

NILSON FELIPE MATOS MENDES

**TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO COMBINATÓRIA APLICADAS
A CRIAÇÃO DE ESTRATÉGIAS DE POLICIAMENTO**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, para obtenção do título de *Magister Scientiae*

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2015

NILSON FELIPE MATOS MENDES


TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO COMBINATÓRIA APLICADAS A CRIAÇÃO DE ESTRATÉGIAS DE POLÍCIAMENTO URBANO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

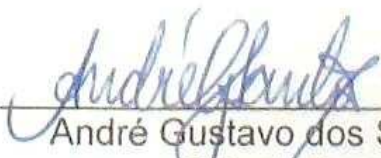
APROVADA: 24 de setembro de 2015.



Heleno do Nascimento Santos



Luciana Brugiolo/Gonçalves



André Gustavo dos Santos
Orientador

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

M538t
2015
Mendes, Nilson Felipe Matos, 1991-
Técnicas de otimização combinatória aplicadas a criação de
estratégias de policiamento urbano / Nilson Felipe Matos
Mendes. – Viçosa, MG, 2015.
viii, 85f. : il. ; 29 cm.

Orientador: André Gustavo dos Santos.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f.79-85.

1. Processos decisórios - Processamento de dados.
2. Pesquisa operacional. 3. Modelos matemáticos.
4. Programação linear. 5. Probabilidades. 6. Estatística matemática. 7. Teoria das filas. 8. Segurança pública.
9. Patrulhamento policial. I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Informática. Programa de Pós-graduação em Ciência da Computação. II. Título.

CDD 22. ed. 658.403

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me dar forças para concluir essa etapa da minha formação, aos meus pais, familiares e amigos pelo apoio, ao meu orientador André Gustavo dos Santos por me guiar durante a realização deste projeto e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo financiamento da minha bolsa durante o curso.

Sumário

	Lista de ilustrações	v
	Lista de tabelas	v
	Resumo	vii
	Abstract	viii
1	INTRODUÇÃO GERAL	1
1.1	Objetivos	3
1.2	Resultados	3
1.2.1	Modelo determinístico	3
1.2.2	Modelo estocástico	5
2	MÉTODOS PARA O PROBLEMA DE POSICIONAMENTO DE UNIDADES POLICIAIS	7
2.1	Introdução	7
2.2	Referencial Teórico	9
2.3	Materiais e métodos	10
2.3.1	Modelo matemático	10
2.3.2	Heurística construtiva	12
2.3.3	Busca Tabu	13
2.3.4	Simulated Annealing	14
2.4	Descrição do experimento	14
2.5	Resultados e Discussão	15
2.6	Conclusão	20
3	HEURÍSTICA BASEADA EM BUSCA TABU PARA O POSICIONAMENTO DE UNIDADES POLICIAIS	21
3.1	Introdução	21
3.2	Referencial Teórico	23
3.3	Materiais e métodos	26
3.3.1	Modelo matemático	26
3.3.2	Heurística construtiva gulosa	28
3.3.3	Busca Tabu	29
3.3.4	Estratégia de penalização de soluções inviáveis	30
3.4	Descrição dos experimentos	33
3.5	Resultados e Discussão	34
3.6	Conclusão	42

4	A HYPERCUBE QUEUING MODEL APPROACH TO THE POLICE UNITS ALLOCATION PROBLEM	45
4.1	Introduction	45
4.2	Review	47
4.3	Material and methods	51
4.3.1	The Hypercube Queuing model	51
4.3.2	Jarvi's Approximation	53
4.3.3	Police Units Allocation Model	54
4.3.4	Minimum Expected Response Location Problem	56
4.3.5	MERLP With Mandatory Expected Closeness Constraints	57
4.3.6	VND Heuristic	58
4.4	Experiment description	61
4.5	Results and discussion	62
4.5.1	Default action radius size	63
4.5.2	Larger action radius	65
4.5.3	Results with demand and service time variations	71
4.5.4	Conclusion	73
5	CONCLUSÃO GERAL	77
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	79

Lista de ilustrações

Figura 1	– Os triângulos azuis representam as viaturas e os pontos vermelhos unidades de policiais a pé. As figuras 2(a), 2(b) e 2(c) ilustram as soluções na cidade de Viçosa-MG e 2(d), 2(e) e 2(f) na cidade de Salinas-MG.	16
Figura 2	– Comparativo entre os algoritmos simulated annealing, construtivo e solução exata, com desvios padrão assinalados pelos traços em preto em cada barra do gráfico. As instâncias 5, 6, 16, 17 e 18 não alcançaram nenhuma resposta em duas horas.	18
Figura 3	– Gráfico comparativo do teste de Tukey sobre os valores de função objetivo obtidos por diferentes versões da busca. E1) Busca tabu original mas já com nova penalização; E2) Busca tabu com expansão da busca local; E3) Busca tabu com intensificação. Resultados correspondentes as instâncias Salinas 1 (esquerda) e Viçosa 1 (direita).	39
Figura 4	– Comparative of number of feasible solutions got by VND with Tabu Search initialization using different services times. Larger action radius - Viçosa	74

Lista de tabelas

Tabela 1	– Comparativo entre os resultados da solução do modelo matemático e do algoritmo construtivo. Os valores em destaque indicam valores não ótimos, obtidos ao fim de duas horas. Na descrição das instâncias está explícito o número de viaturas (Viat.) e unidades a pé (Ped.) em cada	17
Tabela 2	– Comparativo entre o desempenho das heurísticas simulated annealing e busca tabu. Em negrito, a maior resposta média e com o fundo destacado, a maior resposta individual. Lista de siglas: Rs – Resposta média do simulated annealing; Rt – Resposta média da busca tabu; UbR Melhor resposta; $\sigma(R)$ – Desvio padrão da resposta; T – Tempo médio; $\sigma(T)$ – Desvio padrão do tempo	19
Tabela 3	– Configuração das instâncias testadas	34
Tabela 4	– Comparativo entre a quantidade de respostas factíveis obtidas usando diferentes tipos de penalização.	34
Tabela 5	– Comparativo entre a quantidade de respostas factíveis obtidas de acordo com o tipo de busca local utilizado.	35
Tabela 6	– Comparativo do número de soluções factíveis obtidas com a expansão da busca local e versões distintas do algoritmo construtivo	36

Tabela 7 – Tabela comparativa do desempenho da busca tabu com a expansão da busca local ao se alterar o limite de iterações sem melhora no critério de parada	37
Tabela 8 – Comparativo do número de soluções factíveis obtidas com e sem a intensificação da busca local	38
Tabela 9 – Tabela comparativa entre os resultados obtidos na busca tabu com intensificação (versão E3 conforme Figura 3) e a solução exata obtida via CPLEX.	41
Tabela 10 – Comparison of results got by the VND heuristic with different initializations. Default action radius - Viçosa	64
Tabela 11 – Comparison of results got by the VND heuristic with different initializations. Default action radius - Governador Valadares	65
Tabela 12 – Comparison of average run-times of diferent initializations of VND and their components	65
Tabela 13 – Results obtained by the VND heuristic with tabu search initialization. Larger action radius - Governador Valadares	67
Tabela 14 – Comparison of results found by the VND heuristic with different initializations. Larger action radius - Viçosa	70
Tabela 15 – Comparison of results found by the VND heuristic with different levels of demand. Larger action radius - Viçosa	72

Resumo

MENDES, Nilson Felipe Matos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, Setembro de 2015. **Técnicas de Otimização Combinatória Aplicadas a Criação de Estratégias de Policiamento Urbano.** Orientador: André Gustavo dos Santos.

O provimento de segurança pública é uma questão de grande relevância na administração pública e que interfere diretamente na qualidade de vida das pessoas. Dentre vários fatores que podem tornar uma sociedade mais ou menos segura, está a boa organização e uso das forças policiais. Este trabalho apresenta uma abordagem computacional baseada em técnicas de Pesquisa Operacional para o problema de alocação de forças policiais em uma área urbana. Tal problema consiste em determinar onde unidades policiais, a pé ou em algum veículo, devem ser posicionadas de forma a prover uma cobertura eficiente de uma área, de acordo com critérios pré-determinados. São apresentados dois modelos matemáticos para descrever o problema. O primeiro é um modelo determinístico baseado no modelo de cobertura máxima gradual e no modelo de cobertura máxima com restrições de obrigatoriedade de proximidade. Ele aparece em duas versões, com poucas diferenças entre si, sendo a última mais rápido de ser resolvido por softwares de otimização inteira-mista, tal como o *CPLEX*. Além da solução exata, foram propostos algoritmos baseados em simulated annealing e busca tabu para resolução de grandes instâncias. O segundo modelo é estocástico, baseado na teoria das filas, no Modelo De Filas em Hipercubo (*Hypercube Queuing Model*), no MERLP (*Maximal Expected Response Location Problem*) e no primeiro modelo. Para este modelo, foi proposta uma heurística baseada no VND (*Variable Neighborhood Descent*), com inicialização por busca tabu.

Abstract

MENDES, Nilson Felipe Matos, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, September, 2015. **Combinatorial Optimization Techniques Applied to the Creation of Strategies for Urban Policing.** Adviser: André Gustavo dos Santos.

The public security provision is a matter of great importance in public administration that directly affects the quality of life. Among many factors that can turn a society a more or less safe, is the good organization and use of police forces. This work presents a computational approach based on Operations Research techniques to the problem of police forces allocation in an urban area. Such problem is to define where police units, on foot or in a vehicle, should be positioned to provide efficient coverage of an area, according to predetermined criteria. Two mathematical models are presented to describe the problem. The first is a deterministic model based on gradual maximum coverage model and maximum coverage model with proximity mandatory restrictions. It appears in two versions, with few differences between them, and the last is faster to be solved by a mixed-integer optimization software, such as CPLEX. Besides the exact solution we have proposed algorithms based on simulated annealing and tabu search for solving large instances. The second model is stochastic, based on queuing theory, the Hypercube Queuing Model, the MERLP (Maximal Expected Response Location Problem) and the first model. For this model, a heuristic based on VND (Variable Neighborhood Descent) was proposed, using a tabu search to provide a initial solution.

1 Introdução Geral

A segurança pública é uma das áreas de maior interesse e preocupação da administração pública. Ela impacta diretamente na qualidade de vida da população e sobre sua percepção de bem estar.

No Brasil, esta questão está no centro das atenções há pelo menos uma década, devido aos altos índices de criminalidade, que colocam o país nas listas de países mais violentos do mundo.

Dentro do intenso debate ideológico a cerca de quais medidas devem ser tomadas para tornar uma área mais segura, frequentemente são apontadas a falta de um bom treinamento e estratégia de ação das forças policiais.

Existe também uma falta de planejamento, que reflete na maneira em que são alocados os policiais e executado os patrulhamentos. Em grande parte das vezes, não existe uma estratégia sólida de policiamento ou quando existe, ela baseia-se apenas na experiência dos policiais encarregados do serviço.

Outro ponto importante é a falta de cultura de utilização de ferramentas computacionais no processo de tomada de decisão ou gerenciamento de dados pelos órgãos policiais do Brasil. Embora possamos encontrar trabalhos relatando projetos de utilização de recursos computacionais nos Estados Unidos, datando do início da década de 1970 (CERQUEIRA, 2005), no Brasil essa prática ainda é incipiente. A isso se soma a falta de compartilhamento desses dados entre instituições que deveriam trabalhar de maneira colaborativa, por exemplo, Polícia Civil, Militar e Federal, (GOMES, 2009) e a baixa quantidade de pesquisa científica na área de softwares de apoio a decisão voltados para segurança pública no país.

É neste contexto que este trabalho se insere. Visa-se, através dos modelos e técnicas de otimização combinatória apresentadas a seguir, prover uma ferramenta computacional para auxiliar o planejamento do patrulhamento policial. Mais especificamente, deseja-se determinar onde cada uma das unidades disponíveis devem ser alocadas, considerando características tais como: estatísticas de criminalidade, o meio de transporte utilizado pelos policiais, a topologia da cidade, o raio de ação de cada unidade, etc; de forma a maximizar ou minimizar alguma métrica de eficiência.

Para isso, foram propostos dois modelos matemáticos para descrever o problema e, por conseguinte, testados métodos de resolução destes usando alguns softwares de otimização inteira-mista e algumas heurísticas.

O primeiro é um modelo de cobertura determinística, baseado no modelo de cobertura gradual e no modelo de cobertura máxima com restrição de obrigatoriedade de proximidade. Neste, uma cidade é transformada em um grafo, onde cada trecho de rua compreendido entre dois cruzamentos ou alguma curva acentuada (que dificulte a visualização de toda a via) é definida como uma aresta e cada um desse

cruzamentos ou curvas como um vértice. Atribuindo-se um lucro a cobertura de cada uma das arestas, busca-se encontrar uma disposição das unidades nos vértices de forma a maximizar o lucro resultante da cobertura das arestas dentro um raio de ação.

Foram testados, para a resolução, o uso do Symphony (RALPHS; GÜZELSOY, 2005), uma biblioteca *open source* de resolução de problemas inteiros-mistos, uma heurística baseada no simulated annealing e uma heurística baseada na busca tabu, sendo que, para haver uma melhor avaliação das diferenças de desempenho entre as duas heurísticas, o critério de parada foi aproximadamente o mesmo para ambos.

Depois de se executar algumas mudanças na definição das variáveis do modelo, foram utilizados o *solver* comercial Cplex e algumas versões melhoradas da busca tabu utilizadas anteriormente. Dentre as melhoras na busca tabu, as mais relevantes foram a inclusão de um novo método de penalização de respostas ineficazes e uma etapa de perturbação para tentar cobrir arestas de difícil acesso.

O segundo modelo é, também, um modelo de cobertura, mas desta vez estocástica. Ele é uma adaptação do *Minimum Expected Response Location Problem*, desenvolvido para descrever a alocação de ambulâncias por Rajagopalan e Saydam (RAJAGOPALAN; SAYDAM, 2009). Este usa um outro modelo proposto por Larson (LARSON, 1974) para descrever sistemas de filas em que os servidores vão até os clientes atendê-los: o Modelo de Filas em Hipercubo (Hypercube Queuing Model). Nesta adaptação, foram incluídas as restrições de obrigatoriedade de proximidade presentes no primeiro modelo.

Para a resolução do modelo estocástico, usou-se duas técnicas: o algoritmo de aproximação de Jarvis (JARVIS, 1985), para uma rápida determinação dos valores dos parâmetros oriundos da fila em hipercubo e uma heurística baseada na meta-heurística VND (*Variable Neighborhood Descent*) para percorrer o espaço de soluções.

Foram utilizados dados reais da topologia de três cidades do estado de Minas Gerais, de diferentes portes: Salinas (aprox. 40 mil habitantes), Viçosa (aprox. 80 mil habitantes) e Governador Valadares (aprox. 250 mil habitantes). Estes dados foram coletados a partir de mapas das três cidades importados para o software Geogebra, com o qual foi possível traçar um grafo representando todos os cruzamentos das vias e assim obter-se os dados de comprimento dos logradouros e adjacência das esquinas.

Quanto aos dados de sobre a criminalidade nesses locais, uma vez que não foram encontradas fontes onde estes aparecem de forma detalhada, utilizou-se, para os

testes, índices gerados de maneira aleatória.

1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho foi a criação e análise de técnicas de auxílio à decisão, baseadas em técnicas de otimização combinatória, para o problema de planejamento de operações de patrulha policial estática ou móvel. Para que esse objetivo fosse alcançado, alguns outros objetivos secundários também precisaram ser cumpridos, tais como:

- Coletar dados reais que ajudem a polícia em sua tarefa de planejamento de ação.
- Propor um modelo de cobertura determinística para ajudar na tarefa de alocar unidades policiais em uma área urbana, obedecendo as restrições de efetivo disponível.
- Pesquisar, analisar, comparar e propor métodos de atuação das forças policiais que possam ser descritas e testadas através de modelos matemáticos.
- Propor métodos heurísticos eficientes para a resolução do modelo de cobertura determinístico que sejam capazes de lidar com instâncias que descrevem cidades ao menos de médio porte.
- Propor um modelo de cobertura estocástica que seja capaz de lidar com as características de imprevisibilidade e urgência típicas dos serviços de atendimento a ocorrências policiais.
- Propor métodos de resolução para modelos estocásticos que sejam, ao mesmo tempo, eficientes em encontrar boas respostas e não necessitem de grandes recursos computacionais ou tempo para serem executados.

1.2 Resultados

Nos Capítulos 2 a 4 são apresentados os resultados obtidos neste trabalho. Mais especificamente: o Capítulo 2 refere-se aos resultados obtidos pelo simulated annealing e busca tabu com a primeira versão do modelo determinístico; o Capítulo 3 refere-se aos resultados obtidos pela versão melhorada da busca tabu com a segunda versão do modelo determinístico; e o Capítulo 4 refere-se aos resultados obtido com o algoritmo VND com o modelo estocástico.

1.2.1 Modelo determinístico

Nos Capítulos 2 e 3 é apresentado o modelo de alocação de unidades policiais determinístico. Neste modelo, dado um corpo policial, com uma quantidade pré-definida

de homens e veículos e uma cidade, descrita através de um grafo, com as ruas sendo arestas e os cruzamentos vértices, busca-se dizer onde cada grupo de policiais deverá estar para conseguir uma cobertura que propicie uma maior recompensa. Para definir a recompensa da cobertura, é associado a cada rua (aresta) um lucro por esta ser coberta. Já para definir se a rua é coberta, é determinado um limite para o raio de ação, dependente da forma de locomoção da unidade. Uma vez que uma rua possa ser alcançada por uma unidade qualquer, em um tempo menor que este limite, esta será considerada coberta.

As restrições do modelo determinam que todas as ruas devem ser consideradas cobertas se dobrarmos o limite para o raio de ação (restrição de obrigatoriedade de demanda) e que sejam respeitados o número de unidades disponíveis e seus alcances.

Na primeira versão do modelo, uma variável binária definiu se deveria ser alocada uma unidade de um determinado tipo em um vértice, para cada vértice e cada tipo de unidade. Para resolver esta versão foi utilizada a biblioteca Symphony (RALPHS; GÜZELSOY, 2005) e duas heurísticas, uma baseada em busca tabu e outra no simulated annealing, sendo os testes executados com duas cidades fictícias e duas cidades reais, Viçosa e Salinas, ambas localizadas no estado de Minas Gerais.

Com o uso de um tempo de execução limite de duas horas, o Symphony não apresentou resposta para as instâncias de uma das cidades fictícias e para algumas das instâncias das cidades reais chegou a gastar mais de uma hora para chegar ao resultado ótimo.

As duas heurísticas apresentaram uma dificuldade em encontrar soluções factíveis em todas as instâncias, embora tenham conseguido muitas vezes bons valores de função objetivo. A busca tabu, nos testes, mostrou ter um desempenho superior ao do simulated annealing.

Na segunda versão do modelo, a variável binária que indicava se havia unidades de um dado tipo em cada vértice se tornou uma variável inteira, indicando agora a quantidade de unidades de cada tipo alocada no vértice. Essa mudança trouxe uma grande melhora no tempo da resolução exata e, junto com a mudança para o solver CPLEX, fez com que o tempo gasto para se chegar a resposta ótima caísse para menos de uma hora, menos nas instâncias da cidade de Governador Valadares-MG.

A heurística baseada em busca tabu utilizada no modelo anterior foi aperfeiçoada, através de uma busca local mais ampla e diversificada, um novo método de penalização, que fez uma solução infactível apresentar um valor de função objetivo pior do que uma solução factível, e uma etapa de perturbação, que teve como objetivo fazer as unidades chegarem a pontos de difícil acesso nas cidades de uma maneira mais rápida, em termos de número de iterações. Todas essas mudanças fizeram o problema de obtenção de respostas infactíveis praticamente desaparecer, mesmo em instâncias com menos unidades disponíveis. O tempo gasto para se chegar às respostas foi pelo menos cinco vezes menor do que o tempo gasto pelo CPLEX para

chegar a resposta ótima, com um *gap* de no máximo 22% considerando apenas as soluções factíveis.

1.2.2 Modelo estocástico

No Capítulo 4 é apresentado um modelo de cobertura estocástico, inspirado no *Minimum Expected Response Location Problem* - MERLP, definido por Rajagopalan e Saydam (RAJAGOPALAN; SAYDAM, 2009) para descrever um problema de ambulâncias. Foram adicionadas algumas restrições para simular a condição de obrigatoriedade de proximidade presente no modelo determinístico dos Capítulos 2 e 3 e que, devido a sua forma, podem ser facilmente adaptados ao contexto do patrulhamento e atendimento policial.

O objetivo maior nesse capítulo foi testar a viabilidade da abordagem utilizando o modelo de filas em hipercubo do que propriamente fazer uma avaliação do desempenho da heurística apresentada. Ainda assim, foi apresentado um algoritmo baseado na meta-heurística VND com dois métodos de inicialização da solução, um aleatório e outro baseado na maximização da cobertura (técnica semelhante a utilizada em (RAJAGOPALAN; SAYDAM, 2009)), através do algoritmo de busca tabu utilizado no Capítulo 3. Nos testes realizados foram utilizados os dados das cidades de Governador Valadares e Viçosa. Os valores dos lucros da cobertura de cada aresta foram usados para definir a demanda esperada.

Nos testes, viu-se que o algoritmo proposto não foi capaz de encontrar soluções viáveis usando os mesmos raios de ação utilizados nos capítulos anteriores. Entretanto, ao se aumentar a velocidade média das unidades (aumentando, consequentemente, o raio de ação destas), os resultados foram bastante satisfatórios.

Observou-se também que a inicialização do VND com a busca tabu obteve resultados superiores à inicialização aleatória. Além disso, nos testes de sensibilidade notou-se que o aumento da demanda não impacta significativamente na qualidade das soluções, como o tempo de atendimento a cada ocorrência.

2 Métodos para o problema de posicionamento de unidades policiais¹

Resumo

A segurança é uma das áreas que mais exige atenção na administração pública, tendo consequências diretas no bem estar da sociedade. Criar estratégias de contenção de delitos, assim como rápido atendimento a situações emergenciais quando elas surgem é um desafio. Neste trabalho, busca-se utilizar de técnicas de Pesquisa Operacional para resolver o problema de posicionamento de unidades policiais, de forma a maximizar a cobertura policial em uma cidade. É proposto um modelo matemático para descrever o problema e dois métodos heurísticos, baseados em Busca Tabu e Simulated Annealing para resolvê-lo. Os resultados mostram que a Busca Tabu teve um desempenho superior ao do Simulated Annealing e que, para as instâncias testadas, na maioria dos casos o modelo pode ser resolvido em tempos inferiores a trinta minutos.

Abstract

Safety is one of most exigent areas in public administration, having direct consequences on people welfare. Creating contention strategies for crimes or a fast answer to emergencies situations when they arise is a challenge. In this paper, we use Operations Research techniques for solving the problem of police units positioning, in order to maximize the police coverage in a city. We propose a model for describing the problem and heuristic methods based on tabu search and simulated annealing for solving it. The results show that tabu search had presented a better performance than simulated annealing and also, for the tested instances, on most of cases, the model could be solved in less than thirty minutes.

2.1 Introdução

A questão da segurança pública é um dos pontos chaves de qualquer política de bem estar social. É pouco razoável pensar-se em satisfação de uma qualidade mínima de vida para a população sem que essa tenha segurança. Em áreas urbanas, os níveis de criminalidade costumam causar maiores preocupações do que em ambientes rurais,

¹ Neste capítulo está incluído uma versão corrigida do artigo *Métodos para o problema de posicionamento de unidades policiais*, apresentado no SBPO 2014 (XVLI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional) (MENDES; SANTOS; GONÇALVES, 2014)

devido à alta concentração populacional, que faz o número de potenciais lesados ser maior.

O provimento de segurança para a população passa, dentre outras coisas, por criar um policiamento preventivo e emergencial eficiente. Este procura evitar que crimes sejam executados, ao mesmo tempo que, sendo eles executados, o atendimento as vítimas e o início da busca dos criminosos sejam feitos da maneira mais rápida possível.

Tradicionalmente, as táticas de policiamento são criadas com base na experiência dos agentes policiais e por um conhecimento sobre quais as áreas com maior índice de criminalidade. Entretanto, esta prática pode se mostrar ineficiente, por diversos fatores, como: áreas de grande tamanho, distribuições pouco óbvias de ocorrências policiais ou mesmo inabilidade dos policiais.

No Brasil, em especial, o problema da segurança pública é motivo de preocupação há muito tempo e vem se tornando cada vez pior. Waiselfisz (2013) mostra que a taxa de homicídios por 100 mil habitantes foi de 11,7 em 1980 para um pico de 28,9 em 2003 e chegou em 2011 em 27,1. Portanto, no período compreendido entre 1980 a 2003, observou-se um crescimento anual médio de 4% no número de homicídios por 100 mil habitantes.

Com estes números, o Brasil se destaca como um dos países mais violentos do mundo (CERQUEIRA, 2005). A situação se encontra em um nível de alarde tal que, embora o país seja isento de disputas territoriais, movimentos emancipatórios, guerras civis ou outros conflitos relevantes, entre 2008 e 2011, ocorreram nele mais de 200 mil homicídios. Este valor é superior, de maneira absoluta e relativa aos 12 maiores conflitos armados do mundo entre 2004 e 2007 e quase igual ao total das mortes diretas causadas pelos 62 maiores conflitos armados do mesmo período (WAISELFISZ, 2013).

Tais números, mesmo que desconhecidos em termos precisos, geram um medo frequente em todos, em especial nos moradores das áreas mais violentas. Além disso, o fracasso das políticas de combate à violência vem criando um sentimento de instabilidade e insegurança na população (ABREU; LOURENÇO, 2010), que se demonstra na falta de crença na capacidade do Estado garantir segurança tanto por parte das vítimas quanto dos delinquentes. A experiência coletiva de insegurança pessoal vem fazendo com que a população se atente mais aos problemas de manutenção da ordem pública nas cidades brasileiras (SILVA, 2004).

Para atender o anseio da população por mais segurança, uma das estratégias adotadas é servir a polícia de ferramentas computacionais para melhorar sua prestação de serviço e modelos integrados de gestão da segurança pública. Essa tendência, entretanto, vem sendo observada desde os anos 70 (CERQUEIRA, 2005).

Do ponto de vista computacional, (CANÇADO, 2005) cita alguns projetos nacionais e internacionais de uso de bancos de dados e sistemas de informações geográficas

para apoiar o registro de eventos e sua análise. Entre eles, tem-se o sistema ReCap (BROWN, 1998), que une técnicas de data mining e fusão de dados para análises criminológicas; o ExpertCop (FURTADO; VASCONCELOS, 2004), que serve de treinamento para policiamento preventivo; o COPLINK (CHEN et al., 2003), que permite, por exemplo, a ligação entre informações para auxílio em investigações; e o projeto (LESTE, 2014), desenvolvido na UFMG pelo Laboratório de Estatística .

Neste trabalho, a temática de criação de dispositivos computacionais para melhoria dos serviços policiais será atacada do ponto de vista da Pesquisa Operacional. Mais especificamente, pelo uso de metaheurísticas, tentar-se-á resolver o problema de posicionamento de unidades policiais em um meio urbano.

O problema supracitado parte da premissa de que, sendo necessários três fatores para a ocorrência de um crime (um ofensor motivado, um alvo disponível e ausência de um agente repressor (COHEN; FELSON, 1979)) e de que uma vez que haja policiais próximos de uma certa localidade, estes fazem sua presença ser sentida por um eventual infrator; para se diminuir a quantidade de crimes que acontecem em um certo local, basta fazer com que haja uma cobertura desta por policiais, a uma distância razoável de qualquer ponto.

Sendo assim, dada uma quantidade pré-definida de policiais, cada um com um raio de ação limitado e dependente basicamente da forma que usam para se locomover (viaturas, bicicletas, a pé, etc. . .), devemos dizer qual a melhor maneira de posicionar estes policiais, de tal forma que unidas as suas áreas de ação, tenhamos uma cobertura máxima. Trabalhamos, ainda, com a restrição de que toda área deve ser coberta por pelo menos uma unidade policial que esteja a uma distância deste ponto de, no máximo, o dobro de seu raio de ação.

Nas próximas seções, será apresentado um resumo sobre trabalhos na área de Pesquisa Operacional que lidam com o problema de cobertura policial e as abordagens que eles utilizaram. Também é mostrado um pequeno comparativo entre o problema desse artigo e outros relacionados a resposta a emergências. A seguir, serão descritos um modelo matemático utilizado para definir formalmente o problema e também, heurísticas destinadas a resolvê-lo. Por fim, serão exibidos os resultados obtidos por estas heurísticas e a comparação destes com os resultados obtidos via modelo matemático.

2.2 Referencial Teórico

Ferramentas computacionais para auxiliar a polícia na tarefa de garantir a segurança pública vêm sendo usadas desde o final dos anos 60 e início dos anos 70 (CERQUEIRA, 2005). Em especial, técnicas de Pesquisa Operacional são utilizadas também desde esta época (LIN et al., 2013a). E embora primordialmente essas tecnologias fossem vistas com maus olhos por alguns (COLTON, 1979), que tinham

dúvidas sobre a serventia de recursos computacionais para fins policiais, os estudos dessa questão cresceram e ainda são fortes mesmo depois de quase 50 anos.

Problemas relacionados à manutenção da segurança pública e de maneira mais restrita, ao patrulhamento policial, estão inseridos em um conjunto maior de problemas, que é o resposta a emergências. Nele, incluem-se, além de problemas que envolvem serviços policiais, serviços de ambulâncias e de bombeiros.

De fato, pode-se notar que quando uma pessoa sofre um infarto ou quando um banco é assaltado, o tempo entre a chamada de socorro e o atendimento deste socorro é fator primordial para a satisfação do requerente. Como é dito em (SALADIN, 1983), ambos têm a missão de prover um serviço em um determinado local, em um determinado prazo.

Entretanto, o serviço policial tem, algumas diferenças em relação a outros serviços de emergência. Primeiramente, a polícia têm além da função responsiva, também a preventiva, ou seja, além de encontrar criminosos após eles efetuarem um delito, ela também deve evitar que esse delito ocorra. Segundo, os recursos policiais tem uma maior mobilidade do que, por exemplo, os do corpo de bombeiros. E, por fim, a presença de um recurso policial em um determinado ponto tem o poder de inibir a taxa de chamadas emergenciais naquele ponto, algo que dificilmente acontecerá, por exemplo, em relação a um corpo de bombeiros.

Desta forma podemos ver que, embora se possa tomar emprestado algumas soluções de estudos relacionados a outros serviços de emergência, o patrulhamento policial tem características únicas que o tornam interessante.

Atualmente, os principais trabalhos relacionados a essa área concentram-se, principalmente, em construções de modelos probabilísticos(LI et al., 2011) (LIN et al., 2013a)(BUDGE; INGOLFSSON; ERKUT, 2009a), de simulação via multiagentes (VASCONCELOS, 2008) (ZHANG; BROWN, 2013) de rotas de veículos e alocação espacial destes. O presente trabalho, entretanto, foca a construção e resolução de um modelo de cobertura determinística.

2.3 Materiais e métodos

Nesta seção será apresentado o modelo matemático utilizado para descrever o problema formalmente, assim como as heurísticas propostas para resolvê-lo.

2.3.1 Modelo matemático

O modelo matemático utilizado para descrever este problema é uma variante do modelo de cobertura máxima gradual (FARAHANI et al., 2012). Os dois se diferem pelo fato de que neste, a graduação da cobertura vem posto como um modificador do valor de coeficientes na função objetivo. Naquele, ele é usado para modelar uma restrição.

Neste modelo, assume-se que cada rua (trecho de via urbana compreendido entre dois cruzamentos) possui um comprimento, um sentido de movimentação, restrições de passagens de certos tipos de veículos e uma importância (ou lucro) associado a necessidade de ser coberta por uma unidade policial. O tempo para percorrer as ruas leva em consideração a velocidade média que pode ser obtida em uma via, o sentido que a unidade está trafegando (mão, contramão), o tipo de unidade (unidades sensíveis a contramão, como carros e motos, ou insensíveis, como unidades a pé) e o comprimento da rua.

A cidade foi modelada como sendo um grafo ponderado e direcionado, tal que dois nós (cruzamentos) v e w que são adjacentes sempre são unidos por duas arestas (ruas), uma indo de v para w e outro fazendo o sentido contrário, sendo que o sentido da contramão tem uma distância aumentada em 50%, para simular a dificuldade das unidades sensíveis a contramãos em andar nesse sentido. Assim, uma instância do problema é dada por um grafo $G = (V, E)$, sendo V um conjunto de vértices representando os cruzamentos de ruas, e E um conjunto de arestas representando trechos de rua entre cruzamentos. Para cada aresta $r \in E$ são dados o lucro l_r de sua cobertura por unidades policiais e seu comprimento d_r (distância entre seus cruzamentos limitantes).

A entrada contém, ainda, um conjunto U de unidades policiais disponíveis. Cada unidade $i \in U$ é de algum tipo dentre os definidos em um conjunto Q . Para cada tipo de unidade $m \in Q$, trecho de rua $r \in E$ e cruzamento $j \in V$, são definidos os valores binários p_{rjm} e p'_{rjm} , que valem 1 se uma unidade do tipo m localizada em j consegue cobrir o trecho r em tempo T_{MAX} e $2T_{MAX}$ respectivamente, e 0 caso contrário. Tais valores são pré-calculados usando-se as distâncias d_r .

Para construção do modelo são usadas as seguintes variáveis de decisão:

- x_{ij} : variável binária igual a 1 se uma unidade i é alocada no local j , 0 caso contrário
- a_r : variável binária igual a 1 se o trecho de rua r é coberto por alguma unidade policial dentro do tempo T_{MAX} , 0 caso contrário
- a'_r : similar a anterior, mas com tempo $2T_{MAX}$

O dito modelo é mostrado abaixo:

$$\max Z = \sum_{r \in E} l_r a_r \quad (2.1)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ij} \leq 1, \quad \forall i \in U \quad (2.2)$$

$$a_r \leq \sum_{i \in U} \sum_{j \in V} \sum_{m \in Q} p_{rjm} x_{ij} q_{im} \quad \forall r \in E \quad (2.3)$$

$$a'_r \leq \sum_{i \in U} \sum_{j \in V} \sum_{m \in Q} p'_{rjm} x_{ij} q_{im} \quad \forall r \in E \quad (2.4)$$

$$\sum_{r \in E} a'_r = |E| \quad (2.5)$$

$$(2.6)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in U, j \in V \quad (2.7)$$

$$a_r \in \{0, 1\}, \quad \forall r \in E \quad (2.8)$$

$$a'_r \in \{0, 1\}, \quad \forall r \in E \quad (2.9)$$

Na função objetivo (2.1), é contabilizado o lucro de todas arestas que são cobertas (alcançadas em tempo T_{MAX}) por ao menos uma unidade policial.

Nas restrições (2.2) se diz que nenhuma unidade pode ser alocada em dois locais distintos, o que seria uma impossibilidade física. Pelas restrições (2.3), o valor da variável que define se uma aresta é coberta, é definida através da verificação se existe alguma unidade alocada em um ponto suficientemente próximo desta aresta. Em (2.4) é feita basicamente a mesma coisa, mas a distância considerada é dobrada. Por fim, na restrição (2.5), temos a questão da gradação da cobertura sendo tratada. Ai é dito que toda aresta deve ser alcançada por ao menos uma unidade policial num tempo máximo $2T_{MAX}$. As demais restrições indicam que todas as variáveis são binárias.

2.3.2 Heurística construtiva

A heurística construtiva proposta para esse modelo basicamente busca um dos nós que mais vai aumentar o valor da função objetivo naquela iteração, isto é, o nó cuja soma dos lucros associados as arestas que ele cobrir e que ainda não foram cobertas for máximo.

Existem $|Q|$ listas distintas de nós associados aos lucros que ele pode gerar. Estas listas são ordenadas do nó mais lucrativo para o nó menos lucrativo.

Em cada iteração do algoritmo, é selecionado aleatoriamente um tipo de unidade que ainda possui alguma unidade disponível. Em havendo apenas um único tipo com unidades disponível, ele será escolhido sem sorteio.

Uma vez que tenha sido selecionado o tipo de unidade, é feito um sorteio entre os 5% de nós com maior perspectiva de lucro. Esse sorteio é feito para garantir uma maior diversidade da resposta, que será utilizada para a inicialização de outras heurísticas.

A heurística termina de executar em uma das três situações: quando se esgotarem as unidades, quando todas as arestas já tiverem sido cobertas ou quando em, uma iteração, nenhuma nova unidade for inserida (em uma improvável situação de todos os vértices já tiverem sido ocupados por uma unidade).

2.3.3 Busca Tabu

A busca tabu é uma meta-heurística baseada em busca local em que algumas alterações na resposta corrente são proibidas de serem realizadas por um certo número de iterações. Estas alterações proibidas ficam armazenadas em uma estrutura chamada lista tabu, de onde vem o nome do algoritmo.

Nesta abordagem, inicializa-se o algoritmo com a heurística construtiva descrita na seção anterior. Após isso, começa-se a busca local.

A busca local que foi utilizada sorteia uma das unidades para trocar de lugar, indo para um dos nós adjacentes ao nó que ela está no momento. São testados todos os nós adjacentes. O que obtiver a melhor resposta é escolhido para ser o destino da unidade (vide Algoritmo 1).

Algoritmo 1 Pseudocódigo da busca tabu. A busca local realizada no loop *for all* é utilizada também no algoritmo simulated annealing

```

1:  $s^* \leftarrow$  heuristicaConstrutiva()
2:  $s \leftarrow s^*$ 
3:  $itSemMelhoras \leftarrow 0$ 
4:  $objMelhor \leftarrow f(s^*)$ 
5: while  $itSemMelhoras < 2 * |U|$  do
6:    $rem \leftarrow$  sorteiaUnidade( $s$ )
7:    $s' \leftarrow s - rem$ 
8:    $itSemMelhoras ++$ 
9:   for all  $viz$  in vizinhos( $rem$ ) do
10:      $obj \leftarrow$  testaFuncObjetivoVizinho( $s', viz$ )
11:     if ( $obj > objMelhor$  AND  $satisfazTabu(s', s^*, viz)$ ) OR  $melhorGeral(s',$ 
12:        $viz)$  then
13:        $melhorVizinho \leftarrow viz$ 
14:        $melhorObj \leftarrow obj$ 
15:     if  $satisfazTabu(s', s^*, melhorVizinho)$  then
16:        $s' \leftarrow s' + melhorVizinho$ 
17:        $s \leftarrow s'$ 
18:     if  $melhorGeral(s', melhorVizinho)$  then
19:        $s^* \leftarrow s' + melhorVizinho$ 
20:        $objMelhor \leftarrow obj$ 
21:        $itSemMelhoras \leftarrow 0$ 

```

Como foi dito anteriormente, a busca tabu se inicia com o algoritmo construtivo e a resposta por ele obtida é tida como a melhor até então. Durante a execução da busca tabu, em cada iteração se vê se a melhor resposta foi superada. A busca encerra depois de $2*|U|$ iterações sem melhora, onde $|U|$ é o número total de unidades,

somando todos os tipos. A lista tabu foi ajustada também de acordo ao número de unidades, tendo tamanho $|U|$.

Um detalhe importante é que, para a avaliação das respostas na busca tabu, a função objetivo é alterada de modo a penalizar soluções inválidas. Todas as arestas que não são cobertas, conforme a terceira restrição do modelo matemático exposto acima, têm seu lucro descontado da função objetivo. Sendo assim, em casos extremos, a função objetivo pode ter valor zero ou até mesmo negativo.

2.3.4 Simulated Annealing

O Simulated Annealing é uma meta-heurística que simula o processo de resfriamento de uma liga metálica durante sua fabricação. Neste processo, a temperatura tem que diminuir lentamente para uma melhor cristalização da estrutura.

Sendo assim, o simulated annealing é um algoritmo que efetua uma busca local e aceita a atualização das respostas correntes, mesmo que com soluções piores, de acordo com uma função de probabilidade, regulada por uma temperatura, que cai lentamente, diminuindo o valor calculado pela função de probabilidade.

A busca local que utilizamos na nossa abordagem é igual a descrita na busca tabu. Uma vez que uma unidade é sorteada, ela irá mudar do seu nó atual para o nó adjacente com melhor função objetivo.

Aqui também é adotada a penalização de respostas inviáveis descritas na seção anterior.

Em relação aos parâmetros do simulated annealing, foi adotado um critério de parada baseado na temperatura mínima e no número de iterações sem melhoras. Uma vez que a temperatura atingisse um mínimo de 0.01 ou o número de iterações sem melhora atingisse um máximo de $2*|U|$, o algoritmo se encerra. A temperatura inicial foi definida como 1 e o critério de atualização desta foi de multiplicar o valor corrente por $\log_2 1,99$. Tais valores foram obtidos após testes de calibração.

2.4 Descrição do experimento

Para a realização deste experimento foram utilizados os traçados de quatro cidades distintas, duas fictícias e duas reais. Entre as fictícias temos uma que é um grafo de 674 arestas e 255 vértices (que será chamada de Fic1) e outra um grafo de 481 vértices e 1428 arestas (que será chamada de Fic2). Já as cidades reais são Salinas-MG (que gerou um grafo de 980 vértices e 1475 arestas) e Viçosa-MG (que gerou um grafo de 1436 vértices e 1800 arestas) e que têm cerca de 40 mil e 70 mil habitantes, respectivamente (IBGE , 2010).

As cidades foram selecionadas por serem localidades de população e efetivo policial razoavelmente diferentes, além de serem conhecidas pelos autores.

Foram testados, para cada uma dessas cidades, diferentes números de unidades policiais, assim como também de tipos de unidades policiais. Nas cidades artificiais, foram criadas algumas variações aleatórias quanto ao número de contramãos e suas localizações, como também o número de ruas restritas para algum tipo de unidade (que nesse caso causaram a remoção da rua no momento de se calcular a cobertura da unidade). As configurações utilizadas possuíam policiais a pé (com raio de alcance de 500 metros) ou de viatura (com raio de alcance de 1000 metros) e foi considerado, para fim de dimensionamento do efetivo, que cada unidade possuía sempre um par de policiais.

No total foram geradas 18 instâncias. Para cada uma delas, o modelo matemático foi resolvido utilizando o software de otimização inteira-mista Symphony (RALPHS; GÜZELSOY, 2005), com tempo máximo de duas horas. No caso das heurísticas, cada instância foi resolvida 40 vezes, sendo recolhidos, a partir disso, os valores médios, variâncias, máximos e mínimos dos tempos de execução e valor de função objetivo obtidos.

Todos os testes foram realizados em um computador com processador Intel Core i5-3330 de 3.0 GHz, 8 GB de memória RAM e sistema operacional Windows 7.

2.5 Resultados e Discussão

O primeiro resultado analisado nos testes das instâncias descritas anteriormente foi sobre a factibilidade destas. Foi observado que, embora as cidades artificiais permitissem um número de unidades pequeno (pelo menos duas unidades a pé e duas em viaturas), as reais eram mais exigentes em relação ao tamanho do efetivo.

Um primeiro ponto em relação aos resultados exatos, é de que o tamanho da cidade, por si só, tem pouca influência na “intratabilidade” do problema. O Symphony não conseguiu, por exemplo, encontrar a resposta para nenhuma das instâncias de Fic2 no tempo de duas horas, mas encontrou para todas as instâncias factíveis Viçosa em menos de uma hora e meia, mesmo esta última cidade tendo gerado um grafo com quase o triplo de vértices.

Em relação à qualidade das respostas encontradas pelo modelo, pode-se observar que, no caso de Fic1 (a menor de todas as cidades), a cobertura ótima correspondia também a cobertura total de arestas do grafo. Entretanto, essa situação só se verificou para instâncias desta cidade.

Na Figura 1, pode-se ver como as unidades foram distribuídas nas melhores soluções do modelo (nem sempre ótimas) das cidades de Viçosa e Salinas.

Nota-se, através da Figura 1, que mesmo sendo alterado o número de unidades disponíveis, o aspecto visual da solução não muda significativamente. Algumas regiões sempre têm pontos escolhidos para abrigar uma unidade policial, como é o caso das viaturas mais a sudoeste, sudeste e nordeste na cidade de Viçosa, ou as

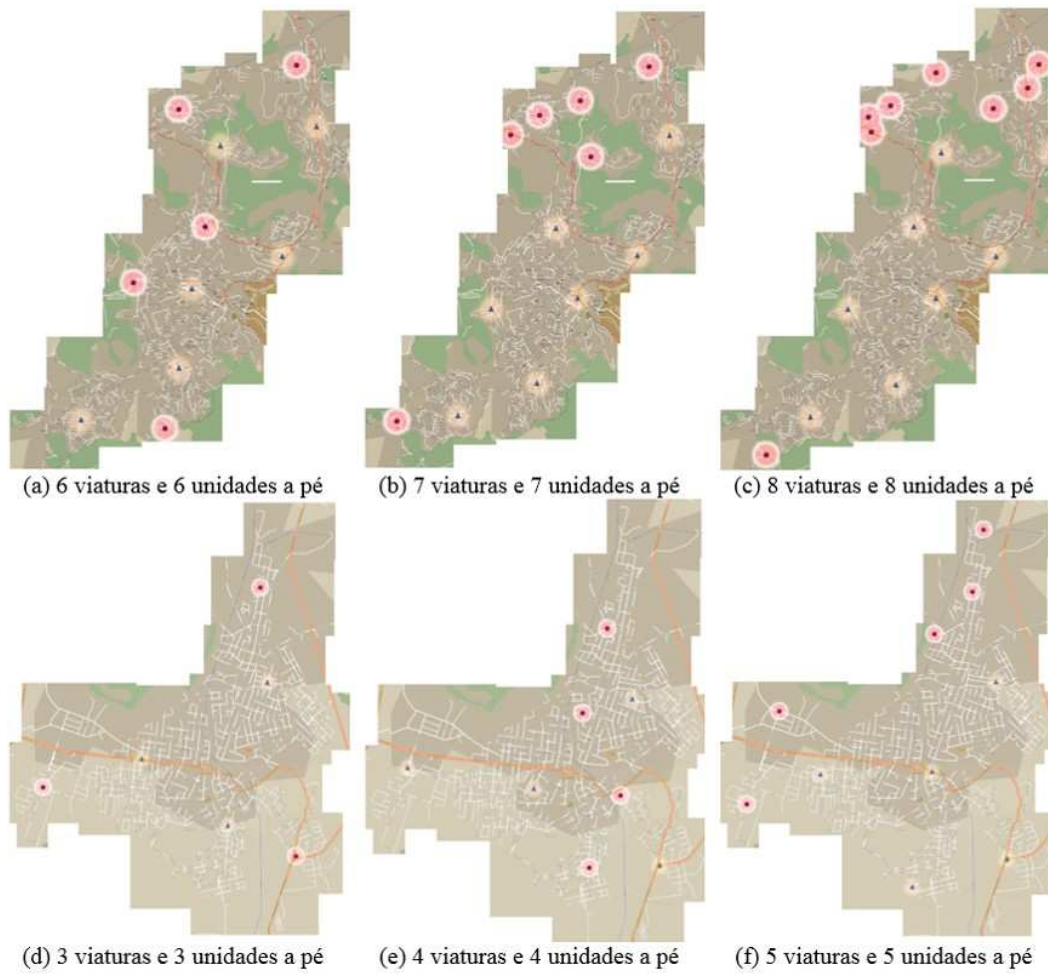


Figura 1 – Os triângulos azui representam as viaturas e os pontos vermelhos unidades de policiais a pé. As figuras 2(a), 2(b) e 2(c) ilustram as soluções na cidade de Viçosa-MG e 2(d), 2(e) e 2(f) na cidade de Salinas-MG.

unidades a pé mais a leste, norte e sudeste no caso da cidade de Salinas.

Em relação a função objetivo, como exposto na Tabela 1, incrementos de uma unidade de cada tipo na cidade de Viçosa geraram melhoras por volta de 5% apenas. Isso pode ser visto, também, através da comparação entre as figuras 2(b) e 2(c), que demonstram uma acumulação de unidades nas regiões norte e nordeste da cidade, o que provavelmente não seria necessário numa situação real.

A situação descrita no parágrafo anterior acontece, também, nas instâncias da cidade de Salinas, mas em uma menor escala, pois nesta, os incrementos obtidos são maiores e a acumulação aparente de unidades em determinadas regiões é menos sensível. Iniciando a análise dos resultados obtidos pelas heurísticas, a primeira coisa a se falar é sobre a eficiência das respostas fornecidas pela heurística construtiva. Como esta serve de inicialização para os outros algoritmos, considera-se importante que ela seja rápida e traga já respostas razoáveis.

Observou-se que todas as médias de tempo de execução da heurística construtiva chegaram a, no máximo, 3 segundos (vide Tabela 1), o que atende os requisitos de um algoritmo que será usado para inicializar outros. Embora o tempo seja baixo,

para as instâncias da cidade Fic1, os valores médios das respostas chegou a 60% do valor da solução ótima.

Partindo para o *simulated annealing*, observou-se que seu tempo de execução médio é entre 20% a 100% maior que o tempo gasto pelo algoritmo construtivo para a mesma instância, o que indica que, primeiramente, o algoritmo construtivo já entrega uma resposta próxima ao melhor valor que o *simulated annealing* pode alcançar e que o primeiro limita razoavelmente o segundo em relação do tempo de execução.

Em um comparativo com a solução ótima, o *simulated annealing* entrega respostas médias entre 19% a 93% do valor da solução ótima, chegando a alcançá-la no melhor caso de várias instâncias.

Tabela 1 – Comparativo entre os resultados da solução do modelo matemático e do algoritmo construtivo. Os valores em destaque indicam valores não ótimos, obtidos ao fim de duas horas. Na descrição das instâncias está explícito o número de viaturas (Viat.) e unidades a pé (Ped.) em cada

Instância	ID	Exato		Construtivo			
		Solução	Tempo (s)	Solução média	Desvio padrão	Tempo médio (s)	Desvio padrão
Salinas_1(3 Viat. 3 Ped.)	1	10631	424	-4069.97	2350.79	0.38	0.49
Salinas_2(4 Viat. 4 Ped.)	2	11302	4880	-4076.00	1655.52	0.60	0.50
Salinas_3(5 Viat. 5 Ped.)	3	11596	541	-3392.72	1583.20	0.90	0.30
Viçosa_1(6 Viat. 6 Ped.)	4	12546	1666	-3408.90	526.22	1.80	0.41
Viçosa_2(7 Viat. 7 Ped.)	5	13381	1114	-3292.32	534.19	2.30	0.46
Viçosa_3(8 Viat. 8 Ped.)	6	13877	4071	-3079.60	652.14	3.05	0.22
Fic1_c1 (2 Viat. 2 Ped.)	7	1820	18	1050.00	43.08	0.03	0.16
Fic1_c2 (2 Viat. 2 Ped.)	8	1820	10	1050.55	80.30	0.03	0.16
Fic1_c3 (2 Viat. 2 Ped.)	9	1820	18	1119.43	81.04	0.03	0.16
Fic1_c1 (4 Viat. 4 Ped.)	10	1820	21	1130.47	70.26	0.18	0.38
Fic1_c2 (4 Viat. 4 Ped.)	11	1820	21	1159.65	27.65	0.18	0.38
Fic1_c3 (4 Viat. 4 Ped.)	12	1820	21	1164.03	34.42	0.13	0.33
Fic2_c1 (3 Viat. 3 Ped.)	13	-	7243	54.55	383.13	0.20	0.41
Fic2_c2 (3 Viat. 3 Ped.)	14	-	7281	91.55	456.47	0.25	0.44
Fic2_c3 (3 Viat. 3 Ped.)	15	-	7255	-78.70	271.91	0.13	0.33
Fic2_c1 (5 Viat. 5 Ped.)	16	-	7279	265.08	303.21	0.43	0.50
Fic2_c2 (5 Viat. 5 Ped.)	17	-	7317	115.33	272.91	0.43	0.50
Fic2_c3 (5 Viat. 5 Ped.)	18	-	7266	289.03	331.37	0.43	0.50

Na Figura 2, pode-se ver um pequeno comparativo entre as soluções obtidas via algoritmo construtivo, *simulated annealing* e modelo matemático. As instâncias estão enumeradas de acordo a Tabela 1. Assim, fica clara a melhoria na qualidade das resposta propiciada pelo *simulated annealing* e a proximidade destas respostas da solução ótima, em especial nas cidades fictícias.

Por fim, como podemos ver na Tabela 2, em dezessete das dezoito instâncias, a resposta obtida pela busca tabu foi melhor do que a obtida pelo simulated annealing.

Em comparação com a resolução exata, observou-se, também, que as respostas obtidas pela busca tabu chegam em média a no mínimo 65% do valor ótimo da função objetivo na metade dos casos onde a solução ótima foi encontrada, contra apenas 48% do simulated annealing.

A busca tabu alcança esses valores em média na metade do tempo da resolução exata nas instâncias de Fic 2 e em um terço do tempo da resolução exata nas instâncias de Viçosa. Em uma das instâncias da cidade de Salinas gastou um tempo 60 vezes inferior para encontrar uma resposta com 28% do valor ótimo.

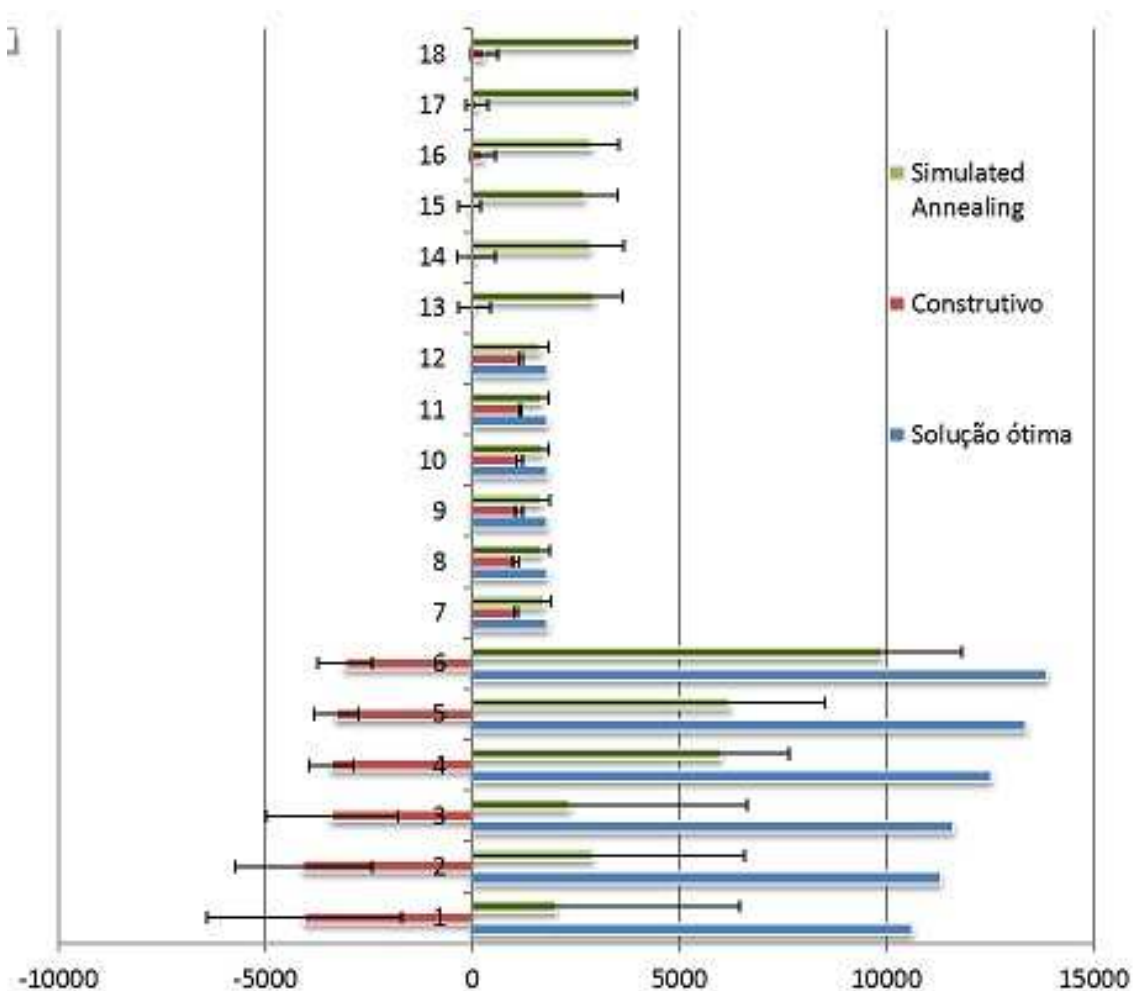


Figura 2 – Comparativo entre os algoritmos simulated annealing, construtivo e solução exata, com desvios padrão assinalados pelos traços em preto em cada barra do gráfico. As instâncias 5, 6, 16, 17 e 18 não alcançaram nenhuma resposta em duas horas.

Tabela 2 – Comparativo entre o desempenho das heurísticas simulated annealing e busca tabu. Em negrito, a maior resposta média e com o fundo destacado, a maior resposta individual. Lista de siglas: Rs – Resposta média do simulated annealing; Rt – Resposta média da busca tabu; UbR Melhor resposta; $\sigma(R)$ – Desvio padrão da resposta; T – Tempo médio; $\sigma(T)$ – Desvio padrão do tempo

ID	Simulated Annealing					Busca Tabu					Rt/Rs	Tt/Ts
	Rs	UbR	$\sigma(R)$	Ts	$\sigma(T)$	Rt	UbR	$\sigma(R)$	Tt	$\sigma(T)$		
1	2030.3	8223	4429.8	44.3	30.1	4735.7	9169	3996.1	70.1	35.0	2.3	1.6
2	2920.3	9169	3642.6	70.3	48.3	3192.7	9195	4082.5	78.4	55.6	1.1	1.1
3	2354.9	9169	4274.4	91.7	69.6	2603.7	9146	3722.7	93.3	73.4	1.1	1.0
4	6010.3	8369	1645.1	189.7	42.1	8319.0	11685	1874.6	189.7	42.1	1.4	1.0
5	6211.5	8274	2304.6	237.5	58.8	8922.4	12160	2078.1	319.4	88.5	1.4	1.3
6	9890.8	12550	1920.6	330.1	45.2	9514.0	12274	2065.5	410.5	137.9	1.1	1.2
7	1706.9	1820	185.3	3.4	0.9	1773.8	1820	112.7	4.3	1.1	1.0	1.3
8	1654.4	1820	214.0	3.2	1.2	1793.5	1820	101.1	3.9	0.9	1.1	1.2
9	1644.8	1820	222.5	3.1	1.1	1770.5	1820	130.4	4.0	1.3	1.1	1.3
10	1684.0	1820	166.4	7.6	2.6	1779.1	1820	101.1	10.0	2.6	1.1	1.3
11	1657.2	1820	186.0	7.5	2.9	1763.9	1820	126.7	9.6	2.5	1.1	1.3
12	1625.2	1820	218.5	6.6	2.6	1807.9	1820	48.5	10.3	2.0	1.1	1.5
13	2954.6	3917	666.3	17.5	7.3	3288.0	3925	925.4	25.3	10.3	1.1	1.4
14	2862.2	3893	778.5	16.5	7.5	3555.0	3928	538.5	22.9	6.4	1.2	1.4
15	2697.7	3850	807.9	15.5	7.6	3289.1	3928	927.6	23.0	9.9	1.2	1.5
16	2885.3	3925	658.3	32.0	14.9	3640.2	3939	423.2	46.3	12.9	1.3	1.4
17	3855.0	3939	95.6	72.3	9.3	3895.1	3939	53.4	77.4	9.5	1.0	1.1
18	3872.5	3939	73.2	74.0	11.1	3631.3	3939	491.5	49.5	14.2	0.9	0.7

Um último aspecto não abordado em torno do desempenho das heurísticas é o efeito da penalização a respostas infactíveis. As penalizações em alguns casos foram grandes o suficiente para deixar a função objetivo negativa. Foi o que aconteceu com o método construtivo, onde para muitas instâncias, a média das respostas ficou negativa e o pior caso teve quase 80% das arestas penalizadas e não contribuindo para a função objetivo. No simulated annealing e na busca tabu, as médias já foram todas positivas, mas ainda houve piores casos com valores de função objetivo negativo. Em uma visão geral, os testes acabaram mostrando que a obtenção de uma resposta viável com os métodos heurísticos, utilizando esta forma de penalização, não acontece sempre.

2.6 Conclusão

Neste trabalho foi avaliada a eficiência de uma heurística construtiva e duas outras estratégias heurísticas baseadas em metaheurísticas na resolução do problema de posicionamento de unidades policiais. Pelo que foi mostrado na seção anterior, viu-se que o desempenho da busca tabu se mostrou superior ao simulated annealing. Entretanto, o alto valor dos desvios padrão das respostas indica que ainda se pode melhorar a qualidade dos resultados.

Outro ponto interessante é que existe coincidência na alocação de uma unidade para certos pontos ou região em várias instâncias da mesma cidade, na solução ótima.

Viu-se ainda que, para as instâncias testadas, o tamanho das cidades não é diretamente proporcional ao tempo gasto para se encontrar a solução ótima para esta cidade. Em cidades de mais de 100 mil habitantes talvez essa situação mude, mas isso ainda não foi verificado experimentalmente.

Como sugestão de trabalhos futuros, pode-se criar um modelo estocástico para modelar o efeito da localização das unidades policiais na ação dos criminosos e dessa forma tentar encontrar um modelo que minimize a ação destes. Outra estratégia é tentar aproveitar a solução da relaxação linear do modelo matemático para auxiliar a construção de uma solução inicial para as heurísticas. Pode-se também criar uma investigação sobre o efeito do número de tipos de unidades na resposta e modelagens alternativas onde a restrição de cobertura em dobro do tempo desaparecesse, dando lugar a uma penalização, assim como é feito nas heurísticas.

3 Heurística baseada em busca tabu para o posicionamento de unidades policiais

1

Abstract Public safety is one of most demanding areas in public administration, having direct consequences on people welfare. Creating crime containment strategies or providing a fast answer to emergency situations when they occurs is a challenge. In this paper, we use Operations Research techniques to solve a police units positioning problem, in order to maximize the profit associated with police coverage in a city. We propose a model to describe the problem, heuristic methods based on Tabu Search and a penalty function for infeasible solutions. The tests are performed using instances with real street network of three different cities. The results show the efficacy of the penalty method, increasing the number of feasible solutions found, the good quality of the solutions generated by the Tabu Search, and a low convergence time, even for large instances.

3.1 Introdução

A questão da segurança pública é um dos pontos chave de qualquer política de bem estar social. É difícil pensar em qualidade de vida para a população sem que essa tenha segurança, principalmente nas áreas urbanas, onde os níveis de criminalidade costumam causar maiores preocupações do que em ambientes rurais.

No Brasil, em especial, o problema da segurança pública é motivo de preocupação há bastante tempo, por conta dos altos e crescentes índices de criminalidade. Por exemplo, em (WAISELFISZ, 2013) é mostrado que a taxa de homicídios por 100 mil habitantes subiu de 11,7 em 1980 para um pico de 28,9 em 2003, e chegando a 27,1 em 2011. Com estes números, o Brasil se destaca como um dos países mais violentos do mundo (CERQUEIRA, 2005).

Uma das medidas necessárias para reverter essa situação é criar um policiamento preventivo e responsivo eficiente, visando evitar que crimes sejam executados, e quando forem, agilizar o atendimento às vítimas e iniciar rapidamente a busca dos criminosos.

¹ Neste capítulo está incluído uma versão corrigida do artigo *Métodos para o problema de posicionamento de unidades policiais*, que foi apresentado no CLEI 2015 (XLI Conferencia Latino-americana de Informatica) (MENDES; SANTOS,)

Entretanto, as táticas de policiamento são criadas tradicionalmente com base apenas na experiência dos agentes policiais, por percepções pessoais ou coletivas, muitas vezes sem base científica. Porém, esta prática pode mostrar-se ineficiente, por diversos fatores, tais como: áreas de grande tamanho, distribuições pouco óbvias de ocorrências policiais ou mesmo inabilidade dos policiais para criar boas táticas.

Com o intuito de melhorar a tarefa de criar táticas de policiamento, uma das opções é servir a polícia de ferramentas computacionais para melhorar sua prestação de serviço e modelos integrados de gestão da segurança pública. Essa tendência já vem sendo observada desde os anos 70 nos Estados Unidos, Canadá e Europa (CERQUEIRA, 2005); porém, é ainda incipiente no Brasil.

Neste trabalho, a temática de criação de métodos computacionais para melhoria dos serviços policiais será abordada do ponto de vista da Pesquisa Operacional. Mais especificamente pelo uso de programação linear inteira e metaheurísticas, tentar-se-á resolver o problema de posicionamento de unidades policiais em um meio urbano.

Este problema parte das premissas de que: (1) são necessários três fatores para a ocorrência de um crime (um ofensor motivado, um alvo disponível e ausência de um agente repressor (COHEN; FELSON, 1979)) e (2) uma vez que haja policiais próximos de uma certa localidade, estes fazem sua presença ser sentida por um eventual infrator. Desta maneira, para se diminuir a quantidade de crimes que acontecem em um certo local, é preciso fazer com que haja uma cobertura deste por policiais posicionados a uma distância razoável de qualquer ponto.

Deste modo, dada uma quantidade pré-definida de policiais, cada um com um raio de ação limitado e dependente basicamente da forma que usam para se locomover (viaturas, bicicletas, a pé, etc...), se deve encontrar a melhor maneira de posicionar estes policiais, de tal forma que unidas as suas áreas de ação, tenhamos uma cobertura com um máximo lucro associado. Trabalha-se ainda com a restrição de que, dobrando-se o raio de ação das unidades, todas as ruas da área investigada devem ser cobertas.

Na Seção 3.2, é apresentado um resumo sobre trabalhos na área de Pesquisa Operacional que lidam com problemas de serviços policiais e as abordagens utilizadas para resolvê-los. Já na Seção 3.3, é descrito o modelo matemático utilizado para definir formalmente o problema (Seção 3.3.1), bem como heurísticas destinadas a resolvê-lo (Seções 3.3.2 e 3.3.3) e os mecanismos de penalização de respostas ineficazes (Seção 3.3.4). Na Seção 3.4 são descritos os testes realizados e as instâncias utilizadas. E, por fim, na Seção 3.5, são exibidos os resultados obtidos por estas heurísticas e a comparação destes com os resultados obtidos via modelo matemático.

3.2 Referencial Teórico

Problemas relacionados à manutenção da segurança pública são tratados na Pesquisa Operacional desde o início dos anos 70 (SU; FU; LIU, 2010), com modelos simples e determinísticos, visando basicamente responder perguntas como quantos policiais seriam necessários para patrulhar uma determinada área. No estado atual, as abordagens são bastante diversificadas e os problemas são descritos de forma determinística ou estocástica, através de modelos de cobertura (no caso de alocação de viaturas ou recursos), roteamento (para patrulhamento preventivo), dimensionamento de efetivo, ou modelos de filas (para estratégias de atendimento de chamadas de serviço).

Um dos trabalhos pioneiros foi o *Patrol Car Allocation Model* (PCAM), proposto por Chaiken em 1975 (CHAIKEN, 1975) e que tinha por fim auxiliar o dimensionamento de tropas policiais. Sobre esse trabalho, ainda nos anos 80, Saladin (SALADIN, 1982a) elaborou um modelo de *goal programming* que utilizava as simulações do PCAM como uma das fases de sua análise.

A partir daí, uma vasta gama de abordagens foi utilizada. Grande parte delas se apoia no conceito de *hot spot*, ou zonas quentes, que são áreas com um maior índice histórico de ocorrências de crimes ou chamadas de serviço. Por exemplo, Chawathe (CHAWATHE, 2007) utiliza os *hot spots* para guiar a construção de rotas de patrulhamento. Ao modelar-se a cidade como um grafo, onde cada rua (aresta) tem um peso (ou lucro) e um comprimento, procura-se encontrar o caminho fechado mais denso com k arestas e o menor caminho mais denso com k arestas, onde a densidade é medida pela razão entre peso e comprimento das ruas. Já em Li et. al. (LI et al., 2011), partindo-se do princípio que rotas fixas são ineficientes, tenta-se criar rotas de patrulhamento também guiadas pela localização dos *hot spot*. Por fim, fugindo do conceito de *hot spot*, mas ainda tratando de problemas de roteamento, temos o trabalho de Takamiya e Watanabe (TAKAMIYA; WATANABE, 2011), que se baseia em uma versão do problema de Roteamento Periódico Capacitado por Arcos para montar suas rotas de patrulhamento.

Outros trabalhos focaram nos problemas de cobertura e delimitação de distritos policiais. Embora não sejam o mesmo problema, eles de certa maneira se sobrepõem, pois na maioria dos trabalhos, policiais ou carros alocados para cobrirem determinada região ficam responsáveis principalmente ou exclusivamente por elas, criando de certa maneira distritos. Entre os trabalhos que lidam com o problema de cobertura, podemos destacar (MENDES; SANTOS; GONÇALVES, 2014), que visa obter a cobertura com maior lucro associado através de utilização de unidades com diferentes poderes de alcance e (CURTIN; HAYSLETT-MCCALL; QIU, 2010) que trabalha com o conceito de *backup coverage*, onde mais de uma unidade pode ficar responsável por uma área específica. O problema de criação de distritos foi tratado por Zhang e Brown (ZHANG; BROWN, 2013), através de uma simulação baseada

em agentes e Amico et. al. (D'AMICO et al., 2002a) que utiliza um algoritmo baseado em Simulated Annealing e o PCAM, buscando criar uma divisão eficiente em distritos da cidade de Buffalo, New York.

Em dois trabalhos, (GURGEL; FERREIRA; ALOISE, 2010) e (KESKIN et al., 2012a), é feita uma abordagem que mistura a maximização da cobertura e da eficiência das rotas de patrulhamento. No primeiro trabalho, é feita uma comparação entre dois modelos (um sendo uma variante do modelo de caixeiro viajante e outro do problema de p-medianas) através de dados reais da cidade de Natal. No segundo, o foco é o patrulhamento de trânsito visando diminuir a ocorrência de acidentes. Através novamente do uso do conceito de *hot spot*, tenta-se fazer com que as viaturas se desloquem e permaneçam nas zonas mais perigosas durante o período do dia em que elas apresentam um maior risco, se assemelhando a uma estratégia de *team orienteering problem with time window* (TOPTW).

Os trabalhos mais recentes vêm se concentrando principalmente em modelagens estocásticas (SU; FU; LIU, 2010), (LAU et al., 2010a), (PAL et al., 2012), sendo que esse último utiliza um interessante modelo de *fuzzy goal programming* em um problema de patrulhamento do trânsito. Em (RUAN et al., 2005a) um processo de decisão de Markov é usado para modelar rotas de patrulhamento. Outra vasta área de investigação, já um pouco mais afastada da Pesquisa Operacional é a modelagem multi-agente, da qual citamos dois trabalhos brasileiros, o de Melo, Furtado e Coelho (MELO; FURTADO; COELHO, 2007) e o de Vasconcelos (VASCONCELOS, 2008).

Pode-se destacar ainda alguns softwares, listados por Cançado (CANÇADO, 2005), que fazem uso de bancos de dados e sistemas de informações geográficas para apoiar o registro de eventos e sua análise. Entre eles, temos o sistema ReCap (BROWN, 1998), que une técnicas de *data mining* e fusão de dados para análises criminológicas; o ExpertCop (FURTADO; VASCONCELOS, 2004), que serve de treinamento para policiamento preventivo; o COPLINK (CHEN et al., 2003), que permite, por exemplo, a ligação entre informações para auxílio em investigações; e o software de referenciamento, desenvolvido na Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), que utiliza dados de ocorrências policiais para gerar visualizações de estatísticas sobre a criminalidade (LESTE, 2014).

Cabe salientar que os problemas acima estão inseridos em um conjunto maior que engloba outros problemas de resposta a emergências, tais como atendimento médico de emergência e contenção de incêndios.

De fato, existem várias semelhanças entre esses serviços: eles devem ser prestados em um determinado local em um determinado prazo (SALADIN, 1983), que são bastante restritos e interferem diretamente na qualidade do serviço. Em todos os casos, também devem estar contidos, dentro deste prazo, os tempos necessários para que os prestadores do serviço obtenham as informações sobre a solicitação, se preparem para atendê-la e cheguem a quem a solicitou. Desta maneira, tanto a

distância em que os solicitantes estão dos prestadores de serviço, quanto a forma utilizada para a locomoção, são relevantes.

Tal proximidade gera trabalhos tratando problemas parecidos com os que foram citados anteriormente. Em (BROTCORNE; LAPORTE; SEMET, 2003) são listados modelos que lidam com alocação e realocação de ambulâncias em áreas urbanas. Posteriormente, a publicação desta listagem, em (SCHMID; DOERNER, 2010) se propõe um modelo de alocação e realocação de ambulâncias visando maximizar a cobertura com reforço. Nesta, são consideradas as variações de tráfego, capacidade de cobertura com reforço e capacidade das ambulâncias, em uma abordagem que poderia ser adaptada para a tática de patrulhamento com viaturas. Em outros trabalhos, o foco está nos modelos de fila, baseados no *hypercube queuing model*, como o proposto por Rajagopalan, Saydam e Xiao (RAJAGOPALAN; SAYDAM; XIAO, 2008), um não-linear de *set covering* que leva em consideração as variações de pedidos de atendimento durante o dia, ou o de Budge, Ingolfsson e Erkut (BUDGE; INGOLFS-SON; ERKUT, 2009a) em que se tenta melhorar o serviço de envio de ambulâncias para o atendimento das chamadas e também o de Takeda, Widmer e Morabito (TAKEDA; WIDMER; MORABITO, 2007) onde é feita uma análise sobre a eficiência da descentralização de serviços de emergência utilizando o *hyperqueuing model*. Outros trabalhos (BERALDI; BRUNI; CONFORTI, 2004) (BERALDI; BRUNI, 2009) utilizam modelos de programação estocástica para descrever serviços de emergência.

Entretanto, as diferenças entre estes universos são grandes o suficiente para impedir a direta implementação de soluções encontradas em um deles nos outros. A prestação de serviços policiais não tem uma característica predominantemente responsiva como o serviço de atendimento médico de urgência ou combate a incêndios. Parte do trabalho policial é preventivo, com base no patrulhamento das ruas, identificação de áreas de risco ou infratores em potencial e até mesmo ações educativas de direção segura ou combate ao uso de entorpecentes, entre outros. Embora médicos e bombeiros também promovam ações preventivas, elas têm uma natureza e resultados distintos da prevenção ao crime. Por exemplo, uma viatura policial passando por uma determinada região pode evitar que um delito ocorra (evitando uma solicitação de serviço) ou que um criminoso tenha êxito na sua ação. Porém, uma ambulância fazendo o mesmo não impede que uma pessoa sofra um infarto ou um AVC.

Outro ponto é a mobilidade dos recursos policiais. Em uma chamada para uma ocorrência de grandes proporções, é bem mais fácil um batalhão mover armas, homens e viaturas para o local do que um hospital mover seu instrumental e estrutura.

Desta forma, pode-se ver que, embora se possa usar algumas soluções de estudos relacionados a outros serviços de emergência, o patrulhamento policial tem características únicas que o tornam interessante.

3.3 Materiais e métodos

Nesta seção, são apresentados o modelo matemático utilizado para descrever o problema formalmente, as heurísticas propostas para resolvê-lo e o método de penalização de respostas inviáveis usado para fazer com que as heurísticas gerem respostas viáveis.

Para todos os métodos testados, foram utilizadas cidades reais modeladas como um grafo $G = (V, E)$ ponderado e direcionado, tal que dois nós (cruzamentos) $v, w \in V$ que são adjacentes sempre são unidos por duas arestas $e_1, e_2 \in E$ (ruas), uma indo de v para w e outro fazendo o sentido contrário. Cada rua $r \in E$ possui um lucro l_r associado a sua cobertura por unidades policiais e um comprimento d_r (distância entre seus cruzamentos limitantes). A partir disto, é calculado o tempo necessário para cada tipo de unidade ir de um ponto ao outro da cidade. Uma vez que a via seja de mão única, considera-se um acréscimo de 50% no tempo necessário para percorrer o trecho no sentido da contramão para todos os veículos motorizados, visando simular a dificuldade dessas unidades para percorrer o trecho. Além disso, algumas arestas representam ruas que não podem ser transitadas através de veículos motorizados. Para modelá-las, foi considerado que o tempo necessário para percorrê-las utilizando veículos motorizados é infinito.

Para cada cidade, a entrada contém ainda um conjunto U de unidades policiais disponíveis. Cada unidade possui um tipo $i \in Q$ (tal que Q é o conjunto de todos os tipos de unidades), que define as condições de mobilidade desta (motorizada, hábil a percorrer vias estreitas ou irregulares). Para cada um desses tipos, é definida também a quantidade U_i de unidades disponíveis.

Para se dizer que uma unidade alocada em uma esquina v cobre uma rua r , é definido um tempo limite T_{MAX} para sair de v e chegar a uma das esquinas de r . É considerando ainda as correções de tempo tais como tratadas nos parágrafos anteriores. Sendo assim, para cada tipo de unidade $i \in Q$ e trecho de rua $r \in E$ e cruzamento $j \in V$, são definidos os valores binários p_{rji} e p'_{rji} , que valem 1 se uma unidade do tipo i localizada em j consegue chegar (cobrir) ao trecho r em tempo T_{MAX} e $2T_{MAX}$ respectivamente, e 0 caso contrário. O tempo T_{MAX} é usado para definir cobertura e $2T_{MAX}$ como garantia mínima de proximidade.

3.3.1 Modelo matemático

O modelo matemático utilizado para descrever este problema é uma versão condensada do proposto em (MENDES; SANTOS; GONÇALVES, 2014) e também uma versão do modelo de cobertura máxima com restrição de obrigatoriedade de proximidade, definido por Church e ReVelle (CHURCH; VELLE, 1974), com algumas semelhanças também com o modelo de cobertura máxima gradual (FARAHANI et al., 2012). O modelo se difere do descrito em (CHURCH; VELLE, 1974) por ter

facilidades com diferentes alcances e se difere do descrito em (FARAHANI et al., 2012) pelo fato das graduações serem consideradas nas restrições e não na função objetivo.

Neste modelo, assume-se que cada rua (trecho de via urbana compreendido entre dois cruzamentos) possui um comprimento, um sentido de movimentação, restrições de passagens de certos tipos de veículos e uma importância (ou lucro) associado a necessidade de ser coberta por uma unidade policial. O tempo para percorrer as ruas leva em consideração a velocidade média que pode ser obtida em uma via, o sentido que a unidade está trafegando (mão, contramão), o tipo de unidade (unidades sensíveis a contramão, como carros e motos, ou insensíveis, como unidades a pé) e o comprimento da rua. Todas essas informações já são disponibilizadas nas instâncias, exceto a correção do tempo necessário para percorrer uma via em contramão, que é corrigido no processamento dos dados para os tipos de unidades sensíveis a essa restrição.

Para construção do modelo são usadas as seguintes variáveis de decisão:

- x_{ij} : variável que indica a quantidade de unidades do tipo i alocadas no vértice j
- a_r : variável binária igual a 1 se o trecho de rua r é coberto por alguma unidade policial dentro do tempo T_{MAX}
- a'_r : similar a anterior, mas com tempo $2T_{MAX}$

O dito modelo é mostrado abaixo:

$$\max Z = \sum_{r \in E} l_r a_r \quad (3.1)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ij} \leq U_i, \quad \forall i \in Q \quad (3.2)$$

$$a_r \leq \sum_{i \in Q} \sum_{j \in V} p_{rji} x_{ij} \quad \forall r \in E \quad (3.3)$$

$$a'_r \leq \sum_{i \in Q} \sum_{j \in V} p'_{rji} x_{ij} \quad \forall r \in E \quad (3.4)$$

$$\sum_{r \in E} a'_r = |E| \quad (3.5)$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}^+, \quad \forall i \in U, j \in V \quad (3.6)$$

$$a_r \in \{0, 1\}, \quad \forall r \in E \quad (3.7)$$

$$a'_r \in \{0, 1\}, \quad \forall r \in E \quad (3.8)$$

Na função objetivo (3.1), é contabilizado o lucro de todas arestas que são cobertas (alcançadas em tempo T_{MAX}) por ao menos uma unidade policial.

Nas restrições (3.2) é definido o número máximo de unidades de cada tipo que pode ser alocado. Pelas restrições (3.3), o valor da variável que define se uma aresta é coberta é definido através da verificação se existe alguma unidade alocada em um ponto suficientemente próximo desta aresta. Em (3.4) é feita basicamente a mesma coisa, mas a distância considerada é dobrada. Por fim, na restrição (3.5), temos a questão da gradação da cobertura sendo tratada, garantindo que toda aresta deve ser alcançada por ao menos uma unidade policial num tempo máximo $2T_{MAX}$. A restrição (3.6) indica a integralidade das variáveis x_{ij} e as demais restrições indicam que todas as outras variáveis são binárias.

3.3.2 Heurística construtiva gulosa

Uma heurística construtiva parcialmente gulosa é utilizada neste trabalho como geradora de uma resposta inicial para ser utilizada pela busca tabu. A heurística construtiva proposta produz inicialmente uma solução vazia, que vai sendo construída passo a passo através de estratégias parcialmente gulosas (que podem ser ou não ótimas) até que se chegue a uma solução completa. No caso deste problema, a cada passo é escolhido um vértice do grafo onde é alocada uma unidade aleatoriamente escolhida. Os vértices são escolhidos até que acabem as unidades disponíveis.

Foram testadas diversas variações dessa heurística construtiva, para verificar sua eficiência em garantir uma boa solução inicial.

Em uma delas, o objetivo era o “melhor vértice”. Uma das abordagens foi avaliar os vértices que, para dado o tipo de unidade previamente e aleatoriamente escolhido, gerassem uma maximização do lucro associado a cobertura feita, sem considerar a questão de factibilidade ou penalizações e descartando o lucro associado a arestas já cobertas por outras unidades em iterações anteriores. Já outra abordagem considerou os vértices que, dado um tipo de unidade a ser alocado, cobrissem mais arestas em tempo $2T_{MAX}$, em uma estratégia de maximização da factibilidade.

Após definida uma ordem de preferência dos vértices (em que os vértices mais bem avaliados pelos critérios do parágrafo anterior tinham uma maior preferência), é necessário escolher qual é o vértice, que realmente, receberá a unidade já selecionada. Em uma das variações, o melhor vértice (seja qual fosse o critério) era o escolhido; já em outra, um entre uma elite dos 5% entre os melhores.

Uma última variação foi a eliminação de vértices pertencentes a arestas já cobertas por unidades previamente alocadas do *ranking* de melhor vértice. Ou seja, se na primeira iteração uma unidade alocada em um vértice v_i cobrisse n arestas, nenhum vértice pertencente a uma dessas $n\%$ seria incluído no *ranking* de lucratividade dos vértices. Desta maneira, o vértice não seria considerado o melhor ou um dos melhores.

Assim, na heurística construtiva aqui proposta, a cada iteração, define-se o lucro (ou o ganho em factibilidade) da alocação de uma unidade em cada um dos vértices

(ignorando ou não os vértices de arestas já cobertas por alguma unidade), escolhe-se o melhor vértice (o de maior lucro ou de maior ganho de factibilidade) ou um entre os 5% melhores, e atualiza-se quais as arestas foram cobertas (em tempo T_{MAX} e $2T_{MAX}$). O número de iterações corresponde ao número de unidades disponíveis.

3.3.3 Busca Tabu

A busca tabu é uma meta-heurística baseada em busca local em que algumas alterações na solução corrente são proibidas de serem realizadas por um certo número de iterações. Estas alterações proibidas ficam armazenadas em uma estrutura chamada lista tabu, de onde vem o nome do algoritmo.

Nesta abordagem, mostrada no Algoritmo 2, inicializa-se o algoritmo com a heurística construtiva descrita na seção anterior. Após isso, a busca local é iniciada.

Assim como no caso da heurística construtiva, foram testadas diversas variações da busca tabu. Buscou-se experimentar o critério de parada, as buscas locais realizadas e a presença ou não de perturbação.

Na busca local, uma das unidades da solução é escolhida aleatoriamente (linha 6) e avalia-se qual o melhor vértice de uma determinada vizinhança é o melhor para se alocar esta unidade (linha 9 a 14). A vizinhança é definida em uma das três formas dependendo da variação do algoritmo: (1) vértices adjacentes do vértice onde a unidade se localiza atualmente; (2) cinco (ou dez) vértices escolhidos aleatoriamente entre os pertencentes a arestas cobertas pela unidade em sua atual posição dentro do tempo T_{MAX} ; (3) cinco (ou dez) vértices escolhidos aleatoriamente entre os vértices cobertos pela unidade em sua atual posição dentro do tempo $2T_{MAX}$. A escolha de cinco vértices nos itens (2) e (3) citados acima se deve ao fato de tentar manter-se uma vizinhança de tamanho semelhante à utilizada no item (1). Ao contrário da heurística construtiva, aqui sempre se considera o vértice que gere a melhor resposta, considerando o valor de função objetivo com as penalizações por infactibilidade.

Após escolhido o melhor vértice, verificam-se as condições da busca tabu, para que se possa verificar se o movimento é válido (linhas 15 e 18). O algoritmo tem como critério de parada um número máximo de iterações sem melhoras (que pode ser $2|U|$, $3|U|$, $4|U|$ de acordo com a variação testada).

Por fim, em uma das variações do método, a cada $|U|$ iterações sem melhora, é executada uma intensificação da busca local (linhas 22 e 23), visando gerar soluções viáveis. Nessa intensificação, tenta-se alocar, uma a uma, todas as unidades que não tenham restrição de acesso (ou seja, possam trafegar por ruas estreitas, calçadas, escadas) próximas a arestas não cobertas em tempo $2T_{MAX}$ no seguinte esquema: (1) Escolhe-se uma unidade sem restrição de acesso, (2) coloca-se essa unidade em um vértice de alguma aresta não coberta em tempo $2T_{MAX}$, (3) a unidade com maior intersecção de área coberta com a unidade realocada (considerando a nova posição) é levada para a posição original da unidade realocada, (4) faz-se uma busca

Algoritmo 2 Pseudocódigo da busca tabu

```

1:  $s^* \leftarrow \text{heuristicaConstrutiva}()$ 
2:  $s \leftarrow s^*$ 
3:  $itSemMelhoras \leftarrow 0$ 
4:  $melhorObj \leftarrow \text{funcObj}(s^*)$ 
5: while  $itSemMelhoras < Max\_It\_Sem\_Melhora$  do
6:    $rem \leftarrow \text{sorteiaUnidade}(s)$ 
7:    $s' \leftarrow s - rem$ 
8:    $itSemMelhoras \leftarrow itSemMelhoras + 1$ 
9:   for all  $viz$  in  $\text{vizinhos}(rem)$  do
10:      $obj \leftarrow \text{testaFuncObjetivoVizinho}(s', viz)$ 
11:     if ( $\text{satisfazCondicaoTabu}(s', s^*, viz)$ 
12: AND  $obj > objMelhor$ ) OR  $\text{melhorGeral}(s', viz)$  then
13:        $melhorVizinho \leftarrow viz$ 
14:        $melhorObj \leftarrow obj$ 
15:     if  $\text{satisfazCondicaoTabu}(s', s^*, melhorVizinho)$  then
16:        $s' \leftarrow s' + melhorVizinho$ 
17:        $s \leftarrow s'$ 
18:     if  $\text{melhorGeral}(s', melhorVizinho)$  then
19:        $s^* \leftarrow s' + melhorVizinho$ 
20:        $itSemMelhoras \leftarrow 0$ 
21:   //INTENSIFICACAO
22:   if  $itSemMelhoras \% |U| == 0$  AND  $itSemMelhoras > 0$  then
23:      $\text{fazIntensificacao}()$ ;

```

local em 15 dos nós cobertos em tempo $2T_{MAX}$ pela unidade realocada em sua nova posição, para fazer um ajuste mais fino da nova posição dessa unidade. O tamanho da vizinhança foi definido após testes com vários valores. O processo segue até que as arestas não cobertas em tempo $2T_{MAX}$, antes da intensificação, sejam todas cobertas ou se esgotem as opções de unidades passíveis de troca (considerando que nenhuma unidade é trocada de lugar mais de uma vez e que uma unidade de acesso restrito sempre vai pro lugar de uma de acesso irrestrito, a cada iteração).

3.3.4 Estratégia de penalização de soluções inviáveis

Nesta seção é feita uma avaliação da estratégia de penalização de soluções inviáveis utilizada em (MENDES; SANTOS; GONÇALVES, 2014) e é proposta uma nova penalização que como será mostrado é mais eficiente.

No modelo que está sendo resolvido pela heurística no artigo citado, a função objetivo é uma versão modificada da expressão representada em (3.1). Nesta versão, soma-se o lucro relacionado a todas as arestas cobertas por alguma viatura em tempo máximo T_{MAX} e na ocorrência de uma resposta não factível, o valor da aresta não alcançável em tempo $2 * T_{MAX}$ é subtraído do valor da função objetivo, gerando a

expressão abaixo:

$$\begin{aligned} \max Z &= \sum_{r \in E} l_r a_r - \sum_{r \in E} l_r (1 - a'_r) \\ &= \sum_{r \in E} l_r (a_r + a'_r) - \sum_{r \in E} l_r \end{aligned} \quad (3.9)$$

Como o somatório dos lucros na parte mais a direita de (3.9) é constante, ele não influencia na otimização, podendo ser descartado. Isto leva à função objetivo penalizada:

$$\max Z = \sum_{r \in E} l_r (a_r + a'_r) \quad (3.10)$$

O ponto fraco desta abordagem é que, embora soluções em que muitas arestas não sejam cobertas em tempo $2 * T_{MAX}$ tendam a ter valores de função objetivo piores do que soluções em que há poucas ou nenhuma aresta não coberta nesse prazo, não há garantias nenhuma disso. De maneira mais específica, não se pode afirmar, através da equação (3.10), que uma solução factível tenha um valor de função objetivo maior do que uma solução infactível, como é mostrado a seguir.

Seja S_f o conjunto das soluções factíveis do modelo (expressões (3.1) a (3.8)) e S_i o conjunto das soluções infactíveis do mesmo modelo. Tem-se assim, que qualquer penalização deveria satisfazer $MAX(S_i) \leq MIN(S_f)$.

Pode-se modelar $MAX(S_i)$ como uma variante do modelo original, com a função objetivo tal qual na expressão (3.10) e a restrição descrita na expressão (3.5) alterada para:

$$\sum_{r \in E} a'_r \leq |E| - 1 \quad (3.11)$$

Na inequação (3.11) dizemos que se a solução é infactível, ao menos uma aresta não é coberta em tempo $2T_{MAX}$, o que nos dá condição de definir um limite superior para $MAX(S_i)$.

$$MAX(S_i) \leq \max \left(\sum_{r \in E} l_r a_r + \sum_{r \in E} l_r - \min_{r \in E} l_r \right) \quad (3.12)$$

Já para modelar $MIN(S_f)$, basta mudar a função objetivo (3.10) para uma função de minimização, mantendo o restante do modelo tal qual o original.

Considerando que todos os nós de uma solução factível estarão cobertas em tempo $2T_{MAX}$, tem-se que:

$$\begin{aligned} MIN(S_f) \geq MAX(S_i) &\implies \\ \min \left(\sum_{r \in E} l_r a_r \right) &\geq \max \left(\sum_{r \in E} l_r a_r + \sum_{r \in E} l_r - \min_{r \in E} l_r \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Mantendo a obediência às restrições de $MAX(S_i)$ e $MIN(S_f)$, é fácil observar que a situação descrita em (3.13) não se verifica, pois o somatório de todos os lucros menos o desconto $\min_{r \in E} l_r$ é maior do que zero. Isto indica que a penalização adotada em (MENDES; SANTOS; GONÇALVES, 2014) não é apropriada para guiar a heurística de uma solução infactível para uma factível. E é a partir daí que propõem-se uma nova maneira de penalizar as soluções infactíveis obtidas nas heurísticas descritas anteriormente.

Seja W o maior lucro de uma unidade da instância, desconsiderando a restrição (3.5). Uma vez adotada a constante W como o valor da penalização para cada aresta não coberta em tempo $2T_{MAX}$, temos:

$$MAX(S_i) = \max Z = \sum_{r \in E} l_r a_r + \sum_{r \in E} a'_r W \quad (3.14a)$$

$$MIN(S_f) = \min Z = \sum_{r \in E} l_r a_r \quad (3.14b)$$

Considerando as mesmas estratégias para definição de limite superior de $MAX(S_i)$ e definindo K como o número de arestas não cobertas em tempo $2T_{MAX}$, temos que para qualquer $K \geq 1$:

$$\begin{aligned} MIN(S_f) \geq MAX(S_i) &\implies \\ \min\left(\sum_{r \in E} l_r a_r\right) &\geq \max\left(\sum_{r \in E} l_r a_r\right) - KW \end{aligned} \quad (3.15)$$

Sabendo-se que W é maior ou igual que a contribuição individual na função objetivo de qualquer unidade e considerando $K = |U|$, pode-se afirmar com segurança que:

$$\min\left(\sum_{r \in E} l_r a_r\right) \geq \max\left(\sum_{r \in E} l_r a_r\right) - |U|W \quad (3.16)$$

Agora resta fazer com que as soluções infactíveis tenham maior valor de função objetivo à medida que se aproximem de se tornar factíveis (ou seja, à medida que mais arestas sejam cobertos em tempo inferior a $2T_{MAX}$).

Uma vez que já temos um limitante inferior para o valor da função objetivo de uma solução viável, como mostrado em (3.16), definamos a variável N como a quantidade de arestas não alcançáveis em tempo $2T_{MAX}$. Podemos, então, definir a penalidade $P(N)$ sobre o valor da função objetivo como sendo:

$$P(N) = \begin{cases} (N + 1)W & \text{se } N \geq |U| \\ (|U| + \frac{N}{|U|})W & \text{se } N < |U| \end{cases} \quad (3.17)$$

Na expressão acima, pode-se ver que qualquer que seja a quantidade de arestas não cobertas em tempo inferior a $2T_{MAX}$, a penalidade será de pelo menos $(|U| + \delta)W$, onde δ representa um valor qualquer maior do que zero. Além disso, esta

penalidade gera saltos maiores no valor da função objetivo quando muitas arestas não foram cobertas em tempo inferior a $2T_{MAX}$, tornando mais rápida a convergência para soluções factíveis.

3.4 Descrição dos experimentos

Os algoritmos expostos nesse artigo foram testados com instâncias baseadas em dados reais de três cidades do estado de Minas Gerais: Governador Valadares (aprox. 250 mil habitantes, $|V| = 6390, |E| = 17974$), Salinas (aprox. 40 mil habitantes, $|V| = 1093, |E| = 3230$) e Viçosa (aprox. 90 mil habitantes, $|V| = 2125, |E| = 5100$). A primeira cidade é uma das cem mais populosas do Brasil e é abordada pela primeira vez neste trabalho. Já no caso das outras duas cidades, suas instâncias correspondem a versões expandidas das instâncias utilizadas em (MENDES; SANTOS; GONÇALVES, 2014).

Para a cidade de Governador Valadares foram criadas três instâncias, com 40, 50 e 55 unidades respectivamente. Para a cidade de Salinas, foram criadas 4 instâncias, com 6, 8, 9 e 10 unidades. Já para a cidade de Viçosa, foram 4 instâncias, duas com 12, uma com 14 e outra com 16 unidades. O número de unidades foi baseado no número total de policiais militares em cada uma destas cidades, sem que se considerasse, porém, as escalas de horários destes.

Foi definido, ainda, um raio de ação para cada tipo de unidade, de acordo com uma estimativa de distância percorrida em média por cada uma delas em um tempo de 4 minutos (seguindo os resultados estatísticos obtidos em (COUPE; BLAKE, 2005)), sendo essa distância de 1 km para viaturas, 1,3km para motos e 0,5 km para policiais a pé. Cabe reforçar, entretanto, que uma aresta só é considerada coberta por uma unidade se um dos vértices desta aresta estiver a uma distância menor que o raio de ação da unidade e que alguns tipos de unidades não podem passar por algumas arestas ou só podem passar em uma velocidade reduzida.

Com isto, foi gerado o conjunto de instâncias mostrado na Tabela 3. Tais instâncias não estão ainda disponíveis livremente na *web*, mas podem ser enviados aos autores que demonstrem interesse em obtê-las.

Cada variação testada dos algoritmos foi executada 40 vezes para cada instância. Uma vez que era pouco prático testar as centenas de combinações possíveis das variações dos algoritmos apresentados neste texto, foram realizados testes em um pequeno subconjunto destas, selecionadas através de análise da eficiência de cada variação. As combinações testadas serão explicitadas na exposição dos resultados.

Todos os testes foram realizados em uma máquina com 8GB de memória RAM, processador Intel Core i5-3330 de 3,00 GHz e sistema operacional Windows 8. Os códigos foram construídos em C++ e compilados utilizando a IDE Microsoft Visual Studio Express 2012 for Windows Desktop, com configuração padrão. Não foram

Tabela 3 – Configuração das instâncias testadas

Cidade	Tamanho		ID	Nº de unidades			TOTAL
	V	E		viaturas	pedestres	motos	
Governador Valadares	6390	17974	G1	15	10	15	40
			G2	20	15	15	50
			G3	20	15	20	55
Salinas	1093	3230	S1	3	3	0	6
			S2	4	4	0	8
			S3	5	5	0	10
			S4	3	3	3	9
Viçosa	2125	5100	V1	6	6	0	12
			V2	7	7	0	14
			V3	8	8	0	16
			V4	4	4	4	12

realizados testes em campo para verificar a eficiência dos métodos propostos aqui em situações reais e cotidianas da polícia.

3.5 Resultados e Discussão

O primeiro teste foi de viabilidade de resolução do modelo utilizando o software de otimização Cplex em sua versão 12.4. Para as instâncias de Viçosa e Salinas o CPLEX encontrou soluções em tempos baixos, que permitiria a utilização do modelo matemático para a obtenção de respostas ótimas, a despeito dos altos tempos obtidos por (MENDES; SANTOS; GONÇALVES, 2014) com o software Symphony.

Para uma das instâncias de Valadares, entretanto, o Cplex não conseguiu encontrar nenhuma resposta, ou verificar a factibilidade da instância, no tempo máximo especificado (1 hora). A factibilidade desta instância, entretanto, pode ser verificada através da heurística proposta neste trabalho. Nas outras duas instâncias, foram obtidas as respostas ótimas através do CPLEX, mas com tempos de execução superiores a 20 minutos.

Um dos testes efetuado, relacionados às heurísticas, foi da penalização da função objetivo proposta na busca tabu. Como dito anteriormente, buscava-se com esta penalização melhorar o processo de caminhada da heurística rumo a respostas factíveis. Sendo assim, avaliou-se a quantidade de respostas factíveis geradas com cada uma das penalizações.

Tabela 4 – Comparativo entre a quantidade de respostas factíveis obtidas usando diferentes tipos de penalização.

Instâncias	S1	S2	S3	S4	V1	V2	V3	V4
Penalização antiga	0	3	7	22	0	2	0	15
Penalização nova	13	8	18	32	2	0	5	18

Como pode ser visto na Tabela 4, em sete das oito instâncias, a nova penalização provocou uma melhora na quantidade de soluções factíveis geradas; em especial, em instâncias menores o ganho foi mais evidente. Com as instâncias de Governador Valadares e uma das instâncias de Viçosa, entretanto, não foram obtidas respostas viáveis.

Observando que a penalização era útil, testou-se a expansão das buscas locais. A expansão trouxe bons resultados, tanto quando ela se dava em termos de maior liberdade de escolha dos vizinhos, como também quando mais vértices eram considerados na avaliação da vizinhança.

Tabela 5 – Comparativo entre a quantidade de respostas factíveis obtidas de acordo com o tipo de busca local utilizado.

		Instâncias (ID)										
Vizinhos	Alcance	G1	G2	G3	S1	S2	S3	S4	V1	V2	V3	V4
-	-	0	0	0	13	8	18	32	2	0	5	18
5	T_{MAX}	0	0	0	11	18	25	33	11	15	17	25
5	$2T_{MAX}$	0	0	0	20	36	34	40	7	12	22	35
10	T_{MAX}	0	0	0	25	38	35	37	26	35	32	39
10	$2T_{MAX}$	0	0	0	25	38	40	40	19	26	32	40

Como é mostrado na Tabela 5, houve uma grande melhora de qualidade entre a estratégia com a busca local original e as estratégias com expansões. Entre a primeira e a última linhas da tabela as diferenças são bastante significativas em todas as instâncias em que se conseguiu obter alguma resposta viável. Além disso, adotando-se a expansão da busca tabu da última linha da Tabela 5, com 10 vizinhos e alcance $2T_{MAX}$ (que será citado a partir daqui apenas como expansão da busca local), em três instâncias todas as respostas obtidas eram factíveis.

Os resultados, embora tenham se mostrado satisfatórios para as instâncias de Salinas e Viçosa, ainda falhavam em obter ao menos uma solução viável para a instância de Governador Valadares, evidenciando que talvez essas soluções só pudessem vir em versões mais elaboradas da busca tabu.

A primeira opção testada foi alterar o algoritmo construtivo, fazendo com que ele ignorasse vértices já cobertos por outras unidades na hora de fazer a classificação dos melhores vértices, como explicado na seção 3.3.3, visando fazer com que as unidades se espalhassem mais pela área. Embora o tempo de execução tenha caído, a qualidade da resposta obtida também caiu de maneira considerável, mas sem impactar significativamente no desempenho da busca tabu.

Testou-se também uma opção mais distante do algoritmo original, com duas das variações apresentadas na seção 3.3.2: a eliminação da escolha do nó a ser inserido a partir de uma elite e prioridade a maximização da factibilidade ao invés da função objetivo.

Embora tenha-se obtido um aumento no número de respostas viáveis, conforme mostrado na tabela 6, esse método ainda não foi suficiente para gerar respostas

Tabela 6 – Comparativo do número de soluções factíveis obtidas com a expansão da busca local e versões distintas do algoritmo construtivo

Instâncias	S1	S2	S3	S4	V1	V2	V3	V4
Antigo algoritmo construtivo	25	38	40	40	19	26	32	40
Novo algoritmo construtivo	31	39	39	40	21	31	36	40

factíveis para as instâncias de Governador Valadares.

Foi então investigado o efeito do critério de parada na qualidade das soluções, mais especificamente, do limite de iterações sem melhoras.

Como pode ser visto através da Tabela 7, o limite de número de iterações sem melhora exerce um papel bastante relevante na qualidade das respostas, fazendo aumentar ou pelo menos mantendo a chance de obtenção de soluções viáveis em todas as instâncias. Outro aspecto interessante é a redução do desvio padrão do valor da função objetivo, que é bem menor quando o número permitido de iterações sem melhora cresce. Entretanto, o aumento do valor deste parâmetro também não foi eficaz em gerar soluções factíveis para as instâncias da cidade de Governador Valadares.

Cabe salientar que não se pode comparar diretamente os valores dos desvios padrão obtidos por algoritmos com diferentes estratégias de penalização, pois com a penalização aqui proposta os desvios tendem a ser numericamente maiores, devido a maior magnitude dos valores das penalidades.

Na última variação experimentada, fez-se uso da intensificação da busca local executada na busca tabu. Essa intensificação foi inserida na versão com expansão da busca local, e com o limite de $4|U|$ iterações sem melhora.

Previendo-se que haveria um aumento no tempo total de execução, foi utilizada, junto com a intensificação, uma versão do algoritmo construtivo em que eram desconsiderados os nós pertencentes a arestas já cobertas no ranking dos melhores nós; era feita uma maximização a factibilidade da solução (ao invés da maximização da função objetivo) e onde não havia mais a escolha aleatória de um nó dentro de uma elite de melhores nós.

Tabela 7 – Tabela comparativa do desempenho da busca tabu com a expansão da busca local ao se alterar o limite de iterações sem melhora no critério de parada

Instância	Limite $2 U $				Limite $4 U $			
	Resposta média	Desvio padrão	Tempo médio	Respostas factíveis	Resposta média	Desvio padrão	Tempo médio	Respostas factíveis
Salinas 1	-61864,3	130338,3	1,1	25	-41795,5	143686,3	1,4	29
Salinas 2	8108,8	8145,4	1,6	38	10198,2	197,0	2,3	40
Salinas 3	10741,1	198,1	2,1	38	10821,3	158,9	2,8	40
Salinas 4	11068,5	255,9	2,2	40	11206,5	83,4	2,9	40
Viçosa 1	- 190705,0	751174,0	3,8	19	1304,4	17726,4	5,1	28
Viçosa 2	-1759,8	21078,8	4,8	26	7552,2	15440,9	6,4	34
Viçosa 3	2634,5	26904,0	5,7	32	14728,7	474,8	6,9	40
Viçosa 4	15189,5	481,6	4,7	40	15576,5	413,8	5,7	40

Na Tabela 8 são comparadas duas versões da busca tabu, uma sem e outra com intensificação da busca local. Na versão sem intensificação, foi utilizada a versão padrão do algoritmo construtivo, sem as alterações indicadas no parágrafo anterior.

Tabela 8 – Comparativo do número de soluções factíveis obtidas com e sem a intensificação da busca local

Instâncias	S1	S2	S3	S4	V1	V2	V3	V4	G1	G2	G3
Sem intensificação	29	40	40	40	28	34	40	40	0	0	0
Com intensificação	39	40	40	40	29	40	40	40	1	25	33

Como pode ser visto, a intensificação da busca local foi muito útil nas instâncias de Governador Valadares e em uma das instâncias de Salinas. No caso de Governador Valadares, além de encontrar soluções factíveis para as três instâncias, encontrou em mais de 50% das execuções em duas delas.

Cabe salientar que embora haja diferenças entre os algoritmos construtivos das duas versões comparadas na Tabela 8 e que essas diferenças interferem na qualidade da solução fornecida pelo algoritmo construtivo, estas diferenças não interferem de maneira significativa nos resultados da busca tabu para as instâncias da cidade de Governador Valadares, de forma que a comparação feita na Tabela 8 é razoável.

Neste ponto já podemos fazer uma comparação entre o algoritmo de busca tabu original, tal como proposto em (MENDES; SANTOS; GONÇALVES, 2014) e as melhores versões aprimoradas do mesmo propostas neste trabalho.

Na Figura 3, é mostrado um comparativo entre as médias das respostas de algumas versões da busca tabu apresentadas, assim como a variação em torno destas médias, obtidas através da aplicação do teste de Tukey. A imagem possui dados apenas das instâncias Salinas 1 (S1) e Viçosa 1 (V1), mas que representam o que pode ser visto nas outras, inclusive nas instâncias de Governador Valadares.

Como pode ser visto, existe uma diferença significativa na comparação, dois a dois, entre a versão inicial da busca tabu que utilizava a nova penalização (E1), a busca tabu com a expansão da busca local (E2) e da primeira com a versão com intensificação, tal como descrita anteriormente (E3). Entretanto, ao se comparar E2 e E3, não se obteve o mesmo resultado, mesmo nas instâncias de Governador Valadares, onde havia uma grande diferença na quantidade de soluções factíveis obtidas pelos dois métodos. Uma possível explicação é que, mesmo obtendo muitas soluções factíveis, a versão com intensificação (E3) ainda teve sua média bastante reduzida e, principalmente, um desvio padrão alto, em decorrência das penalizações que tinham valores muito elevados nas soluções infactíveis.

A suposta não diferença entre as versões E2 e E3, obtidas pelo teste de Tukey ao se observar apenas os valores da função objetivo das soluções obtidas pelos métodos, não deve levar à conclusão de que os dois métodos tem o mesmo desempenho, pois o aumento no número de soluções viáveis geradas na versão com intensificação (E3)

nas instâncias de Governador Valadares mostra que esta versão é mais robusta e eficiente se considerarmos, também, a métrica de número de soluções viáveis.

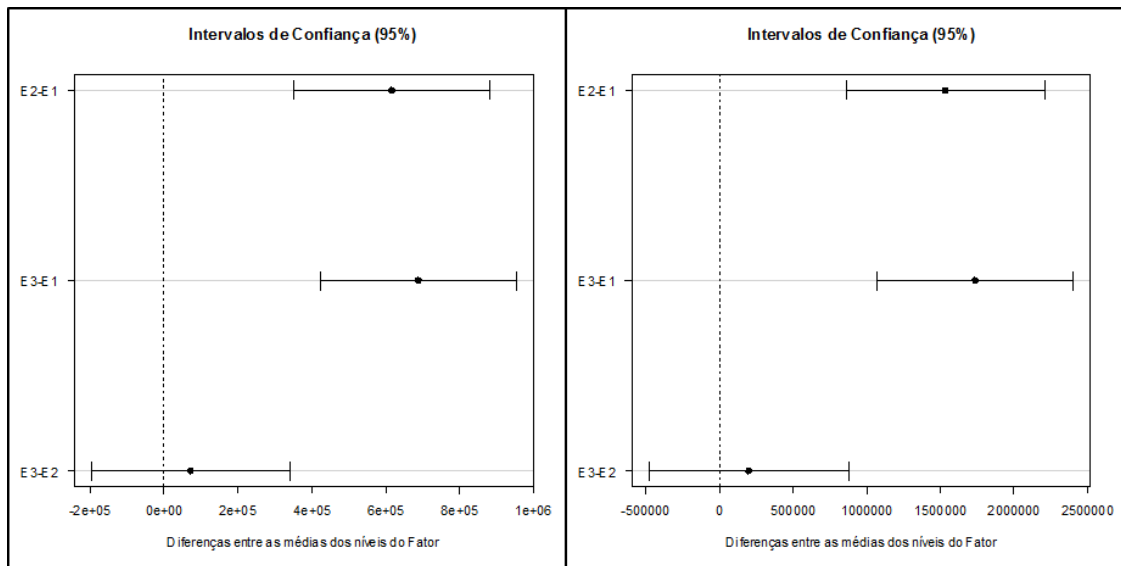


Figura 3 – Gráfico comparativo do teste de Tukey sobre os valores de função objetivo obtidos por diferentes versões da busca. E1) Busca tabu original mas já com nova penalização; E2) Busca tabu com expansão da busca local; E3) Busca tabu com intensificação. Resultados correspondentes as instâncias Salinas 1 (esquerda) e Viçosa 1 (direita).

Por fim, na Tabela 9, é apresentado um comparativo entre a solução exata, obtida pelo software CPLEX, e a solução obtida pela busca tabu com intensificação. Nesta tabela são expostos o valor ótimo e o tempo gasto, em segundos, para obtê-lo utilizando o CPLEX; a resposta e tempo médios, também em segundos, obtidos pela busca tabu com intensificação; a resposta média ao se considerar apenas as soluções factíveis e a diferença entre as repostas obtidas pelo CPLEX e a média obtida pela heurística, nas duas últimas colunas.

Como pode ser visto, para as instâncias de Salinas e Viçosa, o CPLEX foi capaz de chegar a respostas ótimas em menos de um minuto. Já nas instâncias de Governador Valadares, quando conseguiu chegar a alguma resposta, isso demorou pelo menos vinte minutos. A instância Governador Valadares 1, inclusive, não chegou a nenhuma resposta, ótima ou não, no tempo máximo de uma hora.

Ao se tentar associar o tempo de resolução do modelo ao tamanho das instâncias, pode se notar que embora o tamanho da cidade exerça uma influência considerável na velocidade da execução, o número de unidades não apresenta uma correlação com o mesmo.

Ainda a respeito da resolução exata, nota-se também que o resposta ótima das instâncias Salinas 3 e Salinas 4 são bastantes próximas, diferindo apenas por um valor que corresponderia ao lucro associado à cobertura de uma ou duas arestas. Além disso, as instâncias Governador Valadares 2 e Governador Valadares 3 têm a mesma resposta ótima. Isto é um indicativo que a partir de um certo número de

unidades, a inclusão de novas unidades não impacta significativamente na cobertura ou que, com a quantidade de unidades disponibilizadas, obtém-se a cobertura total do grafo da instância.

Tabela 9 – Tabela comparativa entre os resultados obtidos na busca tabu com intensificação (versão E3 conforme Figura 3) e a solução exata obtida via CPLEX.

Instância	CPLEX		Busca tabu				
	Função objetivo	Tempo (s)	Função objetivo média	Tempo médio (s)	Função objetivo média (factíveis)	Gap	Gap (Factíveis)
Salinas 1	10478	17,3	1147,4	1,7	8966,9	0,890	0,140
Salinas 2	11086	22,5	10172,5	2,3	10172,5	0,082	0,080
Salinas 3	11313	13,5	10490,3	2,8	10490,3	0,073	0,070
Salinas 4	11317	27,7	10615,5	2,4	10615,5	0,062	0,070
Viçosa 1	14928	42,4	2013,0	6,4	12378,8	0,865	0,170
Viçosa 2	16137	38,8	13640,8	7,5	13640,8	0,155	0,150
Viçosa 3	16833	48,5	14697,8	8,6	14697,8	0,127	0,130
Viçosa 4	17293	46,9	15177,2	7,0	15177,2	0,122	0,120
Governador Valadares 1	-	3578,9	-210025,7	169,9	49970,0		
Governador Valadares 2	63113	2224,6	-74166,8	227,0	49558,0	2,175	0,210
Governador Valadares 3	63113	1494,0	-11085,3	255,7	53000,2	1,176	0,160

Ao se avaliar o desempenho da busca tabu, pode-se ver que para as instâncias em que o algoritmo encontrou respostas factíveis em todas as execuções (Salinas 2, Salinas 3, Salinas 4, Viçosa 2, Viçosa 3 e Viçosa 4). O gap das soluções médias em relação a solução ótima foram inferiores a 0,10 em três das instâncias de Salinas e 0,17 nas instâncias de Viçosa, quando consideradas apenas soluções factíveis.

Já no caso das instâncias de Governador Valadares, as respostas médias não alcançaram valores positivos, embora, quando eram consideradas apenas respostas factíveis, obtiveram-se médias que chegavam a pelo menos 75% do valor ótimo.

Ao se observar o tempo gasto pela busca tabu para chegar a essas respostas, nota-se que o tempo médio de convergência da heurística é entre 4,8 e 10 vezes menor que o tempo necessário para se obter uma resposta ótima no CPLEX. As diferenças são numericamente pequenas para as instâncias de Salinas e Viçosa, mas grandes para as de Governador Valadares.

Analizou-se ainda, a influência do tempo de convergência na obtenção de soluções factíveis. Viu-se que o tempo médio de convergência nas soluções factíveis não ultrapassa 15% do tempo médio de convergência das execuções em geral. Nas instâncias de Salinas, quando houve solução não factível, a diferença entre o tempo médio de convergência foi insignificante.

Em uma última consideração sobre os resultados, pode-se dizer que embora seja viável esperar o tempo gasto pelo CPLEX em todas as instâncias, com exceção da instância Governador Valadares 1, para se alocar as unidades seguindo o modelo proposto, as soluções heurísticas, com a qualidade exibida acima, são bastante úteis para situações em que se exige uma rápida realocação de unidades (por exemplo, nas instâncias da cidade de Governador Valadares), ou em que o modelo aqui proposto sirva como base na resolução de modelos maiores ou de procedimentos heurísticos iterativos para resolução dos mesmos, pois o baixo tempo de convergência pode se tornar significativo em repetidas execuções.

3.6 Conclusão

A segurança pública é um dos principais pontos da administração pública. Tentativas de utilização de métodos de otimização para resolver questões específicas desta área são numerosas mas ainda há muitas questões em aberto.

Neste trabalho, buscou-se aprimorar métodos heurísticos para resolver um modelo de alocação de unidades policiais em áreas urbanas. Nele, visa-se a maximização do lucro associado à cobertura proporcionada por essa alocação, mas com restrição de obrigatoriedade de cobertura, pelo menos parcial, de todos os pontos.

Através dos vários métodos testados aqui, foi possível aumentar a chance de obtenção de soluções factíveis consideravelmente. Em especial, obteve-se um bom número de soluções factíveis para duas das três instâncias de Governador Valadares.

Foi possível ainda diminuir os desvios dos valores das função objetivo obtidos.

Pelo desempenho apresentado, principalmente nas instâncias de maior porte, pode-se dizer que a melhor versão da busca tabu é a que emprega a intensificação da busca local. Ela consegue gerar apenas soluções viáveis em metade das instâncias em um tempo que chega a ser dez vezes menor que o gasto para se obter uma resposta ótima utilizando o CPLEX.

Pode ser observado, ainda, que a restrição de obrigatoriedade de proximidade guia a busca tabu em direções contrárias às que ela seguiria se tentasse apenas maximizar o valor da função objetivo, sem considerar as penalizações. Embora este antagonismo fosse esperado, um vez que a função deste tipo de restrição é evitar o acúmulo de unidades em regiões lucrativas, com possíveis abandonos de grandes áreas, ele dificulta a obtenção de respostas viáveis de qualidade pelas heurísticas.

Como sugestão de trabalhos futuros, no âmbito de problemas determinísticos, pode-se estudar a influência do tamanho de raio de cobertura e da quantidade de níveis de obrigatoriedade de cobertura nas soluções. Pode-se, também, abordar um modelo mais próximo do modelo de cobertura máxima gradual, com os valores dos lucros associados à cobertura variando de acordo com a distância que a unidade está de cada vértice ou aresta.

O modelo tratado aqui ainda pode ser estendido para montar escalonamento de horários de policiais, de maneira que se maximize a cobertura, ou então realocações rápidas e reativas a chamadas de serviço. Neste caso, várias configurações de disponibilidade de unidades deverão ser testadas ao mesmo tempo, o que favoreceria a utilização de heurísticas rápidas, mesmo que não ótimas, em detrimento de resoluções que garantissem respostas ótimas.

Partindo para o lado probabilístico, poderia-se adaptar a restrição de obrigatoriedade de proximidade para problemas de cobertura probabilística já conhecidos, uma abordagem que no melhor do nosso conhecimento, ainda não foi utilizada.

Por fim, as abordagens aqui descritas podem ser testadas para resolver situações reais ou com cidades de grande porte, com aproximadamente um milhão de habitantes ou mais.

4 A hypercube queuing model approach to the police units allocation problem

Abstract Public safety is one of the main concerns in public administration. Providing security requires efficient police services. Considering this, we deal in this paper with the police units allocation problem. To describe the problem a probabilistic model based on Hypercube Queuing Model is proposed. Considering an action radius, a minimal coverage and a mandatory closeness constraints, the model aims to allocate police units on several points of an urban area to minimize the expected distance traveled by these units when they are answering calls for service. For solving the model a VND heuristic is used, comparing two methods of initialization: by random and Tabu Search. Also several scenarios were experimented with different parameters values to test the model robustness and suitability. The results presented a high influence of action radius and service time on solutions quality, some difficulties in getting feasible solutions, and a slightly better performance on using Tabu Search initialization to get good solutions, although using more average run time.

4.1 Introduction

Public safety is one of the main concerns in the modern society and has direct impact on the quality of life. The growth of urban areas, drug traffic, aside from the rise of social inequality, have been pointed as source of the violence boom experienced in the recent years in many countries, especially undeveloped ones.

Brazil is a notable case of this situation. There, criminality rates have been higher than any acceptable value for at least one decade. As presented in (WAISELFISZ, 2013), the homicide rate per 100 thousand people was 11,7 in 1980, reaches 28,9 in 2003, and has barely lowered to 27,1 in 2011. In 2013, over 50 thousand people were killed in the country, besides around 1,2 million robberies and 50 thousand rapes (Fórum Nacional de Segurança Pública, 2013). These numbers put Brazil as one of the most violent countries in the world, even when considering those involved on wars (CERQUEIRA, 2005).

Some of important causes of this situation are strategic and technical failures on the area of public safety management. We can highlight the lack of training of police force in many aspects, as those related with use of external resources, statistics, historic informations or softwares and digital devices for helping their work. For

instance, it is notable that still today, patrol strategies are made only considering the police agents experience, with no aid of statistical databases or formal empiric experiments about criminality. Or worse, sometimes there is not even a strategy, and patrolling is done in a random simple way.

In this sense, the brazilian police force is delayed when compared to others around the world. Although the use of computers and decision support systems at police departments is common in North America since mid 70's (CERQUEIRA, 2005) and in Europe since early 80's, these technologies are yet incipient in Brazil. In many cities, even police reports are still handwritten, or done with softwares with no capacity of aggregation, analysis or data organization, such as text editors. Even when there is some data base, its information is not shared with others public organs or made available (GOMES, 2009).

Considering the context described, in this paper we propose a mathematical model to describe and optimize the problem of police unit allocation. This model aims to work on two factors which directly affects the perception of violence and satisfaction with police services: police units visibility and speedy response to calls for service (CIHAN; ZHANG; HOOVER, 2012).

The first factor aims to avoid the existence of the scenario that Cohen (COHEN; FELSON, 1979) states as necessary for a crime to occur: a motivated offender, a target available and absence of a repressor agent. In other hand, the second increases the probability of an offender to be caught during a criminal act.

The model aims to reduce the expected distance traveled within an action radius for responding calls for service and to provide a minimal expected coverage and to ensure a mandatory expected proximity among all points within an urban area to at least one patrol unit.

The model presented is based on the Minimum Expected Response Location Problem (MERLP), a stochastic model proposed originally for emergency medical services by Rajagopalan and Saydam (RAJAGOPALAN; SAYDAM, 2009) that had good results on this description. This model, in turn, was built over fundamentals of the Hypercube Queuing Model (LARSON, 1974), which describes queuing systems where the servers go toward the clients in a determined location, such as in emergence services.

The MERLP model proposed by (RAJAGOPALAN; SAYDAM, 2009) has many advantages over other models presented in the literature. First, a stochastic model such as MERLP is more suitable for reproducing the nature and routine of police work, where target events are unpredictable or at most, there is a probabilistic distribution of them, with no warranty that the historic data will be observed on the future. In deterministic models, historic data are generally considered accurate and immutable, being less robust to changes. Furthermore, MERLP inherits the Hypercube Queuing Model (LARSON, 1974) qualities when built upon it. The Hypercube

Queuing Model is a framework which provides set performance measurements that allow the user to optimize the service under diverse criteria, like workload balance, time response, calls lost, etc...and to analyse the correlations between them within the situation modeled.

Finally, as mentioned above, this model has already presented good results in the context of emergence medical services, which is, in many aspects, similar to the police service. This is an indication that this model can be easily adapted to describe police units allocation with accuracy.

The innovations brought by our model added to MERLP is that it adds constraints of mandatory expected response coverage and also support for servers of different kinds (cars, motorcycles, police agents on foot, etc...). Considering this last point, this does not change directly the model, but impacts the solutions evaluation. Furthermore, the number of vertex and edges on the graph used in this paper is much bigger than in previous works.

In order to solve the model presented here, we use a heuristic based on the VND metaheuristic. The main objective, however, is not to test the efficiency of the heuristic proposed in solving the model, but to show the suitability of using this model to describe the problem. In other words, we argue in this work that once the model proposed is quickly solvable by using the VND heuristic and presents solutions that satisfies the scenarios tested, it may be useful for real situation.

In other to perform the experiments we used real street track data from two Brazilian cities, Governador Valadares and Viçosa, both on Minas Gerais state, having 250 thousand and 90 thousand inhabitants respectively. Some variations on units action radius of those instances were also tested.

In the next sections, we present the details of the proposed model and the solving approaches experimented. At section 4.2, we present a review of previous works about problems related with this one, and the methods used for dealing with them. Next, in section 4.3, the Hypercube Queuing Model and the approximative method for estimating the parameters of this model, the Jarvis Approximation, are presented. Still in this section, we present the models used as base for the model proposed and the VND heuristic for solving it. After that, section 4.4 explains how the experiments were performed ending up on section 4.5 with a discussion of results.

4.2 Review

Since its first steps, as a military discipline, Operational Research has been directly or indirectly concerned with problems related with public safety and order maintenance. According to Larson (LARSON, 1974), one of the first researches known to focus the police work was published in a book by Smith (SMITH, 1961) in 1961. The work was about the design of sectors for patrol beats, aiming to minimize the

mean intersector travel time. During almost the whole 60's, few new articles dealing with the same issue have arisen, but none of them has received relevant attention on posterior researches.

This scenario continued without changes until late 60's, when the partnership between the RAND Corporation of Santa Monica, California and the City of New York started, founding the New York City Rand Institute (NYCRI). The research conducted by NYCRI had a profound impact on the development of emergency service deployment modeling (GREEN; KOLESAR, 2004), with development of new knowledge useful not just in police services, but also in medical and firefighting emergence services.

Among the results obtained by NYCRI, one very relevant is undoubtedly the Patrol Car Allocation Model (PCAM) (CHAIKEN; DORMONT, 1976) (CHAIKEN; DORMONT, 1978a) (CHAIKEN; DORMONT, 1978b), a software that uses results from Queue Theory to assist police's departments in determining the number of patrols cars to have on duty at different times, and their allocation as well (LARSON; RICH, 1987). Despite its important limitations, such as the impossibility to deal with multiple car dispatches (GREEN; KOLESAR, 2004) (LAU et al., 2010b) and inability to minimize workload directly (D'AMICO et al., 2002a), PCAM has been used from then, even in more recent researches, as in Amico et. al. (D'AMICO et al., 2002a).

The Hypercube Queuing Model was another important result from the work developed by NYCRI, being a powerful tool used still in present days on several models dealing with emergence services. Other results of NYCRI activities are described in (CARTER; CHAIKEN; IGNALL, 1972) and (CHAIKEN; LARSON, 1972).

By this time, an innovative study was conducted in Kansas City, Missouri entitled *Kansas City Preventive Patrol Experiment*, that brings some counter-intuitive findings about the influence of police patrol on perception of violence by population or in reducing criminality rates (KELLING et al., 1974). This experiment and its conclusions were strongly debated and criticized, for example, by Larson (LARSON, 1976), who pointed some errors and limitations on the experiment which prevent the generalization of results for another cities. Nevertheless, the experiment conducted on Kansas City was very influential on the path taken by the posterior researches and practices in the public safety subject.

After this *golden age* of emergence services research, there was a diversification of the thematic and approaches used for modeling police services and consequently of approaches for solving them.

One of the threads emerged after criminology experiments made from late 80's and early 90's, showing the high concentration of call or incidents at few places in a city (denominated *hot spots*) and the efficacy of a geographically focused po-

lice service (TELEP; WEISBURD, 2012) (WEISBURD; ECK, 2004), boosted the performing of several studies around this fact.

In this context, Keskin et. al. (KESKIN et al., 2012b) aims to determine, for several police cars, patrol routes on highways to visit *hot spots*, defined by the authors as being the points where more car crashes happens during a specific period of the day, on one or more days along the week. In this case, the visits are accounted if made during the time window when the spot is "hot". Chawathe (CHAWATHE, 2007), in turn, builds a model where a city is a graph, each street considered an edge and each corner a vertex. With each street having a weigh, corresponding to its "hotness", and a length, the author defines a strategy to get the route with higher density. Li et. al. (LI et al., 2011) uses an algorithm based on cross-entropy for building a randomized route, point by point, through a Markov Chain Model.

Some papers describe an approach slightly different, swapping the concept of *hot spot* by the concept of *target*. With this change, the focus of police patrol is not where more crimes occur, but where the more interesting points are, considering the offender view. These points may be bank agencies, museums, jewelry stores, or any other which could bring high reward in an attack with success. We cite in this direction (BASILICO; GATTI; AMIGONI, 2012), which uses a game theory approach, looking for a leader-follower equilibrium to guide a robot in a graph and (PERRUCCI, 2011) which also tries to guide a robot in a graph through game theory strategies and aims to find the shortest path to visit all targets.

As may be noted, the above mentioned papers which deal with *hot spots* or *target* concepts are routing problems. Patrolling routes are also object of study of other papers, not using those concepts. We cite some that build non-deterministic routes based on Markov Chains Model (CHEN, 2013) (RUAN et al., 2005b) (LIN et al., 2013b), or (VASCONCELOS, 2008) that uses a genetic algorithm for calibrating routing simulation parameters and (BASILICO; GATTI; AMIGONI, 2009), which aims to create deterministic routing strategies such as that the interval between two consecutive visits to any vertex in a graph are not too long.

Although routing models may be useful in many ways for organizing police work, they cannot directly supply some necessities of police administration, like workload balancing, dispatch policies and patrol units allocation. This lack is due to the difficulty in defining where a moving police unit is, and which area is of its main responsibility. For solving these issues, several covering and district models were proposed along the years.

Gass (GASS, 1968), in 1968, was one of the first who addressed this issue, through an integer programming model for beats design aiming to minimize the sum of moment of inertia of all beats. Since then several works followed, the more recent and relevant being D'Amico et. al. (D'AMICO et al., 2002b) that uses a simulating annealing heuristic to find a solution for a district designing problem; a comparative

work developed by Zhang et. al. (ZHANG et al., 2013), where three methods for district design had their result put side by side; and a series of studies conducted by Zhang and Brown, being the first one described at (ZHANG; BROWN, 2013), where a simulation and a geographic information system were used to register the call of service data as a base to create districts with workload balance; the second (ZHANG; BROWN, 2014a) describes an adjusted simulated annealing and finally (ZHANG; BROWN, 2014b) uses a sophisticated method of response surface for the same objectives, always testing the methods with real data of a small city of USA.

Coverage models, on the other hand, were often inspired on an unique model, not directly related with policing activity, which is the Maximal Coverage Location Problem (MCLP). Proposed by Church and ReVelle (CHURCH; REVELLE, 1974), it aims, given a determined region, maximize the population that can be served within a distance or time previously determined.

In this sense, at early 80's, Saladin (SALADIN, 1982b) created a goal programming model to police patrol allocation, using PCAM to evaluate the solutions found. Adapting some details of the MCLP to police's reality, Curtin et. al. (CURTIN; HAYSLETT-MCCALL; QIU, 2010) deal with a coverage and a backup coverage model, where in the last, the objective is to get the maximum coverage by at least two police units on each point. Similarly, Mendes et. al (MENDES; SANTOS; GONÇALVES, 2014) and Mendes and Santos (MENDES; SANTOS,), proposed a model for maximizing a profit related with a coverage, with mandatory closeness constraints using patrol units with different action radius.

More inovative models were proposed by Dell'Olmo et. al. (DELL'OLMO; RICCIARDI; SGALAMBRO, 2014) and Araz et. al. (ARAZ; SELIM; OZKARAHAN, 2007). The first models safety camera allocation, for traffic surveillance, where a set of cameras change their positions through time to avoid to be memorized by drivers who try to hide their infractions. The second model is a fuzzy multi-objetive model, for dealing with the uncertainty of emergency services. Finally, Gurgel et. al. (GURGEL; FERREIRA; ALOISE, 2010) creates a model merging police patrol units location and routing problems.

Many others studies have been done around the thematic of police services and other emergence services and is not possible present all of them here. For those who want a more deep view of researches developed in this subject, we suggest the surveys written by Simpson and Hancock (SIMPSON; HANCOCK, 2009), Maltz (MALTZ, 1996) and Green and Kolesar (GREEN; KOLESAR, 2004).

Our approach here is a stochastic coverage model based on the Minimum Expected Response Location Problem (MERLP), created by Rajagopalan and Saydam (RAJAGOPALAN; SAYDAM, 2009), originally designed for dealing with ambulance allocation problem; and the police unit allocation model, that we proposed by (MENDES; SANTOS; GONÇALVES, 2014). The MERLP, by its turn, was

developed over the Larson's Hypercube Queuing Model (LARSON, 1974).

Although stochastic coverage models are uncommon in police service literature, they are usual in context of emergence medical services. More specifically, hypercube queuing models are addressed in (RAJAGOPALAN; SAYDAM, 2009) (BUDGE; INGOLFSSON; ERKUT, 2009b) (CHIYOSHI; MORABITO, 2011) (RAJAGOPALAN et al., 2011) (RAJAGOPALAN; SAYDAM; XIAO, 2008) and (TAKEDA; WIDMER; MORABITO, 2007). In all approximations of Hypercube Queuing Model, as the Hypercube Approximation (LARSON, 1975) and Jarvi's Approximation (JARVIS, 1985) are used, to skip the exponential growth of model.

The ambulance location problem and the police unit location problems are similar in several aspects, like the relevance of low time responses, eventual coordination or cooperation of servers on the system, and probabilistic and unequal requirements over an area. Then it is easy to adapt models created for one universe to the other.

4.3 Material and methods

4.3.1 The Hypercube Queuing model

In this section we present a brief description of Hypercube Queuing Model. A detailed explanation of the model can be found at the original article where it was presented (LARSON, 1974) and in the tutorial written by Chiyoshi et. al. (CHIYOSHI; IANNONI; MORABITO, 2011).

The Hypercube Queuing Model (henceforth referenced as HQM) is a queuing model proposed by Larson at 1974 while researcher of New York City Rand Institute (NYCRI) to address problems of facility location and design of action areas (LARSON, 1974). Initially built for emergence services planning, HQM has showed itself a powerful tool to describe any queuing system where the servers need to go where clients are, as for instance, in a decentralized pizza delivery.

In a queuing system as described by HQM, a set V with a finite number of points $j \in V$ represents the location of all clients points that could eventually request a service on system. Each point has a call for service rate λ_j , which can follows any probability distribution. Servers are located in a subset of V , and each one of them knows the time required to arrive at any client point from its position.

Based on these data, for each client in j a server response order is fixed, i.e., in which order the servers would be dispatched to response a request made by a client in j . Once a call for service arrives on the system from a point j , the server that was assigned as first to respond a call at j is selected to dispatch. If this server is busy, then the second server is selected. If the second is also busy, the third one is selected, and so forth, until an idle server is found.

Eventually, all servers will be busy. In this case, the call may be ignored and not answered (loss systems) or put on a queue, to wait a server to become idle. It is also

assumed that two or more events cannot occur simultaneously (as two simultaneous dispatches). At any moment at which a server is selected to be dispatched, the same policy will be followed.

Like other queuing models, HQM considers that the next state of the system can be defined observing only its current state, thus modeling a Markov Decision Process (MDP). To represent a state s , HQM uses a n -uple of 0's and 1's, where each digit represents the current state of a single server on system (0 if a server is idle and 1 otherwise), being the server enumerated from right to left. For instance, a system with 5 servers can assume states such as: $s_1 = (1, 0, 0, 1, 1)$ or $s_2 = (0, 0, 1, 1, 0)$, where this last represents a state with servers 2 and 3 busy.

Following this layout, each state may be viewed as a point in a n -dimensional space and a transition from one state to another as a connection (or a line segment). The constraint that two events cannot occur simultaneously is represented by the impossibility of a connection to make a movement in two dimensions at same time. Designing all points (states) and their connections (state transitions), creates a hypercube with one unit of side. This result gives to HQM its name.

In a three-server system, for example, there are 8 points on a three-dimensional space:

$$s_1 = (0, 0, 0) \quad s_2 = (0, 0, 1) \quad s_3 = (0, 1, 0) \quad s_4 = (0, 1, 1) \\ s_5 = (1, 0, 0) \quad s_6 = (1, 0, 1) \quad s_7 = (1, 1, 0) \quad s_8 = (1, 1, 1)$$

By the rule of one dimension movement by turn, it is easy to see that the states s_1 and s_2 are connected, but s_2 and s_5 are not. Formally speaking, two states are connected if the difference between them is an unitary vector, parallel to one of the axis (x, y or z).

But, to be useful for estimating the majority of the performance measures related with emergence services (workload, dispatch probability, busy probability, etc...), it is necessary first to calculate the steady state probabilities of being in each of states. The main weakness of HQM appears in this point.

The probability of being in a state is given by a function of the probabilities of being in its adjacent states. In the example above, if it is desired to know the steady state probability of being in s_1 , first one needs to know the steady state probability of staying at s_2 , s_3 and s_5 , because only through them it is possible to arrive at s_1 . In the end, for each state, an equation is built for calculating the steady state probability of being there. As the system has 2^n states (by the binary structure of state representation), a linear system of 2^n equations has to be solved for getting all steady state probabilities. For any reasonable number of servers, this resolution becomes costly in terms of computer time.

To deal with this problem, approximations are frequently used, like the Jarvi's Approximation, described in the next section.

4.3.2 Jarvi's Approximation

As shown in the previous section, despite the fact that HQM is a powerful model for describing queuing systems with servers and clients geographically distributed, it is highly demanding in computational time. To turn the HQM useful for situations with higher numbers of servers, some approximations were created and used instead.

One of these approximations, known as Jarvi's Approximation (JARVIS, 1985) is a generalization of the approximation proposed by Larson (LARSON, 1975), where the service time distribution can be a general distribution dependent on both client and server (RAJAGOPALAN; SAYDAM, 2009).

This approximation consists basically on a relaxation of the servers interdependence, treating servers busy probabilities as being independent. Then for trying to correct errors caused by this assumption a $Q(m, \rho, k)$ factor is defined. This factor is used, for example, at equation (4.1) to evaluate the f_{ij} .

$$f_{ij} = Q(m, \rho, k - 1)(1 - \rho_i) \prod_{l=1}^{k-1} \rho_{\alpha_{jl}} \quad \forall i, j \quad (4.1)$$

The Equation (4.1) defines the probability of a server i to be assigned to respond a demand at node j . For calculating this probability, it is necessary to know that the server i is the k^{th} preferred server to respond a demand at node j and the value of its busy probability ρ_i . Using this, the probability of all $k - 1$ precedent servers being busy and the probability $(1 - \rho_i)$ of k^{th} being idle is evaluated. Note that this evaluation uses yet a variable α_{jl} that defines the index of this l^{th} preferred server for responding a demand at node j .

The $Q(m, \rho, j)$ factor value (Equations (4.2) and (4.3)), is a function of the number of servers m , probability of the all nodes being idle P_0 , the probability of all nodes being busy P_m , and the average system busy probability $\rho = \lambda\tau/m$, where τ is the system wide mean service time and λ the system wide arrival rate.

$$Q(m, \rho, j) = C \sum_{k=j}^{m-1} \frac{(m-k)(m^k)(\rho^{k-j})}{(k-j)!} \quad \forall j \quad (4.2)$$

$$C = \frac{(m-j-1)!}{m!(1-P_m)^j} * \frac{P_0}{1-\rho(1-P_m)} \quad (4.3)$$

The values involved in the evaluation of $Q(m, \rho, j)$ factor, together with the number of servers m , as well as ρ and τ have their value fixed through an iterative method, that converges in few iterations. This method begins with the initialization of ρ_i and τ , made by Equation (4.4) and (4.5) respectively.

$$\rho_i = \sum_{j:\alpha_{j1}=i} \lambda_j \tau_{ij} \quad \forall i \quad (4.4)$$

$$\tau = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\lambda} \tau_{\alpha_{j1},j} \quad (4.5)$$

These equations basically make this estimation through the values of the total demand λ and individual node demand λ_j , as well as the expected service time of server i on point j , represented by τ_{ij} .

After this first step, we can estimate ρ (as aforementioned), P_0 and P_m , following the *Erlang's Loss Formula* for $M/M/m/K$ queues, with $K = c$, where c is a constant that represent the total number of servers available. Namely:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^m \frac{\rho^k}{k!}} \quad (4.6)$$

$$P_m = \frac{\rho^m}{m!} P_0 \quad (4.7)$$

From this point, it is possible to get the Q factor value. Then, we use the Q factor value to update ρ_i values, making it equal to $\frac{V_i}{V_{i+1}}$, where V_i is defined as bellow:

$$V_i = \sum_{k=1}^m \sum_{j:a_{jk}=1} \lambda_j \tau_{ij} Q(m, \rho, k-1) \prod_{l=1}^{k-1} \rho_{a_{jl}} \quad \forall i \quad (4.8)$$

If the maximum difference between the previous and the current values of ρ_i is lower than a specified small $\epsilon > 0$ (in this implementation 0.5), the method stops. Otherwise, f_{ij} is evaluated, through Equation (4.1) and then normalized with Equation (4.9).

$$f'_{ij} = f_{ij} \frac{1 - P_m}{\sum_{i=1}^m f_{ij}} \quad (4.9)$$

Finally, τ in Equation (4.10) value is updated, and the method goes to a new iteration, beginning from the update of $Q(m, \rho, k)$ factors.

$$\tau = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{\lambda} \left[\sum_{i=1}^m \frac{\tau_{ij} f'_{ij}}{1 - P_m} \right] \quad (4.10)$$

Once the method converges, the $Q(m, \rho, k)$ factor and ρ_i values are used as a good approximation to the HQM.

4.3.3 Police Units Allocation Model

The Police Units Allocation Model used here was previously proposed by Mendes e Santos (MENDES; SANTOS,) for defining an allocation of diverse kinds of police units in an urban area for maximizing the profit related with the allocation. It is a

merge of the Maximal Coverage Problem with mandatory closeness constraints, defined by Church e ReVelle (CHURCH; REVELLE, 1974), and the Maximal Gradual Coverage, described at (FARAHANI et al., 2012). This model supports a set Q of type units with different coverage radius. Details about the model can be found in (MENDES; SANTOS,).

In this model, the city is defined as a graph with a set of segment streets E and corners V . Each segment $r \in E$ has a length and a covering profit. The time spent from a corner to other depends of factors like distance, speed of the type unit, traffic sense, impossibility of passage by the units, among others. All information related to these conditions are provided in advance.

The decision variable x_{ij} defines how many units of type i are located at corner j . The auxiliary binary variables a_r and a'_r defines if the street segment r is reached by any assigned police unit in a time lower than T_{MAX} and $2T_{MAX}$ respectively, where T_{MAX} is a travel time limit from the position of any unit position to a point to be considered covered, and $2T_{MAX}$ is the maximal distance allowed from a point to the closest unit.

The model is presented bellow:

$$\max Z = \sum_{r \in E} l_r a_r \quad (4.11)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ij} \leq U_i, \quad \forall i \in Q \quad (4.12)$$

$$a_r \leq \sum_{i \in Q} \sum_{j \in V} p_{rji} x_{ij} \quad \forall r \in E \quad (4.13)$$

$$a'_r \leq \sum_{i \in Q} \sum_{j \in V} p'_{rji} x_{ij} \quad \forall r \in E \quad (4.14)$$

$$\sum_{r \in E} a'_r = |E| \quad (4.15)$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}^+, \quad \forall i \in U, j \in V \quad (4.16)$$

$$a_r \in \{0, 1\}, \quad \forall r \in E \quad (4.17)$$

$$a'_r \in \{0, 1\}, \quad \forall r \in E \quad (4.18)$$

The objective function maximize (4.11) maximize the sum of the profits l_j of covered street segments a_j . Constraint (4.12) states that the number of units of each type allocated cannot exceed U_i , the number of units of type i available. In constraints (4.13) and (4.14), the parameters p_{rji} and p'_{rji} defines if the time spent to reach a street segment r with an unit of type i located at j is lower than T_{MAX} and $2T_{MAX}$ respectively, determining which streets segments are covered. In constraint (4.15), the mandatory closeness is defined, stating that all nodes should be reachable from an unit location in a time lower or equal than $2T_{MAX}$. Finally, the others constraints (4.16), (4.17) and (4.18) define the valid values of the variables.

4.3.4 Minimum Expected Response Location Problem

The term Minimum Expected Response Location Problem (MERLP) is a denomination created by Rajagopalan and Saydam to the models presented by them for addressing the problem ambulance allocation in an urban area (RAJAGOPALAN; SAYDAM, 2009). In this section we show one of the versions of MERLP proposed by them, called MERLP₂, that was chosen due its greater resemblance with the police units allocation model described on the previous section.

In that study, the authors start from a statement that in previous models, once a point is said covered by an ambulance, there is no distinction about the expected response time or distance from ambulance to points within its covering area requiring some service. Considering this, they propose the MERLP model to minimize the system-wide expected response distances for a given set of ambulance, while meeting demand requirements (RAJAGOPALAN; SAYDAM, 2009).

In MERLP, each of m non distinguishable ambulances must be allocated in one of n points of an urban area. This allocation is used for defining, for each point at the city, a preference order to dispatch an ambulance from its position to the point when a service is required. This preference order can be obtained by sorting by distance or time to arriving.

Once the data about number and position of ambulances, the dispatching preferences orders and the table of expected response and service times for each pair of points (calculated or estimated a priori) are available, the Jarvis Approximation can be run to estimate the values of the Q factor and the busy probability p_k of node ambulance k . The model can be thus defined as following:

$$\min Z = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m d_{jk} h_j y_j Q(m, \rho, k-1) (1 - \rho_{\alpha_{jk}}) \prod_{l=1}^{k-1} \rho_{\alpha_{jl}} \quad (4.19)$$

$$\left[1 - \prod_{k \in N_j} \rho_{\alpha_{jk}} Q(m, \rho, \Gamma_j - 1) - \alpha \right] y_j \geq 0 \quad \forall j \quad (4.20)$$

$$\sum_{l=1}^n \sum_{k \in N_j} x_{lk} = \Gamma_j \quad \forall j \quad (4.21)$$

$$\sum_{j=1}^n h_j y_j \geq c \quad (4.22)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} = m \quad (4.23)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \quad (4.24)$$

$$y_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \quad (4.25)$$

$$\Gamma_j \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall j \quad (4.26)$$

Two decision variable sets are used in MERLP. The first one, y_j , defines, for each point j if it is covered (set as 1) or not (set as 0). The second one, x_{jk} , defines if a server k is located at point j . A third set, Γ_j not present on original model, is used here for defining the sum that is used as a parameter of the Q factor in constraint (4.20), and represents the number of servers in points that belongs to N_j , the set of servers that can cover the point j due to their position, defined by the variable x_{jk} .

In the objective function (4.19), the distance from an ambulance location to a point d_{ij} is multiplied by the value f_{ij} , as defined at Jarvis Approximation, and by the fraction of calls originating from that point. In other words, the distance from an ambulance to a point is multiplied by the probability that the ambulance will respond a call from that point. This product is accounted in the objective value function if the point is considered covered, what is defined by the value of variable y_j .

In order to determine which nodes are considered covered the constraint (4.20) is used. As before mentioned, to define one of argument values of Q factor function the equation (4.21) is used.

By its turn, in (4.20), for each point, the product of busy probability of all ambulances that can cover that point is calculated, multiplied by the Q factor. The result corresponds to the probability of not covering that point. Then, if, and only if, the probability of covering (one minus the result found) is greater than an α reliability level predetermined, the point is said covered.

For providing a minimal level of point coverage the constraint (4.22) is used. It defines the minimum fraction of calls c that must be answered, considering that only covered points will have their calls answered.

Finally, the constraint (4.23) defines that exactly m servers must be used. The remaining constraints define that y_j and x_{ij} are binary variables and Γ_j is an integer variable.

4.3.5 MERLP With Mandatory Expected Closeness Constraints

The model proposed here is called Minimum Expected Response Location Problem with Mandatory Expected Closeness Constraint (MERLP-MECC). This model basically is the MERLP with the set of constraints (4.28) to (4.34) shown bellow and replacement of third parameter of Q factor on constraint (4.20) by $\Gamma_j - \kappa_j$, generating the equation (4.27). In other words, is a merge of the models presented at sections 4.3.3 and 4.3.4, being more similar to this last. All structures used for modeling the queueing system were used, and constraints of mandatory closeness were adapted to this context. This model improves MERLP by providing a better general area coverage, instead of giving preference for some areas where the distances between their points are shorter or with lower demand, just high enough to satisfy the constraint of minimal coverage (4.22).

$$\left[1 - \prod_{k \in N'_j} \rho_{\alpha_{jk}} Q(m, \rho, \Gamma_j - \kappa_j) - \alpha \right] y_j \geq 0 \quad \forall j \quad (4.27)$$

$$\left[1 - \prod_{k \in N'_j} \rho_{\alpha_{jk}} Q(m, \rho, \Gamma_j - \kappa_j) - \beta \right] y'_j \geq 0 \quad \forall j \quad (4.28)$$

$$\kappa_j \leq \Gamma_j \quad \forall j \quad (4.29)$$

$$\Gamma_j \leq M\kappa_j \quad \forall j \quad (4.30)$$

$$\sum_{j=1}^n y'_j = n \quad (4.31)$$

$$\Gamma_j \in \mathbb{Z}^+, \quad \forall j \quad (4.32)$$

$$\kappa_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j \quad (4.33)$$

$$y'_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \quad (4.34)$$

Now, besides of constraint (4.20) of MERLP there is a second constraint (4.28) for defining which vertex are covered. The covering verified at (4.28) is equivalent to that verified in (2.4) and is used for stating which node have an expected coverage greater than a β value (such as $\beta \leq \alpha$) in a time lower than $2T_{MAX}$. With the y'_j (4.28), it is defined that for all j , y'_j must be equal to one, creating a mandatory expected closeness constraint (4.31).

Finally, constraints (4.29) and (4.30) define the value of the variable κ_j , defined for avoiding the third argument of Q factor assume a negative value when the sum of constraint (4.21) is equal zero. On equation (4.30) a parameter M is set as being any big number greater than m .

4.3.6 VND Heuristic

This section presents the algorithm used for solving the MERLP-MECC. As mentioned in (RAJAGOPALAN; SAYDAM, 2009), commercial solvers such as CPLEX are unable to solve MERLP or models derived from it, mainly because they are not prepared to solve the equation system of HQM or even run the Jarvis Approximation. To deal with this, we use a *Variable Neighborhood Descent - (VND)* heuristic (MLADENOVIĆ; HANSEN, 1997) (TALBI, 2009, p .150).

In our approach, three local searches are available and are selected according to the number of iterations without improvement of the best global objective value. These local searches were inspired on those tested by (MENDES; SANTOS,), which have reached good results in exploring the solutions space. In the best of our knowledge, there are no studies using this metaheuristic to stochastic coverage problems similar to this one, although it was successful used on some location problems as cited in (GLOVER; KOCHENBERGER, 2003).

The Algorithm 3 describes the overall scheme of the VND algorithm here implemented. As can be seen at line 1, the execution starts with a function for initializing the solution. This function may build a solution in a randomized way, choosing where each unit will be located, unit by unit. A variant proposed uses the tabu search heuristic proposed by (MENDES; SANTOS,) for solving the coverage model of section 4.3.3, in a strategy similar to that employed by (RAJAGOPALAN; SAYDAM, 2009) for finding an initial feasible solution.

Algoritmo 3 VND Heuristic Pseudocode

```

1:  $s^* \leftarrow \text{initializeSolution}()$ 
2:  $s \leftarrow s^*$ 
3:  $NoImprove \leftarrow 0$ 
4:  $bestObj \leftarrow \text{Evaluate}(s^*)$ 
5: while  $NoImprove < Max\_No\_Improvements$  do
6:    $NoImprove + +$ 
7:   if  $NoImprove < 0.8 * m$  then
8:      $LSearchOne(s, s^*, NoImprove, bestObj)$ 
9:   else if  $NoImprove \leq 1.4 * m$  then
10:     $LSearchTwo(s, s^*, NoImprove, bestObj)$ 
11:   else
12:     $LSearchThree(s, s^*, NoImprove, bestObj)$ 
13: return  $s^*$ 

```

At line 5, there is a loop controlled by the number of iterations without improvement of the global best objective value. The *Max_No_Improvements* value used on final tests is equal $2m$.

For selecting which local search to execute on each iteration, the number of iterations without improvements is used again, as can be seen at lines 6, 8 and 10. The values chosen as limit for changing the local search used, as the stop criteria described on previous paragraph, were defined after some preliminary runs. The objective was to get low run times, without considering the solutions quality.

The local search execution order was also defined with the objective of reducing the run time, verified on preliminary runs. It does not follow the common rule of the VND, that uses broader and more intensive local searches in advanced steps. The Local Search Two, for instance, explores a more tight neighborhood than Local Search One. It is useful for bringing improvements on the good solutions already found by Local Search One, that has no mechanisms to correct small imperfections. In another hand, the Local Search Three is a more intensive and broader local search than the previous, following the VND traditional behavior.

Two of the three local searches shown in Algorithm 3 correspond to Algorithms 4 and Algorithm 5.

Local Search One (Algorithm 4) does a initial search around the nodes that are close to one of units. This unit is selected by random at line 2 and then gets the set of all nodes that can be covered by this server within T_{MAX} . At line 5, the order of

Algoritmo 4 Local Search One

```

1: function LSEARCHTWO( $s, s^*, NoImprove, bestObj$ )
2:    $randomUnit \leftarrow random()\%m$ 
3:    $bestLocalObj \leftarrow \infty$ 
4:    $closests \leftarrow T_{MAX}ReachableNodes(randomUnit)$ 
5:    $randomShuffle(closests)$ 
6:    $bestAdjNode \leftarrow null$ 
7:    $countVisited \leftarrow 0$ 
8:   for  $node \in closests$  do
9:      $countVisited \leftarrow countVisited + 1$ 
10:    if  $countVisited > 10$  then
11:      break
12:     $swapPosition(s, randomUnit, node)$ 
13:     $runJarvisApproximation(s)$ 
14:     $obj \leftarrow objFunc(s)$ 
15:    if  $obj < bestLocalObj$  then
16:       $bestLocalObj \leftarrow obj$ 
17:       $bestAdjNode \leftarrow node$ 
18:     $swapPosition(s, randomUnit, bestAdjNode)$ 
19:    if  $bestLocalObj < bestObj$  then
20:       $bestObj \leftarrow bestLocalObj$ 
21:       $s^* \leftarrow s$ 
22:       $NoImprove \leftarrow 0$ 

```

these nodes is changed by a random shuffle for avoiding that the same node set be visited twice in a row. At line 7, the number of nodes visited is initialized. So, from lines 8 to 17, a server has its position changed to the ten first nodes of that set of nodes (line 10, 11 and 12), where the order is defined through a random shuffle (line 6). After evaluations of objective function (line 15) in each of these nodes, the one where this value is lower (line 19) is recorded. If the lowest value found is lower than the best global objective function value, this value is updated, as well as the best solution, and the variable counting the number of iterations without improvements is reset to zero (lines 19 to 22).

The Local Search Two (Algorithm 5) uses a similar strategy, but selecting just the adjacent nodes of current position of the server selected. The local search aims to move a unit from a position with reduced mobility from another adjacent with a better condition of mobility without causing great changes on the answer. It evaluates all adjacent nodes, instead of a subset of them, which differs from Local Search One.

The Local Search Three is similar to Local Search One. The differences are the cutoff value on the number of nodes evaluated (15 now, instead of 10) and node pre-selection criteria, that now is the node set reachable within 2 times T_{MAX} by the randomly selected server. This last local search aims to do a wider and more intensive search to arrive on solutions that could be hard to arrive with tighter

searches or to need several iterations for it.

Algoritmo 5 Local Search Two

```

1: function LSEARCHONE( $s, s^*, NoImprove, bestObj$ )
2:    $randomUnit \leftarrow random()\%m$ 
3:    $bestLocalObj \leftarrow \infty$ 
4:    $adjacentNodes \leftarrow AdjacentNodes(randomUnit)$ 
5:    $bestAdjNode \leftarrow null$ 
6:   for each  $node \in adjacentNodes$  do
7:      $swapPosition(s, randomUnit, node)$ 
8:      $runJarvisApproximation(s)$ 
9:      $obj \leftarrow objFunc(s)$ 
10:    if  $obj < bestLocalObj$  then
11:       $bestLocalObj \leftarrow obj$ 
12:       $bestAdjNode \leftarrow node$ 
13:     $swapPosition(s, randomUnit, bestAdjNode)$ 
14:    if  $bestLocalObj < bestObj$  then
15:       $bestObj \leftarrow bestLocalObj$ 
16:       $s^* \leftarrow s$ 
17:       $NoImprove \leftarrow 0$ 

```

Any time that a new solution is generated by one local search, the Jarvi's Approximation is executed for calculating necessary values to evaluate the objective value, as well as feasibility.

Unfeasible solutions are penalized in two ways, depending of which constraint is not satisfied. When constraint (4.22), that defines a minimal demand coverage, is not satisfied, the objective value is multiplied by value of c (where c is the minimum fraction of demand that is expected be answered), divided by the sum at left side of constraint of minimal coverage (4.22). It is made for increasing the value of objective function in the same proportion of the lack of minimal coverage.

When constraint (4.31), that defines the mandatory closeness constraint, is not satisfied, the objective value is multiplied by the product $m * n$, (where m is the number of units and n the number of nodes), divided by number of nodes covered following the conditions of (4.28). This penalization is more strong and causes a major impact on objective function value because our intention is to give priority to satisfy more quickly the mandatory closeness constraint.

4.4 Experiment description

For testing the efficiency and efficacy of the VND heuristic to solve the MERLP-MECC, we build an instance set based on real street track data of two Brazilian cities: Governador Valadares, with a population of around 250 thousand people, and Viçosa, with a population around 90 thousand people. Both cities are situated in Minas Gerais state.

These cities have their street tracks data modeled as a graph, where each street segment is an edge and each corner a vertex, summing up 17974 edges and 6390 vertexes to Governador Valadares and 5100 edges and 2125 vertexes to Viçosa. Each edge have received a random weight, meaning the demand on that edge. However, once the model proposed considers vertex demands instead of vertexes demands, they were defined as the sum of incident edges weight, divided by two, to avoid a doubled counting of demand.

Regarding to the servers, some configurations of numbers of units available were defined. Aside this, their coverage radius was defined as being approximately the distance which they could reach in a time interval lower than four minutes like is done in (MENDES; SANTOS,)(following statistical data obtained in (COUPE; BLAKE, 2005) about effects of quick responses in arrests after burglaries). A more optimistic scenario, with a higher average speed of units (and consequently action radius) was also tested, mainly on the Viçosa city instances. This variance was used for testing the action radius defined on previous works and for observing how this change can affect the feasibility of instances and solutions obtained by the VND heuristic.

In Viçosa instances, two situations were tested with service time at demand point not negligible, one with this service time fixed in 15 minutes and other with service time fixed in 30 minutes. In other hand, in Governador Valadares instances a simplification tests was done, by considering the time spent at service point as negligible, in other words, the service time is just the time to go from the police unit location to the point from where the call was originated. The default total demand was fixed from medium to low levels, and as a Poisson random variable, with $\lambda = 27$ to Governador Valadares and $\lambda = 7$ to Viçosa.

For each instance and method tested, 40 repetitions of execution were performed, to avoid biased results due to some out of curve solution found and to provide stronger statistical results.

The tests were executed in a computer with processor Intel Core i5-3300 with 3.00GHz, 8GB of RAM and Windows 8 PRO. The algorithms were implemented using C++ language and built in Visual Studio 2012 for Desktop.

4.5 Results and discussion

Two main measures were chosen for evaluation of the heuristic quality: objective function value and run-time.

The first measurement (objective function values) was not analysed just through the average, deviation, maximum or minimum values *per se*. It includes also the description of feasibility of solutions obtained and the influence of satisfying the constraints of minimum coverage and mandatory closeness. As mentioned in (RA-

JAGOPALAN; SAYDAM, 2009), it is hard to find a feasible solution for MERLP, and consequently the same difficulty on this model was expected, what makes the analysis of feasibility important to understand the objective function values found.

The second measure, run-time, although not so relevant for a long term planning, is still useful for providing quick repositioning of police units due to some sudden changes of scenario, which is likely to happen in an emergency service.

In this section, the results obtained with the default action radius used in (MENDES; SANTOS,) are described on the first subsection. In the second subsection, the results with a larger action radius are described. In both of this subsections, the efficiency of each method for initializing the VND heuristic is presented. Finally, once that is confirmed a better performance of tabu search, we describe the solutions obtained in more realistic scenarios, with higher demands and services times.

4.5.1 Default action radius size

In this section we describe the results of the tests performed when the units have their action radius set to the same values used by Mendes and Santos (MENDES; SANTOS,): 1.3km for motorcycles, 1.0km for cars and 0.5km to pedestrians. This scenario is a conservative one, and is more suitable for situations where the traffic conditions are worse and the units, mainly those motorized, have a bigger difficulty to move themselves around the city.

In the Tables 10 and 11 a summary of results obtained through the VND heuristic for this action radius is presented. The combination of different numbers of cars (NC), motorcycles (NM) and pedestrian units (NP), as well as the values of parameters α , β and c , of model proposed (Equations (4.19) to (4.34)) generated eighteen instances. In each of these tables several measurements are showed, as such: the average objective function value (μ_{OF}), the number of solutions where the constraint of minimum coverage (Equation (4.22)) was respected (V_α) among the forty executions and the number of solutions where the constraint of mandatory closeness (Equation (4.31)) was respected (V_β) among the forty executions. Henceforth this notation will be used in others tables and over the text.

For the majority Viçosa city of instances no solution satisfying both the constraints of minimum coverage (column V_α) and mandatory closeness (column V_β) were found. In the instances where solutions satisfying one of these constraints were obtained, the V_α and V_β values remained low. However, for some (5/5/5) instances where the tabu search was used to initialize VND, the half of solutions satisfied the mandatory closeness constraint, and even feasible solutions were found.

Another result was the behavior of average function value for each initialization method. While the VND with random initialization obtained better average values in instances where there are no motorcycles, the tabu search initialization delivered a better performance in instances with motorcycles. We did not find a strong expla-

nation for this behavior, but maybe it has some connection with the intensification step of tabu search (vide (MENDES; SANTOS,)), that works better if there are more units with improved mobility such as motorcycles.

Tabela 10 – Comparison of results got by the VND heuristic with different initializations. Default action radius - Viçosa

Instances		Randomized			Tabu search		
NC/NM/NP	$\alpha ; \beta ; c$	μ_{OF}	V_α	V_β	μ_{OF}	V_α	V_β
7/0/7	0,90 ; 0,50 ; 60	10752,6	0	0	12669,1	0	0
	0,90 ; 0,50 ; 80	13751,3	0	0	16289,2	0	0
	0,95 ; 0,60 ; 60	10326,7	0	0	12655,6	0	0
	0,95 ; 0,60 ;80	13087,0	0	0	16674,5	0	0
	0,99 ; 0,75 ; 60	10572,5	1	0	12707,4	0	0
	0,99 ; 0,75 ; 80	12716,1	0	0	16949,9	0	0
8/0/8	0,90 ; 0,50 ; 60	10734,6	0	0	13843,9	0	0
	0,90 ; 0,50 ; 80	15405,3	0	0	18897,4	0	0
	0,95 ; 0,60 ; 60	10151,3	0	0	13644,6	0	0
	0,95 ; 0,60 ;80	13090,8	0	0	18521,5	0	0
	0,99 ; 0,75 ; 60	11649,8	0	0	13964,1	0	0
	0,99 ; 0,75 ; 80	14630,9	0	0	18657,8	0	0
5/5/5	0,90 ; 0,50 ; 60	11050,0	1	4	8904,3	4	18
	0,90 ; 0,50 ; 80	12443,2	0	10	12169,4	0	16
	0,95 ; 0,60 ; 60	11034,1	1	2	7617,0	6	21
	0,95 ; 0,60 ;80	14351,2	0	7	8164,6	0	24
	0,99 ; 0,75 ; 60	12890,4	0	1	10144,8	3	12
	0,99 ; 0,75 ; 80	14367,8	0	4	13334,8	1	15

The results concerning to Governador Valadares instances are shown at Table 11. We can see that despite the fact that randomized initialization have brought better (i.e. lower) average objective function values, the values of V_α and V_β were higher when the tabu search initialization was used.

It is important to highlight that the absence of feasible solution does not permit us to make more deep analysis about the quality of answers, considering the values of objective function. Beside this, as we are not sure about the feasibility of this instances, with the scenario of action radius used on previous articles, it is not possible to state that this absence is due to the instances infeasibility or due to a lack of efficiency of the heuristic. However, even with this results, its is possible to have some insights about the run time tendencies when we use each type of initialization.

As we can see at Table 12, the run time of VND heuristic initialized by tabu search is higher than for the version with randomized initialization. This difference cannot be attributed, however, just to the additional run time of tabu search, on its task of maximizing the coverage “profit”. The fifth column of Table 12 shows the run time of VND after the tabu search finishes. It is significant the rise of the convergence time on almost all instances. In the fifth instance this was of around

Tabela 11 – Comparison of results got by the VND heuristic with different initializations. Default action radius - Governador Valadares

Instances		Randomized			Tabu search		
NC/NM/NP	$\alpha; \beta; c$	μ_{OF}	V_α	V_β	μ_{OF}	V_α	V_β
15/15/10	0,90 ; 0,50 ; 50	97688	4	0	140761	5	0
	0,90 ; 0,50 ; 80	127297	0	0	214378	0	0
	0,95 ; 0,60 ; 50	76341	0	0	137438	8	0
	0,95 ; 0,60 ; 80	132789	0	0	214238	0	0
	0,99 ; 0,75 ; 50	90239	1	0	139917	5	0
	0,99 ; 0,75 ; 80	127557	0	0	209096	0	1
20/15/10	0,90 ; 0,50 ; 50	136421	6	0	141861	6	0
	0,90 ; 0,50 ; 80	197327	0	0	225819	0	0
	0,95 ; 0,60 ; 50	142719	2	0	142733	11	0
	0,95 ; 0,60 ; 80	185363	0	0	206107	0	1
	0,99 ; 0,75 ; 50	124697	4	0	139418	7	0
	0,99 ; 0,75 ; 80	195767	0	0	207493	0	1

50%. The reason of this fact is obscure, but perhaps can be associated with a nearer from feasible solutions delivered by the tabu search, that can make the VND run too much time but with low improvements on each iteration.

Tabela 12 – Comparison of average run-times of diferent initializations of VND and their components

NC/NM/NP	$\alpha; \beta; c$	VND (Random)	VND - Tabu Search		
			Tabu Search	VND After T.S.	VND (Total)
15/15/10	0,90 ; 0,50 ; 50	290,5	120,0	284,0	404,0
	0,90 ; 0,50 ; 80	324,1	120,3	378,0	498,3
	0,95 ; 0,60 ; 50	294,3	125,6	349,9	475,5
	0,95 ; 0,60 ; 80	358,3	126,8	439,0	565,8
	0,99 ; 0,75 ; 50	312,3	123,3	387,0	510,0
	0,99 ; 0,75 ; 80	335,4	120,4	505,8	626,3
	0,90 ; 0,50 ; 50	605,6	135,3	628,3	763,7
20/15/10	0,90 ; 0,50 ; 80	653,7	139,3	780,3	919,6
	0,95 ; 0,60 ; 50	500,1	128,3	608,4	736,7
	0,95 ; 0,60 ; 80	574,2	132,8	712,9	845,7
	0,99 ; 0,75 ; 50	494,5	130,0	645,5	775,5
	0,99 ; 0,75 ; 80	776,5	131,4	712,1	843,6

4.5.2 Larger action radius

Defining an action radius for police units in a queuing based model, as the MERLP-MECC, is not so simple as in a deterministic model. In one hand, a larger value can provide a coverage of more points by a same police unit. By the other hand, being responsible by this larger area implies greater workloads, consequently, a greater busy probability. It could become more hard to find feasible solutions.

Other effect of this change is on the neighborhood visited on each iteration of VND method. Two of three local searches depends of the action radius for defining which vertex is evaluated in the position swap of a police unit. A larger action radius could cause quicker convergence, through faster moving from a neighborhood to another, ease to avoid or skip from bad local optimal solutions.

In the tests described in this section the action radius of motorcycles goes from 1,3km to 2,6km; to cars it goes from 1,0km to 2,0km and to pedestrians units it goes from 0,5km to 0,8km, due to the fact that pedestrians cannot maintain the same speed as motorized units.

As we can see on Table 13 that the number of feasible solutions found (indicated by the columns V) were expressive, even with the lowest number of units (15 cars, 15 motorcycles and 10 pedestrians) and even in the instance with the worsts results feasible solutions were found in at least 70% of runs. The improvement of solution quality is mainly due to the increase of number of solutions respecting the mandatory closeness constraint. The average value of objective function also has dropped dramatically, to at least five times lower than those presented on Table 11, with normal action radius.

It is also notable the low values of standard deviation of objective function value in four of six instances. This, together with the high number of feasible solutions indicates that with the conditions tested, the solutions were not only good, but presented a regular behavior, which is a characteristic very desirable on a heuristic approach.

However, not all measures have presented best values. The average run time also rises significantly when compared with those obtained with default action radius. The fifth instance , for example, have an average run time superior to 20 minutes, reaching a maximum of almost 65 minutes, while this same instance, as we can see on Table 12, have an average run time around 10 minutes. But these numbers are not bad at all. Although they seems high in a first view, it is still an acceptable value if we use this approach for a long term planning. But, to applications were quick re-allocations of the unit would be necessary, these values may be prohibitive.

Tabela 13 – Results obtained by the VND heuristic with tabu search initialization. Larger action radius - Governador Valadares

NC/NM/NP	$\alpha; \beta; c$	μ_T	μ_{OF}	$\sigma_T(s)$	σ_{OF}	$max_T(s)$	min_{OF}	min_{OF} <i>feasible</i>	V_α	V_β	V
15/15/10	0,90 ; 0,50 ; 50	810,1	7697,4	323,1	665,8	1524	6036,1	6036,1	40	40	40
	0,90 ; 0,50 ; 80	835,5	7890,8	349,6	623,4	1865	6911,8	6911,8	37	40	37
	0,95 ; 0,60 ; 50	804,2	7818,7	353,0	619,4	1753	6184,9	6184,9	40	40	40
	0,95 ; 0,60 ; 60	978,6	23646,4	442,4	70160,9	2330	6643,4	6643,4	35	38	34
	0,99 ; 0,75 ; 50	651,6	19736,8	409,5	54179,4	2484	5811,0	5811,0	39	38	37
	0,99 ; 0,75 ; 80	1253,8	7822,1	788,8	655,5	3878	6628,5	7127,6	29	40	29

Regarding the method of initialization of solution, on Table 14 a detailed comparison between the results found by using each one of them is presented. Because of a higher number of feasible solutions obtained, now it is possible to do a better analysis of performance of tabu search in comparison to the randomized method of initialization.

The first point of comparison is the number of feasible solutions (columns V) found by each method. What can be seen in this sense is a proximity of performance. In ten of eighteen instances, the tabu search got a higher value on column V . The random initialization got the better value seven times and in only one had a tie. This equality can be explained by looking to the columns V_α and V_β . While the tabu search initialization has better results in almost all instances, considering the V_β column, it does not maintain this quality when the column V_α is observed.

The result described above was partially expected. Firstly, because the tabu search aims, in some way, to satisfy the mandatory closeness constraint (4.31) of the MERLP-MECC, once it needs to respect the mandatory closeness constraint of Police Units Allocation Model. When the algorithm do this, it can deliver a solution far from satisfying the constraint of minimum coverage (4.22) to the instances of Viçosa. This behavior was seen also on Table 10.

We can see also in Table 14 an equilibrium among the best feasible solutions found by each method (columns min_{OF} *feasible*). Beside this, we observe that in the majority of the instances, in special on those with motorcycles available, the average run-time of VND with tabu search initialization was close to the version with random initialization. This indicates that the additional time spent on execution of tabu search heuristic is not significant and preserves the low average run-time.

This scenario of equality seems to disappear when the average objective value found by each initialization method is observed. The values obtained using the tabu search initialization were significantly better in all instances with no motorcycles. In the remaining instances, the results were almost equal in four of them, with a slightly advantage to random initialization.

The results obtained with tabu search had not only better average objective function values, but also presented a lower value of standard deviation, except again, for instances with no motorcycles. But in those last instances, the difference between the values of standard deviation were in general low.

Both results presented on the last two paragraphs can be attributed to the better performance of tabu search in satisfy the mandatory closeness constraints (4.31), that is more penalized when not satisfied. It is notable yet that once the motorcycles are included there is a high improvement on quality of solutions obtained through the random initialization, while this does not happen with solutions provided by the VND when initialized with tabu search.

For assuring definitely the difference of performances among the two methods of

initialization, a two-way ANOVA test with repetitions was performed. With these data, when compared the overall average objective function value of solutions, better values were found when tabu search initialization was used. Beside this, a p -value around $5,0 * 10^{-29}$ was found, with a critical value of F equals to 3,85 and F equals to 130,8, conditions that are sufficient to discard the hypothesis of results equality.

Although in this article we do not show the full results data obtained on the tests with instances of Governador Valadares with larger action radius, we can relate that the same superiority of tabu search initialization although not necessarily all the same characteristics of results found with Viçosa instances have repeated.

Through these results, we can also state that the effects of increasing the action radius of units were very positive. In the opposite of what we was expecting before the tests, this change turns easier to get feasible solutions.

Tabela 14 – Comparison of results found by the VND heuristic with different initializations. Larger action radius - Viçosa

Instances		Random initialization							Tabu search initialization						
NC/NM/NP	$\alpha; \beta; c$	μ_{OF}	σ_{OF}	min_{OF} <i>feasible</i>	μ_T	V_α	V_β	V	μ_{OF}	σ_{OF}	min_{OF} <i>feasible</i>	μ_T	V_α	V_β	V
7/0/7	0,90 ; 0,50 ; 60	9407,5	9373,2	1265,8	5,7	16	22	13	3771,6	5738,0	1422,8	13,1	20	32	18
	0,90 ; 0,50 ; 80	9065,8	10283,1	1882,0	7,8	4	23	3	4185,5	6244,0	1758,4	14,5	3	34	3
	0,95 ; 0,60 ; 60	9619,6	8855,9	1427,1	6,4	9	21	8	4935,7	7288,4	1058,7	11,1	11	30	11
	0,95 ; 0,60 ; 80	9039,7	10174,0	1943,1	7,4	2	26	2	4143,4	6093,7	-	13,7	0	32	0
	0,99 ; 0,75 ; 60	7121,0	8685,9	1243,9	5,0	13	27	12	2848,5	4469,8	1164,7	12,6	18	32	18
	0,99 ; 0,75 ; 80	11764,0	11343,2	1819,2	6,8	2	22	2	3527,0	6436,4	1741,5	13,0	3	36	3
8/0/8	0,90 ; 0,50 ; 60	6952,1	9133,3	1356,8	8,5	20	19	17	1584,8	203,9	1207,4	13,3	19	40	19
	0,90 ; 0,50 ; 60	10797,2	11858,6	2073,2	8,8	3	25	3	1796,2	178,1	1665,4	15,7	4	40	4
	0,90 ; 0,50 ; 80	6430,5	8801,2	1258,2	6,8	24	30	19	2117,7	3557,8	1252,0	14,2	16	39	16
	0,95 ; 0,60 ; 60	10742,3	12561,6	1610,6	8,8	7	26	6	2717,1	5906,7	1829,3	17,7	3	39	3
	0,95 ; 0,60 ; 80	7020,7	9516,6	1128,4	7,0	15	29	15	1470,3	209,6	1154,7	14,4	17	40	17
	0,99 ; 0,75 ; 60	11839,7	12597,7	1694,8	8,6	8	24	8	3041,3	5802,4	1830,2	16,8	5	37	5
5/5/5	0,99 ; 0,75 ; 80	1877,0	254,3	1243,6	7,9	36	40	36	1948,1	348,8	1263,6	13,8	37	40	37
	0,90 ; 0,50 ; 60	1967,0	187,5	1746,6	12,9	19	40	19	1998,0	213,3	1811,2	14,6	20	40	20
	0,90 ; 0,50 ; 80	1785,2	247,2	1511,6	8,7	35	40	35	1941,0	298,0	1284,6	12,6	33	40	33
	0,90 ; 0,50 ; 60	1954,5	192,2	1894,0	9,0	14	40	14	2045,8	235,6	1830,5	13,0	21	40	21
	0,95 ; 0,60 ; 80	1791,7	334,6	1351,6	6,1	30	40	30	2464,3	4007,6	1511,7	10,5	28	39	28
	0,95 ; 0,60 ; 60	1931,6	237,2	1702,7	11,5	15	40	15	1997,6	264,1	1877,5	13,7	13	40	13

4.5.3 Results with demand and service time variations

After we have certified the efficiency of tabu search initialization, in this section we describe the results of the sensitivity tests performed. These tests were done to observe the changes on solutions quality caused by variations on demand and service time values. All the test from now on were performed with VND initialized with tabu search heuristic and only with Viçosa instances.

A first overview of results is presented on Table 15. In this table the solutions obtained with the default demand ($\lambda = 7$) and doubled demand ($\lambda = 15$) are compared. The demands were equally doubled on all edges, what becomes this change innocuous to the model that tabu search maximizes (a good solution before the change remains good after it), but changes significantly the the MERLP-MECC, minimized by VND.

One surprisingly result was referent to the number of feasible solutions obtained. In ten of eighteen instances more feasible solution on runs with demand doubled were found and, in another two there was a tie. Looking to the components of these numbers (columns V_α and V_β), we can note that the values of V_β have dropped, and mainly, the values of V_α have increased. It maybe did the likelihood of a solution to be feasible improves.

However, this result is not reflected on the average values of objective function. Observing this measure, the values obtained on runs with doubled demand were always worse. It is an effect of the higher distance traveled for responding the calls for service.

When we look to the minimum objective value among the feasible solutions we see that the increase of demand makes the objective values worse. This does not mean, necessarily, that the solutions are worse. The same allocation can have different objective values with different total demands due to the impact on the value of Q factor, that depends indirectly of value of λ . In the other hand, it is important to note that the parameter h_j continues with the same values if the edges have their demands multiplied by the same factor, as we done, because it represents a fraction of total demand instead of an absolute value.

Tabela 15 – Comparison of results found by the VND heuristic with different levels of demand. Larger action radius - Viçosa

Instances		Default demand						Doubled demand					
NC/NM/NP	$\alpha; \beta; c$	μ_{OF}	min_{OF} <i>feasible</i>	μ_T	V_α	V_β	V	μ_{OF}	min_{OF} <i>feasible</i>	μ_T	V_α	V_β	V
7/0/7	0,90 ; 0,50 ; 60	3771,6	1422,8	13,1	20	32	18	9525,4	1573,5	11,0	18	21	18
	0,90 ; 0,50 ; 80	4185,5	1758,4	14,5	3	34	3	7885,5	-	11,8	0	29	0
	0,95 ; 0,60 ; 60	4935,7	1058,7	11,1	11	30	11	6873,5	1973,5	12,0	24	30	24
	0,95 ; 0,60 ; 80	4143,4	-	13,7	0	32	0	9772,3	3636,1	11,5	3	28	3
	0,99 ; 0,75 ; 60	2848,5	1164,7	12,6	18	32	18	11189,3	2831,8	11,8	21	25	19
	0,99 ; 0,75 ; 80	3527,0	1741,5	13,0	3	36	3	11395,4	2961,0	11,3	3	24	3
8/0/8	0,90 ; 0,50 ; 60	1584,8	1207,4	13,3	19	40	19	4485,5	1587,4	15,2	25	33	25
	0,90 ; 0,50 ; 60	1796,2	1665,4	15,7	4	40	4	6178,7	2966,7	14,5	5	29	5
	0,90 ; 0,50 ; 80	2117,7	1252,0	14,2	16	39	16	8347,1	1012,1	14,2	23	26	22
	0,95 ; 0,60 ; 60	2717,1	1829,3	17,7	3	39	3	7425,0	2764,3	15,5	7	30	7
	0,95 ; 0,60 ; 80	1470,3	1154,7	14,4	17	40	17	4111,0	1551,1	14,3	23	30	23
	0,99 ; 0,75 ; 60	3041,3	1830,2	16,8	5	37	5	8251,8	2572,0	13,5	8	27	8
5/5/5	0,99 ; 0,75 ; 80	1948,1	1263,6	13,8	37	40	37	3099,8	1174,4	15,0	36	39	36
	0,90 ; 0,50 ; 60	1998,0	1811,2	14,6	20	40	20	2978,3	2878,2	16,3	12	39	12
	0,90 ; 0,50 ; 80	1941,0	1284,6	12,6	33	40	33	2909,6	1862,0	16,0	31	38	31
	0,90 ; 0,50 ; 60	2045,8	1830,5	13,0	21	40	21	3099,5	2675,4	15,2	16	39	16
	0,95 ; 0,60 ; 80	2464,3	1511,7	10,5	28	39	28	3620,7	1094,3	14,1	36	37	35
	0,95 ; 0,60 ; 60	1997,6	1877,5	13,7	13	40	13	2785,4	2837,5	13,5	8	37	8

In the following tests, we abandoned the simplification of considering the service time equals to the travel time from the unit location to the demand node. The doubled demand was kept for providing a description of a more realistic scenario.

Two values of average service time were used, 15 minutes (1/4 hour) and 30 minutes (1/2 hour). Those times were added to the travel time from the unit position to the demand node and was not accounted the time spent to return.

On the Fig. 4 a comparative of the number on feasible solutions, as such the number of solutions satisfying the constraints of minimal coverage (4.22) and mandatory closeness (4.31) is presented. Each bar color represents a different average service time.

The instances with absence of motorcycles (with IDs from 0 to 11) presented low levels of satisfiability of minimum coverage constraint (4.22). These levels do not decreased much with the rise of service time, being the higher variation a decrease of 37,5% when compared the first and third column, at instance 11. However, in the instances with motorcycles, the variations were bigger, with decreases of at least 25%, except to the instances 14 and 17, on the second column.

The three central columns of Fig. 4 present the number of solutions satisfying the mandatory closeness constraint (4.31). As we can see, these numbers are more regular than those related to the first three columns. They are no just higher, but neither have big oscillations between the instances. Although the scores were higher in instances with motorcycles (IDs 12 to 17) with the default service time, this difference become irrelevant in tests with 30 minutes of service time.

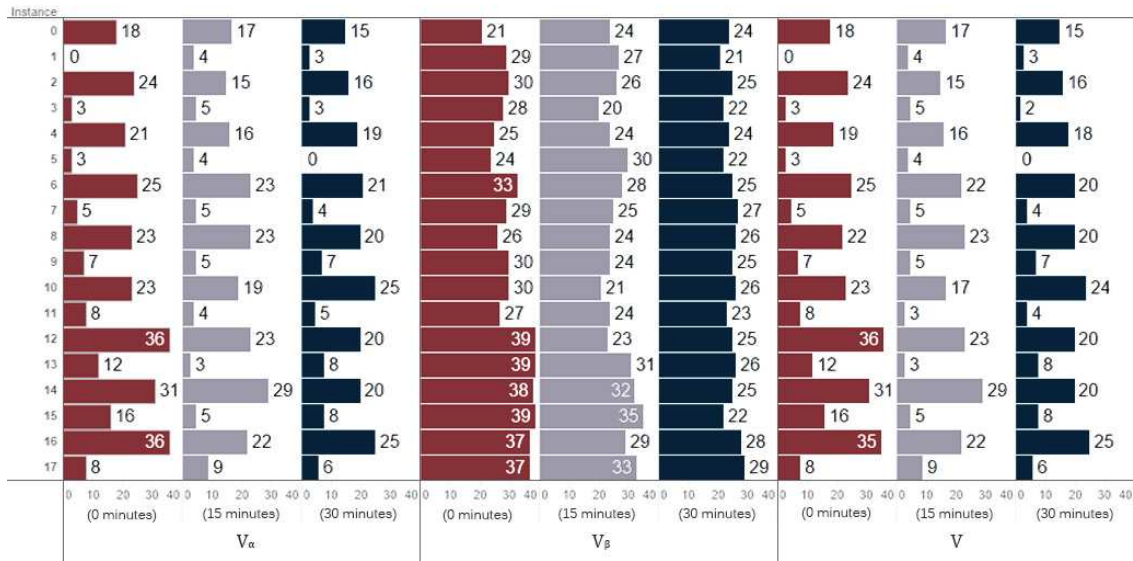
This result lead us to an intuitive conclusion: as longer the average service time, less relevant the type of vehicle used by the unit, because the travel time starts to be just a minor variable. It does not mean, however, that the location of units also becomes less relevant. It is desirable to put more units for covering places with higher demand, even when the speed of these units does not impact significantly the total service time.

The number of feasible solutions (showed on the last three columns) follows approximately the numbers of the three first columns and it is not much influenced by the three central columns. This result, together with others already presented, suggests that the number of solutions respecting the constraint of minimal coverage is the bottleneck of solutions feasibility.

4.5.4 Conclusion

In this paper we addressed the police unit allocation model, presenting a hypercube queuing model to describe it and a VND heuristic approach to solve this model. Our objective was mainly show the suitability and viability of using the proposed model (MERLP-MECC) and the hypercube queuing approach to describe a rea-

Figura 4 – Comparative of number of feasible solutions got by VND with Tabu Search initialization using different services times. Larger action radius - Viçosa



listic scenario of police unit allocation where mandatory closeness constraint are presented.

Considering this objective, we can state that this model is able to deal with a realistic scenario of locating police units. The presence of feasible solutions on many of situations tested and the low run time spent to find them are evidences sufficiently strong to confirm this statement. Even the lack of feasibility of solutions when instances were tested with default action radius can not be pointed as a weak point of the model, once we can not say if those instances are feasible or if a better heuristic could find feasible solutions.

Regarding to the tests of VND efficiency to solving the model, as such the tests of efficiency of the two initialization methods, were considered basically two measurements: run-time and objective function value (strongly related to the solutions feasibility). The analysis was done mainly around the feasibility of solutions and its influence on average function values.

Although we have found satisfactory values in both measures, the run time to some instances were too high to solutions on situations where re-allocations are frequently needed and to some instances few feasible solutions were found.

The problem with feasibility of solution, however, was already expected, because it was reported on paper which introduced the MERLP, that was used as base to the MERLP-MECC. On this paper, where the model contains more constraints and the instances have tight action radius, naturally this difficult would appear. Beside this, as we have mentioned on previous section, the number of solutions satisfying the minimum coverage constraint can be a bottleneck for getting feasible solutions. Our intuition says that maybe through a strongest penalty when the minimum coverage constraint was not respected this problem could be solved. This hypothesis is a

point to be tested on future works.

We highlight however that the feasibility, although desirable, is not always mandatory for our proposes. Almost feasible solutions could be satisfactory and some relaxations can be adopted on real situations, without a degradation of coverage quality. Some authors have inclusive used goal programming (SALADIN, 1982b) and fuzzy programming approaches (ARAZ; SELIM; OZKARAHAN, 2007) for dealing specifically with those situations.

We have seen also that the results obtained here were not so dependent of demand rates but, in another hand, the service time has a big impact on solutions quality. With the absence of these information, estimates may be done based on the literature, as we did, but if they were not near from real numbers, the efficiency of model to suggest a good allocation can be strongly affected.

Another question, that was not dealt on the text, but can be problematic is the imbalance of workload. The MERLP, as the MERLP-MECC, does not make any consideration about balancing the workload. This could be done with additional constraints on the model or a multi-objective approach, which can be a good source for future researches.

Beside this, to futures researches we also suggest a more wide study about the influence of how police forces move themselves around an urban area. This could be a more descriptive research, and could use several models available to find convergent results from them or focuses on effects of changing some parameters of problem in the outputs generated by the Hypercube Queuing Model and Jarvi's Approximation.

Another possibility is to built new models that does not just states where police units should stay, but how they could patrol areas close to where they were put for optimizing some objective. Integrated models like this, that joins a coverage and a routing problem are still rare on the literature and can be explored starting from good deterministic or stochastic models.

Finally, a possibly more useful and hard to accomplish continuation to this research would be a study of case of implementation of this model in a city. This last suggestion, that is more challenging due to the bureaucracy involved, and by the practical issues that can arose on an eventual experiment where may be necessary do not respond some call for service, use some strategies that are supposed or clearly worse, and finally for adopting a priority policy that can cause conflicts or complaint of people.

5 Conclusão geral

Neste trabalho foi tratado o problema de alocação de unidades policiais em uma área urbana. Este problema faz parte de um universo de problemas relacionados com a área de segurança pública, que, por sua vez, tem uma grande intersecção com os chamados problemas de atendimento a emergência. Foram experimentadas várias abordagens, indo desde a resolução exata com *solvers* comerciais dos modelos propostos, até o uso de heurísticas, misturando diversas meta-heurísticas distintas.

Pode-se considerar que os objetivos da pesquisa foram alcançados. Através dos modelos e métodos propostos neste trabalho é possível ter uma ferramenta que auxilie a polícia em sua tarefa de planejamento de atividades. Além disso, foram analisados vários aspectos teóricos e práticos relacionados aos problemas de cobertura, como os efeitos de diferentes definições de um mesmo problema matematicamente, como contornar características particulares de determinadas instâncias e, principalmente, concernente a questão do equilíbrio entre uma cobertura mais focada nos pontos de maior demanda e uma focada em uma divisão mais equânime dos recursos.

Considerando o último ponto do parágrafo anterior, vimos como a restrição de obrigatoriedade de proximidade, que pouco aparece em problemas de cobertura máxima (ou mais lucrativa), pode ter uma influência significativa nas respostas e constituir um verdadeiro desafio quando se faz usos de métodos heurísticos. O exemplo mais evidente disso se deu com as instâncias da cidade de Governador Valadares no Capítulo 3.

Salienta-se neste sentido que, desde o princípio, foi definido como meta criar modelos que pudessem prover alocações onde nenhuma área poderia ser deixada totalmente desamparada, isto é, sem nenhuma força policial por perto. Porém, a união desta exigência com características acessórias da definição do problema, tal como as limitações de mobilidade das unidades, deixou a proposta de tal maneira difícil, que é quase inevitável se pensar em regras mais flexíveis em estudos futuros, talvez adotando limites de tolerância ou evitando penalizações demasiadamente severas para soluções quase factíveis.

Em se tratando do modelo estocástico, descrito no Capítulo 4, pudemos ver como conclusões intuitivas podem ser falhas para lidar com assuntos em que há altos graus de incerteza. Isso pode ser notado, primeiramente, pelos resultados ruins obtidos quando se fixaram para cada tipo de unidade, os raios de ação definidos nos Capítulos 2 e 3. Após isso, viu-se também que o tempo de serviço era proporcionalmente mais relevante do que a demanda por serviços.

Cabe ressaltar, ainda, que o modelo utilizado no Capítulo 4 não lida com diversas questões inerentes de um sistema de filas, como, por exemplo, a taxa média de

ocupação e balanceamento da carga de trabalho. Entretanto, ele é bastante relevante e útil quando o objetivo é uma resposta rápida e garantia de atendimento.

Ao final deste trabalho, pode-se afirmar com tranquilidade que existem ainda várias abordagens no espectro da Pesquisa Operacional que podem ser testadas para lidar com o problema de segurança pública. Apesar de sua importância no dia a dia, essa área, talvez pela falta de apelo econômico, ainda é pouco explorada, principalmente no Brasil.

Como sugestão de trabalhos futuro, pode ser mencionado um aprofundamento em modelos de fila baseados no modelo de filas em hipercubo, que embora tenha sido proposto originalmente para problemas de emergência como um todo, hoje basicamente só são lembrados em problemas envolvendo emergências médicas. Do ponto de vista mais prático e experimental, pode-se explorar a criação de novos modelos ou a adaptação de alguns existentes. Já do ponto de vista teórico e matemático, pode-se buscar melhorias nos métodos aproximativos, como o de Jarvis, para que se tornem mais gerais, ou mesmo no próprio modelo de fila em hipercubo, para que se torne mais maleável e fácil de ser utilizado em modelos de otimização.

Uma outra sugestão seria a integração entre modelos de cobertura e roteamento, de forma a ir de encontro às pesquisas mais recentes sobre eficácia do policiamento preventivo, em que se salienta que unidades não devem ficar sempre paradas em pontos específicos, mas que devem se fixar temporariamente em vários deles de forma a não só coibir o crime, como também atender rapidamente aos chamados por serviço.

Um último desafio, principalmente em países como o Brasil, onde existe um distanciamento entre o conhecimento produzido na academia e o dia-a-dia de empresas, governo e população, seria a validação de modelos propostos na literatura para a realidade brasileira, desde o atendimento de áreas de risco, tais como as favelas dos grandes centros urbanos, até o monitoramento de áreas de floresta, na região amazônica e pantanal. Com o tamanho do país, a quantidade de pessoas que trabalham em alguma forma de serviço policial e a disponibilidade de meios de gerenciamento e armazenamento de dados, aplicar algumas das soluções que já deram certo em outros lugares se torna uma questão muito mais de convencer pessoas do que conseguir recursos.

Fecha-se esse trabalho com a mesma mensagem com a qual ele foi iniciado. A segurança pública é uma questão fundamental da administração pública e que interfere diretamente na qualidade de vida de toda a população. Qualquer esforço, principalmente legal, racional e científico, para aprimorar esses serviços visando a diminuição da violência, em todas as suas formas, deve ser estimulado, executado e difundido.

Referências Bibliográficas

ABREU, J.; LOURENÇO, L. Mídia, violência e segurança pública : Novos aspectos da violência e da criminalidade no brasil. *Revista Ambito Jurídico*, XIII, n. 74, march 2010. Disponível em: http://ambito-juridico.com.br/site/index.php?artigo_id=7319&n.link=revista_artigos_leitura).

ARAZ, C.; SELIM, H.; OZKARAHAN, I. A fuzzy multi-objective covering-based vehicle location model for emergency services. *Computers & Operations Research*, v. 34, n. 3, p. 705 – 726, 2007. ISSN 0305-0548. Logistics of Health Care Management Part Special Issue: Logistics of Health Care Management. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054805001164>).

BASILICO, N.; GATTI, N.; AMIGONI, F. Developing a deterministic patrolling strategy for security agents. In: IEEE COMPUTER SOCIETY. *Proceedings of the 2009 IEEE/WIC/ACM International Joint Conference on Web Intelligence and Intelligent Agent Technology-Volume 02*. [S.l.], 2009. p. 565–572.

BASILICO, N.; GATTI, N.; AMIGONI, F. Patrolling security games: Definition and algorithms for solving large instances with single patroller and single intruder. *Artificial Intelligence*, Elsevier, v. 184, p. 78–123, 2012.

BERALDI, P.; BRUNI, M. E. A probabilistic model applied to emergency service vehicle location. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 196, n. 1, p. 323–331, 2009.

BERALDI, P.; BRUNI, M. E.; CONFORTI, D. Designing robust emergency medical service via stochastic programming. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 158, n. 1, p. 183–193, 2004.

BROTCORNE, L.; LAPORTE, G.; SEMET, F. Ambulance location and relocation models. *European journal of operational research*, Elsevier, v. 147, n. 3, p. 451–463, 2003.

BROWN, D. E. The regional crime analysis program (recap): a framework for mining data to catch criminals. In: IEEE. *Systems, Man, and Cybernetics, 1998. 1998 IEEE International Conference on*. [S.l.], 1998. v. 3, p. 2848–2853.

BUDGE, S.; INGOLFSSON, A.; ERKUT, E. Technical note—approximating vehicle dispatch probabilities for emergency service systems with location-specific service times and multiple units per location. *Operations Research*, v. 57, n. 1, p. 251–255, 2009. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1287/opre.1080.0591>).

BUDGE, S.; INGOLFSSON, A.; ERKUT, E. Technical note—approximating vehicle dispatch probabilities for emergency service systems with location-specific service times and multiple units per location. *Operations Research*, v. 57, n. 1, p. 251–255, 2009. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1287/opre.1080.0591>).

CANÇADO, T. E. M. L. *Alocação e Despacho de Recursos para Combate à Criminalidade*. Belo Horizonte, MG, Brasil: [s.n.], 2005. 111 p.

- CARTER, G. M.; CHAIKEN, J. M.; IGNALL, E. Response areas for two emergency units. *Operations Research*, INFORMS, v. 20, n. 3, p. 571–594, 1972.
- CERQUEIRA, D. *O jogo dos sete mitos e a miséria da segurança pública no Brasil*. Rio de Janeiro: IPEA, 2005.
- CHAIKEN, I. Patrol car allocation model: Executive sumwry. 1975.
- CHAIKEN, J. M.; DORMONT, P. *A patrol car allocation model*. [S.l.], 1976.
- CHAIKEN, J. M.; DORMONT, P. A patrol car allocation model: Background. *Management Science*, INFORMS, v. 24, n. 12, p. 1280–1290, 1978.
- CHAIKEN, J. M.; DORMONT, P. A patrol car allocation model: Capabilities and algorithms. *Management Science*, INFORMS, v. 24, n. 12, p. 1291–1300, 1978.
- CHAIKEN, J. M.; LARSON, R. C. Methods for allocating urban emergency units: a survey. *Management Science*, INFORMS, v. 19, n. 4-part-2, p. P110–P130, 1972.
- CHAWATHE, S. S. Organizing hot-spot police patrol routes. In: IEEE. *Intelligence and Security Informatics, 2007 IEEE*. [S.l.], 2007. p. 79–86.
- CHEN, H. et al. Coplink: Managing law enforcement data and knowledge. *Commun. ACM*, ACM, New York, NY, USA, v. 46, n. 1, p. 28–34, jan. 2003. ISSN 0001-0782. Disponível em: <http://doi.acm.org/10.1145/602421.602441>.
- CHEN, X. Police patrol optimization with security level functions. *Systems, Man, and Cybernetics: Systems, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 43, n. 5, p. 1042–1051, 2013.
- CHIYOSHI, F.; IANNONI, A. P.; MORABITO, R. A tutorial on hypercube queueing models and some practical applications in emergency service systems. *Pesquisa Operacional*, SciELO Brasil, v. 31, n. 2, p. 271–299, 2011.
- CHIYOSHI, F. Y.; MORABITO, R. A tabu search algorithm for solving the extended maximal availability location problem. *International Transactions in Operational Research*, Wiley Online Library, v. 18, n. 6, p. 663–678, 2011.
- CHURCH, R.; REVELLE, C. The maximal covering location problem. *Papers of the Regional Science Association*, Springer-Verlag, v. 32, n. 1, p. 101–118, 1974. ISSN 0486-2902. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01942293>.
- CHURCH, R.; VELLE, C. R. The maximal covering location problem. *Papers in regional science*, Wiley Online Library, v. 32, n. 1, p. 101–118, 1974.
- CIHAN, A.; ZHANG, Y.; HOOVER, L. Police response time to in-progress burglary a multilevel analysis. *Police Quarterly*, SAGE Publications, v. 15, n. 3, p. 308–327, 2012.
- COHEN, L. E.; FELSON, M. Social change and crime rate trends: A routine activity approach. *American Sociological Review*, American Sociological Association, v. 44, n. 4, p. pp. 588–608, 1979. ISSN 00031224. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2094589>.
- COLTON, K. W. The impact and use of computer technology by the police. *Commun. ACM*, ACM, New York, NY, USA, v. 22, n. 1, p. 10–20, jan. 1979. ISSN 0001-0782. Disponível em: <http://doi.acm.org/10.1145/359046.359049>.

COUPE, R. T.; BLAKE, L. The effects of patrol workloads and response strength on arrests at burglary emergencies. *Journal of Criminal Justice*, Elsevier, v. 33, n. 3, p. 239–255, 2005.

CURTIN, K. M.; HAYSLETT-MCCALL, K.; QIU, F. Determining optimal police patrol areas with maximal covering and backup covering location models. *Networks and Spatial Economics*, Springer, v. 10, n. 1, p. 125–145, 2010.

D'AMICO, S. J. et al. A simulated annealing approach to police district design. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 29, n. 6, p. 667–684, 2002.

D'AMICO, S. J. et al. A simulated annealing approach to police district design. *Computers & Operations Research*, v. 29, n. 6, p. 667 – 684, 2002. ISSN 0305-0548. Location Analysis. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054801000569>.

DELL'OLMO, P.; RICCIARDI, N.; SGALAMBRO, A. A multiperiod maximal covering location model for the optimal location of intersection safety cameras on an urban traffic network. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, v. 108, n. 0, p. 106 – 117, 2014. ISSN 1877-0428. Operational Research for Development, Sustainability and Local Economies. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042813054645>.

FARAHANI, R. Z. et al. Covering problems in facility location: A review. *Computers & Industrial Engineering*, v. 62, n. 1, p. 368 – 407, 2012. ISSN 0360-8352. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S036083521100249X>.

FURTADO, V.; VASCONCELOS, E. Geosimulation in education : The expertcop system. In: *Agent based simulation workshop proceedings*. [S.l.: s.n.], 2004. v. 5.

Fórum Nacional de Segurança Pública. *8º Anuário de Segurança Pública*. [S.l.], 2013. Disponível em: http://www.forumseguranca.org.br/storage/download/anuario_2014_20150309.pdf.

GASS, S. I. On the division of police districts into patrol beats. In: *Proceedings of the 1968 23rd ACM National Conference*. New York, NY, USA: ACM, 1968. (ACM '68), p. 459–473. Disponível em: <http://doi.acm.org/10.1145/800186.810609>.

GLOVER, F.; KOCHENBERGER, G. A. *Handbook of metaheuristics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2003.

GOMES, R. C. Prevenir o crime organizado : inteligência policial, democracia e difusão de conhecimento. *Revista do Tribunal Federal da 1ª Região*, BDJur, v. 21, n. 8, p. 39–54, 2009.

GREEN, L. V.; KOLESAR, P. J. Anniversary article: Improving emergency responsiveness with management science. *Management Science*, v. 50, n. 8, p. 1001–1014, 2004. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1287/mnsc.1040.0253>.

GURGEL, A. M.; FERREIRA, R. J. P.; ALOISE, D. J. Modelagem de problemas da segurança pública : Uma proposta de modelos para a localização de bases policiais e roteirização de viaturas. In: *Anais XXX Encontro Nacional de Engenharia de Produção*. [s.n.], 2010. (ENEGEP 2010). Disponível em: http://www.abepro.org.br/biblioteca/enegep2010_tn_sto_118.772_15937.pdf.

JARVIS, J. P. Approximating the equilibrium behavior of multi-server loss systems. *Management Science*, INFORMS, v. 31, n. 2, p. 235–239, 1985.

KELLING, G. L. et al. The kansks cily preventive patrol experiment. 1974.

KESKIN, B. B. et al. Analysis of an integrated maximum covering and patrol routing problem. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, v. 48, n. 1, p. 215 – 232, 2012. ISSN 1366-5545. Select Papers from the 19th International Symposium on Transportation and Traffic Theory. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1366554511000895>.

KESKIN, B. B. et al. Analysis of an integrated maximum covering and patrol routing problem. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, v. 48, n. 1, p. 215 – 232, 2012. ISSN 1366-5545. Select Papers from the 19th International Symposium on Transportation and Traffic Theory. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1366554511000895>.

LARSON, R. C. A hypercube queuing model for facility location and redistricting in urban emergency services. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 1, n. 1, p. 67–95, 1974.

LARSON, R. C. Approximating the performance of urban emergency service systems. *Operations Research*, INFORMS, v. 23, n. 5, p. 845–868, 1975.

LARSON, R. C. What happened to patrol operations in kansas city? a review of the kansas city preventive patrol experiment. *Journal of criminal justice*, Elsevier, v. 3, n. 4, p. 267–297, 1976.

LARSON, R. C.; RICH, T. F. Travel-time analysis of new york city police patrol cars. *Interfaces*, v. 17, n. 2, p. 15–20, 1987. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1287/inte.17.2.15>.

LAU, H. et al. Optimizing patrol force deployment using a genetic algorithm. *Expert Systems with Applications*, v. 37, n. 12, p. 8148 – 8154, 2010. ISSN 0957-4174. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417410004847>.

LAU, H. et al. Optimizing patrol force deployment using a genetic algorithm. *Expert Systems with Applications*, v. 37, n. 12, p. 8148 – 8154, 2010. ISSN 0957-4174. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417410004847>.

LESTE. *Terra Crime*. Laboratório de Estatística Espacial, 2014. Disponível em: <http://www.est.ufmg.br/leste/terracrime.htm,2014>.

LI, L. et al. Police patrol service optimization based on the spatial pattern of hotspots. In: *Service Operations, Logistics, and Informatics (SOLI), 2011 IEEE International Conference on*. [S.l.: s.n.], 2011. p. 45–50.

LIN, K. Y. et al. A graph patrol problem with random attack times. *Operations Research*, v. 61, n. 3, p. 694–710, 2013. Disponível em: <http://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/opre.1120.1149>.

LIN, K. Y. et al. A graph patrol problem with random attack times. *Operations Research*, INFORMS, v. 61, n. 3, p. 694–710, 2013.

MALTZ, M. D. From poisson to the present: Applying operations research to problems of crime and justice. *Journal of Quantitative Criminology*, Springer, v. 12, n. 1, p. 3–61, 1996.

MELO, A.; FURTADO, V.; COELHO, A. L. Descoberta automática de pontos de saída de criminosos em áreas urbanas: uma abordagem genética acoplada a um modelo de simulação baseado em inteligência coletiva. *Encontro Nacional de Inteligência Artificial*, v. 6, 2007.

MENDES, N. F. M.; SANTOS, A. G. d. Heurística baseada em busca tabu para o posicionamento de unidades policiais. In: . [S.l.: s.n.]. (XLI CLEI).

MENDES, N. F. M.; SANTOS, A. G. d.; GONÇALVES, L. B. Métodos para o problema de posicionamento de unidades policiais. In: *Anais do XLVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*. [s.n.], 2014. (XLVI SBPO), p. 639–650. Disponível em: <http://www.din.uem.br/sbpo/sbpo2014/pdf/arq0214.pdf>.

MLADENOVIC, N.; HANSEN, P. Variable neighborhood search. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 24, n. 11, p. 1097–1100, 1997.

PAL, B. B. et al. An application of genetic algorithm method for solving patrol manpower deployment problems through fuzzy goal programming in traffic management system: a case study. *International Journal of Bio-Inspired Computation*, Inderscience, v. 4, n. 1, p. 47–60, 2012.

PERRUCCI, A. Algoritmi esatti per la ricerca di strategie ottime nel problema di pattugliamento con singolo pattugliatore. Italy, 2011.

RAJAGOPALAN, H. K.; SAYDAM, C. A minimum expected response model: Formulation, heuristic solution, and application. *Socio-Economic Planning Sciences*, Elsevier, v. 43, n. 4, p. 253–262, 2009.

RAJAGOPALAN, H. K. et al. Ambulance deployment and shift scheduling: An integrated approach. *Journal of Service Science and Management*, Scientific Research Publishing, v. 4, n. 01, p. 66, 2011.

RAJAGOPALAN, H. K.; SAYDAM, C.; XIAO, J. A multiperiod set covering location model for dynamic redeployment of ambulances. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 35, n. 3, p. 814–826, 2008.

RALPHS, T. K.; GÜZELSOY, M. The symphony callable library for mixed integer programming. In: *The next wave in computing, optimization, and decision technologies*. [S.l.]: Springer, 2005. p. 61–76.

RUAN, S. et al. *Patrolling in a stochastic environment*. [S.l.], 2005.

RUAN, S. et al. *Patrolling in a stochastic environment*. [S.l.], 2005.

SALADIN, B. A. Goal programming applied to police patrol allocation. *Journal of Operations Management*, Elsevier, v. 2, n. 4, p. 239–249, 1982.

SALADIN, B. A. Goal programming applied to police patrol allocation. *Journal of Operations Management*, v. 2, n. 4, p. 239 – 249, 1982. ISSN 0272-6963. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0272696382900122>.

- SALADIN, B. A. Simulation of a police patrol activity. *Omega*, v. 11, n. 4, p. 377 – 384, 1983. ISSN 0305-0483. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0305048383900300>.
- SCHMID, V.; DOERNER, K. F. Ambulance location and relocation problems with time-dependent travel times. *European journal of operational research*, Elsevier, v. 207, n. 3, p. 1293–1303, 2010.
- SILVA, L. A. M. d. Sociabilidade violenta: por uma interpretação da criminalidade contemporânea no brasil urbano. *Sociedade e Estado*, scielo, v. 19, p. 53 – 84, 06 2004. ISSN 0102-6992. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0102-69922004000100004&nrm=iso.
- SIMPSON, N.; HANCOCK, P. Fifty years of operational research and emergency response. *Journal of the Operational Research Society*, Nature Publishing Group, p. S126–S139, 2009.
- SMITH, R. D. *Computer applications in police manpower distribution*. [S.l.]: Field Service Division, International Association of Chiefs of Police, 1961.
- SU, Z.; FU, Y.; LIU, Y. A two-level model for police patrol problem with emergency responses. In: _____. *ICLEM 2010*. [s.n.], 2010. cap. 101, p. 734–740. Disponível em: <http://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/41139%28387%29102>.
- TAKAMIYA, M.; WATANABE, T. Planning high responsive police patrol routes with frequency constraints. In: *Proceedings of the 5th International Conference on Ubiquitous Information Management and Communication*. New York, NY, USA: ACM, 2011. (ICUIMC '11), p. 87:1–87:8. ISBN 978-1-4503-0571-6. Disponível em: <http://doi.acm.org/10.1145/1968613.1968716>.
- TAKEDA, R. A.; WIDMER, J. A.; MORABITO, R. Analysis of ambulance decentralization in an urban emergency medical service using the hypercube queueing model. *Computers & Operations Research*, Elsevier, v. 34, n. 3, p. 727–741, 2007.
- TALBI, E.-G. Metaheuristics: from design to implementation. In: _____. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009. v. 74.
- TELEP, C. W.; WEISBURD, D. What is known about the effectiveness of police practices in reducing crime and disorder? *Police Quarterly*, Sage Publications, p. 1098611112447611, 2012.
- VASCONCELOS, D. d. *GAPatrol - Uma abordagem evolutiva para otimização de rotas de patrulha policial via calibração de simulação multiagens*. Fortaleza: Fundação Edson Queiroz, 2008.
- WAISELFISZ, J. J. *Mapa da Violência 2013. Homicídio e Juventude no Brasil*. [S.l.], 2013.
- WEISBURD, D.; ECK, J. E. What can police do to reduce crime, disorder, and fear? *The Annals of the American Academy of Political and Social Science*, Sage Publications, v. 593, n. 1, p. 42–65, 2004.
- ZHANG, Y.; BROWN, D. Police patrol districting method and simulation evaluation using agent-based model & gis. *Security Informatics*, v. 2, p. 1–13, 03/2013 2013. ISSN 2190-8532.

ZHANG, Y.; BROWN, D. Simulation optimization of police patrol district design using an adjusted simulated annealing approach. In: *Proceedings of the Symposium on Theory of Modeling & Simulation - DEVS Integrative*. San Diego, CA, USA: Society for Computer Simulation International, 2014. (DEVS '14), p. 18:1–18:8. Disponível em: <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=2665008.2665026>.

ZHANG, Y.; BROWN, D. Simulation optimization of police patrol districting plans using response surfaces. *Simulation*, Sage Publications, v. 90, n. 6, p. 687–705, 2014.

ZHANG, Y. et al. A comparison of evaluation methods for police patrol district designs. In: IEEE PRESS. *Proceedings of the 2013 Winter Simulation Conference: Simulation: Making Decisions in a Complex World*. [S.l.], 2013. p. 2532–2543.