Universidade Federal de Viçosa

Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas – CCE

Departamento de Matemática

PITÁGORAS: UMA ABORDAGEM HISTÓRICA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA NA ESCOLA

CRISTIANO MARTINS DE MACENA

VIÇOSA - MG

2022

CRISTIANO MARTINS DA MACENA

PITÁGORAS: UMA ABORDAGEM HISTÓRICA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA NA ESCOLA

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Viçosa como parte das exigências para obtenção do título de Licenciado em Matemática

Orientadora: Profª. Drª. Marli Duffles Donato Moreira

VIÇOSA - MG

2022

CRISTIANO MARTINS DA MACENA

PITÁGORAS: UMA ABORDAGEM HISTÓRICA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA NA ESCOLA

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Viçosa como parte das exigências para obtenção do título de Licenciado em Matemática

APROVADO: 23 de Novembro de 2022

ASSENTIMENTO:

CRISTIANO MARTINS DA MACENA

CRISTIANO MARTINS DA MACENA
Autor

Marli Moreira

Profª. Drª. Marli Duffles Donato Moreira
Orientadora

CRISTIANO MARTINS DA MACENA

PITÁGORAS: UMA ABORDAGEM HISTÓRICA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA NA ESCOLA

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Viçosa como parte das exigências para obtenção do título de Licenciado em Matemática

APROVADO: 23 de Novembro de 2022

BANCA AVALIADORA:

Profª. Drª. Caroline Mendes dos Passos (UFV)

Rejane W S. de C. Faria

Profª. Drª. Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho Faria (UFV)

Marli Moreira

Profª. Drª. Marli Duffles Donato Moreira (UFV)
Orientadora

RESUMO

Da MACENA, Cristiano Martins, Universidade Federal de Viçosa, novembro de 2022. **PITÁGORAS: UMA ABORDAGEM HISTÓRICA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA NA ESCOLA** . Orientadora: Marli Duffles Donato Moreira.

Este trabalho propõe uma abordagem pedagógica alternativa à prática docente tradicional presente nas escolas no que tange ao ensino da matemática básica. Devido às formas tradicionais de ensino e à pandemia de COVID-19 dos nossos dias, encontramos muitos alunos com algum tipo de defasagem na aprendizagem matemática. Trazer o contexto histórico dos conceitos matemáticos ajuda a desconstruir a fama de vilã que a matemática recebe nas escolas. Sendo assim, esta pesquisa apresenta uma abordagem histórico-cultural para o ensino de geometria, particularmente, de Pitágoras e seu famoso teorema, relacionando com o desenvolvimento da matemática que hoje conhecemos. Este trabalho se desenvolveu a partir da metodologia de pesquisa qualitativa de cunho bibliográfico com a leitura de artigos e estudos que tratavam sobre o tema. Algumas atividades foram desenvolvidas com alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Viçosa fundamentadas, teoricamente, na importância de se conhecer historicamente a origem dos conceitos matemáticos bem como em tarefas lúdicas. Concluímos que trazer novas ferramentas para fortalecer o aprendizado é essencial e a abordagem histórica auxilia no desenvolvimento do conhecimento matemático.

Palavras-chave: Educação Matemática. História da matemática. Geometria. Demonstrações do Teorema de Pitágoras.

ABSTRACT

Da MACENA, Cristiano Martins, Federal University of Viçosa, November 2022. PYTHAGORAS: A HISTORICAL APPROACH TO MATHEMATICS TEACHING IN SCHOOL. Advisor: Marli Duffles Donato Moreira.

This work proposes an alternative pedagogical approach to the traditional teaching practice present in schools regarding the teaching of basic mathematics. Due to traditional ways of teaching and the current COVID-19 pandemic, we find many students with some kind of delay in learning mathematics. Bringing the historical context of mathematical concepts helps to deconstruct the reputation of villain that mathematics receives in schools. Therefore, this research presents a historical-cultural approach to the teaching of geometry, particularly Pythagoras and his famous theorem, relating it to the development of mathematics as we know it today. This work was developed from the qualitative research methodology of a bibliographical nature with the reading of articles and studies that dealt with the subject. Some activities were developed with students of the Degree in Mathematics at the Federal University of Viçosa, theoretically based on the importance of historically knowing the origin of mathematical concepts as well as on ludic tasks. We conclude that bringing new tools to strengthen learning is essential and the historical approach helps in the development of mathematical knowledge.

Keywords: Mathematics Education. History of Mathematics. Geometry. Proofs of the Pythagorean Theorem.

SUMÁRIO

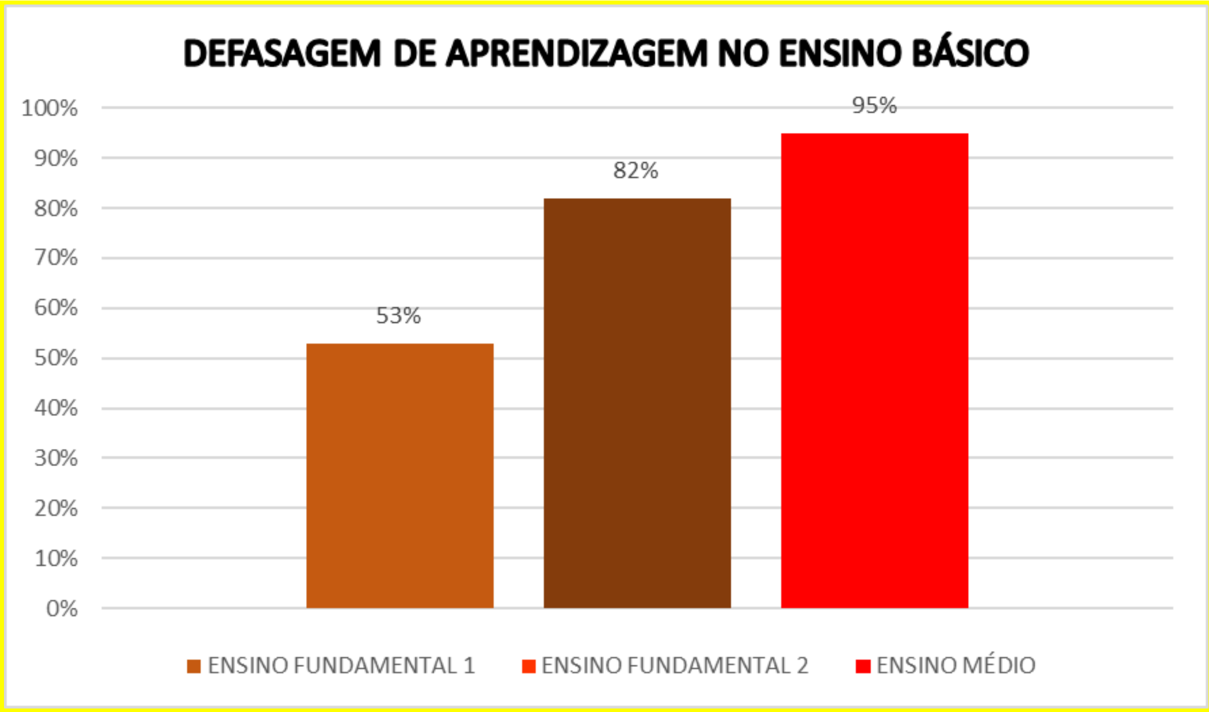
1. INTRODUÇÃO

Inicio esta monografia com uma breve apresentação. Meu nome é Cristiano Martins da Macena, tenho 36 anos e sou natural de Viçosa, MG. Estudei no decorrer de toda a minha vida estudantil em escolas públicas e sempre fui incentivado pelos meus professores a dar continuidade aos estudos. Minha paixão pela matemática vem desde criança; sempre foi uma matéria que me despertava interesse e curiosidade. Um de meus professores do ensino médio, percebendo essa inclinação para a disciplina, me incentivou a fazer o curso de matemática. Porém, minha primeira tentativa de ingresso no ensino superior foi para o curso de administração, mas sem sucesso. Após cinco anos, me rendi à Matemática e voltei a prestar vestibular e tendo como minha principal opção essa área. Ao ingressar no ensino superior, senti muita dificuldade no início, pois percebi que a forma como aprendi matemática na escola era muito diferente da forma como se aprende na faculdade. Como gosto de desafios, fui persistente e hoje amo a forma como vejo a matemática e este trabalho vem trazer um pouco da minha visão de como podemos melhorar a forma de conceber e ensinar matemática.

Nos tempos atuais, muitos são os desafios para o ensino da matemática nas escolas básicas brasileiras. Encontramos vários alunos com alguma defasagem no aprendizado da matemática conforme dados do SAEB (Sistema de Avaliação do Ensino Básico) de 2021. Neste relatório, apenas 47% das crianças do Ensino Fundamental 1 aprendem o básico e 18% destes alunos concluem o Ensino Fundamental 2 com base para ingressar no ensino médio. Somente 5% dos estudantes que terminam o ensino médio alcançam um entendimento satisfatório da matemática (Figura 1). Esse quadro teve um agravo muito grande devido ao cenário pandêmico que estamos vivenciando. Várias crianças e jovens, a maioria desassistida pelas políticas públicas brasileiras, ficaram prejudicadas de seus estudos pois não tinham nenhuma estrutura, tanto física quanto pedagógica, para dar prosseguimento aos estudos.

Além desses problemas, há também aqueles alunos que, de tanto serem submetidos aos métodos tradicionais de ensino focados no professor (postura passiva do estudante), não encontram interesse pela matemática e suas áreas afins, o que dificulta sua aprendizagem.

Figura 1: Aprendizagem matemática segundo SAEB 2021



Fonte: autoria própria

Para dar respostas a esse problema, nós, como educadores da área de Educação Matemática, podemos repensar a forma que ensinamos a matemática, buscando torná-la mais significativa, prazerosa e divertida. Devemos compreender que o saber de qualquer área de conhecimento se dá para além das salas de aula com suas lições, aplicações de provas, quadros de giz, etc. Devemos considerar a forma de viver dos alunos para a construção do conhecimento e colocá-los no centro das discussões. Dentre as várias possibilidades pedagógicas, podemos utilizar a história da matemática e seus personagens para despertar a curiosidade dos alunos para conhecer a origem e o porquê das fórmulas usadas nas salas de aula.

De acordo com esta premissa, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2017, p. 9) aponta, entre suas dez competências gerais, que

> 1- Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
> 2- Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e

> a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

Há anos, a matemática tem sido a disciplina de maior dificuldade das crianças e jovens, e para manter o estudante interessado no processo de aprendizagem o educador precisa criar alternativas didáticas. Neste sentido, o uso de conteúdos históricos da matemática pode ser positivo conforme aponta Miguel apud Silva, (2016, p. 2):

> A história da matemática pode proporcionar esse ambiente de compartilhamentos de ideias e autonomia para os alunos. além disso, outros argumentos são apontados para a utilização da história da matemática em sala de aula,a saber: possibilita a desmistificação da matemática como algo já pronto e acabado, situa a matemática como uma manifestação cultural, permite aos alunos compreenderem como os conceitos matemáticos se desenvolveram e sua evolução até os dias atuais,podem promover a aprendizagem significativa e compreensiva da matemática, possibilita a explicação do porquê do surgimento de um determinado objeto, entre outros argumentos.

Motta (2006, p.17) apresenta, “a História da Matemática como uma fonte de experiências humanas que podem ser trabalhadas nas atividades didáticas em Matemática, através de um diálogo com as práticas atuais e o contexto da época da produção do conceito”.

Neste sentido, este trabalho traz uma abordagem histórica do tema *Teorema de Pitágoras* em que os alunos apresentam dificuldades de compreensão na escola. Este tema foi escolhido porque me desperta interesse e, observando a forma como é ensinado, instigou-me a buscar uma alternativa para deixá-lo mais atraente e significativo para os estudantes. Neste estudo pretendemos apresentar uma abordagem mais interessante e criativa para o ensino através do conhecimento da história para estimular nos alunos o desejo de aprender esse conceito muito importante para sua formação acadêmica.

2. OBJETIVOS

Objetivo geral

Apresentar o teorema de Pitágoras segundo uma abordagem histórica para a aprendizagem dos alunos na escola.

Objetivos específicos

(i) Apresentar a história de Pitágoras e suas contribuições para o desenvolvimento da matemática;

(ii) Explorar as possibilidades pedagógicas e lúdicas do teorema de Pitágoras;

(iii) Apresentar conceitos e demonstrações do Teorema de Pitágoras;

(iv) Elaborar atividades sobre o teorema de Pitágoras para a educação básica.

3. METODOLOGIA

Este é um trabalho de natureza teórica e abordagem qualitativa. Foi utilizado o método de pesquisa bibliográfica, pois de acordo com Praia; Cachapuz e Pérez apud Cesario (2020, p. 3), "este tipo de pesquisa fundamenta-se com base em material que já fora construído, o que inclui artigos científicos publicados em periódicos acadêmicos". A perspectiva qualitativa se justifica pois "neste tipo de abordagem não há forma numérica, pois o pesquisador utiliza uma forma indutiva para descrever a situação observada. Nesse sentido, os dados qualitativos não podem ser representados graficamente, sendo a pesquisa de caráter exploratório e investigativa" (CRISTIANE, 2014; EVENCIO et al, 2019, apud Cesario, 2020, p. 5).

No próximo capítulo, apresento uma revisão de literatura que fundamenta a importância da história no ensino de matemática. Exponho, também, argumentos que apontam para outras metodologias que podem ser muito eficazes no processo de ensino e aprendizagem. Além disso, relato, brevemente, a história de Pitágoras e suas contribuições para a matemática.

4. REVISÃO DE LITERATURA

Alguns autores fundamentaram a elaboração deste trabalho teórico; pesquisadores como Ubiratan D'Ambrosio (1985), Marcone Santos (2011), Pereira e Silva (2016), John Fossa (2021) e outros foram utilizados nesta pesquisa como apresentarei nas próximas seções. Além destes referenciais, a perspectiva interdisciplinar para o ensino de matemática é destacada: "O processo de aprendizagem é, essencialmente, um processo de estabelecer relações, fazer conexões" (MOREIRA, 2016, p. 69).

4.1. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO

Uma das tendências que podemos utilizar como auxílio ao ensino da matemática, nos tempos atuais, é o uso da história da matemática. Possibilita desenvolver reflexões que podem auxiliar os estudantes a compreenderem os conceitos matemáticos através de fontes e fatos históricos. No entanto, usar a história da matemática de forma errada pode confundir os estudantes e Fossa (2021, p. 119) nos traz essa reflexão quando diz que:

> O uso tradicional da história da matemática no ensino da matemática, em contraste, se limitava a tentar proporcionar ao aluno uma maior motivação para estudar a matemática. A tentativa era feita, no entanto, de tal forma que a informação histórica era, quase sempre, marginalizada, ou seja, a mencionada informação não fazia parte integral do módulo de ensino e, dessa forma,o aluno frequentemente usava o material histórico para fugir da matemática, em vez de investigá-la com mais interesse.

A importância de se conhecer a história do objeto em estudo é expressa por Groenwald (2004, p. 47) que destaca:

> O enfoque histórico é uma proposta metodológica que permite ao aluno descobrir a gênese dos conceitos e métodos que aprenderá em aula. Em outras palavras, este enfoque permitirá ao aluno fazer relação das ideias matemáticas desenvolvidas em sala de aula com suas origens. O conhecimento da História da Matemática proporciona uma visão dinâmica da evolução dessa disciplina, buscando as ideias originais em toda sua essência.

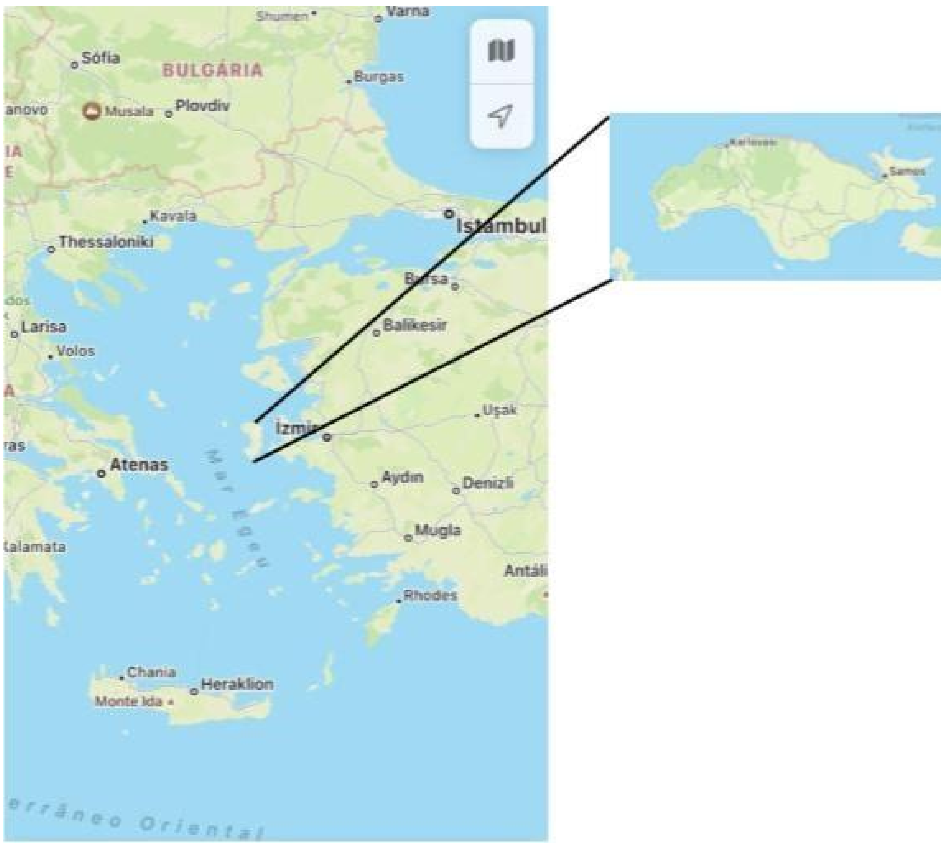
Trabalhar a história da matemática em salas de aula além de tornar o aprendizagem mais significativa, proporciona aos alunos possuir uma ferramenta que os ajuda a contextualizar, desmistificar e auxiliar na formalização de conceitos. A partir do momento em que os estudantes compreendem a história dos conceitos matemáticos, compreendem os motivos e as razões pelas quais foram construídos.

Neste trabalho, concebemos a matemática como construção histórica e cultural. Todas as sociedades constroem histórias e culturas que a elas se relacionam. Usar o ambiente cultural dessas sociedades pode ser um grande aliado para ensinar. O professor Ubiratan D’Ambrosio (1985, p. 44), pioneiro nas pesquisas sobre etnomatemática, a define como um conjunto de formas de matemática que são próprias de diversos grupos culturais. A matemática é uma herança cultural que deve ser explorada e que está associada com as tradições e as tecnologias estando inserida em diversas atividades humanas. Valorizar os diferentes grupos culturais e suas raízes é importante, pois suas tradições nos trazem um vasto conhecimento dos antepassados, destacando a matemática ligada à cultura e às tradições das comunidades.

4.2. PITÁGORAS E SEU TEOREMA

Por volta do ano de 580 a.C., na ilha grega de Samos, localizada a leste do mar Egeu, nascia um menino que viria a se tornar um dos maiores filósofos e matemáticos de todos os tempos (Figura 2).

Figura 2: Ilha de Samos (Grécia)



Fonte: Google Maps

Filho de um rico comerciante, Pitágoras teve sua vida e suas ideias misturadas entre o real e as lendas (Figura 3). Quando jovem foi enviado para cidade de Mileto na Grécia para estudar com o matemático Tales, que era reconhecido como o maior sábio da época. De imediato,Tales percebeu que aquele garoto possuía um grande potencial e começou a ensiná-lo as matemáticas e geometrias.

Figura 3: Imagem de Pitágoras

Fonte: https://www.todamateria.com.br/pitagoras/

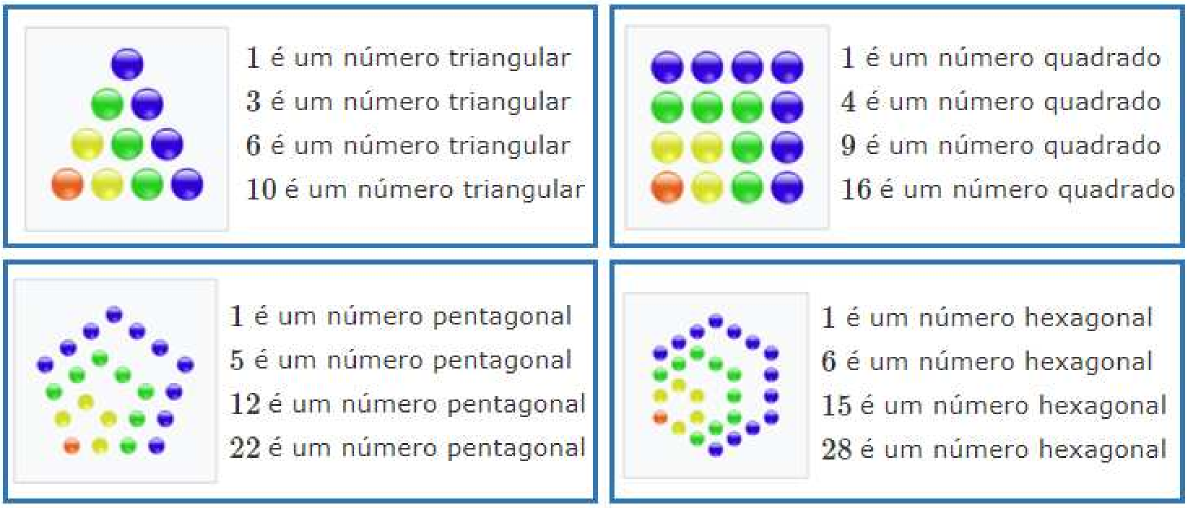
Em busca de novos conhecimentos, Pitágoras viajou por várias regiões. No Egito, viveu por cerca de 20 anos e se tornou um sacerdote. Adquiriu, então, conhecimentos matemáticos neste lugar considerado o lugar mais culto e cheio de saberes da época. Pitágoras também viajou para Babilônia onde aprofundou os estudos em ciências e religião dos diversos povos, aprofundando suas práticas espirituais.

Ao voltar para a Grécia, Pitágoras encontrou-a em domínio do tirano Polícrates. Como vinha tendo várias divergências pessoais com o tirano, acabou sendo banido para sempre de suas terras. Então decidiu migrar para o porto marítimo de Crotona, uma colônia grega localizada ao sul da Itália. Lá fundou um centro de estudos voltado para a filosofia, matemática e ciências naturais, vindo a ser conhecido como, escola pitagórica.

A escola pitagórica, seguia regras de conduta religiosas e era considerada uma irmandade estreitamente unida por cerimônias e ritos religiosos. Porém, os governantes encaravam esta escola como uma ameaça revolucionária e isto desenvolveu um sentimento popular de revolta contra a escola de Pitágoras. Em uma destas revoltas, a população acabou destruindo o prédio da escola, fazendo com que os pitagóricos fugissem. Pitágoras fugiu para a cidade de Metaponto, onde morreu com a idade entre 75 e 78 anos. A escola pitagórica continuou por mais ou menos dois séculos após a morte de seu líder.

A filosofia dos pitagóricos baseava-se no fato de que tudo o que existia podia ser compreendido como números. Isto os levava a uma exaltação dos números e ao estudo das suas propriedades e das propriedades da aritmética. Além de estudar os números (Figura 4), também tinham uma relação muito forte com a música, astronomia e geometria.

Figura 4: Números figurados



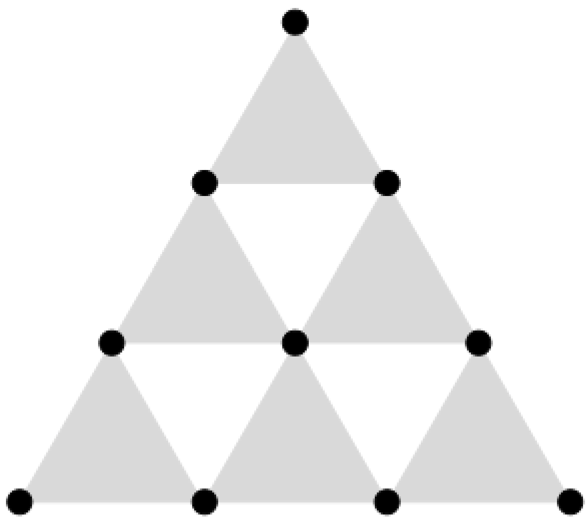
Fonte: http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-leitura-numeros-triangulares/

Muitas foram as descobertas realizadas pela escola pitagórica: os números amigáveis, aritmética pitagórica, grandezas irracionais, identidades algébricas, transformações de áreas, resoluções geométricas de equações quadráticas, termos pitagóricos. A mais famosa das contribuições desta escola foi a demonstração do teorema de Pitágoras. Como era de costume da irmandade pitagórica, atribuíam as descobertas ao mestre assim, não se sabe ao certo quantas ou quais foram feitas pelo próprio Pitágoras.

4.2.1. TETRAKTYS PITAGÓRICA

Um tetraktys, é uma representação pitagórica na forma de triângulo(figura 5), denominado triângulo perfeito(equilátero) formado a partir da sequência dos dez primeiros números alinhados em quatro linhas. A figura 5, também era chamada de tétrada ou décade, por ser o resultado da soma dos números das quatro filas (1+2+3+4), resultando em um número perfeito, 10, que simbolizava o regresso à unidade, a Deus e ao universo.

Figura 5: Tetraktys



Fonte: https://www.matematicaparafilosofos.pt/sobre-a-tetraktys-pitagorica/

É uma ideia matemática e um símbolo metafísico que abrange dentro de si - em forma de semente - os princípios do mundo natural, a harmonia do cosmos, a ascensão ao divino e os mistérios do reino divino. Tão reverenciado era esse símbolo antigo que inspirou filósofos antigos a jurar pelo nome de quem trouxe esse presente para a humanidade.

A Tetraktys começa com a mônada, que tem em si o Todo em potência, pois a partir do número 1, podem gerar-se todos os outros números, adicionando repetidamente mais um algarismo. Além disso, a Tetraktys, simboliza os quatro elementos da natureza, Água, Ar, Fogo e Terra, e como parte da cultura pitagórica, seus membros deveriam entoar uma oração mostrando a importância do Tetraktys.

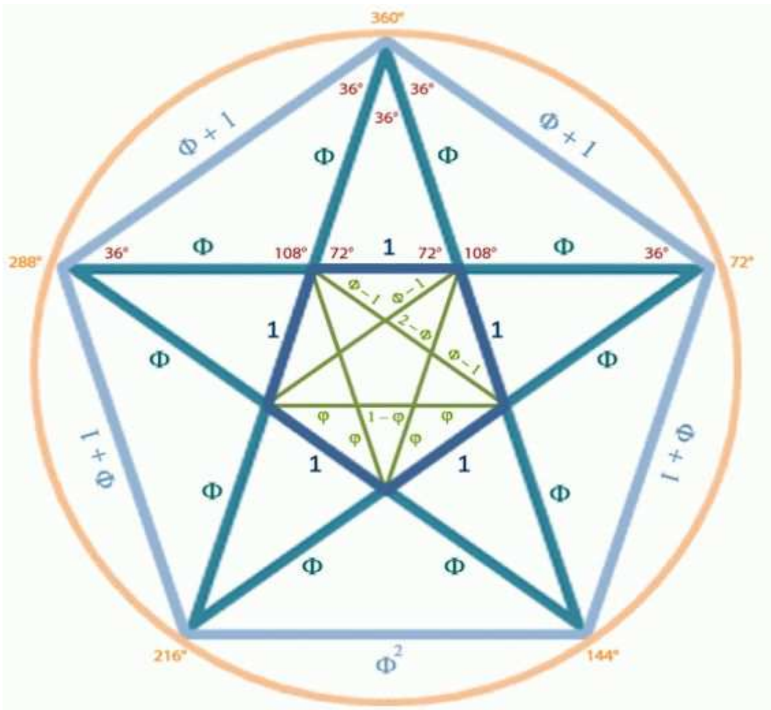
> Abençoa-nos, número divino, tu que gerou deuses e homens! Ó santo, santo Tetractys, tu que conténs a raiz e a fonte da eterna criação que flui! Pois o número divino começa com a profunda e pura unidade até chegar ao santo quatro; então, gera a mãe de todos, a toda-compreensiva, toda-abrangente, o primogênito, o inabalável, o incansável dez, a portadora de tudo. (DANTZIG,1930, p. 42)

O juramento pitagórico também mencionava o Tetractys, era secreto e seus membros eram obrigados a fazê-lo: “Por esse puro, santo nome de quatro letras no alto, fonte e suprimento eternos da natureza, o pai de todas as almas que vivem, por ele, com juramento fiel, juro por ti” (DANTZIG, 1930, p. 42).

4.2.2. PENTAGRAMA

O pentagrama está associado à crença de vários povos antigos, principalmente os egípcios, que acreditavam que o rei, após a morte, tornava-se uma estrela (MIGUEL, 1993). Já os pitagóricos consideravam o pentagrama como um símbolo. Para obtê-lo eles estendiam as faces pentagonais até formar uma estrela e assim pela união das diagonais de um pentágono, formava o pentagrama (Figura 6). Através deste símbolo, os membros da irmandade pitagórica eram reconhecidos.

Figura 6: Pentagrama



Fonte:
https://oscarenfotos.com/2019/04/06/proporcion-aurea-y-fotografia/pentagrama_pitagoras/

A geometria do pentagrama e suas associações metafísicas foram bastante exploradas por Pitágoras e seus seguidores, que o consideravam um emblema de perfeição. Os pitagóricos atribuíam virtudes especiais ao pentagrama porque é uma figura que pode ser construída por uma linha única, linha fechada entrelaçada e por isso era considerado o símbolo da perfeição, da harmonia entre o corpo e a alma.

4.2.3. O Teorema de Pitágoras

A civilização mesopotâmica, que existiu a mais 3500 a.C. é considerada a mais antiga do mundo. Hoje essa região é chamada de Iraque, e encontra-se banhada pelos rios Tigre e Eufrates. Há muito tempo, eles criaram um meio de escrita e a deixou registrada em tábulas de argila usando agulhas. Várias dessas tábuas possuem muitos problemas e soluções matemáticas, sendo a mais famosa,a Tábula Plimpton 322 (Figura 7), que é datada dos anos de 1900 – 1600 a.C., na qual se encontra o mais antigo registro sobre o teorema de Pitágoras, contendo uma tabela de ternas pitagóricas.

Figura 7: Tábula Plimpton 322

Fonte:
https://rcristo.com.br/2018/11/13/conheca-plimpton-322-um-tablete-de-argila-com-escrita-cuneiforme-babilonica-datado-em-3800-anos/

Essa tábua nos mostra que bem antes dos pitagóricos,os antigos babilônios já conheciam o teorema de Pitágoras e o aplicavam em seu dia-a-dia. Além disso, a história mostra que o teorema também era conhecido pelos indianos e chineses.

Considerado um dos alicerces da matemática, o teorema de Pitágoras é de grande importância para ensino da geometria e da trigonometria. Além disso, pode ser utilizado em outras áreas, como a física.

Há muito tempo os pitagóricos em um de seus estudos definiram este teorema como: “A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa” (Figura 8), uma forma simples de enunciar o teorema.

Euclides em seu livro “os Elementos”, nos traz duas proposições que podemos relacionar com o teorema de Pitágoras: a proposição 47 que diz: “Em todo triângulo retângulo o quadrado feito sobre o lado oposto ao ângulo reto, é igual ao quadrados formados sobre os outros lados, que fazem o mesmo ângulo reto” e, a proposição 48, “se o quadrado feito sobre um lado de um triângulo for igual ao quadrado dos outros dois lados, o ângulo compreendido por estes dois lados é reto”.

Se considerarmos *a* como a medida da hipotenusa[1], e se *b* e *c* são as medidas dos catetos, o enunciado do teorema afirma que: $a^2=b^2+c^2$.

Figura 8: Expressão algébrica do teorema de Pitágoras.

Fonte: https://etecdeibitinga.wixsite.com/novo/post/teorema-de-pit%C3%A1goras

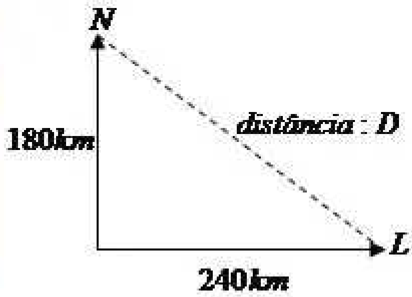
Mas, em que situação podemos aplicar o teorema de Pitágoras no dia-a-dia? Imaginem a seguinte situação:

> Dois navios atracados em um porto, partem em sentidos diferentes: o primeiro a partir vai para o norte e o segundo para o leste; o primeiro navio navega com uma velocidade constante de 30 Km/h e o segundo com uma velocidade constante de 40 Km/h. Após 6 horas navegando, o capitão do primeiro barco percebe que existe uma carga em seu navio que pertence ao outro barco, ele comunica ao capitão do segundo barco que imediatamente para o seu barco, então o capitão do primeiro barco resolve ir até o segundo. Qual será a menor distância percorrida pelo primeiro barco até chegar ao outro?

[1] Hipotenusa significa “o que se estende debaixo (do ângulo reto)” e cateto que significa "que cai perpendicular".

Veja que este problema exige que inicialmente determinemos a distância que ambos os barcos percorreram em 6 horas. Como o primeiro barco estava a 30 Km/h, então em 6 horas ele percorreu 6 x 30 = 180 Km, e como o segundo barco estava a 40 Km/h, percorreu 6 x 40 = 240 Km. Para determinarmos a menor distância percorrida pelo primeiro barco podemos utilizar o teorema de Pitágoras, conforme mostrado a seguir.

$$
\begin{aligned}
d^2 &= 180^2 + 240^2 \\
d^2 &= 32400 + 57600 \\
d^2 &= 90000 \\
\sqrt{d^2} &= \sqrt{90000} \\
d &= 300km
\end{aligned}
$$



Esse é um dos exemplos de aplicação do teorema de Pitágoras. A construção civil é uma das áreas de atuação que mais aplica os conceitos do teorema e o transporte, também, contribuindo para a contextualização do conceito.

4.2.4. Algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras

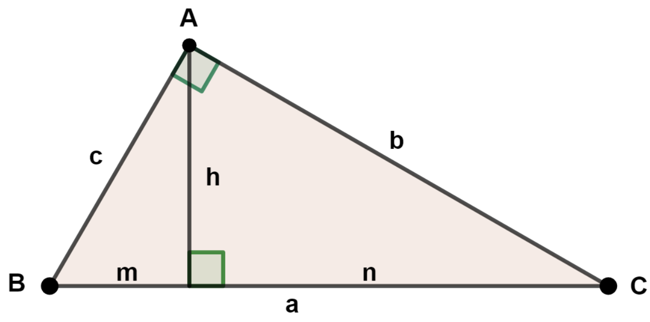
(i) Semelhança de triângulos

Definição: Dois triângulos são ditos semelhantes se, e somente se, existe uma correspondência biunívoca que associa os vértices de um triângulo aos vértices do outro triângulo; os ângulos com vértices correspondentes são congruentes; e os lados opostos a vértices correspondentes possuem medidas proporcionais. Existem três casos de semelhança de triângulos, sendo eles o caso ângulo-ângulo (AA), caso lado-ângulo-lado (LAL) e o caso lado-lado-lado (LLL). Para essa demonstração utilizaremos o caso ângulo-ângulo (AA).

Demonstração: Considere o triângulo retângulo ABC abaixo (figura 9).

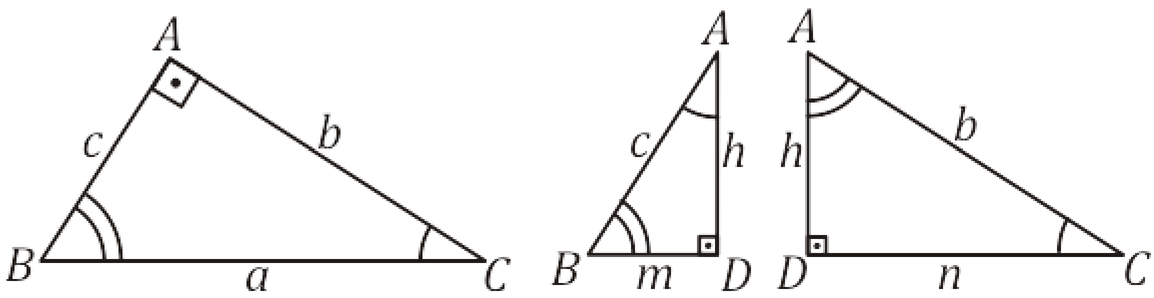
Queremos mostrar que dado um triângulo ABC, a relação $a^2 = b^2 + c^2$

Figura 9: Triângulo retângulo



Fonte: autoria própria

Sejam **h** a altura do triângulo relativa à hipotenusa **a**, **m** a projeção ortogonal do cateto **c** sobre a hipotenusa, e **n** a projeção ortogonal do cateto **b** sobre a hipotenusa. Deste modo, podemos considerar 3 triângulos: △ABC, △DAB e △DAC.



Observem que estes triângulos são semelhantes, pelo caso AA de semelhança (dois ângulos congruentes). Então, obtemos:

$$\Delta ABC \sim \Delta DAB \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m}$$

e

$$ah = bc(1)$$

$$bm = hc(2)$$

$$am = c^2(3)$$

$$\Delta ABC \sim \Delta DAC \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{h} = \frac{b}{n}$$

então temos:

$ah = bc(4)$

$bh = nc(5)$

$an = b^2(6)$

$$\Delta DAB \sim \Delta DCA \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{h}{n} = \frac{m}{h}$$

então temos:

$cn = bh(7)$

$h^2 = nm(8)$

$ch = bm(9)$

de (3) e (6) segue que:

$am + an = c^2 + b^2$

$a(m + n) = c^2 + b^2$

veja na figura 7 que $m + n = a$, logo:

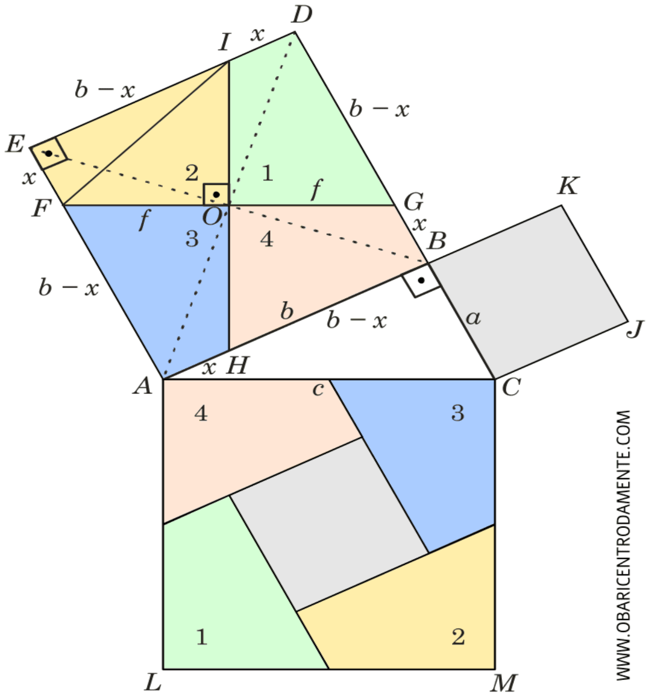
$a(m + n) = c^2 + b^2$

$a^2 = c^2 + b^2$, como queríamos provar.

(ii) Método Perigal

Considerando um triângulo retângulo ABC, este método consiste em construir quadrados nos lados do triângulo, e dissecar estes quadrados, para chegar a verificação da expressão algébrica do Teorema de Pitágoras. Esta é uma das formas que mais explicita a questão geométrica do Teorema.

Figura 10: Triângulo retângulo ABC



Fonte:
https://www.obaricentrodamente.com/2018/11/teorema-de-pitagoras-metodo-de-perigal.

Como mostrado na figura 10, sobre o cateto maior do triângulo, neste caso **AB**, construímos o quadrado **ABDE** e traçamos suas diagonais para encontrar seu centro **O**, que é a interseção destas. Feito isso, traçamos o segmento **FG** que passa pelo ponto **O** e é paralelo à hipotenusa **AC** do triângulo e por fim, traçamos **HI**, que é perpendicular a **FG**.

Deste modo, o quadrado **ABDE** é dissecado em quatro partes congruentes, e essas partes somadas ao quadrado **BCJK** , que está sobre o cateto menor, resultam no quadrado **ACML**, que está sobre a hipotenusa.

Demonstração: Considere o triângulo retângulo **ABC**, de hipotenusa **AC = c** e catetos **AB = b** e **AC = a**. Sobre o maior cateto, **AB** , construímos o quadrado **ABDE**. Em seguida, traçamos as diagonais do quadrado **AD** e **BE** que determinam o centro deste a partir de sua interseção. Isto ocorre pois a interseção **O** destas diagonais representam o centro de uma circunferência circunscrita ao quadrado, e portanto, representam também o seu centro.

Traçando o segmento **FG**, que passa por **O** e é paralelo à hipotenusa **c**, e traçando o segmento **IH** que também passa por **O** e é perpendicular a **FG**, obtemos uma dissecção do quadrado **ABDE** em quatro quadriláteros congruentes. Isto pode ser verificado via congruência de triângulos: basta dividir cada um dos quatro quadriláteros em dois triângulos e usando semelhança a partir de seus ângulos e lados, obteremos a congruência de cada um dos quadriláteros.

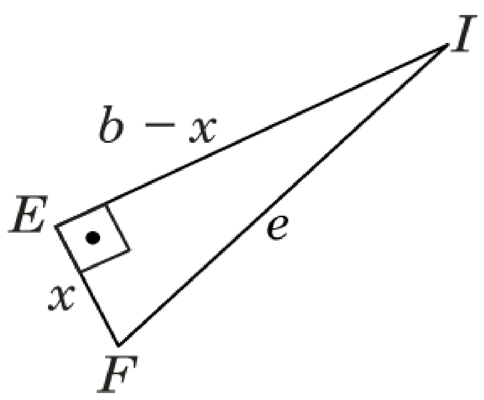
Temos então que $EF = DI = BG = AH = x$ e como $AB = AE = b$ temos que $BH = b - x$.

Observe ainda que os pontos ACGF são vértices de um paralelogramo, pois construímos seus lados sendo opostos e paralelos. Com isso, obtemos que:

$$a + x = b - x$$

$$a = b - 2x(1)$$

Agora vamos analisar o triângulo **EFI,** com catetos de medida **x**, $b - x$ e hipotenusa **e:**



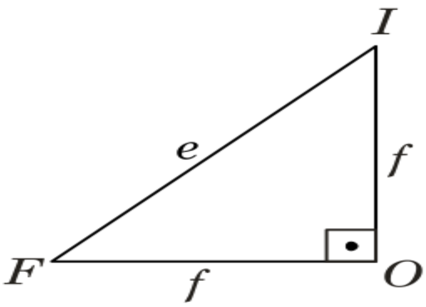
Temos que:

$$e^2 = x^2 + (b - x)^2$$

$$e^2 = x^2 + b^2 - 2bx + x^2$$

$$e^2 = 2x^2 + b^2 - 2bx (2)$$

Veja que **e** também é hipotenusa do triângulo a seguir:



Fazendo o mesmo que anteriormente, obtemos que:

$$e^2 = f^2 + f^2$$

$$2x^2 - 2bx + b^2 = 2f^2$$

$$f^2 = \frac{2x^2 - 2bx + b^2}{2} \qquad (3)$$

$$f = \sqrt{\frac{2x^2 - 2bx + b^2}{2}}$$

Como a hipotenusa **c** do triângulo **ABC** é um dos lados do paralelogramo **ABGF** temos que $c = 2f$, isto é:

$$c = 2\sqrt{\frac{2x^2 - 2bx + b^2}{2}}$$

$$c = \sqrt{4x^2 - 4bx + 2b^2} \qquad (4)$$

Agora veja que:

$$c^2 = 4x^2 - 4bx + 2b^2$$

e

$$a^2 + b^2 = (b - 2x)^2 + b^2 = 4x^2 - 4bx + 2b^2$$

Logo, temos que:

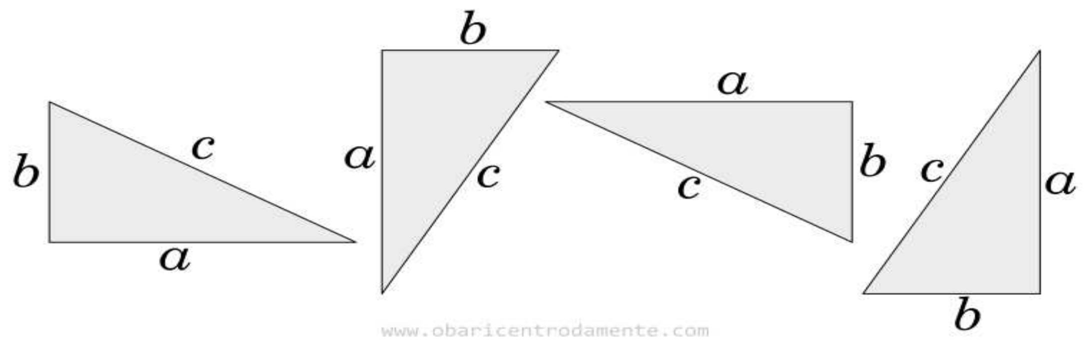
$$a^2 + b^2 = c^2$$

como queríamos demonstrar.

(iii) Método geométrico

A partir de quatro triângulos equiláteros, nosso objetivo é formar um quadrado, e com essa construção, demonstrar o Teorema de Pitágoras.

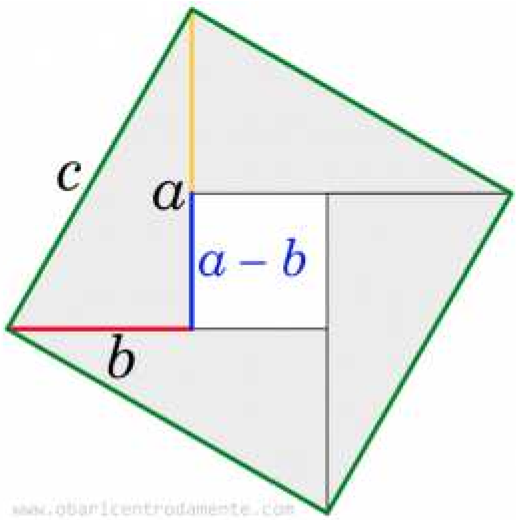
Demonstração: Considere quatro triângulos equiláteros, de catetos **a** e **b** e hipotenusa **c,** onde cada um destes triângulos está posicionado em um dos quatro ângulos com a horizontal: 0º, 90º, 180º e 270º



A partir disto, vamos posicionar estes triângulos de modo que formem um quadrado, onde os lados desse quadrado são as hipotenusas **c**[2] dos triângulos.

Deste modo, teremos um quadrado de lado **c** que possui outro quadrado em seu interior, este com lado medindo **a-b.**

[2] A letra c foi utilizada aqui para nomear a hipotenusa propositalmente para mostrar que os lados dos triângulos podem ser representados por quaisquer letras e o que é importante é verificar as suas relações.



Observando as áreas das figuras que compõem o quadrado maior, obtemos as seguintes informações:

$$A_{\ cada\ triâng.\ retâng.} = \frac{a.b}{2}$$

$$A_{\ quatro\ triâng.\ retâng.} = 4.\frac{a.b}{2} = 2ab$$

$$A_{\ quadrado\ menor} = (b - a)^2$$

$$A_{\ quadrado\ maior} = c^2$$

Como a área do quadrado maior resulta da soma das áreas dos objetos que o compõem, podemos fazer:

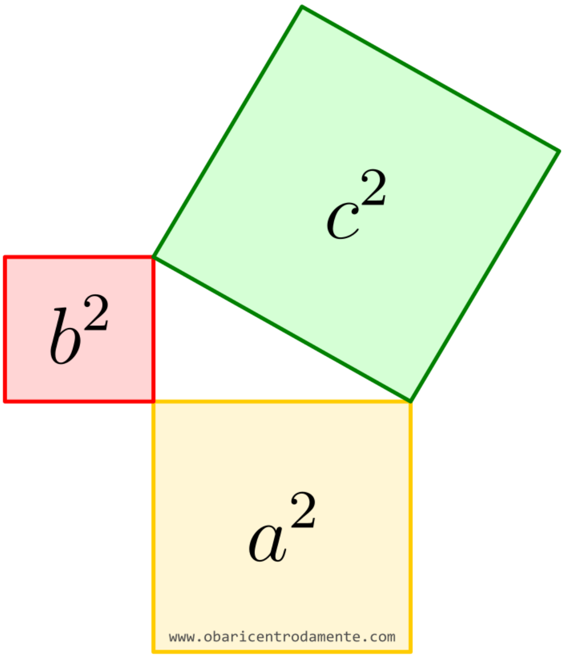
$$c^2 = 2ab + (a - b)^2$$

$$c^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2$$

Com isso, fica demonstrado que sendo c a hipotenusa de um triângulo retângulo, a e b seus catetos, então:

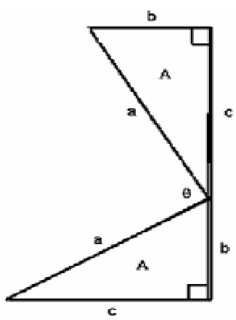
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Como c^2 é a área de um quadrado sobre a hipotenusa de lado c, b^2 é a área do quadrado sobre o lado b, e a^2 é a área de um quadrado sobre o lado a, podemos esboçar a figura que representa geometricamente o teorema de Pitágoras.

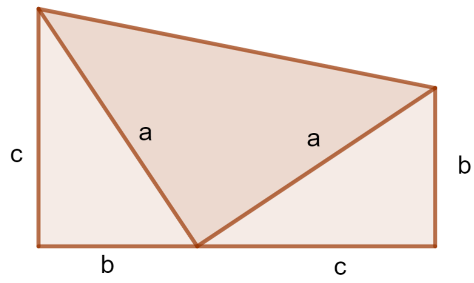


(iv) Método Garfield

Garfield começou desenhando um triângulo retângulo, de catetos ***b*** e ***c*** e hipotenusa ***a***. Em seguida repetiu o mesmo triângulo, em outra posição e com um dos vértices coincidindo. Dessa forma ele colocou em alinhamento o cateto **b** de um dos triângulos, com o cateto **c** do outro.



Em seguida, "fechou" a figura, obtendo um trapézio retângulo constituído pelos dois triângulos retângulos iniciais (iguais) e um outro triângulo que é também um triângulo retângulo.



Analisando a figura acima temos um trapézio que foi decomposto em três triângulos retângulos de lados ***a***,***b*** e ***c.*** Veja que a área do trapézio com base ***a*** e ***b*** e altura ***a+b,*** é igual a semi-soma das bases vezes a altura. Por outro lado, a mesma área é também igual à soma das áreas de três triângulos retângulos, portanto

$$\frac{(b+c)}{2}.(b+c) = \frac{(b+c)^2}{2} = \frac{b^2}{2} + bc + \frac{c^2}{2}$$

Mas podemos obter também a área pela soma das áreas dos triângulos:

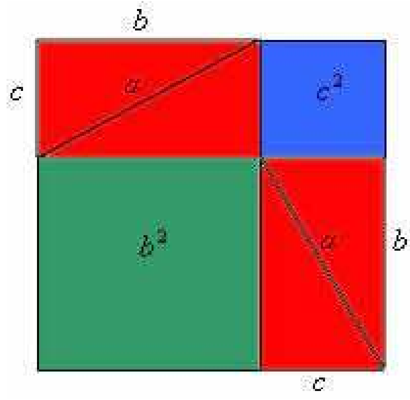
$$T = \frac{bc}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2} = bc + \frac{a^2}{2}$$

comparando-as e multiplicando por 2, temos $a^2 = b^2 + c^2$.

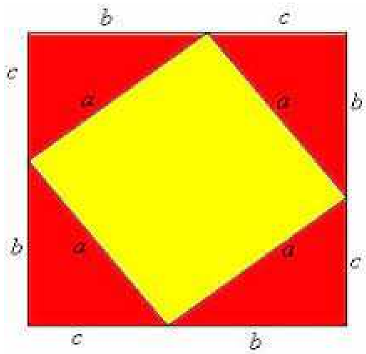
Observe que o Garfield usou o conceito de comparação de áreas para provar o teorema de Pitágoras.

(v) Método experimental

- Corte usando uma folha de cartolina as seguintes figuras
    a) 4 triângulos retângulos congruentes quaisquer (1)
    b) 1 quadrado de lado congruente a um dos catetos (2)
    c) 1 quadrado de lado congruente ao outro cateto (3)
    d) 1 quadrado de lado congruente a hipotenusa (4)
    e) 2 quadrados de lado iguais a somas dos catetos (5)
- Por superposição cubra portanto sem deixar espaços vazios, um dos quadrados(5) com os quadrados (2) e (3) e os triângulos (1), sem que haja remonte ou sobra.



- Por superposição cubra outro quadrado (5) com o quadrado (4) e os triângulos (1), sem remonte ou sobra.



- Analisando as figuras, podemos chegar às seguintes conclusões:

(área do quadrado verde) + (área do quadrado azul) = (área do quadrado amarelo) ou o padrão pitagórico: (soma das áreas dos quadrado dos catetos) = (área do quadrado da hipotenusa)

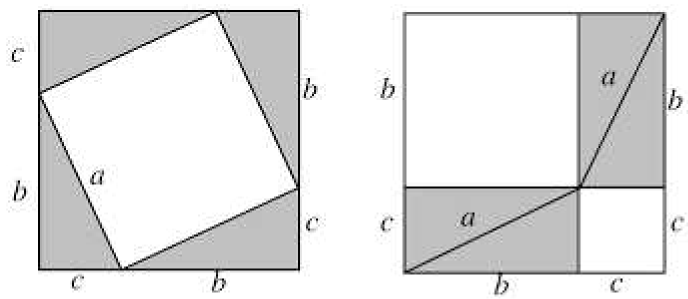
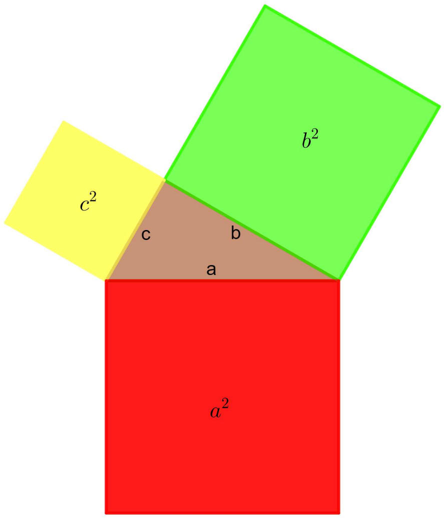


Figura 11: Relação pitagórica



Fonte: autoria própria

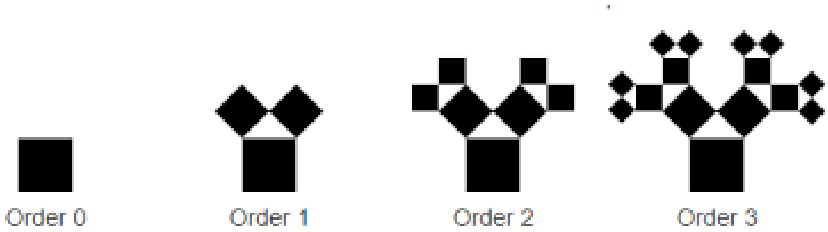
4.3. ÁRVORE PITAGÓRICA

Uma interessante aplicação do teorema de Pitágoras pode ser evidenciada ao observarmos a árvore pitagórica, um fractal. O uso da geometria dos fractais auxilia a compreensão de vários conceitos matemáticos em salas de aula. O matemático franco-americano Benoît Mandelbrot, que morreu em Cambridge, de câncer, aos 85 anos, descreveu, nos anos 70, uma família de formas geométricas que hoje chamamos de fractais.

Um fractal é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, cada uma das quais semelhante ao objeto original; têm como característica possuir infinitos detalhes, são geralmente autossimilares e de escala. Em muitos casos, pode ser gerado por um padrão repetido, tipicamente um processo recorrente ou iterativo.

A Árvore de Pitágoras (Figura 12) é um fractal plano formado por quadrados; possui esse nome porque é possível observar em vários dos seus galhos espirais que eles respeitam a relação conhecida como Teorema de Pitágoras, ou seja, a área de cada quadrado maior é igual à soma das áreas dos dois quadrados menores subsequentes ($a^2 = b^2 + c^2$). Com ela é possível abordar assuntos como crescimento exponencial, relações métricas no triângulo retângulo, além do próprio teorema de Pitágoras.

Figura 12: Árvore pitagórica



Fonte:
https://semsofismos.wordpress.com/2014/09/29/trabalho-i-matematica-e-arvores/

A construção da árvore de Pitágoras começa com um quadrado. Acima desse quadrado, coloca-se outros dois outros quadrados, reduzidos por um fator linear de maneira que os cantos dos quadrados coincidam formando um par. O mesmo processo então é aplicado recursivamente para os dois quadrados e assim sucessivamente até obter as árvores desejadas.

Construindo a árvore pitagórica usando o software geogebra

1- Marque dois pontos A e B quaisquer e trace um segmento ligando-os;

2- Com a ferramenta ângulo com amplitude fixa selecionado, clique no ponto A e em seguida no ponto B, logo após coloque o ângulo de 60º e marque a opção de sentido horário. faça o mesmo procedimento saindo do ponto B para o A, porém o ângulo agora deve ser de 30º e marcar o sentido anti horário;

3- Trace os segmentos ligando os pontos auxiliares e marque a interação entre os dois segmentos;

4- Limpe tudo que não precise estar em sua figura e trace os segmentos ligando o ponto achado, e veja que o triângulo formado é um triângulo retângulo. Logo após construa os quadrados usando os lados deste triângulo usando a ferramenta polígono regular;

5- Colorir os quadrados para uma melhor visualização;

6- Para obter um esboço do fractal, o processo será repetido diversas vezes. para otimizar o processo, na guia ferramenta, escolha o comando Criar uma Nova Ferramenta. Será aberta uma janela em que na guia Objetos Finais deve-se selecionar os quadrados menores e o triângulo, e na guia Objetos Iniciais selecionar os pontos A e B, e por fim nomear a ferramenta. Selecionando a ferramenta que criamos na guia de Ferramentas Rápidas e clicando nos pontos E e D em sentido horário obtemos uma parte do fractal, igual a parte que havíamos criado.

Árvore Pitagórica Simétrica

1- No GeoGebra retire os Eixos e a Malha quadriculada;

2- Marque dois pontos (A e B), utilizando a ferramenta Ponto e após isso, utilizando a ferramenta Ângulo com Amplitude Fixa criam-se ângulos encontrando A' e B' de tal forma que $A\hat{B}A'$ e $B\hat{A}B'$ sejam de 45º. A seguir, constroem-se os segmentos AB' e BA', sendo marcado o ponto C em sua interseção

3- O próximo passo consiste em ocultar todos os objetos menos os pontos A, B e C. Com estes pontos será construído um triângulo retângulo isósceles, utilizando a ferramenta Polígonos. Na hipotenusa e nos catetos do triângulo construir quadrados.

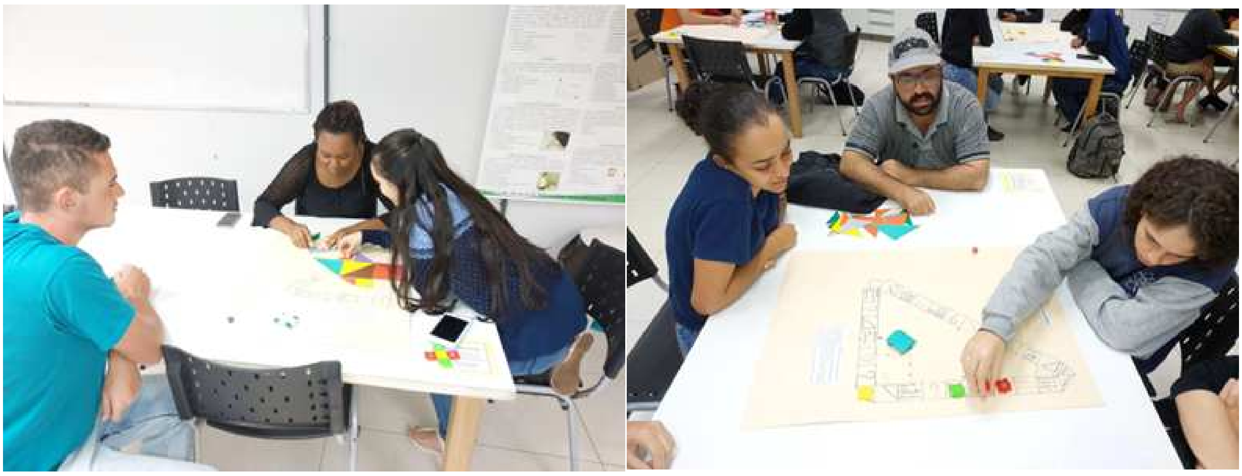
Relato de experiência "MINICURSO no SIA: uma experiência de ensino do Teorema de Pitágoras"

Entre os dias 08 e 10 de novembro de 2022, aconteceu na Universidade Federal de Viçosa (UFV) a 13ª edição do Simpósio de Integração Acadêmica (SIA 2022). Este evento teve como tema "Bicentenário da Independência: 200 anos de ciência, tecnologia e inovação no Brasil e 96 anos de contribuição da UFV".

Tive a oportunidade de apresentar um minicurso intitulado: PITÁGORAS, UMA ABORDAGEM HISTÓRICA PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA NA ESCOLA BÁSICA, em que participaram cerca de vinte estudantes de graduação por dia (foram dois dias de minicurso).

No primeiro dia, ministrei uma parte teórica deste meu trabalho acadêmico a fim de criar um conhecimento prévio para as atividades lúdicas que viriam posteriormente. Ainda neste dia, foram feitas atividades envolvendo o Tangram. Os participantes tiveram que usá-lo para demonstrar o Teorema de Pitágoras e houve uma outra atividade com um jogo de tabuleiro para colocar em prática de forma divertida a teoria apresentada inicialmente (figura 13).

Figura 13: Atividade desenvolvida no 1º dia do minicurso



Fonte: autoria própria

No segundo dia, a atividade se desenvolveu na sala de computadores. Ali os participantes puderam utilizar tecnologias para aplicar seus conhecimentos geométricos e construir a árvore pitagórica utilizando o software geogebra (figura 14).

Figura 14: Atividade desenvolvida no 2º dia do minicurso

Fonte: autoria própria

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho buscou apresentar um estudo sobre o Teorema de Pitágoras e a utilização da História da Matemática como recurso de ensino e aprendizagem na educação básica. O uso da história da matemática nos ajuda a entender como se desenvolveu cada conceito e contribui significativamente para que consigamos mostrar aos alunos as contribuições das civilizações antigas e como suas descobertas nos ajudam nos dias atuais. Nós, como professores, devemos formar pessoas em sua plenitude contribuindo para que estes estudantes possam exercer a cidadania de forma crítica e construtiva. Precisamos usar da criatividade e trazer para a sala de aula, situações cotidianas em que a matemática é utilizada, facilitando assim o processo de ensino e de aprendizagem e auxiliando na desconstrução da visão da disciplina como vilã dos alunos.

O Teorema de Pitágoras é um dos mais importantes teoremas da geometria plana. Relacionar seus conceitos à sua história nos ajuda a despertar a curiosidade dos estudantes e mostrar que a matemática não é apenas números e memorizações desinteressantes. A matemática é viva, tem história e existe um processo para chegar ao que conhecemos hoje. Além disso, há um consenso sobre a importância da matemática para o nosso dia a dia do século XXI.

REFERÊNCIAS

AGUILAR, V. L; SILVA,R.C;ROMANINI,E. **GEOMETRIA FRACTAL: ABORDANDO CONCEITOS A PARTIR DE CONSTRUÇÕES COM SOFTWARE GEOGEBRA** . Revista ENSIN@ UFMS, Três Lagoas/MS, v.1, n.4, p. 52 – 72. Dezembro de 2019.

ÁRVORE DE PITÁGORAS. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2022. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=%C3%81rvore_de_Pit%C3%A1goras&oldid=63189955>. Acesso em: 13 mar. 2022.

D`AMBROSIO,U.**Ethnomathematics and Its Place in the History and Pedagogy of Mathematics.** FLM Publishing Association, Montreal. Canadá. v.5, n.1, p. 44, feb 1985.

EVÊNCIO, K. M. M, et al. **Dos Tipos de Conhecimento às Pesquisas** Qualitativas em Educação; Id on Line Rev. Mult. Psic. V.13, N. 47, p. 440-452, outubro/2019.

FOSSA, J. A. **Pitágoras, Euler, Hutton e Amigos.** Natal/RN: (p. 119-125) primeira edição.ISBN: 978-65-00-14076-7, Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/348151291_Pitagoras_Euler_Hutton_e_Amigos. acesso em 07 de junho de 2022.

FRACTAL. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2021. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Fractal&oldid=62675107>. Acesso em: 25 dez. 2021.

GROENWALD, C. L. S. **Perspectivas em Educação Matemática.** Canoas: Ulbra, 2004.

LEIVA, J. C. P; BETTIN, A. D. H. **TEOREMA DE PITÁGORAS E O FRACTAL ÁRVORE PITAGÓRICA: UM EXPERIMENTO NO ENSINO FUNDAMENTAL.** Brazilian Journal of Education, Technology and Society (BRAJETS), Br. J. Ed., Tech. Soc., v.11, n.3, Jul.-Sep., p.444-457, 2018.

MELLO, C. M. **Abordagens e procedimentos qualitativos: implicações para pesquisas em organizações.** Revista Alcance. vol. 21, núm. 2, pp. 324-349, abril-junio, 2014.

MIGUEL, A. et al. **História da matemática em atividades didáticas.** 2. ed. São Paulo:editora livraria da física, 2009.

MIGUEL, A. **Números Irracionais**. Campinas: Delta Xis, 1993. (Coleção Tópicos de Ensino de Matemática, 15).

MOREIRA, M. D. D. **Matemátic@XXI: Conexões Surpreendentes**. Tese de Doutorado. Universidade do Porto, Portugal, 2016.

PEREIRA, P .S ; LOPES, A. R. L. V ; ANDRADE, S, V, R de. **Pentagrama:Qual a sua história? X encontro gaúcho de educação matemática.** Ijui/RS, em:http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_21.pdf. acesso em 09 jul. 2022.

SANTOS, M. C.**TEOREMA DE PITÁGORAS e suas diversas demonstrações, trabalho de monografia**. Campina Grande/PB, 2011. Disponível em:

http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/678/1/PDF%20-%20Marconi%20Coelho%20dos%20Santos.pdf. acesso em 05 de julho de 2022.

SETTE, P. F; FRANCHI, R. H. O. L. **Estudo do teorema de Pitágoras: uma proposta utilizando o software geogebra**. Dissertação de mestrado, UFOP-MG, Ouro Preto, 2014.

SILVA, I. C. da; PEREIRA, A. C. C. **Um estudo sobre a inserção da história da matemática na sala de aula a partir de fontes históricas: O problema 56 do papiro de Rhind.** *conexão ciência e tecnologia*. Fortaleza/CE, v.10, n.4, p.141-148, dez. 2016. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/314274628>. acesso em 11 mai. 2022.

SILVA, A. R. O; ALMEIDA, F. E. L; LOPES, E. G; LOPES, F. M. **A história da matemática como instrumento metodológico no ensino do teorema de tais. Revista de Educação Matemática**. Mato Grosso do Sul, v.2, n.2, p. 116-124, 2019.

STRATHERN, P. **Pitágoras e seu Teorema**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1998.

DANTZIG, T. **Number. The Language of Science**. ([1930], 2005)