudar também a álgebra associada a estes difeomorfismos, ou seja, estudar os comutadores dos difeomorfismos espaciais e cruzados quando aplicados aos campos A e B . Para isso consideremos um segundo campo infinitesimal $\xi' = \lambda_\alpha \xi'^\alpha = \lambda_0 u' + \lambda_1 v'$. Desse modo temos, de acordo com (5.60) e (5.61) que

$$\begin{aligned} [\delta_u, \delta_{u'}]A &= \delta_u(\delta_{u'}A) - \delta_{u'}(\delta_u A) = \mathcal{L}_{u'}\mathcal{L}_u A - \mathcal{L}_u\mathcal{L}_{u'}A \\ &= \mathcal{L}_{[u, u']}A = -\delta_{[u, u']}A, \end{aligned} \quad (5.63)$$

onde $[u, u']$ é o colchete de Lie dos vetores u e u' , bem como,

$$[\delta_u, \delta_{u'}]B = -\delta_{[u, u']}B. \quad (5.64)$$

Logo, podemos concluir que operacionalmente o comutador de dois difeomorfismos espaciais nos retorna um difeomorfismo espacial, ou seja,

$$[\delta_u, \delta_{u'}] = -\delta_{[u, u']}. \quad (5.65)$$

Procedendo de forma similar temos que

$$\begin{aligned} [\delta_u, \delta_v^\times]A &= \delta_u(\delta_v^\times A) - \delta_v^\times(\delta_u A) = \varepsilon \mathcal{L}_v \mathcal{L}_u B - \varepsilon \mathcal{L}_u \mathcal{L}_v B \\ &= -\varepsilon \mathcal{L}_{[u, v]}B = -\delta_{[u, v]}^\times A, \end{aligned} \quad (5.66)$$

sendo que quando aplicado ao campo B nos dá

$$[\delta_u, \delta_v^\times]B = -\delta_{[u, v]}^\times B. \quad (5.67)$$

Por isso, obtemos que

$$[\delta_u, \delta_v^\times] = -\delta_{[u, v]}^\times. \quad (5.68)$$

Ou seja, o comutador de um difeomorfismo espacial com um difeomorfismo cruzado nos retorna um difeomorfismo cruzado. Por fim, para o comutador de dois difeomorfismos cruzados temos

$$\begin{aligned} [\delta_v^\times, \delta_{v'}^\times]A &= \delta_v^\times(\delta_{v'}^\times A) - \delta_{v'}^\times(\delta_v^\times A) = \varepsilon \mathcal{L}_{v'} \mathcal{L}_v A - \varepsilon \mathcal{L}_v \mathcal{L}_{v'} A \\ &= -\varepsilon \mathcal{L}_{[v, v']}A = -\varepsilon \delta_{[v, v']}^\times A, \end{aligned} \quad (5.69)$$

onde para o campo B também obtemos que

$$[\delta_v^\times, \delta_{v'}^\times]B = -\varepsilon \delta_{[v, v']}^\times B, \quad (5.70)$$

de modo que é possível identificarmos

$$[\delta_v^\times, \delta_{v'}^\times] = -\varepsilon \delta_{[v, v']}. \quad (5.71)$$

Assim, o comutador de dois difeomorfismos cruzados nos retorna um difeomorfismo espacial. Resumindo, obtemos que

$$\begin{aligned} [\delta_u, \delta_{u'}] &= -\delta_{[u,u']} \\ [\delta_u, \delta_v^\times] &= -\delta_{[u,v]}^\times \\ [\delta_v^\times, \delta_{v'}^\times] &= -\varepsilon\delta_{[v,v']} \end{aligned}$$

Por último, como já identificamos o número de vínculos de primeira e segunda classe, podemos fazer a contagem dos graus de liberdade de acordo com (A.19), pois a dimensão do espaço de fase é $\dim E_f = 240$, o número de vínculos de primeira classe é $V_P = 38$ (30 K' s que geram as transformações de gauge e mais 8 combinações dos ϕ' s que geram os difeomorfismos espaciais) e o número de vínculos de segunda classe é $V_S = 112$. Assim, o número de graus de liberdade da teoria é dado por

$$N_{GL} = \frac{1}{2} (240 - 76 - 112) = 26, \quad (5.72)$$

que é o dobro do valor obtido no caso $(A)dS_5$ não expandido.

5.4 Vínculos associados aos difeomorfismos cruzados

Como vimos, temos um total de 8 vínculos de primeira classe dentre os ϕ' s, devido aos difeomorfismos espaciais e aos cruzados. Destes 8, conhecemos explicitamente a forma de 4, dados pela equação (5.48), ou seja,

$$H_i = \mathcal{F}_{ij}^{MN\alpha} \phi_{MN\alpha}^j = F_{ij}^{MN} \phi_{MN0}^j + G_{ij}^{MN} \phi_{MN1}^j$$

sendo estes os geradores dos difeomorfismos espaciais, como mostraremos a seguir. Faltamos portanto encontrar qual combinação dos ϕ' s irão gerar os difeomorfismos cruzados. Para isso iremos usar o fato de que os difeomorfismos dados por derivadas de Lie, $\delta_\xi \mathcal{A}_\mu^a = \mathcal{L}_\xi \mathcal{A}_\mu^a$,¹ podem ser equivalentemente representados pelos chamados difeomorfismos melhorados [4], dados por

$$\delta_\xi \mathcal{A}_\mu^a = \xi^\nu \mathcal{F}_{\nu\mu}^a, \quad (5.73)$$

uma vez que estes diferem de uma derivada de Lie apenas por uma transformação de gauge. De fato, temos que

¹Aqui o índice a está por questão de comodidade a representar o multi-índice $MN\alpha$ da álgebra C_5

$$\begin{aligned}
 \xi^\nu \mathcal{F}_{\nu\mu} &= i_\xi \mathcal{F} = i_\xi (d\mathcal{A} + \mathcal{A}^2) \\
 &= i_\xi d\mathcal{A} + i_\xi \mathcal{A}\mathcal{A} - \mathcal{A}i_\xi \mathcal{A} \\
 &= \mathcal{L}_\xi \mathcal{A} - di_\xi \mathcal{A} - [\mathcal{A}, i_\xi \mathcal{A}] \\
 &= \mathcal{L}_\xi \mathcal{A} - \delta_{(i\mathcal{A})}^{gauge} \mathcal{A}.
 \end{aligned} \tag{5.74}$$

Portanto temos do lado direito uma derivada de Lie mais uma transformação de gauge de parâmetro $i\mathcal{A}$.

Uma vez que os difeomorfismos espaciais são dados por (5.60) e sabendo que a curvatura pode ser expandida em termos de $F = dA + A^2 + \varepsilon B^2$ e $G = dB + [A, B]$, temos então que

$$\begin{aligned}
 \delta_u A &= i_u dA + di_u A \\
 &= i_u (dA + A^2 + \varepsilon B^2) - [i_u A, A] - \varepsilon [i_u B, B] + di_u A \\
 &= i_u F + \delta_\omega A|_{\omega=i_u A} + \delta_\eta A|_{\eta=i_u B},
 \end{aligned} \tag{5.75}$$

onde usei as transformações de gauge dadas por (5.9) e (5.10). Analogamente, temos

$$\begin{aligned}
 \delta_u B &= i_u dB + di_u B \\
 &= i_u (dB + [A, B]) - [i_u A, B] + [A, i_u B] + di_u B \\
 &= i_u G + \delta_\eta B|_{\eta=i_u B} + \delta_\omega B|_{\omega=i_u A}.
 \end{aligned} \tag{5.76}$$

Logo, o difeomorfismo espacial melhorado de A é $\delta_{mel} A = i_u F$, enquanto o de B é $\delta_{mel} B = i_u G$, de maneira que $\delta_{mel} \mathcal{A} = i_u \mathcal{F}$. Portanto, os vínculos que geram os difeomorfismos espaciais de C_5 devem ser necessariamente $H_i = \mathcal{F}_{ij}^{MN\alpha} \phi_{MN\alpha}^j$. De fato,

$$\left\{ \mathcal{A}_i^{MN\alpha}(x), \int u^k(y) \mathcal{F}_{kl}^{PQ\beta}(y) \phi_{PQ\beta}^l \right\} = u^k \mathcal{F}_{ki}^{MN\alpha} = i_u \mathcal{F}^{MN\alpha}. \tag{5.77}$$

Relativamente aos difeomorfismos cruzados, temos que estes são dados por (5.61). Usando novamente as expressões de F e G juntamente com as transformações de gauge (5.9) e (5.10), obtemos que

$$\begin{aligned}
 \delta_v^\times A &= \varepsilon i_v dB + \varepsilon di_v B \\
 &= \varepsilon i_v (dB + [A, B]) - \varepsilon [i_v A, B] + \varepsilon [A, i_v B] + \varepsilon di_v B \\
 &= \varepsilon i_v G + \delta_\omega A|_{\omega=\varepsilon i_v B} + \delta_\eta A|_{\eta=i_v A}
 \end{aligned} \tag{5.78}$$

e

$$\begin{aligned}
 \delta_v^\times B &= i_v dA + di_v A \\
 &= i_v (dA + A^2 + \varepsilon B^2) - [i_v A, A] - \varepsilon [i_v B, B] + di_v A \\
 &= i_v F + \delta_\eta B|_{\eta=i_v A} + \delta_\omega B|_{\omega=\varepsilon i_v B}.
 \end{aligned} \tag{5.79}$$

Assim temos que $\delta_{mel}^\times A = \varepsilon i_v G$ e $\delta_{mel}^\times B = i_v F$, de modo os geradores dos difeomorfismos cruzados devem ser

$$H_i^\times = \varepsilon G_{ij}^{MN} \phi_{MN0}^j + F_{ij}^{MN} \phi_{MN1}^j. \tag{5.80}$$

De fato isto é verdade, uma vez que

$$\begin{aligned}
 \left\{ \mathcal{A}_i^{MN\alpha}(x), \int v^k(y) \left(\varepsilon G_{kl}^{PQ}(y) \phi_{PQ0}^j + F_{kl}^{PQ}(y) \phi_{PQ1}^j \right) \right\} &= v^k \left(\varepsilon G_{ki}^{MN} + F_{ki}^{MN} \right) \\
 &= i_v(\varepsilon G^{MN}) + i_v F^{MN}.
 \end{aligned} \tag{5.81}$$

Portanto, obtemos os 8 vínculos associados aos difeomorfismos generalizados: 4 $H_i = \mathcal{F}_{ij}^{MN\alpha} \phi_{MN\alpha}^j$ que geram os difeomorfismos espaciais e mais 4 $H_i^\times = \varepsilon G_{ij}^{MN} \phi_{MN0}^j + F_{ij}^{MN} \phi_{MN1}^j$ que geram os difeomorfismos cruzados.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Na realização deste trabalho tivemos uma série de resultados. Primeiramente fizemos uma revisão bibliográfica sobre a teoria de Chern-Simons em 5 dimensões aplicada a gravitação, utilizando o grupo $(A)dS_5$ como grupo de calibre. Mostramos que trata-se de uma teoria cuja ação é invariante sob difeomorfismos e sob transformações de gauge, de modo a nos permitir expandir o grupo de simetria e construir uma teoria com a presença de constante cosmológica. Calculamos a ação para o caso $(A)dS_5$, sendo dada por (4.60), que pode ser escrita em termos do vielbein e e da curvatura R , tal como mostra a equação (4.71), que contém o termo de Einstein-Hilbert, o termo devido a constante cosmológica e o termo de Gauss-Bonnet. Estes resultados também foram obtidos em [3],[6]. Relativamente à dinâmica revisamos que se trata de uma teoria genérica com 13 graus de liberdade locais. [4]

No segundo capítulo fizemos uma revisão sobre a expansão S e a redução H e aplicamos ao caso da álgebra C_5 , que é o produto direto de $(A)dS_5$ com semigrupo S de dois elementos, cuja tabela de multiplicação é

S	λ_0	λ_1
λ_0	λ_0	λ_1
λ_1	λ_1	$\varepsilon\lambda_0$

sendo $\varepsilon = \pm 1$. Mostramos que trata-se de fato de uma álgebra de Lie, com base $T_{MN\alpha} = \lambda_\alpha T_{MN}$, e constantes de estrutura $f_{MN\alpha, PQ\beta}^{RS\gamma} = K_{\alpha\beta}{}^\gamma f_{MN, PQ}^{RS}$, sendo $K_{\alpha\beta}{}^\gamma$ o bi-seletor definido por (3.33) e $f_{MN, PQ}^{RS}$ as constantes de estrutura de $(A)dS_5$ dadas por (3.19). Até esse ponto reproduzimos os resultados obtidos em [11] e [12]. A novidade é que o tensor invariante da referida álgebra na representação adjunta é $g_{MN\alpha, PQ\beta, RS\gamma} = c_\delta K_{\alpha\beta}{}^\gamma \varepsilon_{MNPQRS}$, com dois parâmetros arbitrários, em vez de quatro, conforme afirmou-se em [11].

Vimos no último capítulo que a conexão $\mathcal{A} = \lambda_0 A + \lambda_1 B$ referente a C_5 transforma-se infinitesimalmente do seguinte modo $\delta\mathcal{A} = \lambda_0 \delta A + \lambda_1 \delta B$, onde $\delta A = d\omega + [A, \omega] + \varepsilon[B, \eta]$

e $\delta B = d\eta + [A, \eta] + [B, \omega]$. Portanto, A transforma-se como uma conexão, enquanto B não, de modo que identificamos A como o campo referente a geometria e B o campo referente a matéria.

Após isso construímos a ação de Chern-Simons em $5D$ invariante a álgebra C_5 em termos de \mathcal{A} ,

$$S = c_\delta K_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta \varepsilon_{MNPQRS} \int \left(\mathcal{A}^{MN\alpha} d\mathcal{A}^{PQ\beta} d\mathcal{A}^{RS\gamma} + \frac{3}{2} \mathcal{A}^{MN\alpha} (\mathcal{A}^2)^{PQ\beta} d\mathcal{A}^{RS\gamma} + \frac{3}{5} \mathcal{A}^{MN\alpha} (\mathcal{A}^2)^{PQ\beta} (\mathcal{A}^2)^{RS\gamma} \right)$$

que, expandida em termos de A de B nos retorna a ação (5.27). A parte geométrica da ação, que é obtida se tomarmos $B = 0$, nos retorna a mesma ação do caso $(A)dS_5$ puro, de modo que quando escrita em termos de e e R apresenta o termo de Gauss-Bonnet, ao contrário do obtido em [11], uma vez que os autores fizeram uma escolha dos parâmetros independentes que leva a uma ação que não é invariante sob a álgebra C_5 .

Por último, a análise canônica referente a dinâmica da teoria nos mostrou que a teoria desenvolvida nesse trabalho é genérica, de modo que não há um vínculo independente correspondente aos difeomorfismos temporais. Mostramos a existência de 8 difeomorfismos generalizados, que consistem de difeomorfismos espaciais, cujos geradores são os $H_i = \mathcal{F}_{ij}^{MN\alpha} \phi_{MN\alpha}^j$, mais difeomorfismos cruzados, cujos geradores mostramos ser os $H_i^\times = \varepsilon G_{ij}^{MN} \phi_{MN0}^j + F_{ij}^{MN} \phi_{MN1}^j$. Desse modo fomos levados a um total de 150 vínculos, sendo 38 vínculos de primeira classe mais 112 vínculos de segunda classe, o que nos dá um total de 26 graus de liberdade locais.

Um possível desdobramento deste trabalho pode consistir numa análise fenomenológica real desta teoria, fazendo-se uma redução dimensional de 5 dimensões para 4. Em particular seria o estudo de modelos cosmológicos bem como a procura de soluções do tipo Schwarzschild. Uma vez que trata-se de uma teoria genérica, talvez uma ramificação do trabalho possa ser a quantização do modelo, evitando a dificuldade de resolver o vínculo associado à invariância sob os difeomorfismos temporais, encontrados na quantização da Relatividade Geral em $4D$.

Portanto, podemos destacar três novidades que este trabalho trouxe. Primeiro foram os resultados relativos aos tensores invariantes, que possuem dois parâmetros independentes apenas, bem como a ação invariante à álgebra C_5 , escrita em termos da conexão \mathcal{A} e dos campos A e B , relativos a geometria e a matéria respectivamente. Em segundo lugar podemos citar a invariância da ação sob os difeomorfismos cruzados. E, por fim, a genericidade da teoria.

Apêndice A

Formalismo de Dirac

A fim de elucidarmos o formalismo Hamiltoniano de Dirac utilizado durante o texto, apresentaremos os pontos centrais deste neste anexo, de forma concisa, tentando abordar aquilo que é necessário para entendermos o que foi desenvolvido nos capítulos 4 e 5. Para uma abordagem completa recomendo as referências [19] e [22], bem como a referência [20]

Seja L a lagrangeana que descreve um sistema físico descrito pelas coordenadas e velocidades generalizadas q^n e \dot{q}^n , com $n = 1, \dots, N$. A ação é portanto dada pelo funcional $S[q, \dot{q}] = \int L(q, \dot{q})dt$. As equações de movimento são dadas pelas equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^n} = 0. \quad (\text{A.1})$$

Assim, podemos construir uma matriz H associada as acelerações, chamada de matriz Hessiana, da seguinte maneira:

$$H_{mn}(q, \dot{q}) := \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^m \partial \dot{q}^n}, \quad (\text{A.2})$$

pois das equações de Euler-Lagrange obtemos que

$$H_{mn}(q, \dot{q})\ddot{q}^n = \frac{\partial L}{\partial q^m} - q^m \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial \dot{q}^n}. \quad (\text{A.3})$$

Logo, se H é inversível, podemos obter as acelerações \ddot{q}_n em função de H . Caso contrário, se H não possuir inversa, não é possível obter todas as acelerações. Assim, se r é o rank de H , então temos $N - r$ vetores v^m , independentes entre si, que satisfazem a equação de autovalores nulos $Hv = 0$.

Isso indica que as $2N$ variáveis do espaço de configuração apresentam $N - r$ relações entre

si, de maneira que a dinâmica do sistema não pode ser dada unicamente pelas equações de Euler-Lagrange. Uma abordagem para contornar esse problema é dado pelo método Hamiltoniano apresentado em [19].

Para tal devemos introduzir os momentos canonicamente conjugados às coordenadas generalizadas

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}. \quad (\text{A.4})$$

Assim passamos da descrição do problema a partir das coordenadas (q^n, \dot{q}^n) para a descrição pelas coordenadas (q^n, p_n) , que formam um espaço $2N$ -dimensional chamado de espaço de fase. O próximo passo é passar da Lagrangeana para a Hamiltoniana, dada via uma transformação de Legendre da Lagrangeana

$$H(q, p) = p_n \dot{q}^n - L(q, \dot{q}), \quad (\text{A.5})$$

onde há uma soma implícita em n , variando de 1 a N .

A dinâmica do sistema passa a ser regida por $2N$ equações, ao invés de N , sendo estas

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p_n}, \quad \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q^n}. \quad (\text{A.6})$$

Estas equações são conhecidas como equações de Hamilton.

Contudo, a não invertibilidade da matriz Hessiana leva a relações entre as coordenadas generalizadas q^n e os momentos conjugados p_n , chamadas de *vínculos primários*, nos levando a equações do tipo:

$$\phi_m(q, p) = 0, \quad m = 1, \dots, M \leq N \quad (\text{A.7})$$

A natureza destas relações, que discutiremos a seguir é de fundamental importância nesse formalismo.

Desse modo, a Hamiltoniana definida em (A.5) é equivalente a seguinte Hamiltoniana

$$H' = H + \lambda^m \phi_m, \quad (\text{A.8})$$

onde os λ^m 's são multiplicadores de Lagrange. Assim, as equações de Hamilton para H' acabam por envolver os λ^m 's. Podemos reescrever a dinâmica deste sistema fazendo-se o uso dos parênteses de Poisson.

Se A e B são funções definidas no espaço de fase, então definimos os parênteses de Poisson destas quantidades do seguinte modo

$$\{A, B\} := \frac{\partial A}{\partial q^n} \frac{\partial B}{\partial p_n} - \frac{\partial A}{\partial p_n} \frac{\partial B}{\partial q^n}. \quad (\text{A.9})$$

Assim, fica claro vemos que

$$\{q^n, p_m\} = \delta_m^n. \quad (\text{A.10})$$

Assim, as equações de Hamilton para H' podem ser escritas da seguinte maneira

$$\dot{q}^n = \{q^n, H\} + \lambda^m \{q^n, \phi_m\} \quad \dot{p}_n = \{p_n, H\} + \lambda^m \{p_n, \phi_m\}. \quad (\text{A.11})$$

Em virtude de escrevermos as equações de movimento assim, não devemos resolver os vínculos antes de calcular os parênteses de Poisson. Por isso iremos usar a notação apresentada por Dirac para nos lembrarmos desse fato: escrevemos os vínculos com o sinal \approx , que quer dizer "fracamente igual" a 0.

Os vínculos primários são escritos, pois, como

$$\phi_m(q, p) \approx 0, \quad m = 1, \dots, M \leq N \quad (\text{A.12})$$

Assim, a evolução temporal de uma função A definida na subvariedade de vínculos $(2N - M)$ -dimensional, onde $\phi_m \approx 0$, também denotada por superfície de vínculos, é simplesmente

$$\dot{A} = \{A, H'\}. \quad (\text{A.13})$$

Agora, se ϕ_m é um vínculo primário, então temos que este deve ser 0 a todo instante, ou seja, se num instante inicial estamos numa superfície de vínculos, devemos permanecer nela a todo instante. Dizendo de outra forma, devemos ter que

$$\dot{\phi}_m = \{\phi_m, H'\} =: \psi_m \approx 0, \quad (\text{A.14})$$

de modo que, se $\psi_m \neq 0$, esta condição, chamada de condição de consistência da teoria, acaba por nos fornecer outro vínculo, $\psi_m \approx 0$, chamado de *vínculo secundário*.

Mas, assim como os vínculos primários, os vínculos secundários devem também gerar vínculos estáveis que sejam nulos todo o tempo, de modo que também devemos impor condições de consistência sobre estes. Desse modo podemos ser conduzidos a casos onde a condição

de consistência sobre os ψ_m podem nos levar a equações do tipo $0 = 0$ ou então a algumas restrições sobre os multiplicadores de Lagrange λ_m . Outra possibilidade seria nos conduzir a novas relações entre os momentos e as coordenadas generalizadas, portanto a novos vínculos secundários, de modo que deveríamos aplicar a condição de consistência novamente, procedendo iterativamente dessa forma até não nos restarem mais vínculos.

Contudo, é interessante para nós estudarmos a natureza dos vínculos relativamente ao resultado apresentado quando calculamos os parênteses de Poisson destes com todos os vínculos da teoria. Desse modo podemos tratar vínculos primários e secundários do mesmo modo. Logo, se temos M vínculos primários e K secundários, temos um total de $M + K = J$ vínculos, denotados por

$$\phi_j \approx 0, \quad j = 1, \dots, J. \quad (\text{A.15})$$

Diremos que um vínculo ϕ_a , onde a denota um índice fixo, é de *primeira classe* se seu parênteses de Poisson com todos os vínculos e com o Hamiltoniano é nulo, ou seja, se

$$\{\phi_a, \phi_j\} \approx 0, \quad \{\phi_a, H\} \approx 0 \quad j = 1, \dots, J. \quad (\text{A.16})$$

Caso contrário dizemos que ϕ_a é de *segunda classe*. Note que por conta desta definição, se ϕ_a é de primeira classe, então $\{\phi_a, \phi_j\}$ é uma combinação linear dos ϕ'_j 's.

Existe uma maneira usual de classificarmos os vínculos segundo esta nova classificação. Para isso, consideremos a condição de estabilidade que todos os vínculos ϕ_j devem satisfazer:

$$\{\phi_j, H\} + \lambda^i \{\phi_j, \phi_i\} \approx 0, \quad i, j = 1, \dots, J = M + K. \quad (\text{A.17})$$

Este conjunto de equações nos dá as relações que os multiplicadores λ 's devem satisfazer. A questão que temos eventualmente é: os λ são ou não parâmetros arbitrários? Para isso basta definirmos a matriz dos colchetes de Poisson

$$\Omega_{ij} := \{\phi_i, \phi_j\}. \quad (\text{A.18})$$

Logo, se Ω admite inversa, podemos obter todos os λ 's, de modo que não são parâmetros arbitrários em nossa teoria. Contudo, caso Ω_{ij} , não admita inversa, deverá possuir ao menos um autovalor nulo, o que levará a algum autovetor nulo. Portanto nem todos os multiplicadores são determinados. Assim, teremos parâmetros arbitrários na teoria, de modo que podemos associá-los a alguma simetria de gauge [22].

Também, a não inversibilidade de Ω implica que ao menos uma de suas linhas é uma

combinação linear das demais. Desse modo, o parênteses de Poisson do vínculo associado a esta linha com os demais vínculos pode ser escrito como uma combinação linear de todos os vínculos, de modo que podemos associá-lo a algum vínculo de primeira classe. Dizendo de outra forma o número de vínculos de primeira classe é igual ao número de autovetores nulos independentes de Ω .

A importância dessa contagem deve-se ao fato de que os *vínculos de primeira classe são os geradores das transformações de gauge*, conforme mostrado em [20], o que é extremamente importantes para descrição de um sistema físico.

Podemos ainda, sabendo o número de vínculos de primeira e de segunda classe, contar quantos graus de liberdade tem o sistema por nós considerado. O espaço de fase tem dimensão $2N$ (N coordenadas generalizadas mais N momentos conjugados). Contudo nós trabalhamos apenas na superfície definida pelos vínculos, de maneira que o número de graus de liberdade é menor que a dimensão do espaço de fase. Assim, devemos subtrair de $2N$ o número de total de vínculos que temos. Como os vínculos de segunda classe não estão relacionados a nenhuma simetria interna, precisamos contabilizá-los uma única vez. Já os vínculos de segunda classe, uma vez geram as transformações de gauge, nos dão uma contribuição decorrente destas transformações. Se temos um número V_{pc} de vínculos de primeira classe, temos V_{pc} geradores de gauge associados a estes. Contudo, as transformações de gauge alteram as variáveis dinâmicas do sistema, não definindo uma nova subvariedade da superfície de vínculos. Em vez disso, elas produzem trajetórias (órbitas) nesta superfície, de modo que podemos alterar as variáveis dinâmicas, deixando o estado físico do sistema o mesmo.

O número de graus de liberdade é, com isso, dado por

$$N_{GL} = \frac{1}{2} (D_{EF} - 2V_{pc} - V_{sc}). \quad (\text{A.19})$$

D_{EF} é a dimensão do espaço de fase, V_{pc} é o número de vínculos de primeira classe e V_{sc} é o número de vínculos de segunda classe.

Apêndice B

Exemplo Banados

```

"Exemplo de Banados et al.nb"
"
MATRIZ DOS COLCHETES DE POISSON DOS VINCULOS."
"FF=Array[F, {4, 4, 6, 6}], "
Do[{W=Array[o, {60, 60}], FF=Table[0, {a, 1, 4}, {b, 1, 4}, {i, 1, 6}, {j, 1, 6}],
AA=Array[A, {4, 6, 6}], KK=Array[K, {6, 6}]
}, {iter, 1, 1}]
KK//MatrixForm
"
Elementos não nulos de F:"
FF[[1, 2, 1, 2]]=1
FF[[2, 1, 1, 2]]=-1
FF[[1, 2, 2, 1]]=-1
FF[[2, 1, 2, 1]]=1

FF[[3, 4, 1, 2]]=1
FF[[4, 3, 1, 2]]=-1
FF[[3, 4, 2, 1]]=-1
FF[[4, 3, 2, 1]]=1

FF[[1, 2, 3, 4]]=1
FF[[2, 1, 3, 4]]=-1
FF[[1, 2, 4, 3]]=-1
FF[[2, 1, 4, 3]]=1

```

```
FF[[3,4,3,4]]=-1
FF[[4,3,3,4]]=1
FF[[3,4,4,3]]=1
FF[[4,3,4,3]]=-1
```

```
FF[[1,3,5,6]]=1
FF[[3,1,5,6]]=-1
FF[[1,3,6,5]]=-1
FF[[3,1,6,5]]=1
```

```
FF[[2,4,5,6]]=1
FF[[4,2,5,6]]=-1
FF[[2,4,6,5]]=-1
FF[[4,2,6,5]]=1
```

```
TensorSymmetry[FF]
```

```
"
```

```
Tensores de Levi Civita:"
```

```
epsilon4=LeviCivitaTensor[4]
```

```
epsilon6=LeviCivitaTensor[6]
```

```
"
```

```
Matriz  $W_{\{JK\}}=W^{\{ab\}}_{\{ijkl\}}$  dos colchetes de Poisson:"
```

```
J=0
```

```
Do[{J=J+1, K=0, Do[{K=K+1, [[J,K]]=Sum[epsilon4[[a,b,c,d]]
```

```
epsilon6[[i,j,k,l,m,n]]FF[[c,d,m,n]],{c,1,3},{d,c+1,4},{m,1,5},
{n,m+1,6}]],{a,1,4},{i,1,5},{j,i+1,6}]],{b,1,4},{k,1,5},{l,k+1,6}]
```

```
W//MatrixForm
```

```
"TensorSymmetry[W] => antisymmetric. ok
```

```
Expressão explícita em 'Explicit_expressions.nb'
```

```
"
```

```
"W[[1,60]] ="
```

```
W[[1,60]]
```

```
"
```

```
Rank W ="
```

```
MatrixRank[W]
```

```
"
K_{ij} = os 15 vínculos de 1a classe:"
Do[KK[[i,j]]=Sum[epsilon4[[a,b,c,d]] epsilon6[[i,j,k,l,m,n]]
FF[[a,b,k,l]]FF[[c,d,m,n]],{a,1,3},{b,a+1,4},{c,1,3},{d,c+1,4},
{k,1,5},{l,k+1,6},{m,1,5},{n,m+1,6}},{i,1,6},{j,1,6}]
KK//MatrixForm
"TensorSymmetry[W] => antisymmetric. ok
Expressão explícita em 'Explicit_expressions.nb'
"
KK[[1,1]]
"K[[1,2]] ="
KK[[1,2]]

Exit[]
"Exit[]"
```

Apêndice C

Cálculo de Omega e K

```

"Calculo de Omega e K.nb"
"
MATRIZ DOS COLCHETES DE POISSON DOS VINCULOS.

"
"a = 1,...,d1;   i = 1,   ,d2" (*Declaracao de: a matriz dos vinculos,
curvatura, vinculos K *)
d1=4
d2=6
Do[{W=Array[o,{d1(d2-1)d2,d1(d2-1)d2}],sW=Array[so,{d1(d2-1)d2,
d1(d2-1)d2}],FF=Array[Fx,{d1,d1,d2,d2,2}],KK=Array[, {d2,d2,2}],
MM=Array[M,{d1,d1(d2-1)d2}],Ksel=Table[0,{alpha,1,2},{beta,1,2},
{gamma,1,2},{delta,1,2}],cc=Table[0,{alpha,1,2}],{iter,1,1}]
"-----
MATRIX OF CONSTRAINT'S BRACKETS."

"
Tensores de Levi Civita:"
epsilon4=LeviCivitaTensor[d1]
epsilon6=LeviCivitaTensor[d2]
"
Seletores Ksel_{alpha beta gamma}:"
Ksel[[1,1,1,1]]=1
Ksel[[1,2,2,1]]=epsilon

```



```

Ksel[[2,1,2,1]]=epsilon
Ksel[[2,2,1,1]]=epsilon

Ksel[[2,2,2,2]]=epsilon
Ksel[[2,1,1,2]]=1
Ksel[[1,2,1,2]]=1
Ksel[[1,1,2,2]]=1
Ksel//MatrixForm
"
epsilon ="
epsilon=-1
"cc ="
cc={1,1}
"
Antisimetrização de F:"
Do[FF[[a,a,i,j,alpha]]=0,{a,1,d1},{i,1,d2},{j,1,d2},{alpha,1,2}]
Do[FF[[a,b,i,i,alpha]]=0,{a,1,d1},{b,1,d1},{i,1,d2},{alpha,1,2}]
Do[{FF[[b,a,i,j,alpha]]=-FF[[a,b,i,j,alpha]],FF[[a,b,j,i,alpha]]=-
-FF[[a,b,i,j,alpha]],FF[[b,a,j,i,alpha]]=FF[[a,b,i,j,alpha]]},
{a,1,d1-1},{b,a+1,d1},{i,1,d2-1},{j,i+1,d2},{alpha,1,2}]
"simetria em FF"
TensorSymmetry[FF]
FF[[1,2,3,4,1]]+FF[[2,1,3,4,1]]
FF[[1,2,3,4,1]]+FF[[3,2,1,4,1]]
FF[[1,2,2,4,1]]

"
Matrix MM_{b K}=F^{ij}_{ba}:"

Do[{K=0, Do[{K=K+1,MM[[b,K]]=
FF[[b,a,i,j,alpha]]},
{a,1,d1},{i,1,d2-1},{j,i+1,d2},{alpha,1,2}]},{b,1,d1}]
MM//MatrixForm
"
Rank MM ="
MatrixRank[MM]

```

```

"Matrix W_{JK}=W^{ab}_{ijklalpha,klbeta} dos colchetes de Poisson:"
K=0
Do[{ K=K+1, J=0, Do[{J=J+1,W[[J,K]]=
Sum[cc[[delta]]Ksel[[alpha,beta,gamma,delta]]epsilon4[[a,b,c,d]]
epsilon6[[i,j,k,l,m,n]]FF[[c,d,m,n,gamma]],
{c,1,d1-1},{d,c+1,d1},{m,1,d2-1},{n,m+1,d2},{gamma,1,2},{delta,1,2}}},
{alpha,1,2},{i,1,d2-1},{j,i+1,d2},{a,1,d1}]],{beta,1,2},{k,1,d2-1},
{l,k+1,d2},{b,1,d1}]

W
"TensorSymmetry[W] => antisymmetric. ok?"
TensorSymmetry[W]
"W[[1,d1(d2-1)d2]] ="
W[[1,d1(d2-1)d2]]

"-----
MATRIX OF CONSTRAINT'S BRACKETS."
"
K_{ijklalpha} = os 30 vínculos de la classe:"
Do[KK[[i,j,alpha]]=Sum[cc[[delta]]Ksel[[alpha,beta,gamma,]]
epsilon4[[a,b,c,d]]epsilon6[[i,j,k,l,m,n]]FF[[a,b,k,l,beta]]
FF[[c,d,m,n,gamma]],{a,1,d1-1},{b,a+1,d1},{c,1,d1-1},
{d,c+1,d1},{k,1,d2-1},{l,k+1,d2},{m,1,d2-1},{n,m+1,d2},{beta,1,2},
{gamma,1,2},{delta,1,2}},{i,1,d2},{j,1,d2},{alpha,1,2}]
KK
"simetrias em KK"
TensorSymmetry[KK]

"listeq ="
listeq=Flatten[Table[KK[[m,n,alpha]]== 0,{m,1,d2-1},{n,m+1,d2},
{alpha,1,2}]]
"list ="
varsol = Flatten[Table[FF[[a,b,k,l,beta]],{a,1,1},{b,2,2},{k,1,d2-1},
{l,k+1,d2},{beta,1,2}]]
"
-----END PROGRAM-----"

```

Apêndice D

Resolvendo os vínculos

```

"Calculando o rank de Omega.nb"
"
MATRIZ DOS COLCHETES DE POISSON DOS VINCULOS.

"
"a = 1,...,d1;   i = 1,   ,d2" (*Declaracao de: a matriz dos vinculos,
curvatura, vinculos K *)
d1=4
d2=6
Do[{Omega=Array[o,{d1 (d2-1) d2,d1 (d2-1) d2}],sOmega=Array[so,
{d1 (d2-1) d2,d1 (d2-1) d2}],FF=Array[Fx,{d1,d1,d2,d2,2}],
KK=Array[, {d2,d2,2}],MM=Array[M,{d1,d1 (d2-1) d2}],
Ksel=Table[0,{alpha,1,2},{beta,1,2},{gamma,1,2},{delta,1,2}],
cc=Table[0,{alpha,1,2}],{iter,1,1}]
"-----
MATRIX OF CONSTRAINT'S BRACKETS."

"
Tensores de Levi Civita:"
epsilon4=LeviCivitaTensor[d1]
epsilon6=LeviCivitaTensor[d2]
"
Seletores Ksel_{alphabetagamma}:
Ksel[[1,1,1,1]]=1

```

```

Ksel[[1,2,2,1]]=epsilon
Ksel[[2,1,2,1]]=epsilon
Ksel[[2,2,1,1]]=epsilon

Ksel[[2,2,2,2]]=epsilon
Ksel[[2,1,1,2]]=1
Ksel[[1,2,1,2]]=1
Ksel[[1,1,2,2]]=1
Ksel//MatrixForm
"
epsilon ="
epsilon=-1
"cc ="
"cc={RandomInteger[{0,10}],RandomInteger[{0,10}]}"
cc={1,-1}
"
Antisimetrização de F:"
Do[FF[[a,a,i,j,alpha]]=0,{a,1,d1},{i,1,d2},{j,1,d2},{alpha,1,2}]
Do[FF[[a,b,i,i,alpha]]=0,{a,1,d1},{b,1,d1},{i,1,d2},{alpha,1,2}]
Do[{FF[[b,a,i,j,alpha]]=-FF[[a,b,i,j,alpha]],FF[[a,b,j,i,alpha]]=-
-FF[[a,b,i,j,alpha]],FF[[b,a,j,i,alpha]]=FF[[a,b,i,j,alpha]]},
{a,1,d1-1},{b,a+1,d1},{i,1,d2-1},{j,i+1,d2},{alpha,1,2}]
"simetria em FF"
TensorSymmetry[FF]
FF[[1,2,3,4,1]]+FF[[2,1,3,4,1]]
FF[[1,2,3,4,1]]+FF[[3,2,1,4,1]]
FF[[1,2,2,4,1]]

"
Matrix MM_{b K}=F^{ij}_{ba}:"

Do[{K=0, Do[{K=K+1,MM[[b,K]]=
FF[[b,a,i,j,alpha]]},
{a,1,d1},{i,1,d2-1},{j,i+1,d2},{alpha,1,2}]},{b,1,d1}]
MM//MatrixForm
"
Rank MM ="

```

MatrixRank[MM]

```
"Matrix Omega_{JK}=Omega^{ab}_{ijalpha,klbeta} dos colchetes
de Poisson: (Calculado em 'Calculos de Omega e KK.nb')"
Omega:=(*Colocar aqui o resultado para a matriz Omega dos
colchetes de Poisson obtido no programa 'Calculo_OMEGAeK.nb' *)
(*O resultado sera uma expressao grande *)

"
-----
MATRIX OF CONSTRAINT'S BRACKETS."
"
K_{ijalpha} = os 30 vínculos de la classe: (Calculado em 'Calculos de
Omega e KK.nb')"
KK:=(*Colocar aqui o resultado para os vinculos K_{ijalpha} obtido
no programa 'Calculo_OMEGAeK.nb' *)
(*O resultado sera uma expressao grande *)

"
-----
"
(*Resolvendo os vinculos*)
"listeq ="
listeq=Flatten[Table[KK[[m,n,alpha]]== 0,{m,1,d2-1},{n,m+1,d2},
{alpha,1,2}]]
"list ="
varsol = Flatten[Table[FF[[a,b,k,l,beta]],{a,1,1},{b,2,2},{k,1,d2-1},
{l,k+1,d2},{beta,1,2}]]
"
LOOP: -----
"
Do[{Print[iter,") "],
```

```

Clear[FF, Fx],
FF=Array[Fx, {d1, d1, d2, d2, 2}],
"
Antisimetrização de F:",
Do[FF[[a, a, i, j, alpha]]=0, {a, 1, d1}, {i, 1, d2}, {j, 1, d2}, {alpha, 1, 2}],
Do[FF[[a, b, i, i, alpha]]=0, {a, 1, d1}, {b, 1, d1}, {i, 1, d2}, {alpha, 1, 2}],
Do[{FF[[b, a, i, j, alpha]]=-FF[[a, b, i, j, alpha]], FF[[a, b, j, i, alpha]]=-
-FF[[a, b, i, j, alpha]], FF[[b, a, j, i, alpha]]=FF[[a, b, i, j, alpha]]},
{a, 1, d1-1}, {b, a+1, d1}, {i, 1, d2-1}, {j, i+1, d2}, {alpha, 1, 2}],

"
Valores numéricos para os parametros:",
Do[Fx[1, b, k, l, beta]=RandomInteger[{-100, 100}], {b, 3, 4}, {k, 1, d2-1},
{1, k+1, d2}, {beta, 1, 2}],
Do[Fx[2, b, k, l, beta]=RandomInteger[{-100, 100}], {b, 3, 4}, {k, 1, d2-1},
{1, k+1, d2}, {beta, 1, 2}],
Do[Fx[3, 4, k, l, beta]=RandomInteger[{-100, 100}], {k, 1, d2-1}, {1, k+1, d2},
{beta, 1, 2}],
FF//MatrixForm,
(*Print["simetria em FF: ", TensorSymmetry[FF]], *)
sol=Solve[listeq, varsol],
n=0,
Do[{n=n+1, Fx[1, 2, i, j, alpha]=sol[[1, n, 2]]}, {i, 1, d2-1}, {j, i+1, d2},
{alpha, 1, 2}],

(*"
Rank  Omega ="*)
rankOmega=MatrixRank[Omega],
(*"
Submatrix sOmega:"*)
sOmega=Take[Omega, {1, rankOmega}, {1, rankOmega}],
(*"sOmega//MatrixForm"*)
"
Rank  sOmega = ",
ranksOmega=MatrixRank[sOmega],
Print["rank(Omega) = ", rankOmega, "      rank(sOmega) = ", ranksOmega]

```

```
},{iter,1,100}]
```

```
"
```

```
End loop "
```

```
"-----"
```

```
"Exit[]"
```

```
Exit[]
```

Referências Bibliográficas

- [1] S. S. Chern e J. Simons. Characteristic Forms and Geometric Invariants. *Annals of Mathematics*, 99:48, 1974.
- [2] M. Nakahara. Geometry, topology and physics. *Boca Raton, USA: Taylor & Francis*, 1974.
- [3] M. Hassaine e J. Zanelli. Chern Simons (Super)Gravity - vol 2. *World Scientific Publishing Company*, 2016.
- [4] M. Bañados, L. J. Garay e M. Henneaux. The dynamical structure of higher dimensional Chern-Simons theory. *Nuclear Physics B*, 476:611, 1996
- [5] M. Bañados, L. J. Garay e M. Henneaux. Existence of local degrees of freedom for higher dimensional pure Chern-Simons theories. *Phys. Rev. D*, 53:R593, 1996.
- [6] I. Morales, B. Neves, Z. Oporto e O. Piguet. A topological-like model for gravity in 4D space-time. *The European Physical Journal C*, 76:191, 2016.
- [7] I. Morales, B. Neves, Z. Oporto e O. Piguet. Chern-Simons gravity in four dimensions. *The European Physical Journal C*, 77:87, 2017.
- [8] E. Witten. 2 + 1 dimensional gravity as an exactly soluble system. *Nuclear Physics B*, 311:46, 1988.
- [9] I. Morales, B. Neves, Z. Oporto e O. Piguet. Dimensionally Compactified Chern-Simon Theory in 5D as a Gravitation Theory in 4D. *International Journal of Modern Physics: Conference Series*, 45, 2017.
- [10] C. Rovelli. Quantum gravity. *Cambridge Monographs on Mathematical Physics*, 2003.
- [11] N. González, P. Salgado, G. Rubio e S. Salgado. Einstein–Hilbert action with cosmological term from Chern–Simons gravity. *Journal of Geometry and Physics*, 86:339, 2014.

- [12] F. Izaurieta, E. Rodríguez e P. Salgado Expanding Lie (super)algebras through Abelian semigroups. *Journal of Mathematical Physics*, 47:123512, 2006.
- [13] R. A. Bertlmann Anomalies in quantum field theory. *Oxford, UK: Clarendon (1996) 566 p. (International series of monographs on physics: 91)*, 1996.
- [14] R. Utiyama Invariant theoretical interpretation of interaction. *Phys. Rev.*, 101:1597, 1956.
- [15] D. Lovelock The Einstein Tensor and Its Generalizations. *Journal of Mathematical Physics*, 12:498, 1981
- [16] M. Spivak Calculus on Manifolds: A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus. *Perseus Pub. Co.*, 1965
- [17] A. Achúcarro e P.K. Townsend A Chern-Simons action for three-dimensional anti-de Sitter supergravity theories. *Physics Letters B*, 180:89, 1986.
- [18] M. Banados, R. Troncoso e J. Zanelli Higher dimensional Chern-Simons supergravity. *Phys. Rev. D*, 54:2605, 1996.
- [19] P. A. M. Dirac. Lectures on Quantum Mechanics. *Dover Publications*, 1964.
- [20] M. Henneaux e C. Teitelboim. Quantization of Gauge Systems. *Princeton University Press*, 1992.
- [21] B. Neves. A topological-like gravity model in a four dimensional space-time. *arXiv:1803.01342*, 2018.
- [22] K Sundermeyer. Constrained dynamics : with applications to Yang-Mills theory, general relativity, classical spin, dual string model. *Springer*, 1982.
- [23] R. A. D’Inverno. Introducing Eisteins’s Relativity. *Oxford University Press*, 1992.
- [24] J. A. de Azcárraga, J. M. Izquierdo, M. Picón e O. Varela. Extensions, expansions, Lie algebra cohomology and enlarged superspaces. *arXiv:hep-th/0401033v2*, 2004.
- [25] Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 11.3, Champaing (2018)