

ALBERTINO GOMES DA SILVA JÚNIOR

INTERAÇÃO MÁGNON-FÔNON E O MOMENTO  
ANGULAR DO FÔNON

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientador: Jakson Miranda Fonseca

Coorientador: Vagson Luiz de C. Santos

VIÇOSA - MINAS GERAIS

2020

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade  
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

S586i  
2020

Júnior, Albertino Gomes da Silva, 1995-  
Interação mágnon-fônon e o momento angular do fônon /  
Albertino Gomes da Silva Júnior. – Viçosa, MG, 2020.  
81 f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Inclui apêndice.

Orientador: Jackson Miranda Fonseca.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f.79-81.

1. Teoria quântica. 2. Fonons. 3. Momentos angulares.  
4. Simetria (Física). 5. Magnetismo. I. Universidade Federal de  
Viçosa. Departamento de Física. Programa de Pós-Graduação  
em Física. II. Título.

CDD 22. ed. 530.12

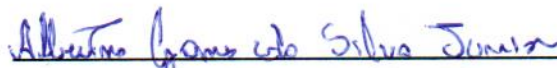
ALBERTINO GOMES DA SILVA JÚNIOR

INTERAÇÃO MÁGNON-FÔNON E O MOMENTO  
ANGULAR DO FÔNON

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 05 de novembro de 2020


Assentimento:



---

Albertino Gomes da Silva Júnior

Autor



---

Jakson Miranda Fonseca

Orientador

*Aos meus pais, que fazem os sonhos serem maiores do que as limitações.*

# Agradecimentos

Desejo exprimir os meus agradecimentos a todos aqueles que, de alguma forma, permitiram que esta dissertação se concretizasse.

Em primeiro lugar quero agradecer a Deus, por todos os obstáculos que Deus colocou em meu caminho. No momento de dificuldade posso não te compreendido, mas quando superados, reconheço na paisagem a lição que Ele me deu. Obrigado, meu Deus, por me dares muito mais do que eu preciso, e por me abençoares muito mais do que eu mereço!. Oração, alegria e gratidão, hoje e sempre. Amém!.

Ao Prof. Dr. Jakosn Foncesa, da UFV-DPF, o ter-me deixado fazer parte do seu grupo de trabalho e, ter acreditado em mim e nas minhas capacidades. Agradeço ainda o trato simples, correcto e científico, com que sempre abordou as nossas reuniões de trabalho, sem nunca ter permitido que o desalento se instalasse, mesmo quando as coisas não corriam bem. Agradeço-lhe ainda o tema do trabalho, que sempre me aliciou, o que fez, a maioria das vezes, conseguir ultrapassar dificuldades surgidas.

Aos meus pais e meu irmão, sinônimo de amor e união. Obrigada por acreditar no meu sonho e sempre me motivar a seguir em frente. Nunca mediram esforços para me ensinar o caminho do bem, e sempre me apoiaram em todas as etapas da minha vida. Sem vocês, eu não chegaria até aqui. Apesar de todos os desafios, sempre superamos juntos. É muito bom saber que posso contar com vocês em todos os momentos. Amo vocês!.

Izabella, meu amor. Seu apoio e companheirismo foi de suprema importância. Você, além do seu carinho e amor, torna a minha vida melhor a cada dia mais. Você me ensina, me encoraja e me melhora, simples assim. As minhas conquistas e os meus sonhos têm um sabor melhor junto a você.

A todos os colegas que, para além da amizade e estímulo, colaboraram de alguma forma na obtenção de dados fundamentais, discussões temáticas ou somente, mas não menos importante, na criação de um bom ambiente de trabalho.

Meu Deus, quero muito Te agradecer pela família que tenho. Problemas todos nós enfrentamos e dias difíceis sempre haverá em todas as casas, mas nós confiamos plenamente na Tua orientação e o resultado é uma união muito forte entre nós.

À Universidade Federal de Viçosa, pela oportunidade de realizar a pós-graduação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

*“O que eu faço, é uma gota no meio de um oceano. Mas sem ela, o oceano será menor.”  
Madre Teresa de Calcutá.*

# Resumo

JÚNIOR, Albertino Gomes da Silva, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, novembro de 2020. **Interação mágnon-fônon e o momento angular do fônon**. Orientador: Jakson Miranda Fonseca. Coorientador: Vagson Luiz de Carvalho Santos.

Seguindo uma tendência atual da pesquisa em magnetismo quântico, o objeto do estudo desta dissertação é compreender sistemas com interação entre fônons e mágnons, em um material ferromagnético submetido a um campo magnético variável no tempo  $\vec{H}(t)$ . O sistema magneto elástico foi objeto de estudo primeiramente semi-classicamente, onde os resultados mostram, entre outros fenômenos, que em certas condições é possível converter, completamente, um estado de vibrações dos spins (mágnons) em vibrações da rede (fônons). A fim de averiguar sobre as características do fônon convertido do sistema de mágnons, foi analisado a possibilidade do spin do mágnon ser conservado no sistema. Foi relacionado o problema com o caso do campo eletromagnético. Portanto, dividimos o momento angular total associado a deformações elásticas na parte orbital e na parte devida ao spin do fônon, demonstrando o equilíbrio do momento angular com o auxílio da teoria quântica do relaxamento de spin no ambiente elástico. Neste trabalho a teoria quântica do relaxamento fônon-spin, assim observamos o retorno do sistema magneto elástico perturbado ao equilíbrio, encontrando o momento angular no eixo  $\hat{z}$ , equivalente ao spin do sistema em questão, ou seja, o spin do fônon. Nessa dissertação foi estudada também a quebra espontânea de simetria, propomos uma ideia de teoria na qual devido a quebra espontânea de simetria no sistema magneto elástico é aniquilado o bóson de Goldstone do sistema magnético (mágnon), convertendo em grau de liberdade no sistema, nesse caso, o fônon adquirindo spin, conservando o grau de liberdade do sistema magneto elástico.

Palavras-chaves: Teoria quântica. Fônon. Mágnon. Momento angular. Simetria. Magnetismo.

# Abstract

JÚNIOR, Albertino Gomes da Silva, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, November, 2020. **Interaction magnon-phonon and angular momentum of phonons.** Adviser: Jakson Miranda Fonseca. Co-adviser: Vagson Luiz de Carvalho Santos.

This theasy fallow a tendency in the research of quantum magnetism, the object of study of this theasis, is comprenhend system with interaction between phonons and magnons, when a ferromagnetic material is exposed to a external time-varying magnetic field  $\vec{H}(t)$ . The magneto-elastic system it was analyzed from semi-classical aproach, the results showed that in specific conditions a state of spin (magnons) can be converted entirely into a network vibrations (phonons). Therefore, in order to examine a regarding this characteristic of phonon converted into a magnon system, the possibility of the magnon spin being conserved in the system was analyzed and connect with the electromagnetic field. In this way, we separete the total angular moment, in the elastic deformations associated with the orbital angular moment and the elastic deformation associated with spin phonon, it thus demonstrating the equilibrium of angular momentum, with the contribution of the quantum theory of spin relaxation on the cristal lattices. In this work it was observed the return of pertubed elastic magnetics system to equilibrium, finding like this the angular momentum on the axis  $\hat{z}$ , equivalent to the spin of the system in question, that is, the phonon spin. In this Thesis was studied too, the symmetry breaking. We propose an ideia wherein due to the symmetry breaking of the magneto-elastic system, happen innihilation procces at the Goldstone boson of magneto system, transforming a degree of freedom of the system, in this way converting the degree of freedom in the system. Thus the phonon conserve the degree of magneto elastic system.

Keywords: Quantum theory. Phonon. Magnon. Angular momentum. Symmetry. Magnetism.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação esquemática dos deslocamentos dos íons da rede. Fonte: ref.[5]. . . . .	13
Figura 2 – Ramo ótico e ramo acústico da relação de dispersão para uma rede linear diatômica, sendo as frequências limites para $k = 0$ e $k = \frac{\pi}{a}$ . Fonte: ref.[4]. . . . .	14
Figura 3 – Sistema de coordenadas e vetores de polarização para vetores de onda. Fonte: ref. [7]. . . . .	15
Figura 4 – Polarização circular do Fônon. Fonte: ref. [8]. . . . .	18
Figura 5 – Comportamento dinâmico coletivo de spins individuais acopladas entre si, representando a forma de onda. Fonte: ref. [10]. . . . .	20
Figura 6 – Diagrama de Feynman para representar a interação mágnon-fônon descrito por (2.39). Fonte: ref. [14]. . . . .	25
Figura 7 – Comparação da relação de dispersão dos modos normais $W_A(k)$ e $W_B(k)$ em comparação as relações de dispersão dos fônons ( $\omega_f(k)$ ) e mágnons ( $\omega_m(k)$ ). Fonte: ref. [7]. . . . .	30
Figura 8 – Representação das frequências dos fônons e mágnons aplicado a um campo magnético variável no tempo $\vec{H}(t)$ na região de cruzamento. Fonte: ref. [15]. . . . .	31
Figura 9 – Variação do campo magnético externo $\vec{H}(t)$ entre o intervalo de tempo $t_1$ e $t_2$ . . . . .	32
Figura 10 – Representação do momento angular orbital $\vec{L}_1$ e momento angular de spin $\vec{L}_2$ . Fonte: ref. [2]. . . . .	41
Figura 11 – Representação do fônon-spin na rede. Fonte: Ref. [22]. . . . .	60
Figura 12 – Representação do potencial para $m^2 > 0$ (esquerda) e $m^2 < 0$ (direita). Fonte: ref.[27]. . . . .	64

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>INTERAÇÃO MÁGNON-FÔNON</b>	<b>12</b>
2.1	Ondas elásticas	12
2.2	Ondas de spin	19
2.3	Interação Mágnon-Fônon	23
2.4	Conversão Mágnon-Fônon em Campos Magnéticos Variáveis no Tempo	31
<b>3</b>	<b>MOMENTO ANGULAR DO FÔNON</b>	<b>40</b>
3.1	Conservação dos momentos angulares: orbital e intrínseco	40
3.2	Relaxamento de fônon-spin: Operador Fônon-Spin	49
3.3	Momento Angular intrínseco do Fônon-Spin	57
<b>4</b>	<b>QUEBRA DE SIMETRIA E CONSERVAÇÃO DOS GRAUS DE LIBERDADE</b>	<b>61</b>
4.1	Teorema de Goldstone	62
4.2	Mecanismo de Higgs	65
4.3	Teoria de conversão magnon-fônon	68
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>73</b>
<b>A</b>	<b>APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE HOLSTEIN-PRIMAKOFF NAS ENERGIAS DE INTERAÇÃO</b>	<b>75</b>
	<b>Referências</b>	<b>79</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Avanços recentes no campo emergente da spintrônica, estimularam um interesse renovado em fenômenos que envolvem a interação entre ondas de spin, excitações coletivas de spins em materiais magnéticos que quantizam como mágnons e as ondas elásticas, que surgem de excitações na rede cristalina, que quantizam como fônons. Nos isolantes magnéticos, devido às propriedades magnetorrestritivas dos materiais, ou seja, vibrações dos spins provocam vibrações da rede, as ondas de spin podem se tornar fortemente acopladas às ondas elásticas, formando ondas magneto-elásticas (uma excitação híbrida de mágnon-fônon).

Nesta dissertação vamos discutir o problema do ponto de vista da Teoria Quântica de Campos (TQC), onde, spins e deslocamentos da rede cristalina são descritos por campos. A ligação entre a teoria de campos, partículas e a matéria condensada tem se mostrado muito fecunda para ambos os ramos de pesquisa. A interação entre campos é introduzida através da adição de um hamiltoniano semi-fenomenológico de interação aos hamiltonianos dos campos livres. Como o trabalho de Holanda e colaboradores [1], trouxe grande motivação para a pesquisa teórica a fim de elucidar sobre o estudo do spin adquirido pelo fônon. Devido à interação do sistema magneto elástico, foi relatado o experimento em um filme do isolante ferrimagnético de granada de ferro-ítrio sob um campo magnético não uniforme, demonstrando a conversão de mágnons coerentes gerados por um campo de micro-ondas em fônons que têm momento angular. O trabalho [1], por conseguinte obtiveram as medidas por meio da difusão da luz Brillouin mostrando que a conversão mágnon-fônon ocorre com energia constante e momento linear variável, sendo a luz espalhada pelos fônons polarizada circularmente, demonstrando assim que os fônons têm momento angular. Embora esteja bem estabelecido que fótons carregam spin, o spin dos fônons tem pouca atenção na literatura. Assim trabalhamos com a diagonalização do Hamiltoniano total, no caso de campo magnético estático, de uma maneira que torna clara a correspondência dos operadores de campos com as grandezas físicas. Portanto são estudadas outras grandezas, além da energia, sendo assim obtidos os operadores de momento linear e de spin dos campos em interação. Consequentemente é demonstrada a conservação do momento angular, desta forma, obtém-se leis de conservação, demonstrando que de fato ocorre a conversão mágnon-fônon (fônon com momento angular).

O problema da conservação do momento angular em sistemas contendo momentos magnéticos já vem sendo há anos bem compreendido, devido a vários estudos, como por exemplo o trabalho primordial da área, o Efeito Einstein-de Haas, fenômeno físico no qual uma mudança no momento magnético de um corpo suspenso (livre) faz com que ele rotacione (gire). Anos depois foi observado que persistindo a rotação possa causar o

surgimento de uma ligeira magnetização no corpo suspenso inicialmente desmagnetizada, chamada de efeito Barnett. Surpreendentemente, mecanismos microscópicos da transferência do momento angular do spin para o sistema fônon e subsequentemente ao corpo como um todo, permanecem pouco compreendidos mesmo para um único spin em um cristal. Dando continuidade para a melhor compreensão sobre a interação mágnon-fônon, analisamos a conservação do momento angular no sistema por completo. Por meio, do trabalho ref. [2], investigamos o momento angular por meio do processo de relaxamento de um único spin atômico em um corpo macroscópico. Ao desenvolver uma abordagem semelhante à dos fótons, descobrimos que, dentro da teoria elástica, o momento angular dos fônons pode ser naturalmente dividido entre a parte orbital corresponde à rotação do meio elástico em torno de um certo ponto, enquanto a parte de spin corresponde a deslocamentos de torções circulares de pequeno raio dos pontos do meio elástico em torno de suas posições de equilíbrio.

A importância de uma teoria quântica de campos surgiu da necessidade de descrever à natureza efêmera da vida. A quebra espontânea de simetria é um mecanismo que primeiramente surgiu em física da matéria condensada. Como o exemplo considere um ferromagneto com spins desordenados, tal sistema é invariante por rotações, quando se aplica um campo magnético esses spins se alinham na direção do campo magnético, ocorrendo uma quebra de simetria rotacional.

O mecanismo de Higgs, permite através de uma quebra espontânea de simetria a obtenção de massa para as teorias de gauge, é um dos grandes exemplos da correlação entre ideias que surgem originalmente em matéria condensada e se mostram bastante relevantes em física de partículas. Portanto é proposto o desenvolvimento de uma teoria similar ao mecanismo de Higgs, a fim de ilustrar a conservação dos graus de liberdade do sistema e demonstrar o ganho do grau de liberdade no fônon (spin).

## 2 INTERAÇÃO MÁGNON-FÔNON

Uma vez que os parâmetros magnéticos podem ser variados por alguma ação externa, vamos analisar uma teoria quântica da interação entre sistema de magnons e fônons em um material ferromagnético, sujeito primeiramente sob aplicação de campo magnético constante, secundamente sob uma variação temporal do campo magnético. Este problema foi abordado no formalismo semi-clássico e seus resultados mostram, entre outros fenômenos, que em certas condições é possível converter um estado de vibrações da rede (fônons) em vibrações dos spins (mágnons) e vice-versa. Sendo possível a conversão de mágnons em fônons somente se ocorrer a conservação do momento linear e do momento angular de spin, implicando na validação da Hamiltonia que descreve o sistema magnetoelástico e na conservação do vetor de onda do sistema mágnon-fônon, portanto, os fônons convertidos possuem momento angular conservado do sistema de mágnons.

### 2.1 Ondas elásticas

Se fornecermos energia térmica a um sólido cristalino, esta energia será rapidamente dissipada por toda a rede, através da interação mútua entre os átomos. As excitações locais levam, portanto, às vibrações coletivas da rede de átomos. Do ponto de vista teórico, a energia potencial da rede de átomos é expandida numa série de potências do desvio instantâneo em relação à posição de equilíbrio e apenas o primeiro termo não nulo (harmônico) é considerado. Esta é a aproximação harmônica. Com esta aproximação, o Hamiltoniano da rede de átomos pode ser escrito como uma soma de termos independentes com a forma de hamiltonianos de osciladores harmônicos. Esta é a base da quantização, com ela, da descrição das vibrações da rede cristalina como um gás de fônons não interativos. A inclusão de termos anarmônicos de ordem superior implica uma interação entre fônons [3].

Os fônons equivalem a um tipo especial de movimento vibratório, conhecido como modos normais de vibração em mecânica clássica, em que cada parte de uma rede oscila com a mesma frequência, sendo os modos normais, vibrações elementares de uma rede. Cada modo de vibração, caracterizado por uma frequência, apresenta uma energia de vibração da rede que é quantizada. Um "quantum" de energia é chamado fônon, em analogia com o fóton para as ondas eletromagnéticas. As ondas elásticas nos cristais são constituídas por fônons. Os fônons são bósons que possuem spin zero. As vibrações térmicas nos cristais produzem fônons termicamente excitados [4]. O estudo dos fônons é importante na física do estado sólido por facilitar a compreensão de muitas propriedades dos sólidos, como por exemplo: calor específico, condução térmica, condutividade elétrica

e propagação do som.

Se um íon da rede cristalina é deslocado de sua posição de repouso, sobre ele age uma força restauradora, deslocando os íons vizinhos, como podemos observar na fig.1, onde a distância entre os íons deslocados  $\vec{x}'$  e os íons na posição de origem no sólido  $\vec{x}$  se dá pelo vetor de deslocamento,

$$\vec{R}(\vec{x}) = \vec{x}' - \vec{x}. \quad (2.1)$$

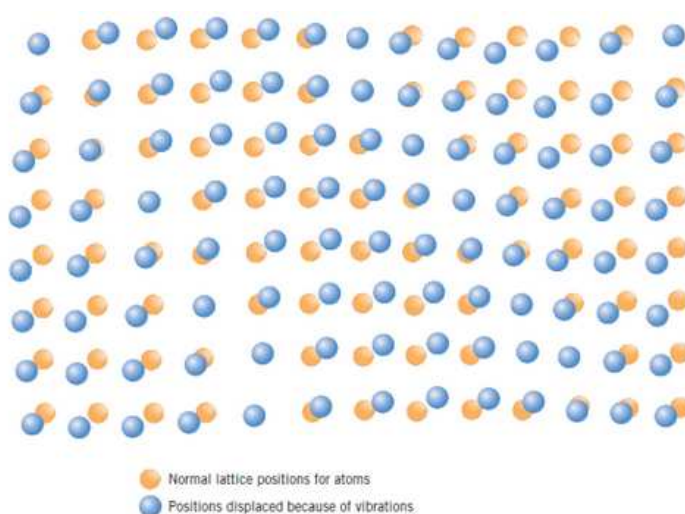


Figura 1 – Representação esquemática dos deslocamentos dos íons da rede. Fonte: ref.[5].

Pela segunda lei de Newton, podemos escrever a equação de movimento,

$$M \frac{d^2 \vec{R}(\vec{x})}{dx^2} = \vec{F}(\vec{x}), \quad (2.2)$$

onde encontramos  $\omega(\vec{k})$ , que representa a dispersão das frequências em função do vetor de onda  $\vec{k}$ , sendo  $M$  a massa de um átomo. Aplicando à situação onde há deslocamentos dos átomos ao longo da cadeia (no eixo  $\hat{x}$  do deslocamento) e perpendicularmente à cadeia, isto é, segundo o plano  $\hat{y}\hat{z}$ , para a onda que se propaga segundo  $\hat{x}$ . As vibrações ao longo da cadeia são as longitudinais e as vibrações perpendiculares à cadeia são as transversais, ou seja, um ramo longitudinal (as ondas que se propagam na mesma direção dos deslocamentos dos átomos) e dois ramos transversais (ondas que se propagam perpendicularmente aos deslocamentos dos átomos).

A velocidade do som é dada pela velocidade do grupo de ondas [4],

$$v_g = \frac{d\omega(\vec{k})}{dk}, \quad (2.3)$$

a velocidade de grupo é a velocidade da transmissão da energia no meio. Consideremos agora o caso mais complicado, uma cadeia linear de átomos com o mesmo espaçamento,

mas com massas diferentes. Aplicado nas equações de movimento, encontramos novas relações de dispersões  $\omega(\vec{k})$ , como vemos na fig.2, onde foi atribuído valores a  $\vec{k}$ ,  $k = 0$  e  $k = \frac{\pi}{a}$ . Sendo "a" o espaçamento entre átomos, surgem assim em geral, para o caso com "r" átomos por célula unitária, 3 ramos acústicos e  $3(r - 1)$  ramos ópticos.

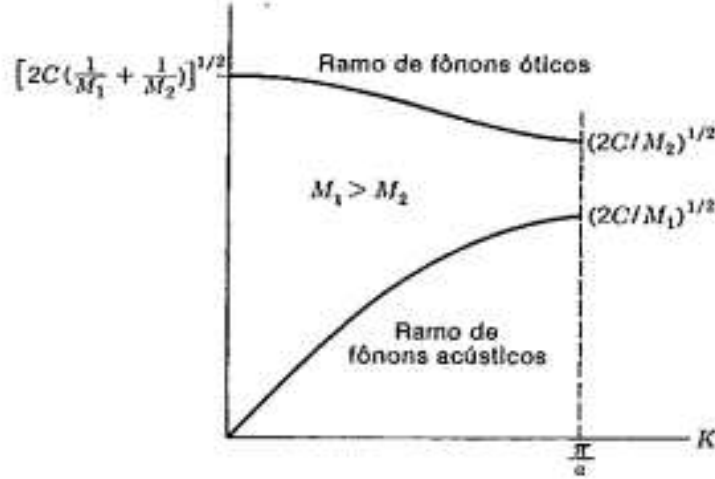


Figura 2 – Ramo ótico e ramo acústico da relação de dispersão para uma rede linear diatômica, sendo as frequências limites para  $k = 0$  e  $k = \frac{\pi}{a}$ . Fonte: ref.[4].

Podemos observar na fig.2 que as massas da rede diatômica são diferentes ( $M_1 > M_2$ ), mas com a mesma constante da força entre átomos separados  $C$ . Podemos concluir que os ramos de mais baixas energias em  $k = 0$ , os ramos acústicos, enquanto que os ramos de maior frequências, correspondem a ramos ópticos. Vamos considerar nesse trabalho os ramos acústicos, devido à baixa energia para excitá-los.

Como estamos considerando uma aproximação harmônica, podemos descrever a Hamiltoniana levando em conta os modos acústicos com vetores de ondas longos  $\vec{k}$  em um cristal isotrópico, assim teremos a Hamiltoniana composta por uma parte cinética e uma potencial.

A densidade de energia de deformação descreve à parte potencial, pela dependência só da diferença entre os vetores vizinhos de dois elementos, sendo ela [3],

$$U(\vec{x}) = \frac{\alpha}{2} \frac{\partial R_\mu}{\partial X_\mu} \frac{\partial R_\nu}{\partial X_\nu} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial R_\mu}{\partial X_\nu} \frac{\partial R_\mu}{\partial X_\nu}, \quad (2.4)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes elásticas do material,  $\mu$  e  $\nu$  são índices referentes aos eixos,  $\mu = x, y, z$ . Assumimos que o cristal é elasticamente isotrópico, ou seja, que a energia elástica associada a um determinado estado de deformação é independente da orientação dos eixos cristalinos, assim nosso sistema será invariante por translações, isto é, temos a conservação do momento linear, devido o momento linear ser o gerador de translações. Acontece que devido a esses argumentos auto soluções podem ser classificadas rigorosamente como

longitudinais ou transversais quando a densidade de energia elástica é isotrópica. Cristais cúbicos com células primitivas grandes, como granada de ferro-ítrio, são elasticamente isotrópicos [3].

Para a parte cinética, temos que a Lagrangiana  $L = T - U$ , onde energia cinética em primeira aproximação é escrita como  $T = \frac{\rho}{2} \left( \frac{d\vec{R}}{dt} \right)^2$  e o momento conjugado é  $\Pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{R}} = \rho \dot{R}$  [6]. Assim podemos escrever a parte cinética como  $T = \frac{\Pi^2}{2\rho}$ , onde  $\rho$  é a densidade do cristal.

Portanto, temos a densidade da Hamiltoniana que descreve fônons levando os modos acústicos com comprimento de ondas longo  $k$  em um cristal isotrópico [3],

$$H = \frac{1}{2\rho} \Pi_\mu \Pi_\mu + \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial R_\mu}{\partial \chi_\mu} \frac{\partial R_\nu}{\partial \chi_\nu} + \frac{1}{2} \beta \frac{\partial R_\mu}{\partial \chi_\nu} \frac{\partial R_\mu}{\partial \chi_\nu}, \quad (2.5)$$

$\Pi(x)$  o momento conjugado ao vetor deslocamento  $\vec{R}(\vec{x})$ .

Vamos estabelecer um sistema de referência. A figura 3, mostra os versores  $\hat{e}_x$ ,  $\hat{e}_y$  e  $\hat{e}_z$  da base fixa em que o campo magnético externo nesse trabalho é aplicado em  $\vec{H} = H\hat{e}_z$ , bem como os versores  $\hat{\epsilon}(k, i)$  das bases definidas para cada vetor  $\vec{k}$ .

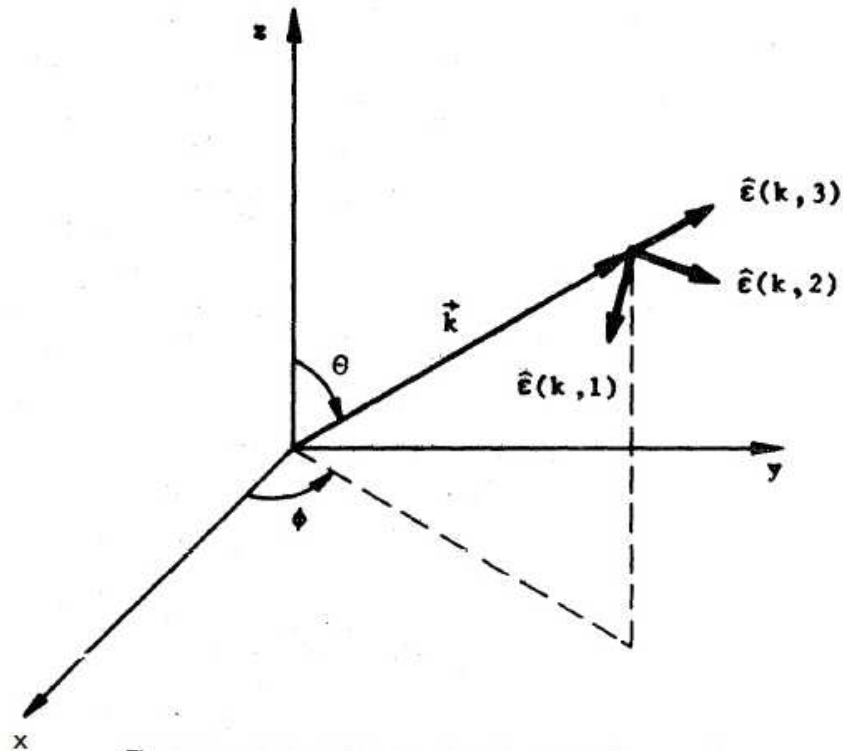


Figura 3 – Sistema de coordenadas e vetores de polarização para vetores de onda. Fonte: ref. [7].

Chamemos  $e_i \cdot \hat{\epsilon}_j(k) = \epsilon_{i,j}(k) = \cos(e_i, \hat{\epsilon}_j(k))$ . Assumimos condições de contorno periódicas sobre um cubo unitário, vamos realizar uma transformada de espaço, ou seja,



definimos as transformações em variáveis fonônicas, sendo útil introduzir o vetor de deslocamento canônico  $Q_i(k)$  e densidade do momento canônico  $P_i(k)$  através das expansões de Fourier [3],

$$R_i(x) = \sum_{k,j} \varepsilon_{i,j}(k) \sqrt{\frac{\hbar}{V}} Q_j(k) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (2.6)$$

$$\prod_i(x) = \sum_{k,j} \varepsilon_{i,j}(k) \sqrt{\frac{\hbar}{V}} P_j(k) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (2.7)$$

onde  $\varepsilon_{i,j}$  é um vetor unitário na direção de polarização do fônon.

A condição de hermeticidade nos dá,

$$(Q_i(k))^* = Q_i(-k), \quad (P_i(k))^* = P_i(-k). \quad (2.8)$$

Substituindo as eqs. (2.6) e (2.7) em (2.5) e fazendo as devidas derivadas, teremos a hamiltoniana total do sistema para fônons,

$$\begin{aligned} H_f &= \frac{1}{2\rho} \sum_{k,j,j'} \hbar \varepsilon_{i,j}(k) \varepsilon_{i,j'}(k') P_j(k) P_{j'}(-k) + \frac{\alpha}{2} \sum_{k,j,j'} \hbar \varepsilon_{i,j}(k) \varepsilon_{i,j'}(k') k_j k_{j'} Q_j(k) Q_{j'}(-k) + \\ &+ \frac{\beta}{2} \sum_{k,j,j'} \hbar \varepsilon_{i,j}(k) \varepsilon_{i,j'}(k') k_j^2 Q_j(k) Q_{j'}(-k). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Já discutido anteriormente, o Hamiltoniano foi construído para ser invariante sob rotação dos eixos do cristal, portanto, podemos escolher as direções dos eixos coordenados como desejamos. Nesse trabalho estamos interessados apenas no caso particular em que todos os  $\vec{k}'$ s são paralelos ao eixo  $\hat{z}$ . Temos portanto  $\hat{\varepsilon}_3(k) \cdot \hat{\varepsilon}_j = \varepsilon_{i,3}(k) k$ .

Dessa forma temos assim a hamiltoniana (2.9), numa forma mais simplificada,

$$H_f = \sum_{k,j} \hbar P_j(k) P_j(-k) + (\beta + \alpha \delta_{\mu,z}) \frac{k}{2} Q_j(k) Q_j(-k), \quad (2.10)$$

temos que  $j = j'$ .

Como nosso intuito é descrever a hamiltoniana para o sistema de fônons com caráter de osciladores harmônicos, devido à aproximação harmônica utilizada, vamos desacoplar os modos  $k$  e  $-k$  evidentes em (2.10) por meios de operadores independentes para descrever o sistema. Para diagonalizar vamos aplicar uma transformação de Bogoliubov com operadores de bóson, onde os operadores respeitam a relação de comutação de bósons,  $[a_j(k), a_{j'}^\dagger(k')] = \delta_{k,k'} \delta_{j,j'}$ . Definimos assim os novos operadores;

$$a_j^\dagger(k) = U(k) P_j(k) + v(k) Q_j(-k), \quad (2.11)$$

$$a_j(k) = U^*(k)P_j(-k) + v^*(k)Q_j(k), \quad (2.12)$$

sendo suas transformadas inversas, os momentos canônicos (2.7) e os vetores de deslocamentos canônicos (2.6) para fônons;

$$P_j(k) = iv^*(k)a_j^\dagger(k) - iv(k)a_j(-k), \quad (2.13)$$

$$Q_j(k) = iU^*(k)a_j^\dagger(-k) + iU(k)a_j(k). \quad (2.14)$$

Substituindo (2.13) e (2.14) em (2.10), levando em conta (2.8), obtemos a densidade Hamiltoniana do sistema com relação aos operadores de criação e aniquilação de fônons. Como queremos descrever o hamiltoniano como uma soma de osciladores harmônicos, pois assim admite uma solução analítica precisa, devemos considerar somente os termos diagonais, com o fim de obter os estados estacionários, ou seja, as autofunções e os autovalores do Hamiltoniano, portanto,

$$\begin{aligned} H_f = & \sum_{k,j} \hbar(X^2|v_j(k)|^2(a_j^\dagger(k)a_j(k) + a_j(-k)a_j^\dagger(-k)) - \\ & - Y^2|U_j(k)|^2(a_j^\dagger(-k)a_j(-k) + a_j(k)a_j^\dagger(k))), \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde as novas variáveis são,  $X^2 = \frac{1}{2\rho}$  e  $Y^2(k) = \frac{k^2}{2}(\beta + \alpha\delta_{j,z})$ .

O Hamiltoniano (2.15) ainda não está exatamente na forma de um conjunto de osciladores harmônicos devido ao acoplamento dos modos  $k$  e  $-k$ . A fim de solucionar esse problema, reorganizamos novos termos, tomando  $U(k) = \sqrt{\frac{X}{2Y}}$ , encontramos  $v(k) = i\sqrt{\frac{Y}{2X}}$ , onde devido a condição de contorno periódica temos que  $\sum_{j,k} a_j^\dagger(k)a_j(k) = \sum_{j,k} a_j^\dagger(-k)a_j(-k)$ , diagonalizando (2.15) em termos dos operadores de bósons,

$$H_f = \sum_{j,k} \hbar\omega_{j,f}(k)(a_j(k)^\dagger a_j(k) + \frac{1}{2}), \quad (2.16)$$

onde temos,

$$\omega_{j,f}(k) = XY = \frac{k}{2} \sqrt{\frac{\beta + \alpha\delta_{jz}}{\rho}}, \quad (2.17)$$

sendo  $\omega_{j,f}$  a frequência clássica de oscilação do fônon para um dado valor do modo  $k$ , onde independe do vetor de onda  $\vec{k}$ , mas difere das ondas transversais ( $j = 1, 2$ ), das ondas longitudinais ( $j = 3$ ).

Vemos que (2.16) está escrito em termos dos operadores de vibrações da rede, representando uma soma de osciladores harmônicos, cada um com valor de modo  $k$ , sendo a energia  $\sum_{j,k} \frac{\hbar\omega_{j,f}(k)}{2}$  a energia de ponto zero (estado fundamental), onde o operador  $a_j^\dagger(k)$  cria um fônon com momento  $\vec{k}$  e  $a_j(k)$  aniquila um fônon com momento  $\vec{k}$ .

Encontramos assim a velocidade de grupo (2.3) levando em conta os modos acústicos com vetores de ondas longos  $\vec{k}$  em um cristal isotrópico, em que o resultado convém, pois o resultado está em termos dos ramos transversais e longitudinal,

$$v_g = \sqrt{\frac{\beta + \alpha\delta_{j,z}}{\rho}}. \quad (2.18)$$

Escrevendo agora (2.6) e (2.7) em relação aos operadores de criação (2.11) e aniquilação (2.12) de fônons, obtemos,

$$R_i = \sum_{k,j} \epsilon_{i,j}(k) \sqrt{\frac{\hbar}{2\rho V \omega_{f,j}(k)}} (a_j^+(k)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a_j(k)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}), \quad (2.19)$$

$$\Pi_i = \sum_{k,j} \epsilon_{i,j}(k) \sqrt{\frac{\hbar\omega_{f,j}(k)}{2V}} i(a_j^+(k)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - a_j(k)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}). \quad (2.20)$$

Como estudaremos a interação mágnon-fônon e os operadores de mágnons são naturalmente de polarização circular, vamos então introduzir operadores de fônons com polarização circular, ou seja, rotacionar os operadores de fônons na rede, como visto na fig.4, por meios das relações [3],

$$a_+^\dagger(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^\dagger(k) + ia_2^\dagger(k)), \quad a_-^\dagger(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^\dagger(k) - ia_2^\dagger(k)), \quad (2.21)$$

$$a_+(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1(k) - ia_2(k)), \quad a_-(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1(k) + ia_2(k)), \quad (2.22)$$

$$\epsilon_{i,+} = \frac{1}{2}(\epsilon_1(k) + i\epsilon_2(k)), \quad \epsilon_{i,-}(k) = \frac{1}{2}(\epsilon_1(k) - i\epsilon_2(k)). \quad (2.23)$$

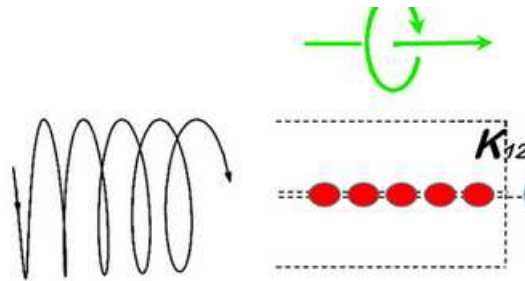


Figura 4 – Polarização circular do Fônon. Fonte: ref. [8].

Como o vetor de onda  $\vec{k}$  em nosso trabalho em particular é direcionado paralelo ao eixo  $\hat{z}$ , devemos introduzir os operadores com polarização circular apenas para as ondas transversais ( $\mu = 1, 2$ ).

Substituindo (2.21)-(2.23) em (2.19) e (2.20), teremos o vetor de deslocamento canônico e a densidade de momento canônico em termos operadores de bosón com polarização circular, respectivamente,

$$R_i = \sum_{k,\mu} \epsilon_{i,\mu}(k) \sqrt{\frac{\hbar}{4\rho V \omega_{f,\mu}(k)}} (a_\mu^\dagger(k) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a_\mu(k) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}), \quad (2.24)$$

$$\Pi_i = \sum_{k,\mu} \epsilon_{i,\mu}(k) i \sqrt{\frac{\hbar \omega_{f,\mu}(k)}{4V}} (a_\mu^\dagger(k) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} - a_\mu(k) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}), \quad (2.25)$$

sendo  $\mu = +, -, 3$ .

Com as devidas substituições, temos (2.16) com os operadores de fônons com polarização circular para o caso particular de propagação ao longo do eixo  $\hat{z}$ , sendo assim,

$$H_f = \sum \hbar \omega_{f,\mu}(k) (a_+(k)^\dagger a_+(k) + a_-^\dagger(k) a_-(k)). \quad (2.26)$$

Portanto, temos em (2.26) a Hamiltoniana do sistema de fônons descrita por operadores de criação e aniquilação de fônons polarizados circularmente. Escrevemos dessa maneira devido estarmos trabalhando em um sistema magneto elástico, com isso, devemos encontrar uma Hamiltoniana de interação entre os sistemas de fônons e mágnons, trabalhando com o acoplamento dos operadores de fônons e mágnons, já que o intuito é verificar essa interação entre os sistemas.

## 2.2 Ondas de spin

As excitações chamadas de ondas de spin podem ser tratadas de modo idêntico ao sistema de fônons já descritos. Os estados de baixa energia dos sistemas de spin acoplados por interações de troca são semelhantes às ondas, como mostrado originalmente por Bloch para ferromagnetos [3]. Quando aplicado um campo magnético externo  $\vec{H}$  sobre um cristal ferromagnético, os spins tendem a alinhar-se na direção de  $\vec{H}$  e a energia da excitação vai espalhar-se por todo o cristal, podendo a excitação ser descrita (em coordenadas normais) em termos de oscilações coletivas dos estados de spin que se designam por mágnons, conforme a fig.5, sendo os mágnons possuem spin inteiro 1 e sem massa. As ondas são chamadas ondas de spin, a energia de uma onda de spin é quantizada, e a unidade de energia de uma onda de spin é chamada de mágnon.

Os spins, cuja correlação no ferromagnetismo, ou em outros fenômenos relacionados, dão origem aos momentos magnéticos espontâneos e estão, em geral, localizados nos átomos da rede. Além disso, os átomos da rede podem ter vários elétrons que contribuem para o spin total de cada átomo. O estado ferromagnético é então o resultado da interação de troca entre os spins totais dos diferentes átomos da rede [9].

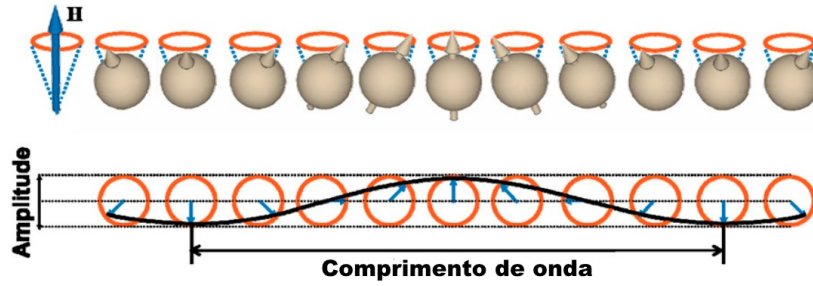


Figura 5 – Comportamento dinâmico coletivo de spins individuais acopladas entre si, representando a forma de onda. Fonte: ref. [10].

Para muitos propósitos nos estudos de ressonância ferromagnética e relaxamento, é mais conveniente ou mais fácil trabalhar diretamente com a magnetização como um campo  $\vec{M}(\vec{x})$ , em vez de lidar com momentos individuais  $S_j$ , devida a complexidade de trabalhar com as matrizes de Pauli. O alcance da utilidade da teoria do campo macroscópico é limitado para regiões do espaço  $k$  bem longe dos limites da zona de Brillouin. Só podemos usar a teoria macroscópica, quando  $ka \ll 1$ , onde  $a$  é o parâmetro da rede. As vantagens da teoria macroscópica são que ela não se baseia explicitamente em um modelo no qual cada elétron está ligado a um átomo em particular, com isto, podemos facilmente introduzir constantes fenomenológicas relacionadas à energia anisotrópica, magneto elástica e magnetostática [3].

A interação entre os spins pode ser considerada como a superposição de interações de vários tipos, que relacionamos a seguir, sendo as duas principais interações devidas ao acoplamento magnético dipolo-dipolo e influências de interação de troca. Além desses fatores, a interação em ondas de spin também pode levar em conta a anisotropia do material, que pode ser devido a geometria do sistema, orientações do cristal e do campo magnético. Ao se aplicar um campo magnético em sistemas ferromagnéticos os spins interagem a partir das interações de troca, fazendo com que as excitações do sistema sejam excitações coletivas ao redor de um ponto de equilíbrio.

$$H_m = \int d^3x (H_{exch} + H_{anis} + H_{zee} + H_{dip}). \quad (2.27)$$

### Energia de troca

É um efeito puramente quântico relacionado à indistinguibilidade das partículas. Devido a esse efeito e também ao princípio de Pauli, as funções de ondas espaciais com diferentes simetrias corresponderão a valores diferentes da rotação total de sistema e fornecerá diferentes valores de energia. Assim, podemos dizer que alguma interação peculiar entre as partículas leva a uma dependência da energia na rotação total do sistema. Essa interação é chamada de interação de troca.

A energia de troca não pode haver termos lineares, devido à simetria em relação a

uma mudança temporal. Em seguida, por se originar de forças de troca, não pode depender da direção absoluta da magnetização  $M$  em um determinado ponto do cristal. Portanto, a expressão que satisfaz essas condições em um meio isotrópico [9, 11],

$$H_{exch} = \frac{\alpha}{2} \frac{\partial M_\nu}{\partial X_\mu} \frac{\partial M_\nu}{\partial X_\mu}, \quad (2.28)$$

onde os índices  $\mu$  e  $\nu$  são referentes aos eixos  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ , sendo  $\alpha$  uma constante proporcional à  $J$ , onde  $J$  é conhecida como integral de troca, que está relacionada com a interação de troca, interação responsável pela tendência dos momentos magnéticos do material a permanecerem paralelos entre si. Para o caso ferromagnético  $J > 0$ .

### Energia de Anisotropia

Anisotropia é uma tendência direcional de uma propriedade física de um material. Se uma propriedade, por exemplo, a susceptibilidade magnética não varia quando a medimos ao longo de diferentes direções, dizemos que a amostra é isotrópica em relação a sua susceptibilidade magnética. Caso contrário, dizemos que existe uma anisotropia de susceptibilidade magnética. O magnetismo nos materiais depende basicamente de três fatores: (i) da intensidade dos momentos magnéticos associados aos átomos ou íons vizinhos, (ii) da distância entre os íons vizinhos e (iii) da simetria da rede cristalina. Assim, as propriedades magnéticas da maioria dos materiais ferromagnéticos são dependentes da direção da magnetização  $\vec{M}$ . Para um cristal uniaxial a energia anisotrópica pode ser escrita [9],

$$H_{anis} = \frac{1}{2} \frac{\beta}{M^2} (M_x^2 + M_y^2), \quad (2.29)$$

sendo  $\beta$  uma constante positiva, a energia anisotrópica é menor quando a magnetização está na direção  $\hat{z}$ , o eixo  $\hat{z}$  é considerado de fácil magnetização.

### Energia de Zeeman

O efeito Zeeman é o desdobramento das raias espectrais de um espectro em resposta à aplicação de um campo magnético a uma amostra. Se um campo magnético  $\vec{H}$  é aplicado em um cristal, esse campo dá origem a um campo interno, não necessariamente igual ao campo externo, assim, pode-se dizer que a energia Zeeman é a interação do campo magnético externo com o momento magnético, com o qual os dipolos interagem. Portanto, pode-se dizer que a energia Zeeman é a interação do campo magnético externo com a magnetização,

$$H_{zee} = -\vec{H} \cdot \vec{M}. \quad (2.30)$$

obs: A energia de interface ou de acoplamento é uma energia tipo troca, que atua somente nos momentos magnéticos da interface de contato (interação local) entre dois

elementos, será levada em conta já na energia de Zeeman [9].

### Energia dipolar

Cada partícula magnética induz um campo magnético sobre as partículas vizinhas. Estas, por efeito destes campos, tendem a reorientar os seus momentos magnéticos. A interação dipolo-dipolo magnético, também chamada de acoplamento dipolar, refere-se à interação direta entre os dipolos magnéticos [9].

$$H_{dip} = \frac{2\pi}{|k|^2} (M_x k_x + M_y k_y)^2, \quad (2.31)$$

onde  $\vec{k}$  é o vetor de onda.

O tratamento quântico das ondas de spin é feito através da imposição de regras de comutação de operadores de bósons às componentes do campo de magnetização.

É mais conveniente trabalhar com dois operadores independentes, assim, aplicaremos a transformação de Holstein-Primakoff para operadores de criação e aniquilação de bósons descritos na rede do sistema, onde foi realizado no apêndice A, portanto, temos que substituir os novos operadores bôsonicos situados nos espaços dos momentos  $b^\dagger(k)$  (A.25) e  $b(k)$  (A.26), na Hamiltoniana que descreve o sistema de mágnons não diagonal, como descrito no apêndice A e obtemos,

$$H_m = \sum_k \omega_m(k) C^\dagger(k) C(k), \quad (2.32)$$

onde temos a frequência característica dos mágnons, dada por;

$$\omega_m(k) = \gamma \sqrt{(2MJ|k|^2 + 2\frac{k}{M} + H + 4\pi M \sin^2\theta)(2MJ|k|^2 + H + 2\frac{k}{M})}, \quad (2.33)$$

sendo o vetor de magnetização  $\vec{M}$ , a constante  $J$  da energia de troca,  $\theta$  o ângulo do vetor de onda  $\vec{k}$  com o eixo  $\hat{z}$ ,  $\vec{H}$  o campo magnético externo e o  $\gamma$  fator giromagnético do elétron. Conseqüentemente, observamos a superposição das energias que descrevem a interação entre os spins diretamente na frequência (2.33), através de  $\gamma$  fator giromagnético contido nas energias de Zeeman e anisotrópica, o ângulo  $\theta$  da energia dipolar e a constante  $J$  da energia de troca demonstrando interação responsável pela tendência dos momentos magnéticos do material a permanecerem paralelos entre si de acordo com a orientação do campo magnético externo. Assim temos que a frequência característica dos mágnons é dependente diretamente do campo magnético.

Portanto, encontramos a Hamiltoniana do sistema para ondas de spin diagonalizada (2.32). Os operadores  $C^\dagger(k)$  e  $C(k)$  são interpretados como operadores de "quanta" de excitação de spin, chamados mágnons, sendo o  $C^\dagger(k)$  um operador bosônico que cria um mágnon com momento  $\vec{k}$  e  $C(k)$  um outro operador bosônico que aniquila um mágnon

com momento  $\vec{k}$ . A criação de um mágnon corresponde à inversão de rotação por uma unidade de spin, a propagação de mágnons se dá através do cristal ferromagnético, em vez de permanecer localizado na rede.

## 2.3 Interação Mágnon-Fônon

O fenômeno magneto elástico ou magnetostrictiva foi descoberto por Joule há mais de 150 anos e descreve genericamente a mudança nas dimensões dos materiais ferromagnéticos quando sujeitos a campos magnéticos externos [6]. A origem microscópica da magnetostrictão é o acoplamento spin-órbita que é a interação que há entre os spins eletrônicos e o movimento orbital dos elétrons em torno dos núcleos atômicos. A energia dos estados eletrônicos em regiões onde há momento magnético é menor do que aquela que é verificada nos orbitais atômicos de mesma espécie na ausência do campo magnético. Por conta desta diferença de energia os spins eletrônicos se alinham ao campo, modificando os orbitais atômicos e conseqüentemente, modificando a distância interatômica do material sujeito ao campo. Macroscopicamente a variação das distâncias interatômicas produzem o deslocamento e rotação de domínios magnéticos que, por sua vez, gera a deformação macroscópica nos materiais que chamamos magnetostrictão, usualmente entre uma parte em mil e uma parte em um milhão em ligas binárias simples. Dependendo do tipo de material tais deformações podem implicar em expansão e em compressão da dimensão na direção do campo magnético externo aplicado. Como tais deformações são isovolumétricas as modificações nas dimensões transversais à direção do campo magnético têm o sentido oposto. Em materiais sujeitos a altos campos magnéticos verifica-se também efeitos de segunda ordem relacionados a magnetostrictão (magnetostrictão forçada), abaixo da temperatura de Curie, verifica-se que a expansão volumétrica pode ser anisotrópica [6, 14]. Portanto, a magnetostrictão é um parâmetro importante que relaciona as propriedades magnéticas macroscópicas básicas dos materiais com sua estrutura atômica.

Em resumo nos isolantes magnéticos, devido à interação spin-órbita, o deslocamento elástico em um meio magnético é acoplado à excitação do spin, relaxando a dinâmica da magnetização no cristal ferromagnético e também dá origem as propriedades magneto elásticas dos ferromagnetos [6], assim, as ondas de spin podem se tornar fortemente acopladas às ondas elásticas, ou seja, as vibrações dos spin provocam vibrações da rede, formando ondas magneto elástico (mágnon-fônon).

Para descrever o sistema por completo, nesse contexto no qual estamos abordando, teremos a somas das Hamiltonianas de cada sistema, sendo elas do fônon, mágnon e de interação mágnon-fônon, assim temos,

$$H_{total} = H_f + H_m + H_{int}. \quad (2.34)$$



Portanto, devemos primeiro encontrar a Hamiltoniana que descreve a interação mágnon-fônon, onde podemos começar pela análise dos termos cruzados entre o vetor de magnetização  $\vec{M}_j = 2\mu_0\vec{S}_j$  (A.6) e o vetor de deslocamento elástico (2.24), assim podemos verificar o acoplamento magneto elástico presente no cristal ferromagnético. O acoplamento em um cristal cúbico é descrito pela densidade de energia magneto elástica [8],

$$f_{m-f} = b_1(\alpha_x^2 S_{xx} + \alpha_y^2 S_{yy} + \alpha_z^2 S_{zz}) + 2b_2(\alpha_x\alpha_y S_{xy} + \alpha_y\alpha_z S_{yz} + \alpha_z\alpha_x S_{zx}), \quad (2.35)$$

aqui temos que  $S_{ij}$  são componentes de tensão e  $\alpha_i$  o vetor unitário na direção da magnetização  $\vec{M}$ ,  $b_1$  e  $b_2$  são constantes de acoplamento magneto elástica do cristal ferromagnético em relação ao vetor unitário  $\alpha_i$  e as componentes de tensão  $S_{ij}$ . Como a magnetização estática está na direção  $\hat{z}$ , vamos reter em uma teoria linear em (2.35) apenas os termos  $\alpha_y\alpha_z S_{yz}$  e  $\alpha_z\alpha_x S_{zx}$  lineares em  $M_x$  e  $M_y$ . A Hamiltoniana associado à esses termos de interação, portanto é [8],

$$H_i = \frac{b_2}{M} [M_y \left( \frac{\partial R_y}{\partial z} + \frac{\partial R_z}{\partial y} \right) + M_x \left( \frac{\partial R_z}{\partial x} + \frac{\partial R_x}{\partial z} \right)], \quad (2.36)$$

temos que  $S_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial R_y}{\partial z} + \frac{\partial R_z}{\partial y} \right)$ ,  $S_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial R_z}{\partial x} + \frac{\partial R_x}{\partial z} \right)$ ,  $\alpha_y\alpha_z = \frac{M_y}{M}$  e  $\alpha_z\alpha_x = \frac{M_x}{M}$ . Onde sabemos que  $R_\mu$  é o vetor deslocamento (2.19) em relação aos operadores de fônons não polarizados de um ponto no sólido a partir de sua posição original sem tensão,  $\vec{M}$  o vetor de magnetização, no qual podemos encontrar utilizando as propriedades de magnetização, em relação as magnetizações polarizadas (A.13) e (A.14),

$$M_x = \frac{M_j^+ + M_j^-}{2}, \quad (2.37)$$

$$M_y = \frac{M_j^+ - M_j^-}{2i}. \quad (2.38)$$

Agora podemos encontrar o resultado da Hamiltoniana de interação mágnon-fônon (2.36), começando pelas substituições de (2.19) e logo após realizar as devidas derivações de (2.37) e (2.38), podemos com isso reorganizar em termos dos operadores bosônicos de fônons e mágnons. Como estamos interessados em um sistema magneto elástico, devemos representar os operadores do sistema dos fônons polarizados, bastando realizar as transformadas inversas de (2.21) e (2.22) e representamos os operadores de fônons polarizados circularmente. Teremos assim,

$$H_i = \sum_k i\hbar l_k (C^\dagger(k)a_+(k) - C(k)a_+^\dagger(k) - C(k)a_-(-k) + C^\dagger(k)a_-^\dagger(-k)), \quad (2.39)$$

temos o parâmetro  $l_k = \frac{b_2}{M} \sqrt{\frac{\omega_M \omega_f}{2\mu_0 \rho}}$ , onde nomeamos  $\omega_M = \mu_0 \gamma M$  uma frequência da magnetização do sistema de interação mágnon-fônon.

Podemos notar que a Hamiltoniana de interação mágnon-fônon (2.39) respeita a conservação de momento, onde o primeiro termo de (2.39) representa a criação de um mágnon com momento  $k$  e aniquila um fônon polarizado circularmente positivo (rotacionando sentido horário) com momento  $k$ , observado na parte inferior da fig.6, assim como também no segundo termo de (2.39), onde temos a aniquilação de um mágnon com momento  $k$  e cria um fônon polarizado circularmente positiva com momento  $k$ , observado na parte superior da fig.6. No terceiro termo o aniquilação de um mágnon com momento  $k$  e a aniquilação do fônon com inversão do sentido da polarização  $-k$  (rotacionado sentido anti-horário), apesar de aniquilar um magnon e um fônon temos a conservação do momento devido os sentidos de polarizações e momento  $k$  opostos, como também ocorre no último termo, mas com os operadores de criação de mágnon e fônon, assim com os demais termos de (2.39) também respeitam a conservação de momento.

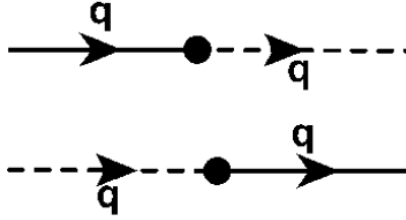


Figura 6 – Diagrama de Feynman para representar a interação mágnon-fônon descrito por (2.39). Fonte: ref. [14].

Devemos encontrar a Hamiltoniana que descreve o sistema por completo mágnon-fônon, substituindo (2.26), (2.32) e (2.39) em (2.34), temos com isso o Hamiltoniano total que descreve o sistema magneto elástico, para o caso particular de propagação ao longo do eixo  $\hat{z}$ , assim,

$$\begin{aligned}
 H_{total} &= \sum_k \hbar(\omega_f(k)(a_+^\dagger(k)a_+(k) + a_-^\dagger(k)a_-(k)) + \omega_m(k)C^\dagger(k)C(k) \\
 &+ i\mu_k(C^\dagger(k)a_+(k) - C(k)a_+^\dagger(k) - C(k)a_(-k) + C^\dagger(k)a_-^\dagger(-k))). \quad (2.40)
 \end{aligned}$$

Como observado, concentramos nossa atenção apenas às ondas que se propagam ao longo do campo magnético  $\vec{H}$ , ou seja, os vetores de onda  $\vec{k}$  paralelos ao eixo  $\hat{z}$ , implicando em  $\vec{k} \cdot \vec{e}_\mu = \varepsilon_{\mu,3}(\vec{k})k$ , pois as equações para as variáveis de campo são simples de resolver e experimentalmente as ondas magneto elásticas direcionadas ao eixo  $\hat{z}$  são mais fáceis de excitar e controlar.

Estamos com a intenção de descrever o sistema magneto elástico em relação aos operadores independentes que descrevem o sistema, mas antes, temos que analisar a dinâmica temporal dos operadores do sistema de fônons e mágnons, para podermos com isso verificar suas dependências na Hamiltoniana, onde vemos algumas propriedades das excitações coletivas no cristal sob um campo magnético estático  $\vec{H}$ . Desse modo, temos a

equação de movimento de Heisenberg,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H_{tot}, A]. \quad (2.41)$$

Aplicando os operadores de fônons e mágnons em (2.41), a evolução temporal de cada operador, é dado por,

$$\dot{a}_+^\dagger(k) = i\omega_f a_+^\dagger(k) - il_k C^\dagger(k), \quad (2.42)$$

$$\dot{a}_-^\dagger(k) = i\omega_f a_-^\dagger(k) - l_k C^\dagger(k), \quad (2.43)$$

$$\dot{C}^\dagger(k) = i\omega_m(k)C^\dagger(k) + il_k a_+^\dagger(k) + l_k a_-(-k), \quad (2.44)$$

$$\dot{C}(k) = -i\omega_m(k)C(k) + l_k a_+(k) + l_k a_-(-k), \quad (2.45)$$

podemos notar que os operadores de mágnons e fônons do sistema evoluem um em relação ao outro ao longo do tempo, demonstrando a atuação da interação magneto elástica no sistema.

Vamos analisar a relação de dispersão do sistema, fazendo o sistema num estado estacionário  $\frac{\partial A(t)}{\partial t} = 0$ , onde os operadores (2.42)-(2.45) evoluem na forma de onda plana,  $A(t) = A_0 e^{i\omega t}$ . Como o intuito é a conversão mágnon-fônion, não devemos considerar os operadores de aniquilação no sistema, isto é, vamos negligenciar por hora os operadores  $a_-(k)$ ,  $a_+(k)$  e  $C(k)$ , teremos com isso um resultado na forma de um determinante com solução,

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & -i(\omega_f + \omega) & l_k \\ i(\omega_f - \omega) & 0 & -l_k \\ l_k & l_k & i(\omega_m - \omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+^\dagger(k) \\ a_-^\dagger(-k) \\ C^\dagger(k) \end{pmatrix}.$$

Obtendo como resultado,

$$2l_k^2 \omega_f - (\omega - \omega_k)(\omega^2 - \omega_f^2) = 0, \quad (2.46)$$

vemos que a dispersão (2.46) para o conjunto de três campos ( $a_+^\dagger(k)$ ,  $a_-(-k)$  e  $C^\dagger(k)$ ), onde temos dois campos de fônons ( $+k$  e  $-k$ ) e um para mágnon, tem concordância com a relação de dispersão clássica.

Agora analisando o sistema (2.42)-(2.45) num estado estacionário, em que  $\vec{k} = 0$ , temos,

$$a_+^\dagger(0) = -\frac{(\omega + \omega_f)}{\omega - \omega_f} a_-^\dagger(0), \quad (2.47)$$

notamos assim em (2.47) que os operadores de fônons estão ligados pelo parâmetro  $\frac{(\omega + \omega_f)}{\omega - \omega_f}$  por um sinal negativo, ou seja, o operador negativo polarizado corresponde ao operador

positivo polarizada na direção oposta, assim podemos dizer que os operadores de fônon com polarização circular são simétricos. Portanto, podemos negligenciar os operadores de fônons com polarização negativa ( $a_-^\dagger(k)$  e  $a_-(k)$ ), pois toda informação do sistema já está contida em um operador de fônon, qualquer seja sua polarização, assim, simplificando a Hamiltoniana (2.40) e com isso podendo investigar melhor a relação de dispersão magneto elástico em função dos operadores  $a_+^\dagger(k)$  e  $C^\dagger(k)$ . Deste modo, temos,

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} i(\omega_f - \omega) & -l_k \\ l_k & i(\omega_m - \omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+^\dagger(k) \\ C_+^\dagger(k) \end{pmatrix}.$$

Obtendo assim a relação de dispersão apenas em termos dos operadores de criação de fônons e mágnons,

$$(\omega - \omega_f)(\omega - \omega_m) = l_k^2, \quad (2.48)$$

onde encontramos frequência  $\omega$  da relação de dispersão de maneira mais compacta, tendo como resultado,

$$\omega = \frac{1}{2}[(\omega_m + \omega_f) \pm \sqrt{(\omega_m - \omega_f)^2 + 4l_k^2}]. \quad (2.49)$$

Analisando a relação de dispersão na proximidade da região de cruzamento dos ramos de frequência dos mágnons e fônons, onde os ramos de frequências podem se cruzar, assim podemos analisar melhor a interação mágnon-fônon, temos que ter  $\omega_m = \omega_f = \omega_c$ , onde  $\omega_c$  é uma frequência crítica, portanto realizando essa substituição em (2.49), temos,

$$\omega = \omega_c \pm l_k, \quad (2.50)$$

podemos assim notar que o parâmetro  $l_k$  representa a separação das curvas de dispersão de  $\omega_f$  e  $\omega_m$  no ponto crítico, isto é, na zona de cruzamento. Concluimos então que as relações de dispersão do sistema fônon e mágnon não podem se cruzar, devido ao parâmetro  $l_k$ , por causa da constante de acoplamento magneto elástico  $b_2$  que o representa, podendo desse modo ocorrer uma conversão mágnon-fônon nessa região de cruzamento. Concluimos também que se o cristal ferromagnético não possui a constante de acoplamento magneto elástica  $b_2$  no sistema não ocorrerá a conversão mágnon-fônon.

Como discutido anteriormente podemos negligenciar os campos  $a_-^\dagger(k)$  e  $a_-(k)$ , devido a análise em (2.47), portanto, podemos escrever (2.40) de forma mais compacta, assim,

$$H_{tot} = \sum_k \hbar[\omega_f(k)a_+^\dagger(k)a_+(k) + \omega_m(k)C^\dagger(k)C(k) + il_k(C^\dagger(k)a_+(k) - C(k)a_+^\dagger(k))]. \quad (2.51)$$

Podemos prosseguir para descrever a Hamiltoniana do sistema magneto elástico (2.51), em relação aos operadores independentes que descrevem o sistema, pois, a Hamiltoniana do sistema magneto elástico deve ter caráter de osciladores harmônicos, devido a aproximação harmônica utilizada no trabalho em ambos sistemas (fônons e mágnons). Iremos assim, aplicar uma transformada de Bogoliubov sobre os operadores de mágnons e fônons, onde encontraremos novos operadores de bósons que descrevem nosso sistema magneto elástico e com isso diagonalizando a Hamiltoniana (2.51).

Como descrito acima, a dinâmica temporal dos operadores dos sistemas de mágnons e fônons (2.42)-(2.45) nos mostra que tais campos evoluem com caráter de ambos campos. Assim devemos encontrar os novos operadores bosônicos como combinações dos dois campos (fônons e mágnons).

$$B^\dagger(k) = U(k)C^\dagger(k) + V(k)a^\dagger(k), \quad (2.52)$$

$$A^\dagger(k) = S(k)C^\dagger(k) + T(k)a^\dagger(k), \quad (2.53)$$

sendo operadores bosônicos, temos essas condições a ser respeitadas,  $[B(k), B^\dagger(k')] = \delta_{k,k'}$  e  $[A(k), A^\dagger(k')] = \delta_{k,k'}$ .

Onde podemos realizar as transformações inversas de (2.52) e (2.53) e descrever os operadores de fônons ( $a^\dagger(k)$ ) e mágnons ( $C^\dagger(k)$ ) em relação aos novos operadores bosônicos do sistema magneto elástico, afim de diagonalizar (2.51),

$$C^\dagger(k) = U(k)B^\dagger(k) - iV(k)A^\dagger(k), \quad (2.54)$$

$$a^\dagger(k) = U(k)A^\dagger(k) - iV(k)B^\dagger(k). \quad (2.55)$$

Vamos encontrar os coeficientes da transformada linear ( $U(k)$  e  $V(k)$ ), ou seja, termos que diagonalizam a hamiltoniana, substituindo os operadores (2.54) e (2.55) na Hamiltoniana (2.51), assim, igualando a uma matriz identidade e negligenciando os termos não diagonais, encontramos os coeficientes da transformada linear em função de novas frequências ( $\omega_d$  e  $\omega_b$ ) que são descritas pelas relações das frequências de fônons e mágnons,

$$U(k) = \sqrt{\frac{\omega_b(k) + \omega_d(k)}{2\omega_b(k)}}, \quad (2.56)$$

$$V(k) = \sqrt{\frac{\omega_b(k) - \omega_d(k)}{2\omega_b(k)}}, \quad (2.57)$$

onde encontramos novas frequências com combinações das frequências de fônons e mágnons, assim temos,

$$\omega_b(k) = \frac{\omega_f(k) + \omega_m(k)}{2}, \quad (2.58)$$

$$\omega_d(k) = \frac{\omega_f(k) - \omega_m(k)}{2}. \quad (2.59)$$

Sendo as novas frequências (2.58) e (2.59) ligadas por uma função contendo o parâmetro  $l_k$  que mede a separação das relações de dispersão de frequências de mágnons e fônons, similar a relação de dispersão na zona de cruzamento dos ramos de fônons e mágnons (2.50), temos,

$$\omega_b^2(k) = \omega_d^2(k) + l_k^2. \quad (2.60)$$

Substituindo (2.54) e (2.55) na Hamiltoniana (2.51) com seus respectivos resultados, temos então, o resultado na Hamiltoniana total do sistema (2.51) na forma diagonal,

$$\begin{aligned} H = & \sum_k \hbar [(\omega_m(k)V^2(k) + \omega_f(k)U^2(k) + 2l_k U(k)V(k))A^\dagger(k)A(k) + (\omega_m(k)U^2(k) \\ & + \omega_f(k)V^2(k) - 2l_k U(k)V(k))B^\dagger(k)B(k)], \end{aligned} \quad (2.61)$$

vemos portanto (2.61) representada por dois novos modos normais que descrevem o sistema magneto elástico, sendo eles,

$$\begin{aligned} W_A(k) &= \frac{1}{2} [(\omega_f(k) + \omega_m(k)) + \sqrt{(\omega_f(k) - \omega_m(k))^2 + 4l_k^2}] \\ &= \frac{\omega_f(k) + \omega_m(k)}{2} + \omega_b(k), \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} W_B(k) &= \frac{1}{2} [(\omega_f(k) + \omega_m(k)) - \sqrt{(\omega_f(k) - \omega_m(k))^2 + 4l_k^2}] \\ &= \frac{\omega_f(k) + \omega_m(k)}{2} - \omega_b(k). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Dessa forma temos a Hamiltoniana total do sistema magneto elástico diagonal,

$$H = \sum_k \hbar (W_A(k)A^\dagger(k)A(k) + W_B(k)B^\dagger(k)B(k)). \quad (2.64)$$

Observamos na figura de fato a conversão mágnon para fônon e de fônon para mágnon, onde na região de cruzamento, há uma separação simétrica entre os ramos devido ao parâmetro  $l(k)$ , como já era esperado pelas análises anteriores. Se pegarmos, por exemplo, a relação de dispersão  $W_A(k)$  que em  $k = 0$ , esse ramo se inicia com características da curva de dispersão dos mágnons  $\omega_m(k)$ . Quando evolui temporalmente  $W_A(k)$  se converte em relação a curva de dispersão dos fônons  $w_f(k)$ , algo já esperado como visto na relação de dispersão (2.50) propício ao parâmetro  $l_k$ . As relações  $W_A(k)$  e  $W_B(k)$  não se

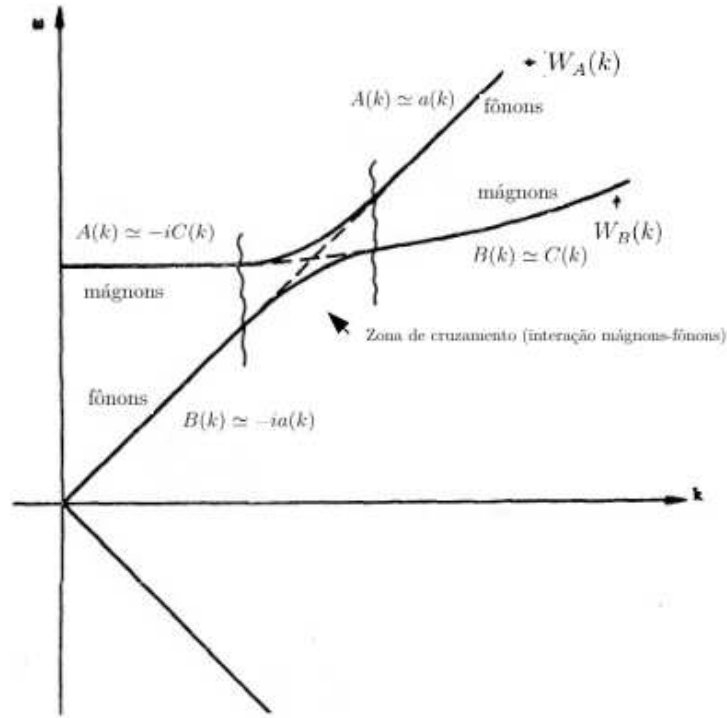


Figura 7 – Comparação da relação de dispersão dos modos normais  $W_A(k)$  e  $W_B(k)$  em comparação as relações de dispersão dos fônons ( $\omega_f(k)$ ) e mágnons ( $\omega_m(k)$ ). Fonte: ref. [7].

tocam devida a frequência  $w_b(k)$  que está ligado ao parâmetro  $l_k$ , como podemos verificar em (2.62) e (2.63). Conseqüentemente devemos no próximo capítulo verificar se ocorre a conservação dos vetores de ondas  $\vec{k}$ 's, para assim saber de fato a ocorrência da conversão dos ramos de mágnons para os de fônons, como é intuito do nosso trabalho.

Devemos também analisar o comportamento das relações de dispersões magneto elásticas quando aplicado a um campo magnético externo variável no tempo  $\vec{H}(t)$ . O trabalho ref.[15], analisou a dinâmica do sistema mágnon-fônon (híbrida) por ajuste de ressonância de mágnons, devido as vibrações de fônons (excitação óptica pulsada) em um isolante nanomagnetico de ferro-níquel, medindo essa excitação usando uma configuração "TR – MOKE" de duas cores. Os modos hibridizados foram resolvidos nas transformadas de Fourier de sinais magneto-ópticos dependentes na ressonância, onde foram feitos ajustes simultâneos (linhas vermelhas sólidas) da equação de relação de dispersão (similar à eq.(2.48)) em relação os modos (1,1) e (2,0), observando uma forte dinâmica de acoplamento mágnon-fônon no isolante nanomagnetico de ferro-níquel, conforme observamos na fig.8, onde foi desenvolvido uma descrição analítica para modelar a dinâmica em duas dimensões, permitindo isolar os parâmetros que influenciam a divisão de frequência.

Os modos (1,1) e (2,0) na fig.8 que descrevem os valores do vetor de onda  $\vec{k}$ , sendo  $\vec{k} = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y)$ , dessa forma, nos passa como o vetor de onda se propaga na amostra, onde no caso (2,0) é com comprimento de onda longo  $\lambda = \frac{L}{2}$ , portanto, com excitação mínima.

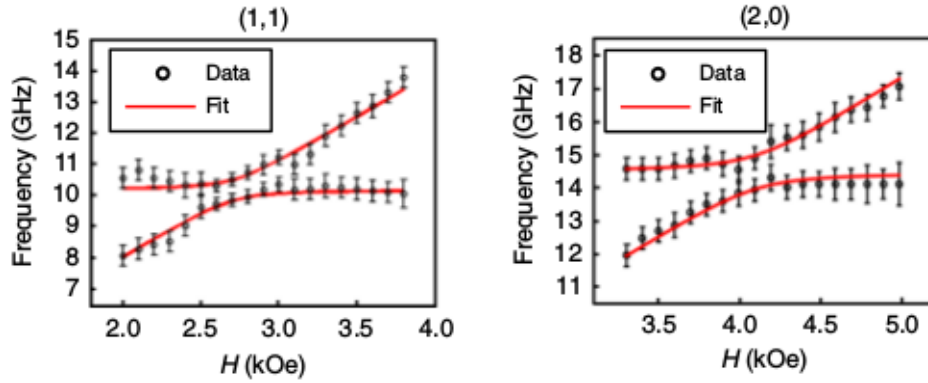


Figura 8 – Representação das frequências dos fônons e mágnons aplicado a um campo magnético variável no tempo  $\vec{H}(t)$  na região de cruzamento. Fonte: ref. [15].

Assim podemos observar na fig.8 que de acordo como variarmos o campo magnético externo  $\vec{H}(t)$ , as frequências dos fônons e mágnons variam também, ao ponto de mudarem suas características magneto elásticos. Sabemos portanto, que as relações das frequências são diretamente proporcionais ao campo magnético externo  $\vec{H}(t)$ . Sendo assim, já é esperado sua variação, mas quando analisamos a parte do sistema das frequências dos fônons (2.17) que não é proporcional ao campo magnético externo  $\vec{H}(t)$ , porém, mesmo assim na região de cruzamento ocorre sua alteração, demonstrando o forte acoplamento magneto elástico no cristal ferromagnético, devido a forte variação dos spins que provocam uma forte variação da rede. Verificamos com isso o ajuste da interação mágnon-fônon no regime de acoplamento forte através da orientação do campo magnético aplicado. Portanto, ajustando a direção do campo aplicado, consegue-se aprimorar o acoplamento mágnon-fônon para que o sistema possa estar inequivocamente na região de forte acoplamento.

## 2.4 Conversão Mágnon-Fônon em Campos Magnéticos Variáveis no Tempo

Vamos analisar nessa seção que a rede ferromagnética está sujeita a um campo magnético uniforme  $\vec{H}(t)$  que varia com o tempo, ou seja, que antes de um tempo  $t_1$ , o campo é constante, entre  $t_1$  e  $t_2$ , aumenta monotonamente no tempo e após  $t_2$ , permanece constante, com um valor maior que  $t_1$ , como podemos observar na fig.9 abaixo.

Estamos agora trabalhando com a dependência temporal no campo magnético externo, assim devemos tomar as devidas implicações temporais na Hamiltoniana do sistema. Portanto, para variações estáticas do campo externo  $\vec{H}(t)$ , podemos desprezar os efeitos de indução e usar a Hamiltoniano (2.51), mas com uma dependência temporal na frequência dos mágnons  $\omega_m(k, t)$  (2.33), pois, a respectiva frequência é diretamente proporcional ao campo magnético externo. Agora o campo magnético depende do tempo, a



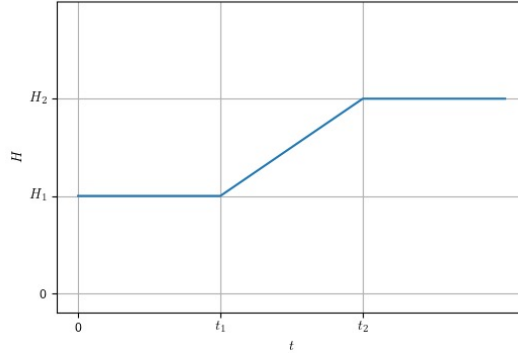


Figura 9 – Variação do campo magnético externo  $\vec{H}(t)$  entre o intervalo de tempo  $t_1$  e  $t_2$ .

frequência também possuirá essa dependência. No caso das frequências dos fônons (2.17) é inverso aos dos mágnons, onde não possui dependência direta do campo magnético externo, assim não possui dependência temporal explícita.

$$\begin{aligned}
 H_{tot}(t) &= \sum_k \hbar[\omega_f(k)a_+^\dagger(k)a_+(k) + \omega_m(k,t)C^\dagger(k)C(k) \\
 &+ il_k(C^\dagger(k)a_+(k) - C(k)a_+^\dagger(k))].
 \end{aligned}
 \tag{2.65}$$

Em vista de (2.65) vamos ter os operadores dos sistemas de fônons e mágnons e suas dinâmicas temporais também identificadas em (2.42)-(2.45), mas conforme comentado acima, temos que adicionar a dependência temporal nas frequências dos mágnons.

Para representar a Hamiltoniana do sistema magneto elástico (2.65) em termos dos operadores independentes, vamos diagonalizar aplicando uma transformada de Bogoliubov como feito na seção anterior, com relação aos seus operadores mágnons e fônons, sendo a transformação inversa dada por (2.54) e (2.55). Onde já foi realizado esse processo e encontramos os valores dos coeficientes da transformada linear  $U(k)$  e  $V(k)$ , ou seja, termos que diagonalizam a Hamiltoniana, sendo (2.56) e (2.57) respectivamente, como também as novas frequências do sistema magneto elástico  $\omega_b(k)$  e  $\omega_d(k)$ , mas todas com as dependências temporais devidas em relação a  $\omega_m(k)$ .

Devido a dependência temporal nos coeficientes (2.56) e (2.57), vamos expor suas evoluções temporais, onde normalmente fazíamos pela equação de movimento de Heisenberg, mas agora vamos derivar temporalmente e enunciar seus comportamentos, assim,

$$\dot{U}(k,t) = \sqrt{\frac{\omega_b(k,t) - \omega_d(k,t)}{2\omega_b(k,t)}} \frac{l_k \ddot{\omega}_d(k,t)}{2\omega_b^2(k,t)},
 \tag{2.66}$$

$$\dot{V}(k,t) = -\sqrt{\frac{\omega_b(k,t) + \omega_d(k,t)}{2\omega_b(k,t)}} \frac{l_k \ddot{\omega}_d(k,t)}{2\omega_b^2(k,t)},
 \tag{2.67}$$

notemos essas evoluções temporais e assim relacionando com seus coeficientes  $U(k)$  e  $V(k)$ , (2.56) e (2.57), contemplamos que tais coeficientes evoluem temporalmente um em relação com o outro, sendo ligados por um parâmetro  $\frac{l_k \ddot{\omega}_d(k,t)}{2\omega_b^2(k,t)}$ , portanto,

$$\dot{U}(k,t) = V(k,t) \frac{l_k \ddot{\omega}_d(k,t)}{2\omega_b^2(k,t)}, \quad (2.68)$$

$$\dot{V}(k,t) = -U(k,t) \frac{l_k \ddot{\omega}_d(k,t)}{2\omega_b^2(k,t)}. \quad (2.69)$$

Realizando uma comparação das dinâmicas temporais dos coeficientes (2.67) e (2.68) com as funções de  $\sin(\frac{\theta}{2})$  e  $\cos(\frac{\theta}{2})$ , pois, sabemos que evoluem em relação a ambos, a menos de um sinal. Como  $U(k,t)$  e  $V(k,t)$  respeitam a relação  $U^2(k,t) + V^2(k,t) = 1$ . Vamos comparar assim tais coeficientes com as derivadas de  $\sin(\frac{\theta}{2})$  e  $\cos(\frac{\theta}{2})$ ,

$$\frac{d\sin(\frac{\theta}{2})}{dt} = \frac{\cos(\frac{\theta}{2})}{2} \dot{\theta}, \quad U(k,t) = \sin\left(\frac{\theta(k,t)}{2}\right), \quad (2.70)$$

$$\frac{d\cos(\frac{\theta}{2})}{dt} = -\frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{2} \dot{\theta}, \quad V(k,t) = \cos\left(\frac{\theta(k,t)}{2}\right), \quad (2.71)$$

temos assim a derivada temporal do argumento das funções de  $\sin(\frac{\theta}{2})$  e  $\cos(\frac{\theta}{2})$  como um parâmetro da dinâmica temporal dos coeficientes  $U(k,t)$  e  $V(k,t)$ ,

$$\dot{\theta}(k,t) = \frac{l_k \omega_d(\ddot{k},t)}{\omega_b^2(k,t)}. \quad (2.72)$$

Observamos, desse modo, que o parâmetro (2.72) é proporcional ao campo magnético externo  $\vec{H}(t)$ , devido as frequências  $\omega_b(k,t)$  (2.58) e  $\omega_d(k,t)$  (2.59), onde são descritas pelas frequências características do sistema fônon ( $\omega_f(k)$ ) e mágnon ( $\omega_m(k)$ ), sendo já observado em (2.33) que  $\omega_m(k)$  tem dependência do campo magnético externo, além se composto pelo parâmetro  $l_k$  que representa a separação das curvas de dispersão na zona de cruzamento (2.50). Então conforme varia  $\vec{H}(t)$ , junto a ele varia  $\dot{\theta}(k,t)$ . Assim temos,

$$\dot{U}(k,t) = V(k,t) \frac{\dot{\theta}(k,t)}{2}, \quad (2.73)$$

$$\dot{V}(k,t) = -U(k,t) \frac{\dot{\theta}(k,t)}{2}. \quad (2.74)$$

Já verificadas as dependências temporais e suas consequências no sistema, podemos assim utilizar a mesma Hamiltoniana diagonal que descreve o sistema magneto elástico (2.64), mas agora com os operadores  $A(k,t)$  e  $B(k,t)$  que são explicitamente dependentes do tempo, como também as frequências  $W_A(k,t)$  e  $W_B(k,t)$ , assim,

$$H(t) = \sum_k \hbar (W_A(k,t) A^\dagger(k,t) A(k,t) + W_B(k,t) B^\dagger(k,t) B(k,t)). \quad (2.75)$$

Consequentemente devemos analisar a dinâmica temporal dos operadores  $A^\dagger(k, t)$  e  $B^\dagger(k, t)$ , devido suas dependências temporais, assim,

$$\dot{A}^\dagger(k, t) = iW_A(k, t)A^\dagger(k, t) + i\frac{\dot{\theta}(k, t)}{2}B^\dagger(k, t), \quad (2.76)$$

$$\dot{B}^\dagger(k, t) = iW_B(k, t)B^\dagger(k, t) + i\frac{\dot{\theta}(k, t)}{2}A^\dagger(k, t), \quad (2.77)$$

identifica-se que os operadores  $A^\dagger(k, t)$  e  $B^\dagger(k, t)$  evoluem um em relação ao outro, e vice versa, como já era esperado, devido ao tratamento de conversão mágnon-fônon, mas é observado que os operadores têm as evoluções temporais dependentes ao parâmetro  $\theta(k, t)$  (2.72). Em vista disso, se adotarmos o parâmetro como nulo  $\dot{\theta}(k, t) = 0$ , as evoluções temporais dos operadores magneto elásticos serão desacopladas, ou seja, não ocorre a conversão mágnon-fônon, nesse caso o parâmetro  $\theta(k, t)$  é uma função constante, consequentemente é ocasionada quando o campo magnético externo  $\vec{H}(t) = \text{constante}$ , ou seja,  $\frac{dA^\dagger(k)}{dt} = iW_A(k)A^\dagger(k)$ . Portanto, podemos concluir que somente ocorre a conversão mágnon-fônon se o campo magnético externo varia no tempo, devido a derivada temporal em  $\dot{\theta}(k, t)$ . Em consequência se o campo magnético externo for fortemente variado no tempo, o segundo termo de (2.76) e (2.77) pode sobrepor o primeiro termo e mudar o caráter do ramo, como abordado na fig.8. Desta forma, além do campo magnético externo ser variado no tempo, ele também não pode ser fortemente variado no tempo, por consequência a conversão mágnon-fônon ocorre somente numa faixa de variação do campo magnético externo  $\vec{H}(t)$ . Portanto, observamos a importância do parâmetro  $\theta(k, t)$  na dinâmica temporal dos operadores, podemos considerar o parâmetro  $\theta(k)$  como um "calibre de conversão" do sistema mágnon-fônon, pois é descrito pela constante de acoplamento magneto elástica  $b_2$ , enquanto o parâmetro  $l_k$  mede a separação das relações de dispersão e as novas frequências do sistema magneto elástico, tendo consigo assim dependência do campo magnético externo  $\vec{H}(t)$ , controlando a conversão mágnon-fônon e suas curvas de dispersão do sistema magneto elástico.

A conversão do mágnon-fônon é sujeita a uma série de restrições como foi exposto nesse capítulo, onde só é possível caso o vetor de onda  $\vec{k}$  seja conservado, assim demonstrando que não ocorre a mistura de vetores de ondas entre os ramos das dispersões dos fônons e mágnons na região de cruzamento. Contudo o Hamiltoniano total do sistema magneto elástico (2.75) foi construído inicialmente com base em um campo magnético uniforme e o cristal ferromagnético sendo homogêneo e isotrópico, portanto, o sistema possuía invariância translacional, melhor dizendo, era conservado o momento linear. Desse modo, vamos verificar se ocorre a conservação do momento linear mesmo com as aproximações feitas e negligências consideradas, como o abandono do operador de polarização negativa dos fônons  $a_-(k)$ , assim devemos também verificar a conservação do spin nesse sistema.

Operador Momento linear:

Temos que analisar a conservação do momento linear do sistema magneto elástico, sendo a densidade de momento linear do sistema magneto elástico, dado por [3],

$$\begin{aligned}\vec{g} &= \vec{g}_f + \vec{g}_m \\ &= \sum_{k,j} \hbar \vec{k} (a_j^\dagger(k) a_j(k) + \frac{1}{2}) + \sum_k \hbar \vec{k} (C^\dagger(k) C(k) + \frac{1}{2}),\end{aligned}\quad (2.78)$$

sendo  $g_f$  a densidade de momento linear dos fônons,  $g_m$  a densidade de momento linear dos mágnons, descritos em relação aos operadores de criação e aniquilação de fônons e mágnons, onde temos que  $\int dx^3 \vec{g} = \vec{P}$  o operador de momento linear do sistema magneto elástico, tendo a forma esperada para o momento de uma excitação elementar em sólidos, representando uma soma de osciladores harmônicos.

Operador Spin:

Aproveitando, vamos analisar também a conservação do operador spin mesmo com as modificações aplicadas na Hamiltoniana. Suas características assemelham-se às de um momento angular, de fato, o operador spin  $\vec{S}$  é um operador de momento angular, ou seja, que segue as características dos momentos angulares gerais  $\vec{J}$  (momento angular total).

Como o Hamiltoniano do sistema foi construído para ser invariante sob rotações dos eixos do cristal ferromagnético, podemos escolher as direções dos eixos coordenados como desejamos, nesse trabalho estamos interessados apenas no caso em particular em que todos vetores de ondas  $\vec{k}$  são paralelos ao eixo  $\hat{z}$ , eixo no qual está aplicado o campo magnético externo  $\vec{H}$ .

Campos de fônons com vetor de onda paralelo ao eixo  $\hat{z}$  é :

$$S_z = \sum_k \hbar (a^\dagger(k) a(k) + \frac{1}{2}).$$

Campos de mágnons com vetor de onda paralelo ao eixo  $\hat{z}$  é :

$$S_z = \sum_k \hbar (C^\dagger(k) C(k) + \frac{1}{2}).$$

Desta forma, temos os operadores de momento linear  $P_z$  e de spin  $S_z$ , além disso, o momento total de mágnons e fônons é igual ao momento total dos "quanta" do sistema magneto elástico, assim podem ser descritos em relação ao número de partícula no sistema magneto elástico  $N(k)$  ( $a_j^\dagger(k) a_j(k) + C^\dagger(k) C(k)$ ),

$$\begin{aligned}P_z &= \int dx^3 g_z = \sum_k (C^\dagger(k) C(k) + a^\dagger(k) a(k)) \\ &= \sum_k \hbar k N(k),\end{aligned}\quad (2.79)$$

$$S_z = \sum_k \hbar (C^\dagger(k) C(k) + a^\dagger(k) a(k))$$

$$= \sum_k \hbar N(k). \quad (2.80)$$

Em vista de (2.79) e (2.80), para a verificação da conservação do operador momento linear e de spin, basta consultar a dinâmica temporal do número de partícula no sistema  $N(k)$ , conseqüentemente teremos a conservação do operador momento linear e de spin para um dado modo  $k$ . Antecipadamente temos que substituir os operadores que representam o sistema de mágnons ( $C(k)$ ) e fônons ( $a(k)$ ) pelos novos operadores que descrevem o sistema magneto elásticos, descrevendo a superposição de ambos sistemas  $A(k, t)$  (2.52) e  $B(k, t)$  (2.53) contendo a dependência temporal. Portanto,  $N_k$  tem dependência temporal, devido a evolução temporal de  $A^\dagger(k, t)$  e  $B^\dagger(k, t)$  identificados em (2.76) e (2.77), onde demonstram a dependência temporal propícia ao parâmetro  $\theta(k)$ . Sendo assim,

$$\frac{dN(k, t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [N(k, t), H(t)] + \frac{\partial N(k, t)}{\partial t}, \quad (2.81)$$

$H(t)$  é a Hamiltoniana do sistema magneto elástico (2.75) com dependência temporal, podemos observar que  $N(k, t)$  e  $H(t)$  comutam devido serem descritos pelos mesmos operadores do sistema magneto elástico  $A^\dagger(k)$  e  $B^\dagger(k)$ , desta maneira  $[N(k, t), H] = 0$ .

Realizando assim a derivada  $\frac{\partial N(k, t)}{\partial t}$ , teremos então,

$$\frac{dN(k, t)}{dt} = 0, \quad (2.82)$$

observamos com isso, a conservação do número de partículas  $N(k, t)$  do sistema magneto elástico, implicando na conservação dos operadores de spin (2.79) e momento linear (2.80) sobre um de valor do modo  $\vec{k}$ . Como as grandezas vetoriais (2.79) e (2.80) são a soma sobre todos valores de  $\vec{k}$  em relação ao número de partícula  $N(k)$  de um valor de modo  $\vec{k}$ , em vista disso temos que as grandezas totais também são conservadas, ou seja, a conservação dos operadores spin  $S_z$  (2.80) e momento linear  $P_z$  (2.79) sobre todos valores de  $\vec{k}$ . Finalmente, concluímos que como os modos com  $\vec{k}'s$  diferentes não são acoplados pela variação temporal do campo magnético externo  $\vec{H}(t)$ , ou seja, o vetor de onda  $\vec{k}$  de uma excitação (ramos de fônons ou mágnons) é conservado ao longo do tempo, assim vemos que os modos de  $\vec{k}'s$  não se misturam, e de fato ocorre uma conversão mágnon-fônon, pois o valor de  $\vec{k}$  que se inicia no ramo, será o mesmo no final do ramo, acompanhando a conversão do sistema mágnon-fônon.

A vista disso, temos a validade da Hamiltoniana (2.75) para um sistema com campo magnético externo variado no tempo  $H(t)$ , pois ocorre a conservação do momento linear, portanto, continuamos com uma Hamiltoniana isotrópica. Conseqüentemente temos uma validade da teoria de conversão mágnon-fônon e vice-versa, devido a conservação do vetor de onda  $\vec{k}$ , assim não temos a mistura dos modos de  $\vec{k}'s$  ao longo da evolução entre as excitações do sistema magneto elástico. Temos que assim analisar uma eficiência de conversão de momento entre os ramos de mágnons-fônons, em vista que não há troca de

momento entre os diversos valores de  $\vec{k}'s$ , ou seja, não há mistura de vetores de ondas em relação ao outro ramo.

Vamos agora encontrar novos operadores que evoluem no tempo, onde até antes de  $t_1$  o campo magnético  $\vec{H}(t)$  era constante no tempo e no tempo  $t_1$  teve um aumento do campo magnético  $\vec{H}(t)$  monotonicamente, logo após o tempo  $t_2$  o campo  $\vec{H}$  permanece constante no tempo, como observado na fig.9 anteriormente.

Realizando uma transformada de Bogoliubov em relação aos operadores  $A^\dagger(k, t_0)$  no tempo  $t$ , haja vista que precisamos somente desse operador para analisar a conversão mágnon-fônon, devido a conservação dos vetores de onda  $\vec{k}$  em cada ramo do sistema fônon ou mágnon, temos,

$$A^\dagger(k, t) = \alpha(k, t_0)A^\dagger(k, t_0) + \beta(k, t_0)B^\dagger(k, t_0), \quad (2.83)$$

esses novos operadores são bósons, conseqüentemente respeitam a relação  $[A(k, t), A^\dagger(k', t)] = \delta_{k, k'}$ , à vista disso obtemos outra relação,

$$|\alpha(k, t_0)|^2 + |\beta(k, t_0)|^2 = 1. \quad (2.84)$$

Com o propósito de analisar uma eficiência de conversão mágnon-fônon, vamos enunciar estados de ocupações  $|n_1, n_1\rangle$ , sendo  $n_1$  referente ao número de ocupação do ramo  $A^\dagger(k, t)$  e o  $n_2$  de um segundo ramo qualquer, como estamos tratando somente com o ramo  $A^\dagger(k, t)$  impomos assim  $n_2 = 0$ , logo,  $|n_1, 0\rangle = |n\rangle$ , simplificando futuras análises.

Iremos analisar quando inicialmente só temos o campo de mágnons  $C^\dagger(k, t)$  no sistema em  $t_0$  no vácuo, nesse tempo o sistema é descrito com os spins alinhados ao eixo  $\hat{z}$  e os íons estão em repouso, ou seja, inicialmente o sistema é constituído somente de mágnons, temos assim momento linear médio,

$$\vec{g}_m = \langle n | \hbar \vec{k} C^\dagger(k, t) C(k, t) | n \rangle = \hbar \vec{k} n, \quad (2.85)$$

evidentemente, isso é apenas uma aproximação, porque não é possível ter excitações de mágnons sem a adição de alguns fônons [14], como já abordado devido ao acoplamento magneto elástico. Como estamos interessados na análise da região de cruzamento, devemos trabalhar com os operadores que abordam o sistema magneto elástico (mágnons+fônons), assim sendo, devemos trabalhar com o ramo  $A^\dagger(k, t)$ , descrito pelos operadores de fônon e mágnos, portanto,

$$\langle n | A^\dagger(k, t_0) A(k, t_0) | n \rangle = \hbar k n, \quad (2.86)$$

onde  $A^\dagger(k, t_0) A(k, t_0)$  é o número de partículas no sistema, conseqüentemente  $n$  exprime essa informação .

Logo após em  $t$  o campo magnético  $\vec{H}(t)$  é variado no tempo, excitando o campo  $A^\dagger(k, t)$  na região de cruzamento entre os campos  $A^\dagger(k, t_0)$  e  $B^\dagger(k, t_0)$ , como já discutido não se cruzam devido a conservação dos valores de  $\vec{k}'s$ , conseqüentemente  $\beta(k, t_0) \neq 0$ , devido ao forte acoplamento magneto elástico no sistema onde as vibrações dos spin, provocam vibrações da rede, formando ondas magneto elásticas e ocorrendo a conversão mágnon-fônon. Então no tempo  $t$  o campo magnético externo  $\vec{H}(t)$  fica estabilizado e constante, reforçando a ideia da aproximação onde a excitação de mágnons não provoca a criação de fônons nesse sistema. Temos o número de partículas no tempo  $t$  como,

$$\begin{aligned} A^\dagger(k, t)A(k, t) &= |\alpha(k, t_0)|^2 A^\dagger(k, t_0)A(k, t) + \alpha(k, t_0)\beta^*(k, t_0)A^\dagger(k, t_0)B(k, t_0) \\ &+ \beta(k, t_0)\alpha^*(k, t_0)B^\dagger(k, t_0)A(k, t_0) + |\beta(k, t_0)|^2 B^\dagger(k, t_0)B(k, t_0) \end{aligned} \quad (2.87)$$

portanto temos  $\alpha(k, t_0) = 0$  devido no tempo  $t$  o sistema não possui mágnons, em conseqüência o momento linear médio se caracteriza como,

$$\langle n|A^\dagger(k, t)A(k, t)|n \rangle = \hbar \vec{k}n |\beta(k, t_0)|^2, \quad (2.88)$$

desse modo temos  $\beta(k, 0) \neq 0$ . Portanto definimos que no tempo final os ramos restantes são fônons, sendo assim, os vetores de ondas  $\vec{k}'s$  que restaram foram convertidos dos mágnons, preservando a conservação dos vetores de ondas  $\vec{k}$  no ramo trabalhado  $A^\dagger(k, t)$ .

Desse modo, a eficiência de conversão ente os ramos mágnon-fônon é,

$$\eta = \frac{\langle n|A^\dagger(k, t)A(k, t)|n \rangle}{\langle n|A^\dagger(k, t_0)A(k, t_0)|n \rangle} = |\beta(k, t_0)|^2. \quad (2.89)$$

Analogamente, vimos que o sistema do ramo  $A^\dagger(k, t_0)$ , possui características de mágnons puros, logo após ocorre uma variação no campo magnético externo  $\vec{H}(t)$ . Temos assim excitações na rede, devido ao acoplamento magneto elástico no cristal ferromagnético, onde trabalhamos com a aproximação da não ocorrência da criação de fônons devido a excitações de spins. Logo, evoluindo o sistema no tempo, observamos a possibilidade sobre certas condições à conversão mágnon-fônon, ou seja, o vetor de onda presente no ramo de mágnon inicialmente, permanece no ramo. Mas agora o ramo tem características de fônons, sendo convertido do sistema de mágnons, assim podemos descrever uma eficiência de ocorrer ao final da interação no sistema, campos com características de fônons. Dessa maneira foi definido um fator de conversão de momento das excitações magneto elásticas da transferência de momento entre os dois sistemas (mágnon-fônon), sendo ele  $|\beta(k, t_0)|^2$ . Foi observado, que para valores diversos de  $\vec{k}$  não ocorre a troca de modos de  $\vec{k}$  entre os ramos, pois o número de partículas se conserva  $N(k, t)$  (2.82), de modo a observar um resultado interessante que nos mostra a ocorrência da conversão mágnon-fônon, apesar da aproximação feita na eficiência mágnon-fônon. No trabalho ref.[7] se dá uma atenção

no cálculo da eficiência da conversão mágnon-fônon para diferentes variações do campo magnético externo.

Assim sendo, temos a conversão mágnon-fônon, que inicialmente tínhamos uma quase-partícula gerada da quebra de simetria (mágnon), que se converte em uma quase-partícula proveniente da quebra de simetria translacional na rede (fônon), que por sua vez modifica o sistema, terminando com características de fônons. Portanto nesse aspecto final, temos que ter cuidado pois esses "fônons" finais tem características de tal quase-partícula pura ?. Mas será de fato um fônon puro ?. Em vista tínhamos um bóson de Goldstone (mágnon) com spin inteiro e sem massa, convertendo em outro bóson de Goldstone (fônon), sem spin e sem massa, mas será que o resultado será de fato somente o fônon convencional sem spin ?. Ou o spin contido no mágnon se conservou no sistema ?. No próximo capítulo o fônon resultante será abordado, analisando o aspecto do momento angular intrínseco do mágnon, de forma que possa se preservar no "fônon", conseqüentemente temos que verificar a conservação dos graus de liberdades do sistema (mágnon-fônon).



## 3 MOMENTO ANGULAR DO FÔNON

Foi investigado no capítulo anterior a conversão mágnon-fônon e o cálculo de eficiência de conversão mágnon-fônon. Como discutido anteriormente, ficou uma curiosidade referente à conservação dos graus de liberdade do mágnon para o fônon convertido, devido o acoplamento magneto elástico e algumas condições físicas demonstradas, pois, ainda não está claro se os fônons convertidos dessa interação podem conservar o spin do mágnon, ou não. O trabalho ref.[1], apresentou que à luz espalhada pelos fônons, do processo de conversão mágnon-fônon é polarizada circularmente, onde foi observada no experimento em um filme de granada de ferro-ítrio isolante ferromagnético, sob à aplicação de um campo magnético variado no tempo, realizado por meio de medidas de difusão de luz de Brillouin. Desse modo confirmou que à luz espalhada pelos fônons é de fato polarizada circularmente, demonstrando que os fônons da conversão de mágnons carregam momento angular. Surpreendentemente, mecanismos microscópicos de transferência do momento angular de spin para o sistema fônons e posteriormente ao corpo como um todo, permanecem pouco compreendidos, sendo assim, nesse capítulo verificaremos se o momento total do fônon com spin se conserva e analisar o resultado do momento angular e suas características.

### 3.1 Conservação dos momentos angulares: orbital e intrínseco

No estudo da adição de momento angular total, quando adicionamos o momento angular orbital e o momento angular de spin, podemos escrever o momento angular total  $\vec{J}$ , o gerador de rotações, com a soma das partes,

$$\vec{J} = \vec{L} + \hbar\vec{S}, \quad (3.1)$$

onde sua conservação implica na comutação com o Hamiltoniano que descreve o sistema total (2.75) e a invariância rotacional, possibilitando o tratamento do sistema com momento angular intrínseco, sendo o momento angular de spin exemplificado em dimensão de  $1/\hbar$ .

Como comentado anteriormente, já possui na literatura trabalhos ref.[2, 6, 7, 10, 15, 16] que discutem e analisam o spin no fônon convertido do mágnon, como por exemplo, verificou-se que a interação mágnon-fônon por Raman, induz um momento angular do fônon diferente de zero, que é em função de magnetização [16]. Em vista disso, o momento angular do fônon convertido do sistema magneto elástico não pode ser ignorado, especialmente em materiais com forte acoplamento magneto elástico, ocorrendo nesses

casos a inserção de fônon-spin (fônon com spin). Investigaremos de forma a analisar o fônon-spin da conversão mágnon-fônon.

Revisitando o efeito Einstein-de Haas, que descreve a rotação adquirida por um corpo ferromagnético livremente suspenso, em consequência de uma variação em sua magnetização obtida pela aplicação de um campo magnético, esse fenômeno consiste numa relação entre o magnetismo, o momento angular e o spin total de partículas elementares. Podemos então observar que o momento angular total do fônon pode ser subtraído no cálculo do momento angular dos fótons [16], sendo possível dividir em relação ao momento angular orbital  $\vec{L}_1$  e o momento angular intrínseco  $\vec{L}_2$ . Com essa correção, o spin e o momento angular orbital podem ser determinados com certa precisão.

Escrevendo o momento angular total de um sólido elástico [17],

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \int d^3r(\vec{r} + \vec{R}) \times \vec{P} = \int d^3r(\vec{r} + \vec{R}) \times \rho \dot{\vec{R}}, \quad (3.2)$$

portanto,

$$\vec{L}_1 = \int d^3r \rho \vec{r} \times \dot{\vec{R}}, \quad (3.3)$$

$$\vec{L}_2 = \int d^3r \rho \vec{R} \times \dot{\vec{R}}, \quad (3.4)$$

temos que  $\vec{R}$  (2.19) é o vetor deslocamento da rede descrito por operadores de fônons não polarizados,  $\vec{r}$  vetor posição (ou vetor não deformado) e  $\vec{P}$  o momento linear, sendo  $\rho$  a densidade média do sólido.

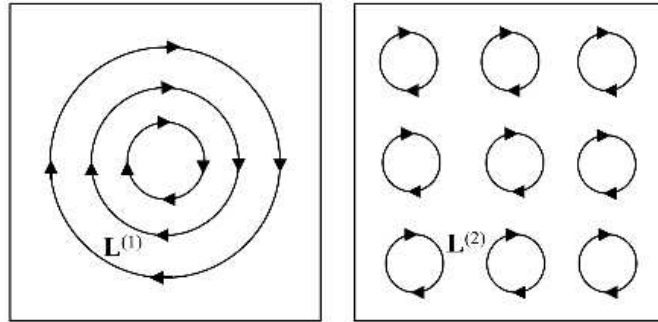


Figura 10 – Representação do momento angular orbital  $\vec{L}_1$  e momento angular de spin  $\vec{L}_2$ . Fonte: ref. [2].

Essas duas partes do momento angular do sistema do fônon são claramente distinguíveis. A parte do momento angular orbital  $\vec{L}_1$  é nitidamente uma rotação em torno do ponto de equilíbrio, devido ao produto vetorial da velocidade de deslocamento do íon e sua posição de equilíbrio. A parte do momento angular intrínseco  $\vec{L}_2$  são deformações de cisalhamento rotacional em torno dos vetores de deslocamento dos íons, conforme visto no produto vetorial do vetor de deslocamento e sua velocidade, ou seja, iremos ter várias

rotações distintas em torno dos próprios eixos de equilíbrio. Conforme observamos na fig.10.

Com o intuito de encontrar os resultados do momento angular orbital (3.3) e momento angular intrínseco (3.4), devemos calcular a derivada temporal sobre o vetor deslocamento  $\vec{R}$  (2.19), onde vamos usar em relação aos operadores de fônons não polarizados, assim,

$$\dot{R}_i = \sum_{k,j} \epsilon_{i,j}(k) \sqrt{\frac{\hbar}{2\rho V \omega_{f,j}(k)}} i\omega_{f,j}(k) (a_j^\dagger(k) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_{f,j}(k)t)} - a_j(k) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_{f,j}(k)t)}), \quad (3.5)$$

onde  $j$  são as componentes dos ramos dos fônons (transversais e longitudinal).

Estamos aptos a encontrar os momentos orbital e intrínseco, respectivamente,  $\vec{L}_1$  (3.3) e  $\vec{L}_2$  (3.4).

Momento angular orbital  $\vec{L}_1$ :

No momento angular orbital (3.3), há uma derivada temporal em relação ao vetor deslocamento da rede, onde já foi encontrado o resultado (3.5), desse modo, substituindo (3.5) em (3.3), obtemos,

$$\vec{L}_1 = \sum_{k,j} \sqrt{\frac{\rho\hbar\omega_{f,j}(k)}{2V}} i([\vec{\epsilon}_j(k) \times \int d^3r \vec{r} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}] a_j(k) - [\vec{\epsilon}_j(k) \times \int d^3r \vec{r} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}] a_j^\dagger(k)), \quad (3.6)$$

como nesse trabalho estamos interessados no caso em que os vetores de onda  $\vec{k}'$ s estão alinhados no eixo  $\hat{z}$ , temos que,  $\vec{r}$  direcionado ao longo do eixo de anisotropia, devido ao produto escalar  $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$  em (3.6). Portanto simplificando (3.6), nomeando  $i \int d^3r \vec{r} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \vec{Z}(k)$ , onde o parâmetro  $\vec{Z}(k)$  por simetria, só pode ser direcionado ao longo do vetor de onda  $\vec{k}$ , consequentemente teremos,

$$\vec{L}_1 = \sum_{k,j} \sqrt{\frac{\rho\hbar\omega_{f,j}(k)}{2V}} ([\vec{\epsilon}_j(k) \times \vec{Z}(k)] a_j(k) - [\vec{\epsilon}_j(k) \times \vec{Z}^\dagger(k)] a_j^\dagger(k)), \quad (3.7)$$

nos produtos vetoriais em (3.7), observamos que somente os fônons transversais contribuem para o momento angular orbital  $\vec{L}_1$ , pois,  $j = 1, 2$  são ondas transversais e  $j = 3$  ondas longitudinais.

Momento angular intrínseco  $\vec{L}_2$ :

O momento angular intrínseco da rede relacionado à rotação mecânica, reflete apenas o movimento do corpo rígido da rede. No entanto, o momento angular intrínseco dos fônons não eram explorados na literatura. Podemos definir o momento angular intrínseco dos fônons como [16],

$$\vec{L}_2 = \int d^3r \rho \vec{R} \times \dot{\vec{R}} = \sum_{k,i} i\rho R_i^\dagger(k) m \dot{R}_i(k), \quad (3.8)$$

onde  $i = 1, 2, 3$  (eixos  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$ ). Onde,

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes I_{n \times n},$$

sendo  $n$  número de íons em uma célula unitária.

Como os vetores de polarização  $\varepsilon_j(k)$  nesse trabalho em particular são paralelos aos vetores de ondas  $\vec{k}'$ s, podemos fazer,

$$\varepsilon_j^\dagger(k) m \varepsilon_j(k') = i \frac{\vec{k}}{k}, \quad (3.9)$$

haja vista em ref.[16], a equação (3.9) é nomeada como uma pequena contribuição do momento angular intrínseco do fônon do ramo  $j$  com vetor de onda  $\vec{k}$  a menos da constante  $\hbar$ , fortalecendo assim a ideia do spin do fônon.

Substituindo (3.9) em (3.8), temos que,

$$\vec{L}_2 = \frac{\hbar}{2} \sum_{k,j} \frac{\vec{k}}{k} a_j^\dagger(k) a_j(k) + \frac{i}{2} \sum_k \frac{\vec{k}}{k}, \quad (3.10)$$

sendo que a soma sobre todos os valores  $\frac{\vec{k}}{k}$  é zero. Portanto temos em (3.10) um resultado para o momento angular intrínseco  $\vec{L}_2$ ,

$$\vec{L}_2 = \frac{\hbar}{2} \sum_{k,j} \frac{\vec{k}}{k} a_j^\dagger(k) a_j(k). \quad (3.11)$$

Substituindo agora em (3.11) em relação aos operadores de fônons polarizados circularmente, por meio das relações (2.21) e (2.22), deste modo,

$$\vec{L}_2 = \hbar \sum_k \frac{\vec{k}}{k} (a_-^\dagger(k) a_-(k) - a_+^\dagger(k) a_+(k)). \quad (3.12)$$

Observamos no resultado do momento angular intrínseco (3.12), que os fônons longitudinais também não contribuem para o problema, pois, somente os fônons transversais atuam nos operadores de fônons polarizados circularmente, onde temos que os fônons carregam um momento angular intrínseco paralelo e/ou antiparalelo ao seu vetor de onda  $\vec{k}$ , portanto, somente os fônons transversais atuam, podendo ser interpretado como uma rotação mecânica na rede, ou seja, spin do fônon.

Obtemos assim, os valores de momento angular orbital  $\vec{L}_1$  (3.7) e momento angular intrínseco  $\vec{L}_2$  (3.12), somando ambos resultados, temos o momento angular do fônon  $\vec{L}$

(3.2). Dessa maneira, estamos aptos a analisar a conservação do momento angular total (3.1), ou seja, aplicar  $\vec{J}$  na equação de movimento de Heisenberg e verificar se o momento angular se conserva no sistema.

Aplicando a equação de movimento de Heisenberg em relação ao momento angular  $\vec{L}$ ,

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\vec{L}, H], \quad (3.13)$$

temos com isso, uma comutação do momento angular do fônon com a Hamiltoniana total (2.75), com dependência temporal que descreve o sistema magneto elástico, onde podemos ter a conversão mágnon-fônon. Notemos a complexidade dessa Hamiltoniana e com isso levaria uma certa complicação na resolução de (3.13), mas podemos descrever (2.75) em relação a duas partes [18],

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{f-s}, \quad (3.14)$$

sendo  $\hat{H}$  a hamiltoniana total,  $\hat{H}_{f-s}$  a hamiltoniana de um sistema com fônon-spin (fônon com spin),  $H_0$  a hamiltoniana de spin e fônon não interagentes, que é escrita na forma,

$$H_0 = H_s + H_f, \quad (3.15)$$

onde  $H_s$  é a hamiltoniana somente de spin e  $H_f$  é a hamiltoniana somente de fônons (2.26).

A mudança dinâmica do operador de spin no fônon-spin, isto é, criação do fônon com spin, tem que ser absorvida pelo momento angular  $\vec{L}$  do sistema elástico [20]. Notemos em (3.13), que o momento angular  $\vec{L}$  comuta com  $\hat{H}_0$ , já que se absorve essa mudança dinâmica, pois, o fônon com spin pode comutar com os operadores de fônons convencionais e os operadores de spins, assim (3.13) e reescrita na forma,

$$\dot{\vec{L}} = \frac{1}{i\hbar}[\vec{L}, H_{f-s}]. \quad (3.16)$$

Podemos pensar no caso particular para representar a Hamiltoniana de fônon-spin, a precessão do spin em torno do eixo de anisotropia, sujeito a um campo magnético externo no eixo  $\hat{z}$ , criando uma oscilação da rede elástica com o spin, ocorrendo deformações elásticas no sistema devido a precessão do spin no eixo de anisotropia, por um pequeno ângulo  $\phi$ . Em vista disso, devemos encontrar uma medida do ângulo de precessão no eixo anisotrópico dentro da teoria elástica linear [17].

A equação de movimento em um meio elástico é dada pela força de tensão interna [17],

$$\vec{F}_\mu(x) = \frac{\partial \sigma_{i\mu}(k)}{\partial x_i} = \rho \ddot{\vec{R}}_\mu(k), \quad (3.17)$$

sendo  $\sigma_\mu(k)$  o tensor de tensão. Os termos  $\rho$  e  $\vec{R}_\mu(k)$ , são respectivamente, a densidade média do cristal e o vetor deslocamento [17]. Portanto, podemos descrever uma medida do ângulo de precessão no sistema elástico [2, 17],

$$\vec{\phi} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{R}_\mu(k), \quad (3.18)$$

onde  $\mu$  são os eixos do plano (x,y e z).

Substituindo o vetor deslocamento em relação aos operadores de criação e aniquilação de fônons não polarizados (2.19) em (3.18), temos com isso, as medidas dos ângulos de precessão em termos dos eixos  $\hat{x}$  e  $\hat{z}$ , semelhante ao exemplo da precessão de spin que precessiona no plano xy, devido o valor médio  $\langle S_z \rangle = 0$ , portanto,

$$\phi_x = -\frac{1}{2} \sum_{k,j} \sqrt{\frac{\hbar}{2\rho V \omega_{f,j}(k)}} (ik_y \times \varepsilon_z(k)) (a_j(k) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_{f,j}(k)t)} - a_j^\dagger(k) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_{f,j}(k)t)}), \quad (3.19)$$

$$i\phi_y = \frac{1}{2} \sum_{k,j} \sqrt{\frac{\hbar}{2\rho V \omega_{f,j}(k)}} (ik_x \times \varepsilon_z(k)) (a_j(k) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_{f,j}(k)t)} - a_j^\dagger(k) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_{f,j}(k)t)}). \quad (3.20)$$

Para polarizar as medidas dos ângulos de precessão, com o intuito de simplificar a resolução dos problemas, fazemos  $\vec{x} = 0$  e subtraímos os termos (3.19) e (3.20),

$$(\phi_x - i\phi_y) = \phi_+ = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{2\rho V}} \sum_{k,j} \frac{e_+}{\sqrt{\omega_{f,j}(k)}} \cdot [ik \times \varepsilon_z(k)] (a_j(k) - a_j^\dagger(k)), \quad (3.21)$$

consequentemente, temos o resultado da medida do ângulo de precessão  $\phi$  polarizado,

$$\phi_\pm = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{2\rho V}} \sum_{kj} \frac{\epsilon_\pm}{\sqrt{\omega_{\rho,j}(k)}} \cdot [ik \times \varepsilon_z(k)] (a_j(k) - a_j^\dagger(k)). \quad (3.22)$$

Devemos agora encontrar o Hamiltoniano que descreve o sistema de fônons-spin em relação com o ângulo de precessão polarizado para a resolução de (3.16). Considerando, um Hamiltoniano de spin uniaxial da forma [18],

$$H_s = -D(n \cdot S)^2, \quad (3.23)$$

onde  $n$  é a normal. Podemos escrever a Hamiltoniana na forma,

$$H_s = H_A + H_z, \quad (3.24)$$

$$H_A = -D(\epsilon_j(k) \cdot S)^2, \quad (3.25)$$

sendo  $H_z$  o Hamiltoniano de Zeeman e sendo  $H_A$  o Hamiltoniano anisotrópico que possui uma invariância rotacional completa, isto é, a forma de  $H_A$  não depende da orientação eixos ordenados.

A normal é dada pelo eixo de anisotropia em relação ao campo magnético externo  $\vec{H}(t)$ , nesse trabalho é aplicado em  $\hat{z}$  e o ângulo de precessão que o fônnon-spin se aplica a  $\vec{\phi}$  [18],

$$n = \epsilon_z(k) + [\vec{\phi} \times \epsilon_z(k)]. \quad (3.26)$$

Expandindo (3.24) em primeiros termos lineares em  $\phi$ , temos assim,

$$H_s = -D(\epsilon_z(k) \cdot S)^2 + H_{f-s}, \quad (3.27)$$

com esse resultado encontramos o Hamiltoniano de fônnon-spin  $H_{f-s}$ , na forma de uma precessão "fônnon-spin" no eixo em que o campo magnético externo é aplicado no eixo  $\hat{z}$ , onde poderemos calcular o comutador do momento angular (3.16) de uma forma simplificada,

$$H_{f-s} = -i\frac{D}{2}(S_+S_z + S_zS_+)\phi_- + i\frac{D}{2}(S_-S_z + S_zS_-)\phi_+, \quad (3.28)$$

simplificamos (3.28) por meio da relação de comutação  $[S_\pm, S_z] = S_\pm$ .

Estamos agora aptos para calcular a conservação do momento angular (3.16), onde podemos realizar por partes, uma em relação ao momento angular orbital e a outra pelo momento angular intrínseco.

#### Conservação do momento angular orbital

A atuação da evolução temporal do momento angular orbital no eixo  $\hat{z}$  é nula, devido  $[\phi_\pm, \vec{L}_{1z}] = 0$ , pois, o fônnon-spin precessiona no plano  $xy$ . Sabemos assim que para o eixo  $\hat{z}$ ,

$$\dot{L}_{1z} = \frac{1}{i\hbar}[L_{1z}, H_{f-s}] = 0. \quad (3.29)$$

Para a conservação do momento angular orbital no eixo  $\hat{x}$   $L_{1x}$ , vamos encontrar o comutador entre o ângulo de precessão que descreve a Hamiltoniana fônnon-spin e o momento angular orbital no eixo  $\hat{x}$ , devido a dinâmica temporal,

$$\dot{L}_{1x} = \frac{-D}{i\hbar}(S_y S_z + S_z S_y)[\phi_x, L_{1x}], \quad (3.30)$$

onde escrevemos os operadores de spin e a medida do ângulo de precessão em termos dos eixos do sistema. Calculando o comutador de (3.30),

$$[\phi_{\pm}, L_{1x}] = i\frac{\hbar}{2V} \sum_k (e_{\pm} \cdot [\vec{k} \times \varepsilon_z(k)])[\varepsilon_z(k) \times \vec{Z}(k)], \quad (3.31)$$

usamos de auxílio a identidade de produtos cíclicas [2],

$$\sum_{k=1,2} (\varepsilon_z(k) \cdot A)(\varepsilon_z(k) \cdot B) = A \cdot B - \left(\frac{\vec{K}}{k} \cdot A\right)\left(\frac{\vec{K}}{k} \cdot B\right), \quad (3.32)$$

sendo  $\varepsilon_z(k) \cdot \varepsilon_z(k) = 1$ .

Tendo aplicado a relação (3.32) em (3.31), podemos reescrever o resultado do comutador de (3.30) como,

$$[\phi_{\pm}, L_{1x}] = \frac{i\hbar}{2V} \sum_k ((e_{\pm} \cdot \vec{Z}(k))(\vec{k} \cdot \varepsilon_x) - (e_{\pm} \cdot \varepsilon_x)(\vec{k} \cdot \vec{Z}(k))) = i\hbar, \quad (3.33)$$

onde é utilizado a relação  $\frac{1}{V} \sum_k \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$ , que ocasiona  $\vec{Z}(k) \approx (2\pi)^3 \partial_k \delta_k$ , assim encontramos o resultado de (3.33).

Substituindo (3.33) em (3.30), temos o resultado da dinâmica temporal do momento angular orbital no eixo  $\hat{x}$ ,

$$\dot{L}_{1x} = -D(S_y S_z + S_z S_y). \quad (3.34)$$

Com isso, podemos analisar a dinâmica temporal do momento angular total na parte orbital em  $\hat{x}$ , logo, a conservação do momento angular total na parte orbital, portanto temos que,

$$\dot{J}_{1x} = \dot{L}_{1x} + \hbar \dot{S}_x, \quad (3.35)$$

onde já calculamos  $\dot{L}_{1x}$  (3.34). Agora calcularemos a conservação do momento de spin no eixo  $\hat{x}$ , analisando o operador spin na equação de movimento de Heisenberg, temos,

$$\dot{\vec{S}} = \frac{1}{i\hbar}[\vec{S}, H], \quad (3.36)$$

lembrando que  $\hat{H}$  é descrito em (3.14), onde o operador de spin  $S$  comuta com a Hamiltoniana de fônons-spin  $H_{f-s}$ , assim podemos descrever a Hamiltoniana de fônons  $H_f$  e spin  $H_s$  não interagentes diferentes como (3.15), onde  $H_s$  pode ser escrito como (3.24), assim substituindo (3.24) em (3.15),



$$H_0 = H_f + H_A + H_z, \quad (3.37)$$

sendo  $H_z$  o hamiltoniano de Zeeman,  $H_f$  Hamiltoniana dos fônons (2.26) e  $H_A$  o Hamiltoniano de anisotropia (3.25).  $H_A$  o Hamiltoniano do cristal na ausência de fônons, assim devido essa mudança da dinâmica causada pelos fônons, temos que  $H_A$  não comuta com o operador de spin  $S$ .

Aplicando assim (3.25) em (3.36), sendo analisado sobre o eixo  $\hat{x}$ ,

$$\dot{S}_x = \frac{1}{i\hbar}[H_A, S_x] = \frac{D}{\hbar}(S_z S_y + S_y S_z), \quad (3.38)$$

onde usamos a relação  $[S_i, S_j] = i\varepsilon_{ijk}\hbar S_k$  como auxílio para a solução.

Em vista dos resultados (3.34) e (3.38), encontramos o resultado da evolução temporal de (3.35) e assim demonstrando a conservação do momento angular total da parte orbital no eixo  $\hat{x}$ ,

$$\dot{J}_{1x} = \dot{L}_{1x} + \hbar\dot{S}_x = 0. \quad (3.39)$$

O cálculo da evolução temporal do momento angular total na parte orbital no eixo  $\hat{y}$  é análogo ao que realizamos para o eixo  $\hat{x}$ , onde demonstramos também a conservação do momento angular total da parte orbital no eixo  $\hat{y}$ ,

$$\dot{J}_{1y} = \dot{L}_{1z} + \hbar\dot{S}_y = 0. \quad (3.40)$$

Consequentemente, devido os resultados (3.29), (3.39) e (3.40), temos então que a parte orbital do momento angular total se conserva ao longo do tempo,

$$\dot{\vec{J}}_1 = \dot{\vec{L}}_1 + \hbar\dot{\vec{S}} = 0, \quad (3.41)$$

mostrando que os momentos angulares orbitais nos eixos  $\hat{x}, \hat{y}$  e  $\hat{z}$  se conservam, assim resultado de  $\vec{J} = \text{constante}$ , significa que a direção de  $\vec{J}$  fica inalterada na parte orbital, mesmo com a adição do spin no sistema (fônon-spin).

#### Conservação do momento angular intrínseco

Para calcularmos a conservação do momento angular total na parte intrínseca, temos que calcular (3.16) para a parte intrínseca,

$$\dot{\vec{L}}_2 = \frac{1}{i\hbar}[\vec{L}_2, H_{f-s}], \quad (3.42)$$

teremos a comutação  $[\phi_{\pm}, \vec{L}_2]$ , onde devemos considerar o spin do fônon, algo que não era preciso em  $\vec{L}_1$ . Temos em (3.12) o resultado momento angular intrínseco,

$$\vec{L}_2 = \hbar \sum_k \frac{\vec{k}}{k} (a_-^\dagger(k)a_-(k) - a_+^\dagger(k)a_+(k)),$$

vemos que  $\vec{L}_2$  está representado pelos operadores de fônons convencionais, ou seja, sem spin. Devemos encontrar então o operador que descreve o sistema com fônons com spin, para poder analisar a conservação do momento angular intrínseco e ver se é possível que o fônon convertido do mágnon possa ter conservado o spin.

Visto que a comutação dos operadores pode-se implicar na conservação de algumas partes do momento angular, enquanto a prova completa da conservação requer uma solução na mecânica quântica. Devemos analisar as componentes de momento angular intrínseco do fônon-spin perpendiculares e paralelas ao eixo anisotrópico, através de um análogo da teoria de relaxamento de spin, no nosso trabalho, relaxamento do fônon-spin.

Os termos de  $H_{f-s}$ , devido a fônons transversais, podem ser divididos em dois grupos, o primeiro grupo descreve torções das células da rede devido aos fônons transversais, enquanto o segundo grupo de termos descreve rotações locais das treliças sem torção do ambiente cristalino de átomos magnéticos [18]. Em geral, processos devido a esses dois tipos de torções do sistema, devem resultar em taxas de relaxamento comparáveis.

## 3.2 Relaxamento de fônon-spin: Operador Fônon-Spin

Nas ciências físicas, relaxamento geralmente significa o retorno de um sistema perturbado ao equilíbrio. Podemos representar o processo de relaxamento por um tempo de relaxamento  $\tau$ . A descrição teórica mais simples de um relaxamento em função do tempo  $t$  é um decaimento exponencial  $e^{-t/\tau}$  em relação ao tempo do sistema  $t$  e o tempo de decaimento  $\tau$ . No decaimento do fônon-spin, portanto, podemos aplicar o relaxamento para descrever a rapidez com que os fônons-spins "esquecem" a direção na qual eles são orientados [18]. Assim, por meio do estudo da mecânica quântica, observasse que as energias de interação no sistema dependente do tempo, causam transições entre os estados de spins que resultam em relaxamento do fônon-spin.

Realizando um decaimento entre estados da Hamiltoniana para analisar o comportamento do sistema, vemos o decaimento exponencial das componentes transversais do vetor de magnetização  $\vec{M}_{xy}$ . Portanto, essa reorientação ou a queda podem então modular as energias de interação de fônon-spin dependentes da orientação, onde podemos reescrever os operadores de criação/aniquilação de fônons agora carregando spin.

Observamos anteriormente, que no momento angular orbital (3.7) e o momento angular intrínseco (3.12), descrito pelos operadores de aniquilação e criação de fônons sem spin, onde os ramos de fônons longitudinais não atuam no sistema, nessa nova teoria também podemos notar o mesmo efeito. Sabemos que os fônons longitudinais têm maior velocidade do som que os fônons transversais, sendo a taxa de um processo de fônon

(emissão e absorção de um fônon) é inversamente proporcional à quinta potência da velocidade do som [18], com isso, processos que envolvem fônons longitudinais podem ser negligenciados, conforme trabalhamos.

Nessa seção vamos estudar as transições em  $(m, m - 1)$  estados, por um método convencional que emprega à rotação do eixo de anisotropia por fônons transversais, devido os fônons longitudinais serem negligenciados.

Sendo o autoestado do sistema descrito da seguinte forma,

$$|\Psi_{\pm}\rangle = |\psi_{\pm}\rangle \otimes |\phi_{\pm}\rangle, \quad (3.43)$$

onde  $|\psi_{\pm}\rangle$  são os autoestados da Hamiltoniana de spin  $H_s$ , com autovalores de energia  $E_{\pm}$  e  $|\phi_{\pm}\rangle$  são os autoestados da Hamiltoniana de fônons  $H_f$ , com energia  $E_{f\pm}$ . Como foi mostrado, que Hamiltoniana do sistema de fônons com os operadores polarizados  $H_f$  (2.26) é devida aos fônons transversais como mostrado anteriormente, devido a atuação somente dos operadores de fônons polarizados circularmente, que se dá pelas relações (2.21 e 2.22), portanto, somente fônons transversais atuam. Logo, devido a isso,  $|\phi_{\pm}\rangle$  também pode atuar como autoestado do Hamiltoniano do fônon-spin  $H_{f-s}$ .

Analisando  $H_{f-s}$  por uma rotação no eixo de anisotropia, por um ângulo de precessão  $\vec{\phi}$ , para observamos a contribuição dos fônons transversais na rotação da rede. Sabemos que a invariância rotacional completa implica a invariância do gerador de rotações, isto é, a conservação do momento angular total  $\vec{J}$ , vemos assim a contribuição dos fônons transversais e a conservação do momento angular total.

Portanto, aplicando primeiro uma rotação dos eixos coordenados pelo ângulo  $\phi$ , onde não teremos a interação fônon-spin (3.28) em (3.14), pois, não ocorre a precessão do fônon-spin, conseqüentemente, sobrando apenas a Hamiltoniana de fônons e spins não interagentes  $H_0$ , onde escrevemos a Hamiltoniana total na forma de (3.37),

$$R^{-1}HR = H' = H'_0 = H'_f + H'_A + H'_z, \quad (3.44)$$

no qual a rotação é descrita como  $R = e^{i\vec{S}\cdot\vec{\phi}}$ . Como já foi discutido, a Hamiltoniana de anisotropia  $H_A$  não depende da orientação dos eixos coordenados, ou seja, possui uma invariância rotacional, assim  $H'_A = 0$ , temos com isso,

$$R^{-1}HR = H' = H'_z + H'_f. \quad (3.45)$$

Aplicando agora uma rotação na rede do sistema, teremos assim, o Hamiltoniano total (3.14) com a interação de fônon-spin (3.28), com o auxílio das relações das Hamiltonianas descritas, teremos,

$$H' = H'_{f-s} + H_0, \quad (3.46)$$

sendo  $H_0$  um termo constante, devido à rotação do sistema não modificar seus componentes, podemos assim descrever que  $H'_0 = H_0 = 0$ . O resultado em (3.46) já era esperado, devido a rotação em  $\vec{\phi}$  no sistema, ocasiona a precessão do fônnon-spin. Devemos agora encontrar os valores das Hamiltonianas rotacionadas pelo ângulo  $\vec{\phi}$  (3.45), para igualar os termos em (3.46).

Percebemos que a precessão do fônnon-spin sobre o eixo anisotrópico condiciona o surgimento de fônons sem spin. Devido a essa precessão, ocasiona uma vibração na rede, com isso, a hamiltoniana de fônons  $H_f$  é proporcionada pela precessão do fônnon-spin no eixo anisotrópico, devemos ter [18]:

$$H'_f = H_f - i[H_f, \vec{\phi}] \cdot \vec{S}. \quad (3.47)$$

Sabemos como é descrita a Hamiltoniana de Zeeman  $H_z$ , sendo ela a resposta à aplicação de um campo magnético externo  $\vec{H}(t)$  no sólido. Portanto, quando um campo magnético é aplicado, os momentos angulares orbital e de spin realizarão movimento de precessão,

$$H'_z = H_z - i[H_z, \vec{S}] \cdot \vec{\phi} = H_z - ig\mu_\beta[\vec{H} \cdot \vec{S}, \vec{S}] \cdot \vec{\phi} = -g\mu_\beta[\vec{H} \times \vec{\phi}] \cdot \vec{S}, \quad (3.48)$$

onde foi usado a identidade  $[(\vec{A} \cdot \vec{S}), (\vec{B} \cdot \vec{S})] = i\vec{S} \cdot [\vec{A} \times \vec{B}]$  para a solução.

Estamos aptos agora a solucionar (3.46), substituindo em (3.47) e (3.48) em (3.45), onde vamos negligenciar os termos não rotacionados, portanto, igualando (3.46) e (3.45), obtemos a contribuição dos fônons-spins na rotação do sistema,

$$H'_{f-s} = -g\mu_\beta[\vec{H} \times \vec{\phi}] \cdot \vec{S} - i[H_f, \vec{\phi}] \cdot \vec{S}, \quad (3.49)$$

sendo  $\frac{d\vec{\phi}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[H_f, \vec{\phi}] = \dot{\vec{\phi}}$ .

Portanto, simplificando (3.49),

$$H'_{f-s} = -\hbar(\gamma[\vec{H} \times \vec{\phi}] + \dot{\vec{\phi}}) \cdot \vec{S} = -\hbar\hat{\Omega} \cdot \vec{S}, \quad (3.50)$$

onde usamos a relação do fator giromagnético  $\gamma\hbar = g\mu_\beta$ .

Vemos assim uma clara demonstração da atuação dos fônons transversais na rotação da rede em (3.50), pois, a evolução temporal de  $\vec{\phi}$  contribuem para a rotação do sistema fônnon-spin, dado pelo coeficiente  $\hat{\Omega}$  como um "calibre para a precessão" no eixo anisotrópico, onde se controla com a intensidade do campo magnético externo  $\vec{H}$  é  $\vec{\phi}$ .

Iremos agora aplicar o relaxamento de fônion-spin, ou seja, vamos estudar as transições de matrizes entre estados  $(m, m-1)$ , definidos assim,

$$|\phi_+\rangle = |m_k\rangle \quad |\phi_-\rangle = |m_{k-1}\rangle, \quad (3.51)$$

vamos realizar uma transição de nível no hamiltoniano fônion-spin, rotacionado na rede e rotacionado na estrutura, para verificar se há invariância rotacional, com isto, teremos a conservação do momento angular total no problema, para prosseguir em descrever um operador do sistema fônion-spin.

Para um Hamiltoniano arbitrário, as taxas de transição fônion-spin podem ser convenientemente calculadas alternando-se para o quadro da rede onde a forma de  $\hat{H}_A$  é preservada, enquanto fônion-spin é de origem cinemática e possui uma forma universal independente [18, 19]. Com isso, o novo método é possível calcular facilmente as taxas de relaxamento entre os estados de  $\hat{H}_A$ , enquanto não estava claro como esse problema poderia ser resolvido por métodos convencionais na estrutura do laboratório. Aplicando o relaxamento do fônion-spin na Hamiltoniana de fônion-spin rotacionado na rede (3.50), temos,

$$\langle \Psi_- | H'_{s-ph} | \Psi_+ \rangle = -\hbar \langle \phi_- | \hat{\Omega} | \phi_+ \rangle \langle \psi_- | S | \psi_+ \rangle = -\hbar \hat{\Omega}_{-+} \langle \psi_- | S | \psi_+ \rangle, \quad (3.52)$$

sendo  $|\psi_{\pm}\rangle$  autoestados da Hamiltoniana de spin  $H_s$  e  $|\phi_{\pm}\rangle$  autoestados da Hamiltoniana de fônion-spin  $H_{f-s}$ , já discutido em (3.43).

Escrevendo o "calibre de precessão"  $\hat{\Omega}$ , em termos dos autovetores de  $H_{f-s}$ ,

$$\Omega_{-+} = \langle \phi_- | \gamma [\vec{H} \times \vec{\phi}] + \dot{\vec{\phi}} | \phi_+ \rangle = \gamma [\vec{H} \times \phi_{-+}] + \frac{i}{\hbar} (E_{f-s+} - E_{f-s-}) \phi_{-+}, \quad (3.53)$$

o processo de transições entre níveis de spin e de fônion-spin possuem a mesma energia [18], assim  $E_+ + E_{ph} = E_- + E_{ph-} = \hbar\omega_0$ , sendo  $\omega_0$  a frequência de transição entre níveis. Temos com isso, uma simplificação de (3.53),

$$\hat{\Omega}_{-+} = \gamma [\vec{H} \times \phi_{-+}] + i\omega_0 \phi_{-+}. \quad (3.54)$$

Agora, aplicando o relaxamento de fônion-spin na Hamiltoniana não rotacionada (3.28), em relação ao autoestado da Hamiltoniana do sistema,

$$|\Psi_-\rangle = |m-1\rangle \otimes |n_k-1\rangle \quad |\Psi_+\rangle = |m\rangle \otimes |n_k\rangle, \quad (3.55)$$

onde  $|n_k\rangle$  são autoestados de  $\phi_{\pm}$  e  $|m\rangle$  autoestados dos operadores de spin S.

Portando, aplicando (3.55) em (3.28), vamos ter a transição entre níveis, dado por,

$$\langle \Psi_- | H_{f-s} | \Psi_+ \rangle = i \frac{D}{2} \sqrt{S(S+1) - m(m-1)} (2m-1) \langle n_{k-1} | \phi_- | n_k \rangle, \quad (3.56)$$

notemos a contribuição para  $l_{m,m-1} = \sqrt{S(S+1) - m(m-1)}$  dos fônons transversais de quiralidade definida  $\phi_-$ . Tendo,  $l_{m,m-1} = 1$  a projeção do momento angular no eixo  $\hat{z}$ , está de acordo com a conservação do momento total para a transição  $(m,m-1)$ .

Foi abordado no trabalho ref.[8], as transições entre níveis por meio da Hamiltoniana de fônnon-spin rotacionada  $H'_{f-s}$  e a Hamiltoniana de fônons-spins não rotacionada, através de cálculos das transições por métodos computacionais e experimentais em relação aos eixos da estrutura do sistema no laboratório, observando que possuem os resultados idênticos, logo, taxas de relaxamento de fônnon-spin  $\langle \Psi_- | H'_{f-s} | \Psi_+ \rangle$  e  $\langle \Psi_- | H_{f-s} | \Psi_+ \rangle$  podem ser comparáveis. Consequentemente, encontramos dois resultados para as transições entre níveis de fônnon-spin  $H_{f-s}$ , que são (3.56) e (3.52),

$$\langle \Psi_- | H_{f-s} | \Psi_+ \rangle = i \frac{D}{2} l_{m,m-1} (2m-1) \langle n_{k-1} | \phi_- | n_k \rangle \quad \langle \Psi_- | H_{f-s} | \Psi_+ \rangle = -\hbar \hat{\Omega}_{-+} \langle \psi_- | S | \psi_+ \rangle.$$

Vamos primeiro analisar a contribuição do termo  $\langle \psi_- | S | \psi_+ \rangle$  de (3.52), para ver em qual eixo se aplica rotação da rede, pois, caso o sistema possua spin, a rotação provavelmente deve ocorrer no eixo anisotrópico, eixo  $\hat{z}$  no qual o campo magnético externo  $\vec{H}(t)$  está sendo aplicado no cristal ferromagnético.

Começando discutindo o papel da simetria de inversão do tempo para as transições fônnon-spin, para verificar em quais eixos o operador de spin  $S$  se aplica. Para o hamiltoniano total  $\hat{H}$  ser invariante na reversão do tempo, o campo magnético externo deve ser zero  $\vec{H}(t) = 0$ , assim, consideraremos apenas este caso em particular neste problema. Para  $\vec{H}(t) = 0$ , o tunelamento só pode surgir da anisotropia transversal, que eleva a degenerescência dos autoestados  $|m\rangle$  e  $|m-1\rangle$  da parte longitudinal hamiltoniano  $\hat{H}_A$  do cristal. De acordo com o teorema do Kramers [20], essa degeneração é levantada apenas para spins inteiros, ou seja, bósons como já era esperado devido o tratamento no sistema magneto elástico. Temos com isso, uma conversão de um bóson de spin inteiro (mágnon) em um bóson de "spin" inteiro (fônnon-spin).

Para elementos de matriz de spin no caso inteiro  $S$ , podemos ver que as transições fônnon-spin não são descartadas pela simetria de inversão de tempo se o elemento da matriz for real. Aplicando a reversão temporal no operador de momento angular total:  $\Theta J \Theta^{-1} = -J$ , observando que o operador de spin  $S$  quebra a simetria de inversão de tempo, que implica [22],

$$\langle \psi_- | S | \psi_+ \rangle = \langle \psi_- | S | \psi_+ \rangle^*. \quad (3.57)$$

Para o modelo com  $E > 0$ , os estados  $|\psi_-\rangle$  e  $|\psi_+\rangle$  são reais. Portanto, como o operador de spin no eixo  $\hat{y}$ ,  $S_y = \frac{i}{2}(S_- - S_+)$  é imaginário, temos então, devido à (3.57), que,

$$\langle \psi_- | S_y | \psi_+ \rangle = 0. \quad (3.58)$$

Sabemos que os operadores de spin nos eixos  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ , respectivamente  $S_x$  e  $S_z$ , são reais e a simetria de inversão temporal não leva a regra de seleção para eles, mas por meio de um autoestado qualquer que descreva o sistema, por exemplo,

$$|\psi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_\pm e^{i\frac{\phi}{2}} + C_\mp e^{-i\frac{\phi}{2}}), \quad (3.59)$$

temos como resultado do produto interno de  $S_x$  em (3.57),

$$\langle \psi_- | S_x | \psi_+ \rangle = 0. \quad (3.60)$$

Portanto, o elemento da matriz  $\langle \psi_- | S_z | \psi_+ \rangle$ , que corresponde aos fônons transversais que geram a rotação da rede sobre o eixo  $\hat{z}$ , devido a (3.58) e (3.60), sendo o único elemento de matriz que é responsável pelo relaxamento de fônnon-spin. Podemos notar no sistema a presença de um momento angular, pois, como  $\hat{H}_A$  é definido na estrutura da rede, assim sendo, é rotacionado pelos fônons transversais devido a rotação no eixo anisotrópico. Em vista disso, podemos reescrever o relaxamento de fônnon-spin (3.52) na forma,

$$\langle \Psi_- | H_{f-s} | \Psi_+ \rangle = -\hbar \hat{\Omega}_{-+} \langle \psi_- | S_z | \psi_+ \rangle. \quad (3.61)$$

Agora, analisaremos (3.56), mas com o conhecimento de que na ausência do campo magnético  $\vec{H}(t)$ , a relaxação é devido aos fônons transversais que provocam a rotação da rede ao redor do eixo  $\hat{z}$ , como resultado de (3.61).

Temos como resultado do relaxamento fônnon-spin de (3.56), com o auxílio de (3.22),

$$\langle \Psi_- | H_{f-s} | \Psi_+ \rangle = \frac{D}{4} l_{m,m-1} (2m-1) \sqrt{\frac{\hbar}{2\rho V}} \sum_{k,j} \frac{[\vec{k} \times \varepsilon_z(k)] \cdot (e_x - ie_y)}{\sqrt{\omega_{k,j}}} \langle n_{k-1} | a_j(k) - a_j^\dagger(k) | n_k \rangle. \quad (3.62)$$

Sendo uma observação, quando realizamos uma comparação com os dois resultados do relaxamento de fônnon-spin (3.61) e (3.62), temos que,

$$\langle \psi_- | S_z | \psi_+ \rangle = -D l_{m,m-1} (2m+1), \quad (3.63)$$

vemos que o parâmetro  $l_{m,m-1}$  tem relação com o spin do fônion, pois,  $l_{m,m-1}$  está em relação ao spin total  $S$  e os níveis de estados. No trabalho ref.[16] o autor faz uma análise semelhante, mas numa abordagem diferente do assunto, onde trabalha com a temperatura implícita em suas contas, sendo esse termo  $l_{k,j,\rho}^z = \frac{\varepsilon_{\mu,j}^\dagger(k)m\varepsilon_{\mu j}(k)\hbar}{2\rho}$ , nomeado de contribuição momento angular intrínseco do fônion na rede. É comentado também no trabalho ref.[16], para um sistema sem a interação fônion-spin, o momento angular intrínseco será zero, algo esperado para o fônion convencional. Fortalecendo a teoria que possibilita o fônion carregar spin inteiro, decorrente da conversão mágnon-fônion.

Podemos simplificar o resultado de (3.62), em termos de um novo autovalor  $A_j(k)$ ,

$$A_j(k) = \frac{D}{4}l_{m,m-1}\sqrt{\frac{\hbar}{2\rho V\omega_{f,j}(k)}}e_+ \cdot [\vec{k} \times \epsilon_z(k)], \quad (3.64)$$

sendo  $e_+ = e_x - ie_y$ .

Observamos que o relaxamento fônion-spin pode ser reescrito como uma taxa de transição de nível de fônion-spin, devido ao tratamento envolvendo o relaxamento fônion-spin, portanto, podemos reescrever com um autovalor  $A_j(k)$  em relação aos operadores de criação e aniquilação do fônion sem spin, com operadores de abaixamento e levantamento de nível.

Com isso, reescrevendo (3.62), em forma de taxa de transição de níveis, teremos,

$$\langle \Psi_- | H_{f-s} | \Psi_+ \rangle = \hat{V}_j(k) = \sum_{jk} (A_j^*(k)\chi^{01}a_j^\dagger(k) + \hat{A}_j(k)\chi^{10}a_j(k)), \quad (3.65)$$

onde definimos os produtos internos dos operadores levantamento e abaixamento com os autoestados de  $\phi_\pm$  como,

$$\begin{aligned} \langle n_{k-1} | a_j(k) | n_k \rangle &= \chi^{10}a_j(k), & \text{sendo: } \chi^{10}|0\rangle &= |1\rangle. \\ \langle n_{k-1} | a_j^\dagger(k) | n_k \rangle &= \chi^{01}a_j(k), & \text{sendo: } \chi^{01}|1\rangle &= |0\rangle. \end{aligned}$$

Agora já em mãos o resultado do relaxamento de fônion-spin, podemos especificar um estado quântico do sistema no vácuo [2], no qual podemos descrever o retorno do sistema perturbado ao equilíbrio em relação a um operador que descreve o sistema de fônion-spin, ou seja, vamos mudar a dependência dos operadores de fônions sem spin  $a_j(k)$  que não descrevem de fato o sistema, para operadores de fônion-spin  $c_j(k)$ ,

$$\Psi = (c(k)\chi^{10} + \sum_{j,k} c_j(k)a_j^\dagger(k))|00\rangle, \quad (3.66)$$

sendo o primeiro termo, relacionado a excitações somente de spin, o segundo termo, excitações de fônion-spin com o operador de criação de fônion, isto é, o estado está contido



inicialmente no vácuo, onde  $j$  são os ramos dos fônons (transversais e longitudinal). Temos assim  $c(k)$ , o operador somente de spin e  $c_j(k)$  o operador de fônons-spin.

Analisando a dinâmica temporal do operador spin, temos,

$$\frac{dc(k)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{V}_j(k), c(k)] = \frac{-i}{\hbar} \sum_{jk} A_j(k) c_j(k). \quad (3.67)$$

Para o segundo termo de (3.66) que descreve as excitações de fônons-spins, temos a dependência temporal em  $a_j^\dagger(k)$ , portanto temos que trocar a dependência para  $c_j(k)$ , assim,

$$\begin{aligned} \frac{d(c_j(k)a_j^\dagger(k))}{dt} &= a_j^\dagger(k) \frac{dc_j(k)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{V}_j(k), c_j(k)a_j^\dagger(k)] \\ &= a_j^\dagger(k) \left( \frac{-i}{\hbar} A_j^*(k) c(k) - i(\omega_{f,j}(k) - \omega_0) c_j(k) \right), \end{aligned} \quad (3.68)$$

observamos o resultado em relação a frequência dos fônons (2.17), conforme a dependência da Hamiltoniana dos fônons (2.16), devido a  $a_j^\dagger(k)$ . Obtemos então a evolução temporal do operador fônons-spin simplificada,

$$\dot{c}_j(k) = -\frac{i}{\hbar} A_j^*(k) c(k) - i(\omega_{f,j}(k) - \omega_0) c_j(k), \quad (3.69)$$

sendo  $\omega_0 = \frac{E_1 - E_0}{\hbar}$  é a frequência de transição entre os níveis de fônons-spin.

Integrando (3.69) em relação ao tempo  $t'$ ,

$$c_j(k, t) = -\frac{-iA_j^*(k)}{\hbar} \int_0^t dt' e^{-i\hbar(\omega_{f,j}(k) - \omega_0)(t-t')} c(k, t'). \quad (3.70)$$

Realizando uma pequena variação temporal  $\tau = t - t'$  em (3.70), onde  $\tau$  representa o tempo do processo de relaxamento de fônons-spin, com isso,

$$c_j(k, \tau + t') = -\frac{-iA_j^*(k)}{\hbar} \int_0^{\tau+t'} d\tau e^{-i\hbar(\omega_{f,j}(k) - \omega_0)\tau} c(k, t - \tau). \quad (3.71)$$

Agora que temos o operador fônons-spin em relação ao tempo, substituindo agora na evolução temporal do operador spin (3.67),

$$\dot{c}(k) = -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{jk} |A_j(k)|^2 \int_0^{\tau+t'} d\tau e^{-i(\omega_{f,j}(k) - \omega_0)\tau} c(k, t - \tau). \quad (3.72)$$

Considerando  $\tau$  um tempo infinitesimal, assim podemos fazer  $c(k, t - \tau) \rightarrow c(k, t)$ , portanto, (3.72) escrito na forma,

$$\dot{c}(k) = -\frac{\pi}{\hbar} \sum_{jk} |A_j(k)|^2 \delta(\omega_{f,j}(k) - \omega_0) c(k), \quad (3.73)$$

o operador de spin  $c(t - \tau)$  é uma função lenta no tempo, contendo uma função memória  $f(\tau) = \sum_{kj} |A_{jk}|^2 e^{-i(\omega_{f,j}(k) - \omega_0)\tau}$  desse decaimento, que tem um pico agudo em  $\tau = 0$ , sendo que a integração sobre  $\tau$  mantém apenas a contribuição real responsável pelo relaxamento do fônon-spin [2], dessa maneira, podemos escrever a derivada temporal do operador spin em função de uma taxa de relaxamento de fônon-spin,

$$\dot{c}(k) = \frac{-\Gamma}{2} c(k), \quad (3.74)$$

sendo a taxa do relaxamento de fônon-spin,

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar^2} \sum_{jk} |A_j(k)|^2 \delta(\omega_{f,j}(k) - \omega_0). \quad (3.75)$$

Portanto, encontrando o operador spin,

$$c(k) = e^{-\frac{\Gamma}{2}t}, \quad (3.76)$$

sendo esse resultado já esperado, como já discutido que a descrição teórica mais simples de um relaxamento em função do tempo  $t$  é um decaimento exponencial.

Com o resultado do operador de spin (3.76), vamos substituir em (3.71), obtendo o resultado do operador de fônon-spin, ou seja, o novo operador do fônon com o momento angular intrínseco (spin). Vale relembrar que se trata de um novo operador que descreve o sistema fônon-spin, pois, estamos lidando com fônons convertidos do sistema de mágnons, a priori, estamos lidando com um bóson de Goldstone com spin inteiro e características de fônon. Assim, temos,

$$c_j(k, t) = \frac{A_j^*(k)}{\hbar} \frac{1}{(\omega_{f,j}(k) - \omega_0) + i\frac{\Gamma}{2}} (e^{-i(\omega_{f,j}(k) - \omega_0)\tau} e^{-\frac{\Gamma}{2}(t-\tau)})|_0^t, \quad (3.77)$$

em vista disso,

$$c_j(k, t) = \frac{A_j^*(k)}{\hbar} \frac{e^{-i(\omega_{f,j}(k) - \omega_0)t} - e^{-\frac{\Gamma}{2}t}}{(\omega_{f,j}(k) - \omega_0) + i\frac{\Gamma}{2}}. \quad (3.78)$$

Observado em (3.78), o operador de fônon-spin também é descrito em termos de um decaimento exponencial em relação a taxa de relaxamento de fônon-spin, como já esperado, contendo as frequências de fônon sem spin e de transição de fônon-spin, portanto, de fato podemos considerar esse sistema contendo fônon com spin.

### 3.3 Momento Angular intrínseco do Fônon-Spin

Estudamos o mecanismo de relaxamento de fônon-spin em um sólido na presença do campo magnético externo  $\vec{H}(t)$ , onde os fônons transversais correspondem à geração

da torção elástica exigida pela conservação de energia e pelo momento angular total. Vemos com isso, que não podemos lidar com o fônon-spin como lidamos com os fônons puros, devido o efeito do spin, onde antes não conseguimos demonstrar a conservação do momento angular intrínseco, pois, não estávamos levando em consideração o fônon carregando spin.

No momento angular intrínseco, devemos ter contribuição somente de  $L_{2z}$ , como visto em (3.61), pois é a direção onde o campo magnético externo  $\vec{H}(t)$  está aplicado no cristal, como demonstramos a invariância rotacional da Hamiltoniana de fônon-spin  $H_{f-s}$ , assim, temos a conservação do momento angular total  $\vec{J}$  do sistema, conseqüentemente, temos que o novo operador que descreve os fônons com spins  $c_j(k)$  está de acordo com a teoria.

O momento angular intrínseco do fônon-spin  $L_{2z}$ , resultante da teoria de relaxamento de fônon-spin, pode ser calculado com o auxílio de  $\vec{L}_2$  (3.12), em que calculamos o momento angular intrínseco em relação aos operadores de fônons puros polarizados circularmente, onde devemos realizar a mudança de operadores de fônon-spin (3.78),

$$\vec{L}_2 = i\hbar \sum_k \frac{\vec{k}}{k} (c_2^*(k)c_1(k) - c_1^*(k)c_2(k)), \quad (3.79)$$

vemos a atuação somente dos fônons transversais, portanto, tais são responsáveis pela rotação da rede como discutido anteriormente. Vamos integrar (3.79) sobre  $\omega_{f,j}(k)$  no semi-plano complexo, com o auxílio de ref.[21], temos assim,

$$\vec{L}_2 = \frac{2\pi}{\hbar\Gamma} (1 - e^{-\Gamma t}) \sum_k \frac{i\vec{k}}{k} \delta(\omega_{f,j}(k) - \omega_0) (A_2(k)A_1^*(k) - A_2^*(k)A_1(k)). \quad (3.80)$$

Observamos por simetria que a única componente do momento angular intrínseco  $\vec{L}_2$  é no eixo  $\hat{z}$ , com isso,  $L_{2z}$ . Vale ressaltar que a componente do momento angular orbital no eixo  $\hat{x}$  ( $L_{1z}$ ) é nula, já demonstrado anteriormente (3.29), restando apenas no eixo  $\hat{z}$  a atuação do momento angular intrínseco, podendo assim escrever  $L_{2z} = L_z$ , conseqüentemente, o único responsável pela rotação da rede característica devido ao spin no sistema. Já temos em mãos o resultado de  $A_j(k)$  (3.64) e  $\Gamma$  (3.75), com as devidas substituições, vemos o resultado de  $(iA_2(k)A_1^*(k) - iA_2^*(k)A_1(k))$  se cancelam com  $\Gamma$ . Portanto, obtemos na forma simplificada o momento angular intrínseco de (3.80) pelo processo de relaxamento de fônon-spin,

$$L_z = -(1 - e^{-\Gamma t})\hbar, \quad (3.81)$$

contendo dimensão de spin, devido a  $\hbar$ .

Portanto, foi demonstrado a adição do momento angular orbital e o momento angular intrínseco do sistema, sendo tal sistema conservado, condizendo que o sistema

de fato pode possuir spin. Temos a invariância rotacional completa, analisada na seção anterior, implicando na invariância do gerador de rotações, confirmando a conservação do momento angular total  $\vec{J}$ , observamos assim a contribuição dos fônons transversais. Acontece que a mudança na parte transversal do spin atômico é balanceada pela parte orbital do momento angular do fônon, enquanto a mudança na parte longitudinal relaxante do spin atômico é balanceada pela parte do spin do momento angular do fônon [2].

Este trabalho está limitado às taxas de processos de fônon-spin que dominam à transição em baixas temperaturas. Devido à propriedade do momento angular de spin do fônon, ele diminui com o aumento da temperatura e desaparece no limite clássico. Pode-se medir a mudança do momento angular do fônon-spin em baixas e altas temperaturas, para separar o momento angular do fônon dos outros. Aqui a escala de temperatura deve ser a temperatura de Debye, que divide as regiões quântica e clássica. Por outro lado, para evitar o envolvimento de mágnons, precisamos fazer experimentos a temperaturas baixas em comparação com a temperatura de Curie. Isso exige que a temperatura Curie deve ser muito maior que a temperatura de Debye. Portanto, o momento angular dos mágnons quase mantém, enquanto o dos fônons muda drasticamente com mudança de temperatura [16]. Logo, o momento angular de spin do fônon é significativo apenas em sistemas de baixas temperaturas. Em alta temperatura a mecânica estatística clássica é aplicável a calcular o momento angular intrínseco do fônon.

Em decorrência das análises do trabalho, temos então, para materiais com forte interação fônon-spin, acompanhado de grande magnetização, o momento angular intrínseco dos fônons pode ser significativo.

No trabalho de Zhang e Niu [16], foi demonstrado o momento angular intrínseco do sistema fônon-spin do tipo Raman, onde resultados são semelhantes deste trabalho (3.11), sendo obtido o momento angular do fônon-spin da parte intrínseca,

$$J_z^{ph} = \sum_{jk} l_{k,j,\rho}^z [f(\omega_k) + \frac{1}{2}], \quad (3.82)$$

sendo  $f(\omega_k)$  a distribuição de Bose-Einstein, onde  $l_{k,j,\rho}^z$  é o momento angular do fônon de cada ramo, no vetor de onda  $\vec{k}$ , que é proporcional a  $\hbar$ ;

$$l_{k,j,\rho}^z = \frac{\varepsilon_{\mu j}^\dagger(k) m \varepsilon_{\mu j}(k)}{2\rho}, \quad (3.83)$$

observando a semelhança com nosso resultado, onde usamos a propriedade  $\varepsilon_j^\dagger(k) m \varepsilon_{j'}(k') = i \frac{\vec{k}}{k}$  para encontrar a contribuição do momento angular intrínseco (3.11).

Foi demonstrato que a temperatura zero  $T = 0$ , o momento angular intrínseco do fônon (3.81) se dá por,

$$J_z^z(T=0) = \sum_{jk} \frac{l_{k,j,\rho}^{ph}}{2}, \quad (3.84)$$

significando que cada modo de  $\vec{k}$  tem um momento angular intrínseco de ponto zero  $\frac{l_{k,j,\rho}^z}{2\rho}$ , além de uma energia de ponto zero  $\frac{\hbar\omega_{f,j}(k)}{2}$ .

Podemos visualizar como seria a representação do fônon-spin atuando na rede do sistema. Esse estado de fônon é ilustrado na figura 11, podemos notar a rede torcendo junto com a vibração dos íons. Devido ao grau de liberdade do spin em um sólido magnético está diretamente ligado à deformação elástica da rede cristalina via propriedades magneto restritivas. As frequências das ondas de spin podem ser sintonizadas por um campo magnético variável no tempo, portanto, para condições específicas do campo magnético, elas podem se sobrepor, dando origem à hibridização entre as duas. Os estados hibridizados são chamadas ondas magneto elásticas. Esses resultados confirmam uma hibridização encontrada em um regime no qual mágnons e fônons compartilham as mesmas características, na zona de cruzamento, como mostram as figuras 07 e 08. Isso mostra que as excitações na rede cristalina devido às excitações dos spins no cristal ferromagnético, os fônons-spin, resultam com momento angular intrínseco (spin), o que indica que, quando os mágnons são convertidos em fônons, seu spin inicial permanece preservado.

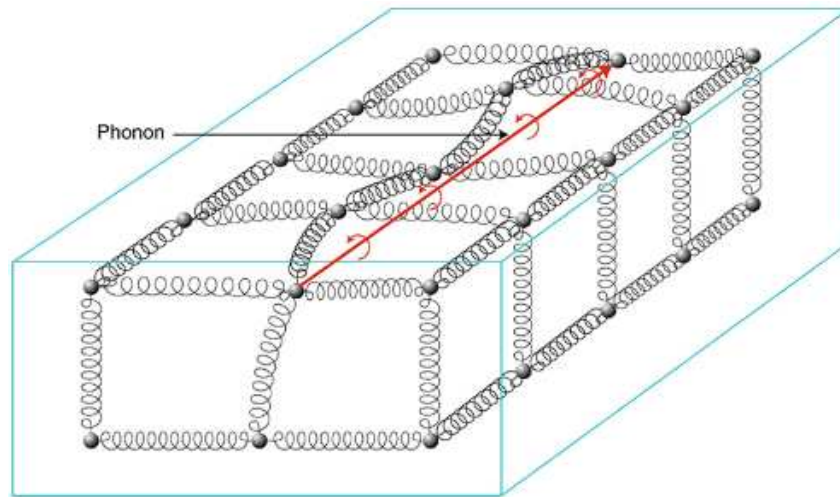


Figura 11 – Representação do fônon-spin na rede. Fonte: Ref. [22].

## 4 QUEBRA DE SIMETRIA E CONSERVAÇÃO DOS GRAUS DE LIBERDADE

A fim de elucidar as características do fônon-spin, ou seja, se de fato podemos considerar essa nova quase partícula como um fônon contendo spin, considerando o fato do fônon ser um bóson de Goldstone e não possuir spin (escalar), portanto, estamos propondo um estudo do fônon-spin via quebra espontânea de simetria.

Segundo Zee [23], a importância de uma teoria dos campos quânticos surgiu da nossa necessidade de descrever a natureza efêmera da vida, pois bem, o estudo da teoria de campo reside na esperança de que possa lançar luz sobre às partículas fundamentais da matéria e suas interações.

Quando confrontamos simultaneamente a relatividade especial e a mecânica quântica, duas das grandes inovações físicas do século passado, surge um fenômeno sem precedentes, partículas podem ser criadas e aniquiladas, requerendo o desenvolvimento de um novo sujeito na física, a teoria quântica de campos.

O cenário agora está propício para aplicar esse conhecimento à física de partículas. Um cenário crucial, no entanto, ainda está faltando a ideia de "quebra espontânea de simetria". Enquanto na física clássica as simetrias são diretamente incorporadas e diretamente conectadas aos observáveis físicos por meio do teorema de Noether [24], a situação na teoria quântica é mais sutil. Um teorema fundamental devido a Wigner afirma que a invariância de observáveis sob certa transformação implica na existência de um operador unitário no espaço de estados de Hilbert. Se a transformação de simetria é além disso compatível com a dinâmica do sistema, esse operador unitário comuta com o Hamiltoniano e dá origem a uma estrutura característica de múltiplos em seu espectro. No entanto, existem sistemas cuja dinâmica é invariável sob uma transformação de simetria, mas essa simetria não se manifesta no espectro ou nos observáveis físicos. Falamos de quebra espontânea de simetria (QES) [25]. A quebra espontânea de simetria é um mecanismo que primeiramente surgiu em matéria condensada. Nesse contexto tinha-se um ferromagneto com spins desordenados e tal sistema era um invariante por rotações, quando se aplicava um campo magnético esses spins se alinhavam na direção do eixo de anisotropia, ocorrendo uma quebra de simetria dimensional, os mágnons. Outro exemplo na matéria condensada, em um sólido típico, os íons vibram em torno de suas posições de equilíbrio na rede. Essa vibração dinâmica é melhor descrita pelos chamados fônons, sendo essa uma quebra de simetria translacional, onde esses fônons transladam na rede.

## 4.1 Teorema de Goldstone

A quebra de simetria nasceu originalmente em matéria condensada ao se estudar um ferromagneto. As transições de fases estão relacionadas com quebras espontâneas de simetrias, assim diferentes fases implicam em diferentes simetrias. Portanto, entendemos as origens de, digamos, fônons sem massa. Por exemplo, a Hamiltoniana que descreve o sistema é globalmente invariante sob rotação, mas o estado fundamental não exibe essa propriedade, temos assim no magnetismo, mágnons (spin-1) surgem para restaurar a simetria perdida, sendo relacionados aos bósons de Goldstone, onde temos que tal sistema era invariante por rotações  $SO(3)$ , o S significa special, O significa orthogonal e o 3 representa o número de dimensões do espaço, isto é, os seus spins eram todos desordenados, mas ao aplicar um campo magnético externo no sistema, os spins se alinhavam e se perdia a invariância por  $SO(3)$ , mantendo só uma invariância por  $SO(2)$ . Esses bósons correspondem aos geradores de simetria interna espontaneamente quebrados e são caracterizados pelos números quânticos deles. Eles se transformam de maneira não linear sob a ação desses geradores, portanto, podem ser excitados pelo vácuo assimétrico por esses geradores. Assim, eles podem ser pensados como as excitações do campo nas direções de simetria quebrada no espaço de grupo e não têm massa. Temos como exemplo: o resfriamento de um fluido para dentro de um sólido cristalino quebra a simetria de translação contínua, isto é, cada ponto do fluido tem as mesmas propriedades, mas cada ponto do cristal não têm as mesmas propriedades, ocorrendo uma transição de fase. Assim, como esse exemplo, temos no nosso trabalho quando ocorre a quebra no sistema magneto elástico cria o fônon com spin, ocorrendo uma mudança no cenário macroscópico, decorrente de mudanças em algum parâmetro de controle relevante ao sistema, sendo equivalente a uma transição de fase.

Podemos primeiramente comentar um dos mais importantes teoremas da quebra de simetria, o teorema de Goldstone: são bósons que aparecem necessariamente em modelos que exibem quebra espontânea de simetrias contínuas. O teorema se aplica rigorosamente em uma teoria de campo global, sob as seguintes hipóteses [26],

- A simetria quebrada deve ser contínua;
- a teoria deve ser manifestamente covariante;
- o espaço de Hilbert da teoria deve ter uma norma positiva definida.

Vamos primeiro considerar o Lagrangeano abaixo invariante sob a transformação de gauge global  $U(1)$ ,

$$\Phi \rightarrow e^{i\alpha} \Phi, \quad (4.1)$$

essa é uma simetria global porque o termo que envolve derivadas de  $\Phi$  só é invariante se o parâmetro de simetria,  $\alpha$ , for uma constante ao longo do espaço-tempo. É chamada de simetria local ou simetria de gauge uma vez que a simetria atua apenas em campos e não atua na coordenada de espaço-tempo,  $x^\mu$ . Quando temos transformações contínuas atuando nas coordenadas espaço-temporal ou nas coordenadas generalizadas de um sistema, que deixam invariante alguma grandeza que pode ser a ação, o Lagrangeano (ou Hamiltoniano), equações de movimento ou algum funcional de energia do sistema, indicam a presença de uma simetria.

Vamos analisar o objeto de nosso interesse nessa seção, o mecanismo de quebra espontânea de simetria (QES) para o caso global, ou seja, o Teorema de Goldstone. Antes, porém, de propormos uma formulação mais geral da QES, adotaremos um exemplo simples, para fins de ilustração de algumas ideias. Vamos considerar o modelo do campo escalar complexo em auto interação com o Lagrangeano [24],

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_i \partial^\mu \Phi_i^\dagger - V(\Phi_i^\dagger \Phi_i), \quad (4.2)$$

$$V(\Phi_i^\dagger \Phi_i) = \frac{m^2}{2} \Phi_i^\dagger \Phi_i - \lambda (\Phi_i^\dagger \Phi_i)^2, \quad (4.3)$$

onde  $\Phi_i (i = 1, 2, 3)$  um campo escalar,  $\lambda (\Phi_i^\dagger \Phi_i)^2$  um termo de auto interação e  $V(\Phi_i^\dagger \Phi_i)$  o potencial escalar. Trataremos o problema em baixa temperatura, pois é uma característica comum de muitos sistemas físicos e seu comportamento é relativamente simples, quando examinado apenas em baixas energias (ou temperaturas) em comparação com as próprias escalas características do sistema, fazendo uma similaridade ao sistema do problema com um ferromagneto.

O estado fundamental é obtido minimizando o potencial  $V(\phi_i \phi_i)$ , conseqüentemente, nos dá as configurações de campo que minimizam o Hamiltoniano do sistema  $H$ , que devem ser necessariamente constantes, ou seja, é dada pelo ponto crítico de  $V(\phi_i \phi_i)$ , assim temos,

$$\frac{\partial V(\Phi_i^\dagger \Phi_i)}{\partial \Phi_i} = \frac{m^2}{2} \Phi_i^\dagger + 2\lambda (\Phi_i^\dagger \Phi_i)^2, \quad (4.4)$$

se  $\Phi_i$  é constante, independente do espaço e tempo, onde a única contribuição para à energia é  $\frac{m^2}{2} \Phi_i^\dagger \Phi_i$ . Podemos identificar sobre o estado fundamental obtido acima com duas possíveis soluções, que são,

- Sendo  $m^2$  positivo, temos o mínimo do potencial quando  $\Phi_i = \Phi_i^\dagger = 0$  e o estado fundamental é simétrico, sendo assim, nesse caso dizemos que a simetria é exata, conforme vemos na fig.12.



- Mas  $m^2$  negativo, existe um máximo local em  $\Phi_i = 0$ , é um mínimo em:

$$|\Phi_0| = \sqrt{\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3} = \sqrt{\frac{-m^2}{2\lambda}} = a, \quad (4.5)$$

a garantia de que  $V(\phi_i\phi_i)$  será um mínimo estável exige que  $\lambda \geq 0$ . Temos nessa segunda solução, no espaço dos campos, um círculo de estados fundamentais degenerados (um número infinito de estados fundamentais) e estará ao longo do círculo de raio  $a$ , que formam um conjunto de vácuo assimétrico (vácuo degenerado), relacionados entre si por uma rotação, ocorrendo assim uma QES, como podemos observar na fig.12,

$$|\langle 0|\Phi_i|0\rangle| = a. \quad (4.6)$$

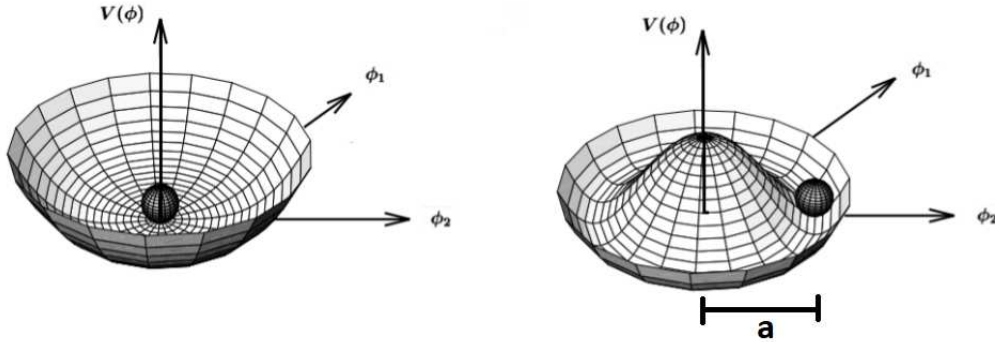


Figura 12 – Representação do potencial para  $m^2 > 0$  (esquerda) e  $m^2 < 0$  (direita). Fonte: ref.[27].

Como a configuração de vácuo,  $\Phi = a \neq 0$ , não é invariante nas transformações do grupo  $U(1) : \Phi \rightarrow e^{i\alpha}\Phi$ , a simetria de  $U(1)$  é vista espontaneamente quebrada [28]. Sempre que uma simetria contínua  $a$  é quebrada espontaneamente, há uma degenerescência de estados fundamentais. Conseqüentemente, observamos na figura 12, a quebra espontânea de simetria ocorre somente segundo no caso.

As partículas são excitações acima do vácuo, então podemos expandir o campo  $\Phi_i$  ao redor do vácuo, com o mínimo de raio "a" [23], descrevendo o campo escalar usando coordenadas cartesianas,

$$\Phi_i = a + \frac{\phi_1 + \phi_2}{\sqrt{2}}, \quad (4.7)$$

os campos físicos são excitações acima do vácuo,  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , de modo que no vácuo  $\langle \phi_1 \rangle_0 = \langle \phi_2 \rangle_0 = 0$ .

Realizando agora uma analogia com magnetismo. O Hamiltoniano que descreve o ferromagneto de Heisenberg possui simetria rotacional: todas as direções no espaço são

equivalentes. No entanto, em seu estado fundamental, se um ferromagneto é magnetizado em alguma direção específica, que não é determinada pela teoria, a simetria rotacional é perdida. Este é um exemplo de quebra espontânea de simetria. Portanto, devemos escolher 1 estado fundamental, por exemplo de (4.5), escolhendo uma direção do campo físico.

Depois de substituir (4.7) na Lagrangiana (4.2), onde subtraímos os termos constantes, temos o Lagrangiano em função dos campos escalares de (4.7), temos assim,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 - 2\lambda a^2\phi_1^2 - \sqrt{2}\lambda\phi_1(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2, \quad (4.8)$$

obtivemos uma Lagrangiana do modelo com simetria  $U(1)$  quebrada espontaneamente, expressa por uma partícula de massa  $4\lambda a^2$  ( $\phi_1$ ) e outra sem massa ( $\phi_2$ ), esse campo sem massa é chamado de campo de Nambu-Goldstone e a partícula correspondente é o bóson de Goldstone. O surgimento deste modo está associado a existência da simetria  $U(1)$  em (4.2) e a natureza não simétrica do estado fundamental (4.6). Vemos que esse teorema persiste na conservação dos graus de liberdade, onde tínhamos dois campos escalares com massas, ocorrendo a quebra de simetria contínua e convertendo em um campo escalar com massa e/ou sem massa. Sabemos que o campo escalar com massa ou sem massa possui um grau de liberdade, assim temos a conservação dos graus de liberdade. Finalmente, observamos que a quebra espontânea de uma simetria global contínua sempre resulta no surgimento de um ou mais bósons de Goldstone.

Em geral, se o Lagrangiano é deixado invariante por um grupo de simetria  $G$  com  $n(G)$  geradores, mas o vácuo é deixado invariante por apenas um subgrupo  $H$  de  $G$  com  $n(H)$  geradores, então existem  $n(G) - n(H)$  bósons Goldstone [24]. Então o número de partículas de Goldstone é mostrado na dimensão de  $\frac{G}{H}$ .

Portanto, para uma quebra de simetria de um modelo  $O(3)$  temos  $\frac{G}{H}$  bósons de Goldstone, sendo  $n(G) = 3$  e  $n(H) = 1$ , assim temos  $\frac{G}{H} = 2$  bósons de Goldstone em  $SO(3)$ , onde tínhamos 3 campos escalares com massa inicialmente, ocorrendo a quebra de simetria contínua, ocorre a conversão em dois campos escalares com massa e um campo escalar sem massa, preservando a conservação dos números de graus de liberdade.

## 4.2 Mecanismo de Higgs

Higgs aplicou o mecanismo de quebra espontânea de simetria local para gerar massa aos bósons intermediários à quebra de simetria se tornou uma área da física com inúmeras aplicações [24], entre tais aplicações temos a melhor compreensão de fenômenos que envolvem transição de fase. O mecanismo de quebra espontânea de simetria, no caso de simetria global contínua, leva a partículas escalares sem massa, os bósons de Goldstone. Sabemos também que as teorias de Gauge levam a bósons vetoriais sem massa, de fato,

como no caso eletromagnético, invariância de Gauge proíbe a presença no Lagrangiano de termos quadráticos nos campos [29]. Mas sabemos que se a simetria global é trocado por uma simetria local, as coisas mudam. De fato, se olharmos para as hipóteses subjacentes a uma teoria de Gauge, verifica-se que o teorema de Goldstone não se sustenta nesse contexto.

A capacidade de fazer boas perguntas é de importância crucial na física. Aqui está uma excelente pergunta: como a quebra espontânea de simetria se manifesta nas teorias de Gauge?

Agora vamos investigar o que acontece se a lagrangiana apresenta uma simetria de gauge, isto é, invariância por uma transformação local do grupo  $SO(3)$ ,

$$\Phi \rightarrow \tilde{\Phi} = e^{ig\theta(x)}\Phi, \quad (4.9)$$

onde  $g$  são os geradores do grupo e  $\theta(x)$  são os ângulos de rotação no espaço de isospin. Como temos um argumento dependente da posição  $x$  na eq.(4.9), a aplicação da derivada tem resultado distinto a uma transformação local, ou seja,

$$\partial_\mu [e^{ig\theta(x)}\Phi] = e^{ig\theta(x)}\partial_\mu\Phi + ig e^{ig\theta(x)}\Phi\partial_\mu\theta(x). \quad (4.10)$$

Devido ao termo  $\partial_\mu e^{ig\theta(x)}$  em (4.10), o Lagrangiano deixa de ser invariante. Portanto, precisamos modificar o Lagrangiano (4.2), substituindo a derivada comum por uma derivada covariante e adicionado os termos de campo de gauge [23, 30], com isso adicionar um campo vetorial  $A_\mu(x)$  para recuperar a invariância do Lagrangiano (4.2),

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(D_\mu\Phi)(D^\mu\Phi) - \frac{m^2}{2}\Phi^\dagger\Phi - V(\Phi^\dagger\Phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (4.11)$$

onde  $F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$ ,  $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu(x)$  e acompanhando  $\tilde{A}^\mu = A^\mu - \partial^\mu\theta(x)$ .

Podemos assim observar que a adição do campo vetorial  $A_\mu(x)$  torna o Lagrangiano invariante, como queríamos,

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu(A_\nu + \partial_\nu\theta) - \partial_\nu(A_\mu + \partial_\mu\theta) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \partial_\mu\partial_\nu\theta - \partial_\nu\partial_\mu\theta \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} (D_\mu\Phi)' &= [\partial_\mu + ig(A_\mu + \partial_\mu\theta)]\Phi e^{ig\theta} \\ &= (\partial_\mu\Phi)e^{ig\theta} + igA_\mu\Phi e^{ig\theta} + ig(\partial_\mu\theta)\Phi e^{ig\theta} = e^{ig\theta}(\partial_\mu + igA_\mu)\Phi \\ &= e^{ig\theta}D_\mu\Phi, \end{aligned} \quad (4.13)$$

sendo  $\mathcal{L}$  agora invariante sobre transformação de gauge local.

Usando o potencial (4.3), temos o estado fundamental aplicando a minimização de  $V(\Phi_i\Phi_i)$ , conseqüentemente, uma energia mínima de campo que minimiza a Hamiltoniana do sistema, o ponto crítico de  $V(\Phi_i\Phi_i)$ , sendo o mínimo obtido quando os campos  $A_\mu$  desaparecem, pois é constante. Definido por um ponto no círculo  $|\Phi_0| = 0$ , obtemos um vácuo degenerado, similar a parte direita da fig.12. Qualquer transformação de gauge neste campo a configuração também é mínima. Novamente, temos uma infinidade de estados de vácuo. Temos assim o mínimo da energia potencial ocorre para  $m^2 < 0$  e  $V(\Phi^\dagger\Phi) > 0$ ,

$$|\Phi_0| = \sqrt{\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3} = \sqrt{\frac{-m^2}{4\lambda}} = a, \quad (4.14)$$

a quebra da simetria ocorre quando escolhemos um estado de vácuo. Como temos um vácuo degenerado e somos livres para escolher uma direção no espaço de isospin, na qual vamos escolher  $\vec{\Phi}_0 = a\hat{e}_3$ , similar ao nosso problema quando aplicamos um campo magnético externo  $\vec{H}(t)$  no eixo anisotrópico no cristal ferromagnético.

Como o estado de vácuo está definido, temos que definir novos campos,  $\Phi_3 = \chi + a$ , ou seja, um novo campo escalar acima do estado do vácuo (4.14). Assim substituindo essa modificação em (4.11), temos,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}[(\partial_\mu\phi_1)^2 + (\partial_\mu\phi_2)^2 + (\partial_\mu\chi)^2] - ag[(\partial_\mu\phi_1)A_2^\mu - (\partial_\mu\phi_2)A_1^\mu] \\ &+ \frac{a^2g^2}{2}[(A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2] - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i)^2 - 4a^2\lambda\chi^2 + \Theta^3 + \Theta^4. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Temos em (4.15) muitos termos misto, dificultando a interpretação dos campos no sistema. Para obter uma Lagrangiana com interpretações mais "físicas", podemos fazer o uso do fato de termos uma simetria local, para que possamos realizar transformações independentes de gauge em cada ponto do espaço-tempo [23]. Portanto, relacionamos um gauge (um gauge unitário), para que, em todo ponto do espaço-tempo,  $\vec{\Phi}$  fique ao longo da direção 3 do espaço isospin,

$$\Phi_i = \phi_3\hat{e}_3 = (a + \chi)\hat{e}_3. \quad (4.16)$$

Realizando a imposição (4.16) na Lagrangiana (4.15),

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 + \frac{a^2g^2}{2}[(A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2] - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i)^2 - 4a^2\lambda\chi^2 + \Theta^3 + \Theta^4, \quad (4.17)$$

temos assim que os campos vetoriais  $A_\mu^1$  e  $A_\mu^2$  adquirem massa, sendo  $A_\mu^3$  sem massa, temos também um campo escalar massivo  $\chi$ . No caso da quebra da simetria local, no gauge unitário, o bóson de Goldstone é eliminado, favorecendo o aparecimento de campo vetorial massivo. Dizemos que esse novo grau de liberdade do campo de gauge vetorial

absorveu o bóson de Goldstone [30]. Esse mecanismo que introduz massa a uma teoria é chamado de mecanismo de Higgs.

Em geral, considere uma teoria com o grupo de simetria global  $G$  espontaneamente quebrado em um subgrupo  $H$ . Como vimos na seção anterior, então aparecem  $n(G) - n(H)$  bósons de Goldstone. Agora, suponha que o grupo de simetria  $G$  seja medido. Começamos com  $n(G)$  bósons de gauge sem massa, um para cada gerador. Após a quebra espontânea de simetria, os bósons  $n(G) - n(H)$  Goldstone são "comidos" pelos bósons de gauge  $n(G) - n(H)$ , deixando  $n(H)$  bósons de gauge sem massa, exatamente o número certo de bósons de gauge associados ao grupo de sobreviventes de  $H$  devem permanecer sem massa [23], ou seja, os dois bósons de gauge sem massa "absorveram" os dois campos escalares sem massa (bósons de Goldstone). Deve ficar claro que um campo vetorial sem massa ( $A_\mu^3$ ) permanece, pois o subgrupo  $H(U(1))$  sob qual o vácuo permanece invariante, tendo um gerador, sendo sob essa circunstância que permitiu que um campo escalar  $\chi$  permanecesse ativo. Temos que  $G = O(3)$ ,  $H = O(2) \simeq U(1) : n(G) = 3$  e  $n(H) = 1$ , onde o número de campos vetoriais sem massa é a dimensão de  $H$ , número de partículas de bósons de gauge (com massa e sem massa) é a dimensão de  $G$  e o número de bósons de gauge com massa é a dimensão de  $\frac{G}{H}$ .

Temos assim que o número de graus de liberdade é preservado no mecanismo de Higgs, visto que os campos escalares sem massa e com massa tem um grau de liberdade, os campos vetoriais ou campos de gauge sem massa tem dois graus de liberdade, com massa contém três graus de liberdade, já que possui um estado físico de polarização longitudinal.

Podemos observar resumidamente do Lagrangiano (4.17), que as novas variáveis que descreveriam os bósons de Goldstones desaparecem, sendo na verdade a perda dos bósons de Goldstones, são conversões. Assim nesta teoria não há bósons de Goldstone provindos da quebra de simetria, e sim surgem novos graus de liberdade, como vimos dois bósons de Gauge ganham massa (ganhando grau de liberdade), aniquilando dois bósons de Goldstone e um campo escalar adquirindo massa. Concluimos que nesta teoria os bósons de Goldstone se convertem em componentes longitudinais devido ao campo em questão ser de longo alcance.

### 4.3 Teoria de conversão magnon-fônon

O trabalho de Sérgio Rezende e colaboradores [1] lançou considerável luz sobre o problema de interação mágnon-fônon, tanto do ponto de vista teórico como no aspecto experimental. Isso não significa que o problema tenha sido resolvido, mas, pelo menos, ajuda os estudiosos formularem a pergunta adequada, pois, fazer a pergunta certa é fundamental a qualquer pesquisa científica, portanto, tentamos nesse trabalho responder às perguntas: qual modelo teórico explica a conversão mágnon-fônon (fônon com spin)?. Se

preservam os graus de liberdade do sistema?

No capítulo 2 foi analisado a interação mágnon-fônon e observamos que de fato ocorre devido a certas condições à conversão, completamente, de um estado de vibrações dos spins (mágnons), em vibrações da rede (fônons), ou seja, tínhamos uma simetria rotacional original (existente na ausência de um campo magnético externo  $\vec{H}(t)$ ) que é espontaneamente interrompida, de modo que a magnetização aponte para uma direção específica, portanto, criando bóson de Goldstone proveniente de uma quebra de simetria dimensional (mágnons), que em seguida, devido a variação do campo magnético externo  $\vec{H}(t)$  ocorre a conversão mágnon-fônon. Assim um bóson de Goldstone gerado de uma quebra de simetria translacional, os fônons, que por acaso são bósons de Goldstone para simetria galileana / Lorentz espontaneamente quebrada [28]. Podemos realizar a pergunta, se na conversão mágnon-fônon ocorreu uma quebra de simetria translacional e assim criado o fônon-spin?. Ou devido ao acoplamento magneto elástico no cristal ferromagnético com a variação do campo magnético externo com o tempo  $\vec{H}(t)$ , ocorreu uma superposição de quebras de simetrias e assim possibilite a conversão fônon-spin ?. Entre outras hipóteses. Mas o que podemos concluir nesse trabalho e os demais trabalhos das referências é que ocorre a conversão no sistema, e o fônon adquire spin.

Estamos propondo o desenvolvimento de uma teoria similar ao mecanismo de Higgs, a fim de ilustrar a conservação dos graus de liberdade do sistema e demonstrar o ganho do grau de liberdade no fônon (spin). Observamos na seção anterior que os graus de liberdade no mecanismo de Higgs se conservam, onde os bósons de Goldstone são aniquilados e os campos vetoriais ganham massa, assim ganhando graus de liberdade. Nessa teoria proposta estamos a observar o aniquilamento dos bósons de Goldstone, dizemos que o sistema irá ganhar grau de liberdade, sendo nesse caso o ganho de spin no fônon, aumentando o grau de liberdade e com a aniquilação do mágnon, se conserva os graus de liberdade do sistema.

Devemos analisar devido a quebra de simetria o número de modos de quase partículas escalares e vetoriais o sistema possuirá, por conseguinte relacionar a teoria de conversão mágnon-fônon em relação a uma quebra espontânea, com invariância por uma transformação local do grupo  $SO(3)$ . Temos por exemplo para o sistema dos mágnons, em relação as transições de fase paramagnéticas para ferromagnéticas, na ausência de um campo magnético externo, a simetria rotacional quebra espontaneamente de  $SO(3)$  para o subgrupo  $SO(2)$  abaixo da temperatura de transição  $T_c$ . Isso implica que deve haver dois modos Goldstone e não somente um, devido o  $SO(3)$  possuir três geradores e o  $SO(2)$  possui um. A dimensão do espaço (relacionada ao número de  $\vec{k}$  componentes) não tem nada a ver com o número de modos Goldstone (que está relacionado ao número de simetrias internas não quebradas pelo estado fundamental). Por exemplo, o modelo  $O(N)$  possui o modo  $N - 1$  Goldstone em qualquer dimensão  $d > 2$  (que é a dimensão mais crítica), ou seja, temos  $\frac{G}{H}$  bósons de Goldstone/Gauge como foi observado no Teorema de

Goldstone e Mecanismo de Higgs.

Uma analogia entre o mecanismo de Higgs e as vibrações da rede (fônons) no cristal:

Os fônons são de fato bósons de Goldstone, resultantes da quebra espontânea das simetrias galileanas, translacionais e rotacionais na transição de fase que produz o sólido. Três simetrias quebradas espontaneamente  $\rightarrow$  três modos sem massa, um fônons longitudinal e dois transversais.

Ilustremos a teoria relacionando a uma partida de futebol, existem 11 jogadores em cada lado do campo (obs: todos com a mesma massa), mas um jogador em especial se destaca pelos seus dribles, então ele possui a capacidade de driblar um jogador com facilidade, assim passando pelo primeiro jogador, logo em seguida passa pelo segundo jogador, terceiro jogador e assim em diante ao longo da partida, mas todos os jogadores o perseguem em campo com o intuito de "roubar" a bola, sendo tais jogadores de ambos times fortemente atraídos pela vontade de "roubar a bola" do adversário. Nesse trabalho podemos assemelhar com a constante de acoplamento magneto elástica  $b_2$ , criando um "amontado" de jogadores entorno do jogador driblador, sendo que os demais jogadores retornam a sua posição dependendo de onde o jogador está localizado, ou seja, retornam a posição de equilíbrio inicial, mas sempre há jogadores dispostos a "roubar" a bola do jogador, assim a massa (grau de liberdade) desse "amontado" de jogadores é maior que os demais jogadores em campo (ganho de grau de liberdade), portanto podemos dizer que houve um aniquilamento de alguns jogadores (jogadores que estão no "amontado"), e uma criação de grau de liberdade no "amontado" (a massa do conjunto de jogadores). Podemos desta forma realizar uma comparação com o fônons-spin no processo de conversão mágnon-fônons, mas aqui nesse exemplo o que atrai os jogadores é o acoplamento magneto elástico no cristal ferromagnético, onde o fônons com spin passa a ser um agrupamento de campo escalar (fônons) com o campo vetorial, onde pode ter aniquilamento de outros bósons de Goldstone para que ocorra essa conversão, mais precisamente o fônons e resultado de uma quebra espontânea das simetrias galileanas, assim três simetrias quebradas  $\rightarrow$  gerando três fônons (dois transversais e um longitudinal), lembrando que somente os fônons transversais atuam na conversão mágnon-fônons.

Exemplo: Podemos ter inicialmente no sistema 3 campos escalares massivos + 3 campos vetoriais sem massa (mágnons) = 9 graus de liberdade;  $\rightarrow$  ocorre então a quebra espontânea das simetrias galileanas  $\rightarrow$  temos assim 3 fônons (dois transversais e um longitudinal) + 2 campos vetoriais com massa (dois fônons-spin transversais) = 9 graus de liberdade.

Observamos que nessa teoria o aniquilamento do campo vetorial sem massa (dois graus de liberdade), que se converte em graus de liberdade que são adquiridos pelos campos vetoriais antes sem massa (agora possuem massa), contudo o fônons-spin deixa de ser um bóson de Goldstone e passa a ser um bóson de "Gauge". Portanto neste exemplo

ocorre a conservação dos graus de liberdade.

A aplicação do mecanismo de quebra espontânea de simetrias em teorias de campos, passa necessariamente pela exigência de invariância de Lorentz da teoria relativística, portanto, podemos concluir que a quebra espontânea de simetrias em teorias de campos é sempre realizada via campos escalares. Consequentemente, campos com spins não nulos ( $> 0$ ) não definem uma estrutura de vácuo e não influenciam a quebra espontânea de simetria. Temos nessa teoria proposta, de fato um bóson de gauge (fônon-spin). Portanto, com a conclusão alcançada na seção anterior, sabemos, que apenas o momento angular orbital dos fônons tem uma base física sólida (3.82), assumindo uma importância nesse sentido, devido a atuação dos fônons transversais, devido os fônons longitudinais não atuarem no sistema. Essa atuação dos fônons transversais tem importância na característica do sistema (fônon-spin) devido aos dois modos normais, dois modos ortogonais de polarização linear ou dois modos de polarização circular com sentidos opostos de rotação de polarização [16]. Fônons polarizados linearmente têm spin zero, enquanto que os fônons polarizados circularmente possuem momento angular (não é spin), que é positivo ou negativo, dependendo do sentido da polarização. No nosso caso, essa polarização gerará uma torção junto com a vibração dos íons, como discorrido nesse trabalho, assim desencadeamento do fônon-spin está ligado diretamente ao campo magnético externo variável no tempo  $\vec{H}(t)$ , conforme mostrado no cap.3, ou seja, o sistema submetido a condições específicas, as vibrações da rede podem se propagar de outra forma: além de oscilar para cima/para baixo e para os lados, giram em torno do próprio eixo, assim os fônons polarizados circularmente que se acoplam aos mágnons possuem o spin no mesmo sentido que a precessão em torno do eixo anisotrópico, fortalecendo a ideia da criação de uma quase-partícula híbrida (fônon-spin), sendo um conjunto de mágnons e fônons. Consequentemente ligando com ideia do exemplo acima citada da ilustração da partida de futebol em relação a constante de acoplamento magneto elástica.

Embora o spin do fônon seja considerado não-físico, é interessante perguntar se o spin para as vibrações da rede em um meio elástico com torque interno poderia existir. Observa-se que o fônon-spin não tem muito desenvolvimento reconhecido na literatura. No entanto, não sabemos se foram estudadas excitações quantificadas nesse meio, pois, o tipo de meio analisado é essencial (cristal ferromagnético) [1]. A existência de fônons carregando spin em tais meios não podem ser descartadas, no entanto, estes não podem ser identificados como fônons. Vamos chamá-los de quase-partículas Híbrida (fônon-spin). Qual é o spin da quase-partícula Híbrida (fônon spin)? É a componente de rotação  $L_2$  interpretado como o spin fônon, como é conhecido, à luz espalhada por fônons polarizados linearmente é polarizada linearmente, enquanto à luz espalhada por mágnons é polarizada circularmente, sendo uma quase-partícula com características mistas do sistema (características de fônons e mágnons), onde a segunda ordem nos operadores fônon implica na natureza vetorial do campo fônon, como interpretamos, onde encontramos o resultado do



spin do fônon (3.82). Devemos assim partir do pressuposto de uma quase-partícula mista do sistema magneto elástico (mágnon-fônon), onde conserva os graus de liberdade.

## 5 CONCLUSÃO

Um acoplamento mágnon-fônon descreve a interação entre os modos vibracionais de uma rede cristalina com seu ordenamento magnético, portanto, trabalhamos a ideia de fônons polarizados circularmente que se acoplam aos mágnons, possuem spin no mesmo sentido que a precessão em torno do eixo anisotrópico, fortalecendo à teoria da criação de uma quase-partícula híbrida (fônon-spin). Este trabalho está limitado às taxas de processos de fônon-spin que dominam a transição em baixas temperaturas, sendo que devido as propriedades do momento angular de spin do fônon, ele diminui com o aumento da temperatura e desaparece no limite clássico. Devemos em um próximo trabalho investigar a interação do sistema magneto elástico podendo manifestar certa dependência da temperatura, observando a atuação do calibre de conversão mágnon-fônon  $\theta(k, t)$  no sistema, onde devemos incluir os fônons ópticos, uma vez que o acoplamento magnético entre os íons é capaz de influenciar a frequência, bem como à intensidade integrada do fônon [3, 16], sendo as frequências dos fônons ópticos muito maiores que as dos fônons acústicos, onde nesse trabalho em particular, foi considerado o sistema contento apenas fônons acústicos. Observaremos o acoplamento mágnon-fônon, por meio do monitoramento à variação da frequência do modo vibracional em função da temperatura, assumindo que as vibrações da rede modulam a interação de troca, variando as distâncias interatômicas, assim analisando qual sua importância para o acoplamento magneto elástico do sistema, conseqüentemente, medindo  $\theta(k, t)$  como um possível mecanismo para a conversão do fônon-spin, a partir da integral de troca, contendo somente os termos lineares. Analisando o comportamento do sistema em interação e o comportamento das quase-partículas sendo convertidas, por meio de comparações entre os sistemas, ou seja, em relação a um sistema em baixas temperaturas como abordado nesse trabalho e em relação a um sistema de altas temperaturas, trabalhando com à física estatística.

Demonstramos a conservação do momento angular através da teoria de relaxamento fônon-spin, onde foi observado que a mudança na parte transversal do spin atômico é balanceada pela parte orbital do momento angular do fônon, enquanto à mudança na parte longitudinal do spin atômico é equilibrada pela parte do momento angular do fônon. Agora, as descobertas de Holanda [1] mostraram que o transporte de momento angular em materiais de estado sólido pode envolver vários graus de liberdade, incluindo eletrônicos, spin e rede, bem como luz interagindo com o material. Dado que as velocidades dos fônons são geralmente muito mais rápidas que as dos mágnons, isso pode fornecer uma nova perspectiva para o desenvolvimento de dispositivos baseados no transporte e na conversão de informações codificadas no spin. Esses achados podem ser úteis em esquemas onde spins atômicos individuais, por exemplo, usadas como qubits, são manipulados por fônons. Um

qubit possui algumas similaridades com o bit clássico, um qubit pode ser 0, 1, ou uma superposição de ambos, assim uma sobreposição de qubits resulta na multiplicação de suas possibilidades (informações).

Futuramente com a análise do sistema em baixas e altas temperaturas, é de interesse a elaboração de um trabalho conjunto à pesquisa experimental, por meio da espectroscopia Raman, proporcionando informações acerca da estrutura do sólido estudado, sólido contendo parte magnética e não magnética. Experimentalmente, o uso da espectroscopia Raman tem sido bastante eficaz no estudo de acoplamentos spin-fônon uma vez que oferece uma excelente oportunidade para o estudo da dinâmica dos spins além do efeito do ordenamento magnético e de suas relações com as propriedades magnéticas. Uma das vantagens de fazer spintrônica com fônon-spin é que os materiais magnéticos, mais complicados de serem produzidos, seriam necessários apenas na fase inicial do processo, para converter mágnons, que possuem spin, em fônons-spins. Portanto, depois de produzidos, os fônons-spins poderiam carregar o spin para outros materiais não magnéticos, possibilitando o transporte de informações em materias com custos mais baixos, com uma qualidade e velocidade de transmissão tão boa quanto em materiais magnéticos.

# A APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE HOLSTEIN-PRIMAKOFF NAS ENERGIAS DE INTERAÇÃO

Com a soma de todas as interações, o hamiltoniano (2.27) envolve as três componentes  $S_{jz}$ ,  $S_{jy}$  e  $S_{jx}$  de cada spin  $S_j$ . É mais conveniente trabalhar com dois operadores independentes. A transformação Holstein-Primakoff em operadores de criação  $a_j^\dagger$  e aniquilação  $a_j$  de bósons é definido por [3],

$$S_j^+ = S_{j,x} + iS_{j,y} = \sqrt{2S} \sqrt{\left(1 - \frac{a_j^\dagger a_j}{2S}\right)} a_j, \quad (\text{A.1})$$

$$S_j^- = S_{j,x} - iS_{j,y} = \sqrt{2S} a_j^\dagger \sqrt{\left(1 - \frac{a_j^\dagger a_j}{2S}\right)}, \quad (\text{A.2})$$

$$S^z = (S - a_j^\dagger a_j)^2, \quad (\text{A.3})$$

onde os operadores respeitam a relação de comutação bosônica;  $[a_j, a_l^\dagger] = \delta_{jl}$ .

Para o caso de número total de mágnons muito pequeno, quando interações de mais de duas partículas são raras, podemos tomar a aproximação linear para (A.1) e (A.2), expandindo em série de potências,  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + \dots$ , ficando :

$$S_j^+ = \sqrt{2S} a_j^\dagger \quad S_j^- = \sqrt{2S} a_j, \quad (\text{A.4})$$

onde  $\vec{S}$  é o vetor de spin.

Vamos introduzir a magnetização pela relação [3],

$$[M_x, M_y] = i2\mu_0 M_z \delta(x - y) \quad (\text{A.5})$$

$$\vec{M} = 2\mu_0 \vec{S}, \quad (\text{A.6})$$

sendo  $\vec{M}$  o vetor de magnetização e  $\mu_0 = g\mu_b \frac{N}{2V}$ , onde  $g$  o fator giromagnético do elétron,  $\mu_b$  é o magneton de Bohr.

Agora aplicando em (A.6) a transformada Holstein-Primakoff de campos de bósons variáveis na rede  $a_j, a_j^\dagger$ , assumindo a relação de comutação,  $[a_j, a_{j'}^\dagger] = \delta(j, j')$ , teremos [3];

$$M_j^+ = \sqrt{4\mu_0 M} a_j \sqrt{1 - \frac{\mu_0}{M} a_j^\dagger a_j} \quad (\text{A.7})$$

$$M_j^- = \sqrt{4\mu_0 M} a_j^\dagger \sqrt{1 - \frac{\mu_0}{M} a_j^\dagger a_j}. \quad (\text{A.8})$$

Expandindo (A.7) e (A.8) em série de potências, temos assim os campos de magnetização polarizados;

$$M_j^+ = \Omega a_j \quad (\text{A.9})$$

$$M_j^- = \Omega a_j^\dagger, \quad (\text{A.10})$$

onde a nova constante é definida como  $\Omega = \sqrt{\frac{2\gamma\hbar M}{V}}$ , sendo  $g\mu_b = \gamma\hbar$ ,  $\gamma$  fator giromagnético do elétron,  $\mu_b$  magneton de Bohr e fator  $g$  do elétron.

É conveniente fazer uma transformação das variáveis atômicas da rede  $a_j^\dagger, a_j$  para as variáveis atômicas  $b_k^\dagger$  e  $b_k$  no espaço dos momentos, através de uma transformada de Fourier discreta,

$$b^\dagger(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}_j} a_j^\dagger, \quad (\text{A.11})$$

$$b(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}_j} a_j, \quad (\text{A.12})$$

sendo  $x_j$  é o vetor de posição do átomo  $j$ .

As eqs. (A.11) e (A.12) respeitam a relação de comutador de bóson:  $[b(k), b^\dagger(k')] = \delta_{k,k'}$ . Os valores discretos dos  $k$ 's somados são aqueles obtidos a partir de condições de contorno periódicos.

Agora realizando as devidas substituições das transformadas de Fourier inversas de (A.11) e (A.12) em (A.10) e (A.9), respectivamente, temos assim as magnetizações polarizadas em relação aos operadores bôsonicos no espaço dos momentos,

$$M^+ = \Omega a_j = \Omega \sum_k \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} b(k), \quad (\text{A.13})$$

$$M^- = \Omega a_j^\dagger = \Omega \sum_k \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} b^\dagger(k). \quad (\text{A.14})$$

Podemos agora realizar as devidas substituições dos campos de magnetizações (A.13) e (A.14) nas energias de interações (2.28)-(2.31), com os devidos cálculos, teremos com isso as energias de interações ocorrente no sistema de ondas de spins descritas por operadores independentes bôsonicos;

$$H_{exch} = J\Omega^2 \sum_k |k|^2 (b^\dagger(k)b(k) + \frac{1}{2}), \quad (\text{A.15})$$

$$H_{anis} = \frac{2\gamma\hbar\beta}{M} \sum_k (b^\dagger(k)b(k) + \frac{1}{2}), \quad (\text{A.16})$$

$$H_{zee} = \gamma \hbar H \sum_k (b^\dagger(k)b(k) + \frac{1}{2}), \quad (\text{A.17})$$

$$H_{dip} = \frac{\pi}{2} \Omega'^2 \sum_k (\tau b(k)b(-k) + \Phi b^\dagger(k)b(k) + H.C), \quad (\text{A.18})$$

onde temos que  $\Omega'^2 = 2\gamma M \hbar$ , devido à  $\frac{1}{V} \int d^3(x) e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}}$ . Onde os parâmetros  $\tau$  e  $\Phi$  são;  $\tau = \text{sen}^2\theta e^{-i2\phi}$  e  $\Phi = \text{sen}^2\theta(1 + i\text{sen}(2\phi))$ . As variáveis  $\theta$  e  $\phi$  são ângulos do vetor de onda  $\vec{k}$ , em coordenadas esféricas.

Realizando a soma das energias de interação (A.15)-(A.18) no sistema de ondas de spins (2.27), ou seja, considerando com uma superposição de interações de vários tipos, assim obtemos,

$$H_m = \sum_k \Gamma(k) b^\dagger(k)b(k) + \frac{1}{2} (\Lambda(k)b(k)b(k) + \Lambda(k)^* b^\dagger(k)b^\dagger(k)), \quad (\text{A.19})$$

onde  $\Gamma(k) = \gamma \hbar (2JMk^2 + 2\frac{k}{M} + H + 2\pi M \text{sen}\theta^2)$  e  $\Lambda(k) = \pi \hbar \gamma M \text{sen}\theta^2 e^{-i2\phi}$

Vemos que a Hamiltoniana do sistema (A.19) não é diagonal, devido a energia de interação dipolar. A energia de interação dipolar depende então da orientação entre os dois dipolos e varia com o inverso da terceira potência da separação dipolar,  $1/r^3$ . Podemos notar o efeito da precessão do spin em termos da variável  $\Lambda$ , quando alinhado ao campo magnético externo  $\vec{H}$  no ferromagneto.

Com o intuito de descrever a hamiltoniana do sistema em termo de osciladores harmônicos, vamos diagonalizar a eq.(A.19), pela transformada de Bogoliubov, introduzindo novos operadores de bósons, então:

$$b(k) = F^*(k)C(k) + W(k)C^\dagger(-k), \quad (\text{A.20})$$

$$b^\dagger(k) = F(k)C^\dagger(-k) + W^*(k)C(k), \quad (\text{A.21})$$

onde os novos operadores de mágnons continuam respeitando as relações de comutação de bóson :  $[C(k), C^*(k')] = \delta_{k,k'}$ , devido a essa relação temos que  $[b(k), b^\dagger(k')] = (|F(K)|^2 - |W(k)|^2)[C(k), C^\dagger(k)]$ , implicando na condição  $|F(k)|^2 - |W(k)|^2 = 1$ .

Analisando a evolução temporal dos operadores (A.20) e (A.21), pela equação de movimento de Heisenberg, temos,

$$\begin{aligned} \frac{db(k)}{dt} &= \frac{i}{\hbar} [H_m, b(k)] \\ &= \frac{d(F^*(k)C(k) + W(k)C^*(-k))}{dt} = \frac{i}{\hbar} (\Gamma(k)C(k) + \Lambda^*(k)C^\dagger(k)), \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

por conveniência colocamos as variáveis  $F(k)$  e  $W(k)$  em relação as variáveis  $\Gamma(k)$  e  $\Lambda(k)$ .

Devido a relação  $|A(k)|^2 - |B^\dagger(k)|^2 = \epsilon^2 k = \hbar^2 \omega^2(k)$ , encontramos,

$$F(k) = \frac{\Lambda(k)}{|\Lambda(k)|} \sqrt{\frac{\Gamma(k) + \epsilon(k)}{\epsilon(k)}}, \quad (\text{A.23})$$

$$W(k) = \frac{\Gamma(k) - \epsilon(k)}{\epsilon(k)}. \quad (\text{A.24})$$

Realizamos esses procedimentos matemáticos em (A.19) com o intuito de diagonalizar a Hamiltoniana que descreve o sistema de mágnons. Temos em (A.22) uma dinâmica temporal do operador bôsonico  $C^\dagger(k, t) = C^\dagger(k, t_0) e^{-\frac{i\epsilon_k t}{\hbar}}$ , como uma onda plana, sendo  $\epsilon(k)$  o vetor de base no espaço dos momentos.

Temos em (A.23) e (A.24) os valores das variáveis das transformadas de Bogoliubov (A.20) e (A.21) que diagonalizam a Hamiltoniana (A.19),

$$b(k) = \left( \frac{\Lambda(k)}{|\Lambda(k)|} \sqrt{\frac{\Gamma(k) + \epsilon(k)}{\epsilon(k)}} \right)^* C(k) + \frac{\Gamma(k) - \epsilon(k)}{\epsilon(k)} C^\dagger(-k), \quad (\text{A.25})$$

$$b^\dagger(k) = \frac{\Lambda(k)}{|\Lambda(k)|} \sqrt{\frac{\Gamma(k) + \epsilon(k)}{\epsilon(k)}} C^\dagger(-k) + \left( \frac{\Gamma(k) - \epsilon(k)}{\epsilon(k)} \right)^* C(k). \quad (\text{A.26})$$

# Referências

- [1] Holanda, J., Maior, D.S., Azevedo, A. et al. Detecting the phonon spin in magnon–phonon conversion experiments. *Nature Phys* **14**, 500 (2018).
- [2] D. A. Garanin and E. M. Chudnovsky. Angular momentum in spin-phonon processes. *Phys. Rev. B* **92**, 024421 (2015).
- [3] C. Kittel, *Quantum Theory of Solids*, 2th ed, John Wiley and Sons, New York (1963).
- [4] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 8th ed., John Wiley Sons (2004).
- [5] Callister Rethwisch. *Materials Science and Engineering: An Introduction*, 8th ed., John Wiley Sons (2010).
- [6] Kittel, C. Interaction of spin waves and ultrasonic waves in ferromagnetic crystals. *Phys. Rev.* **110**, p.836 (1958).
- [7] Guerreiro, S.C. and Rezende, S.M. R. Quantum Theory of the Magnon-Phonon Interaction in a Time-Dependent Magnetic Field, *Rev. Brasileira de Física*, V. 1, p. 207 (1971).
- [8] Wang, J., Chen, H., Xiong, G., Xu, X. and Zhang, L. Phonon chirality tuned through interface transmission in a one-dimensional atomic junction model, *New J. Phys.* **20**, 073006 (2018).
- [9] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, J. B. Sykes and J. S. Bell (1960).
- [10] Kim, S. K. Micromagnetic computer simulations of spin waves in nanometre-scale patterned magnetic elements, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **43**, 264004 (2010).
- [11] Streib, S., Silva, N. V., Shen, K. and Bauer, G. W. Magnon-phonon interactions in magnetic insulators. *Phys. Rev. B* **99**, 184442 (2019).
- [12] Handley, R.C., *Modern Magnetic Materials -Principles and Applications*, Wiley Interscience, New York (2000).
- [13] M. S. Dresselhaus. *Magnetic Properties of Solids*, University of Pittsburgh (2001).
- [14] Simon Streib, Nicolas Vidal-Silva, Ka Shen, and Gerrit E. W. Bauer, Magnon-phonon interactions in magnetic insulators, *Phys. Rev. B.* **99**, 184442, (2019).
- [15] Berk, C., Jaris, M., Yang, W. et al. Strongly coupled magnon–phonon dynamics in a single nanomagnet. *Nat Commun.* **10**, 2652 (2019).



- [16] Zhang, L. and Niu, Q. Angular momentum of phonons and Einstein - de Haas effect, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 085503 (2014).
- [17] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Theory of Elasticity*, Pergamon, New York (1970).
- [18] Chudnovsky, E. M., Garanin, D. A. and Schilling, R. Universal mechanism of spin relaxation in solids, *Phys. Rev. B* **72**, 094426 (2005).
- [19] Garanin, D. A. and Chudnovsky, E. M. Thermally activated resonant magnetization tunneling in molecular magnets: Mn 12 Acand others, *Phys. Rev. B* **56**, 11102 (1997).
- [20] J.J. Sakurai and J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics*, 2th ed, Cambridge University Press (2017).
- [21] Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M. *Table of integrals, series and products*, 7th ed, Academic Press, United Kingdom (2007).
- [22] Jungfleisch, M.B., Hoffmann, A. A new twist on phonons. *Nature Phys* **14**, p.433 (2018).
- [23] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*. 2th ed., Princeton University Press (2010).
- [24] R. Lewis, *Quantum Field Theory*. 2th ed., Cambridge University Press, United Kingdom (1996).
- [25] Brauner, T. Spontaneous Symmetry Breaking and Nambu–Goldstone Bosons in Quantum Many-Body Systems, *J. Symmetry* **02**, p.609 (2010).
- [26] Roberto Casalbuoni, *Advanced Quantum Field Theory*, Università di Firenze (2005).
- [27] V. Koch, *Introduction to Chiral Symmetry*. arXiv:9512029 (1995).
- [28] Burgess, C. P. Goldstone and Pseudo-Goldstone Bosons in Nuclear, Particle and Condensed-Matter Physics. arXiv: 9808176 (1998).
- [29] Vallone, M. Higgs and Goldstone Modes in Crystalline Solids, *Phys. Status Solidi B*, **257**,1900443 (2019).
- [30] Higgs, P. W. Broken symmetries, massless particles and gauge fields. *Phys. Rev. Lett.* **13**, p.508 (1964).
- [31] Cottingham, W.N. and Greenwood, D.A. *An Introduction to the Standard Model of Particle Physics*. 2td ed, Cambridge University Press, United Kingdom (2007).
- [32] Tiwari, S. C. Do phonons carry spin, arXiv:1708.07407 (2017).

- 
- [33] Rezende, S. M. Morgenthaler, F. R. Magnetoelastic waves in time-varying magnetic fields. I. Theory, II. Experiments. *J. Appl. Phys.* **40**, p.524 (1969).
- [34] Terziel, R. H. and Terziel, P. On the theory of spin-spin relaxation. *Phys.* **32**, p.31 (1966).