

UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA

ANGIE YURANI PUENTES SOLER

CLASSES DE ISOTOPISMO DE ÁLGBRAS DE EVOLUÇÃO E  
GENÉTICAS

VIÇOSA - MINAS GERAIS  
2021

ANGIE YURANI PUENTES SOLER

CLASSES DE ISOTOPISMO DE ÁLGEBRAS DE EVOLUÇÃO E  
GENÉTICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

Orientadora: Marinês Guerreiro

VIÇOSA - MINAS GERAIS  
2021

**Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da Universidade  
Federal de Viçosa - Campus Viçosa**

T

P977c Puentes Soler, Angie Yurani, 1997-  
2021 Classes de isotopismos de álgebras de evolução e genéticas  
/ Angie Yurani Puentes Soler. – Viçosa, MG, 2021.  
111 f. : il. ; 29 cm.

Orientador: Marinês Guerreiro.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.  
Referências bibliográficas: f. 107-111.

1. Álgebra genética. 2. Evolução - Modelos matemáticos.  
3. Isomorfismos (Matemática). I. Universidade Federal de  
Viçosa. Departamento de Matemática. Programa de  
Pós-Graduação em Matemática. II. Título.

CDD 22. ed. 570.2

Bibliotecário(a) responsável: Renata de Fatima Alves CRB6/2578

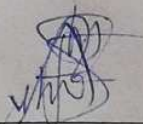
ANGIE YURANI PUENTES SOLER

CLASSES DE ISOTOPISMO DE ÁLGEBRAS DE EVOLUÇÃO E  
GENÉTICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

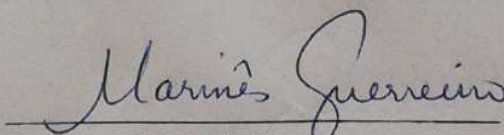
APROVADA: 23 de julho de 2021.

Assentimento:



---

Angie Yurani Puentes Soler  
Autora



---

Marinês Guerreiro  
Orientadora

*A minha avó, meu irmão,  
e ao meu companheiro de vida, John.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus que sempre esteve a me guiar.

Agradeço a meus pais Paola Soler e Jaime Puentes.

Agradeço especialmente à Professora Marinês Guerreiro por sua paciência, apoio e dedicação neste trabalho, na minha carreira profissional e na minha vida pessoal; sempre terei admiração, respeito e muito carinho por ela.

Agradeço a John Alexander Mora Rodriguez, Oscar Daniel Bernal Miranda e Amanda Pontes de Oliveira Ornelas por sua ajuda durante a realização deste trabalho e por nunca duvidar que conseguiria terminá-lo.

A todas as pessoas que cruzaram meu caminho enquanto eu fazia esse trabalho e me deram seu apoio e motivação, especialmente a Carlos Lúcio Nunes de Oliveira Filho, Cintia Coelho dos Santos e Renata Fernandes Pereira.

Agradeço à FAPEMIG pelo suporte financeiro parcial desta formação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

*A melhor maneira de ver a vida é  
através dos olhos da Matemática.*

# Resumo

PUENTES, Angie, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, julho de 2021. **Classes de isotopismos de álgebras de evolução e genéticas.** Orientadora: Marinês Guerreiro.

Este trabalho consiste em estudar isotopismos e isomorfismos de diferentes álgebras, com a finalidade de obter uma classificação e distribuição em classes de isotopismo e de isomorfismo, com o auxílio de programas computacionais. Além disso, analisamos estes resultados para álgebras genéticas e de evolução e mostramos sua relação com a Genética.

**Palavras-chave:** Álgebras genéticas. Álgebras de evolução. Isotopismos de álgebras.



# Abstract

PUENTES, Angie, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, July, 2021. **Classes of isotopisms of evolution and genetic algebras.** Adviser: Marinês Guerreiro.

This work consists of studying isotopisms and isomorphisms of different algebras, in order to obtain a classification and distribution into isotopism and isomorphism classes, with the help of computer programs. In addition, we analyze these results for genetic and evolution algebras and show their relationship to Genetics.

**Keywords:** Genetic algebras. Evolution algebras. Isotopisms of algebras.

# Lista de Símbolos

A próxima lista descreve vários símbolos que serão usados posteriormente.

## Preliminares

$\mathbb{F}_q$  Corpo finito com  $q$  elementos

$Id$  Transformação identidade

$T_{Id}$  Transformação identidade nos subíndices

## Conjuntos de números

$\mathbb{Z}^+$  Conjunto dos números inteiros positivos

$\mathbb{Z}^-$  Conjunto dos números inteiros negativos

## Álgebras

$(t_{ij})$  Matriz quadrada com entradas  $t_{ij}$  (constantes de estrutura) sobre um corpo

$A_T$  Álgebra  $A$  com  $n$ -upla de estrutura  $T$

## Álgebras de Lie

$\mathcal{P}_{n,q}$  Conjunto de álgebras de Lie  $n$  dimensionais sobre um corpo finito  $\mathbb{F}_q$

$\mathcal{T}_{n,q}$  Conjunto de  $(n - 1)$ -uplas de estrutura das álgebras de Lie  $n$  em  $\mathcal{P}_{n,q}$

## Álgebras de evolução

$\mathcal{E}_n(\mathbb{K})$  Conjunto de álgebras de evolução  $n$  dimensionais sobre um corpo  $\mathbb{K}$

$\mathcal{T}_n\mathbb{K}$  Conjunto de  $n$ -uplas de estrutura das álgebras de evolução em  $\mathcal{E}_n(\mathbb{K})$

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>1 Calculando isotopismos de álgebras</b>	<b>13</b>
1.1 Preliminares sobre álgebras . . . . .	13
1.2 Isotopismos de álgebras . . . . .	20
1.3 Geometria Algébrica Computacional . . . . .	30
1.3.1 Preliminares . . . . .	30
1.3.2 Enumeração de álgebras . . . . .	35
1.3.3 Classificação de álgebras . . . . .	39
<b>2 Isotopismos de álgebras de Lie filiformes</b>	<b>45</b>
2.1 Isotopismos de álgebras de Lie . . . . .	45
2.2 Funtores fiéis entre álgebras e grafos . . . . .	49
2.3 Álgebras de Lie pré-filiformes . . . . .	65
2.3.1 Classes de isotopismos de $\mathcal{P}_{n,q}$ . . . . .	68
<b>3 Isotopismos de álgebras de evolução</b>	<b>77</b>
3.1 Preliminares . . . . .	77
3.2 $n$ -uplas de estrutura e anuladores . . . . .	85
3.2.1 $n$ -uplas de estrutura de álgebras de evolução . . . . .	86
3.2.2 Anuladores de álgebras de evolução . . . . .	90
3.3 Classes de isomorfismo do conjunto $\mathcal{E}_2(\mathbb{K})$ . . . . .	95
3.3.1 Álgebra derivada unidimensional ( $ad = bc$ ) . . . . .	98
3.3.2 Álgebra derivada bidimensional ( $ad \neq bc$ ) . . . . .	100
<b>Considerações finais</b>	<b>105</b>



# Introdução

Isotopismos são usados, tanto na Álgebra como na Topologia, de um jeito parecido ao qual usamos normalmente os homomorfismos e os homeomorfismos, isto é, para classificar objetos com propriedades comuns. No caso dos isotopismos, a classificação é mais geral daquela que fazem os isomorfismos e os homeomorfismos.

A primeira vez que apareceu o termo isotopia foi relacionado ao conceito de homotopia em Topologia, no início de 1900. Depois em 1942, Abraham Adrian Albert [1] introduziu o conceito de isotopia para o estudo e classificação de álgebras não associativas.

Partindo desta definição, muitos matemáticos estudaram isotopismos a fim de classificar diferentes estruturas algébricas, algumas delas com aplicações em outras áreas, como a Genética. No entanto, apesar da importância dos isotopismos, ainda não existe nenhuma referência na literatura que reúna a origem desta teoria. Na tese de doutorado de Oscar Falcón [32], que é o texto base deste trabalho, ele faz uma compilação dessas origens em seu primeiro capítulo.

O principal objetivo deste trabalho é uma análise dos isotopismos de álgebras de Lie, álgebras de Lie pre-filiformes e álgebras de evolução, com especial interesse em entender suas aplicações à Genética [60].

Ao contrário dos resultados que existem sobre isotopismos de álgebras de divisão, álgebras alternativas ou álgebras de Jordan, entre outros, quase não existem resultados sobre isotopismos das álgebras de evolução e genéticas. Particularmente, segundo Oscar Falcón, não existe nenhum resultado sobre a distribuição explícita em classes de isotopismos para essas álgebras. Ao longo da tese de Oscar Falcón [32], essas distribuições dão origem a propriedades algébricas que nos permitem reunir álgebras de classes de isotopismo diferentes. A maioria dos resultados estudados são em álgebras definidas sobre corpos finitos.

No Capítulo 1, apresentamos diferentes resultados da teoria da Álgebra importantes para o desenvolvimento da dissertação e também a teoria dos isotopismos de álgebras e estruturas relacionadas.

Nos Capítulos 1 e 2, expomos os conceitos e resultados básicos da Geometria Algébrica Computacional e da Teoria de Grafos utilizados para determinar a distribuição de diferentes tipos de álgebras em classes de isotopismo. Particularmente, ilustramos um par de grafos que nos permite definir funtores fiéis entre álgebras de dimensão finita sobre corpos finitos e esses tipos de grafos. Dependendo do functor, relacionamos álgebras isomorfas ou isotópicas com grafos isomorfos. Reciprocamente, qualquer par de grafos isomorfos está relacionado exclusivamente a um par de álgebras, de modo que existe uma função multiplicativa entre eles.

No Capítulo 3, desenvolvemos um dos objetivos principais que é o estudo da distribuição do conjunto  $\mathcal{E}_n(\mathbb{K})$  de álgebras de evolução  $n$ -dimensionais sobre um corpo  $\mathbb{K}$  em classes de isomorfismo e isotopismo. Essas álgebras constituem um tipo de álgebras genéticas cuja descrição tem certa semelhança com as álgebras de Lie pré-filiformes e cuja distribuição em classes de isotopismo está relacionada com mutações na genética não mendeliana. Isto para entender que, em particular, o caso bidimensional está relacionado aos processos de reprodução assexuada de organismos diplóides. Especificamente, quer-se estudar a distribuição do conjunto  $\mathcal{E}_2(\mathbb{K})$  em quatro classes de isotopismo, qualquer que seja o corpo base  $\mathbb{K}$ , e a caracterização em classes de isomorfismo.

# Capítulo 1

## Calculando isotopismos de álgebras

Como já falamos na introdução, o objetivo deste trabalho é o estudo dos isotopismos de álgebras. Neste capítulo estudamos algumas propriedades específicas dos isotopismos entre certas álgebras que são úteis ao longo da dissertação.

### 1.1 Preliminares sobre álgebras

Na primeira parte desta seção expomos algumas definições que são importantes no uso dos algoritmos computacionais para fazer alguns cálculos na classificação de álgebras por meio de isotopismos. Usamos como referência o livro [52] e a tese de Falcón [32].

**Definição 1.1.1.** Um *quadrado latino parcial* é uma matriz  $n \times n$  em que cada célula está vazia ou contém um elemento escolhido do conjunto  $[n] = \{1, \dots, n\}$ , de modo que cada símbolo ocorre no máximo uma vez em cada linha e em cada coluna.

**Exemplo 1.1.2.** No conjunto [2] temos como exemplo de quadrado latino a seguinte tabela

1	
	2

**Definição 1.1.3.** Um *quadrado latino* é uma matriz  $n \times n$  em que cada célula contém um elemento escolhido do conjunto  $[n]$ .

**Exemplo 1.1.4.** No conjunto [3] temos como exemplo de quadrado latino a seguinte tabela

3	1	3
2	1	1
2	3	2

**Definição 1.1.5.** (Definição 1, pág. 1. [3]) Seja  $E$  um conjunto. Uma função de  $E \times E$  em  $E$  é uma *lei de composição*. O valor  $f(x, y)$  de  $f$  para um par ordenado  $(x, y) \in E \times E$  é chamada a *composição* de  $x$  e  $y$  de acordo com esta lei. Um conjunto  $E$  com uma lei de composição é um *magma*.

**Exemplo 1.1.6.** Em relação ao conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais, a soma (+), a multiplicação ( $\cdot$ ) e a exponenciação ( $x \exp y = x^y$ ) são magmas.

Dado um conjunto  $E$  não vazio, pode ocorrer de uma composição estar definida somente para alguns pares de elementos de  $E$ , mas não todos. Por exemplo, a divisão exata ( $\div$ ) no conjunto  $\mathbb{N}$ , já que  $2 \div 4$  não está definido em  $\mathbb{N}$  e  $4 \div 2$  está.

Aos conjuntos para os quais isto acontecer daremos o nome de magma parcial.

**Definição 1.1.7.** Um *magma parcial* sobre  $E$  é uma composição binária de alguns elementos de  $E$ , não necessariamente todos.

Quando há uma lei de composição interna sobre  $E$  dizemos que o magma parcial é um magma como na Definição 1.1.5.

Como trabalhamos com álgebras  $n$ -dimensionais, nosso interesse é estudar os magmas parciais e os magmas no conjunto  $[n] = \{1, \dots, n\}$ . Nesse caso,  $n$  é a *ordem* do magma parcial ou do magma.

**Exemplo 1.1.8.** O conjunto  $[2]$ , com  $1 \cdot 1 = 1$  e tal que as outras composições não estão definidas é um magma parcial.

**Exemplo 1.1.9.** O conjunto  $[2]$  com a operação  $\cdot$  definida pelos produtos:  $1 \cdot 1 = 1$ ,  $1 \cdot 2 = 1$ ,  $2 \cdot 1 = 2$  e  $2 \cdot 2 = 2$  é um magma.

Quando temos um magma parcial ou um magma sobre um conjunto  $E$  usamos a notação  $a * b$  para denotar a composição entre os elementos  $a$  e  $b$  no magma parcial ou no magma. Além disso, denotamos o magma parcial ou o magma por  $(E, *)$ .



**Definição 1.1.10.** Um *quase-grupo parcial* é definido como um magma parcial  $([n], \cdot)$  tal que, se as equações

$$i \cdot x = j \text{ e } y \cdot i = j, \text{ com } i, j \in [n], \quad (1.1)$$

têm soluções para  $x$  e  $y$  em  $[n]$ , então essas soluções são únicas.

**Definição 1.1.11.** Um quase-grupo parcial é um *quase-grupo* se ambas equações em (1.1) têm sempre soluções únicas.

**Exemplo 1.1.12.** Todo grupo é um quase-grupo que é associativo. O conjunto dos inteiros  $\mathbb{Z}$  com a subtração  $-$  é um quase-grupo.

**Definição 1.1.13.** Um *anel* é um conjunto não vazio  $R$  com duas operações, que denotamos por  $+$  e  $\cdot$  que são chamadas adição e multiplicação, respectivamente, tais que, para todos  $a, b, c \in R$ , as seguintes propriedades são satisfeitas:

- i)  $a + (b + c) = (a + b) + c.$
- ii)  $a + b = b + a.$
- iii) Existe um elemento  $0 \in R$  tal que  $a + 0 = a.$
- iv) Existe um elemento  $-a \in R$ , tal que  $a + (-a) = 0.$
- v)  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$
- vi)  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$
- vii)  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$

Se  $a \cdot b = b \cdot a$ , para todos  $a, b \in R$ , então o anel é *comutativo*.

Um anel  $R$  que contém um elemento  $1 \neq 0$  tal que  $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ , para todo  $a \in R$ , é chamado *anel com unidade*.

**Exemplo 1.1.14.** O conjunto  $\mathbb{Z}$  dos números inteiros, o conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números racionais, o conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais e o conjunto  $\mathbb{C}$  dos números complexos, com a adição e multiplicação usuais, são exemplos de anéis comutativos com unidade.

**Definição 1.1.15.** Um subconjunto não vazio  $I$  de um anel  $R$  é um ideal de  $R$  se valem, para todos  $x, y \in I$ , para todo  $a \in R$ :

- i)  $x, y \in I \implies x - y \in I$ .
- ii)  $x \in I, a \in R \implies ax, xa \in I$ .

**Exemplo 1.1.16.** Seja  $a$  um elemento de um anel. Então o conjunto  $RaR$  de todas as somas finitas da forma  $\sum_i x_i a y_i$ , com  $x_i, y_i \in R$ , é um ideal de  $R$ .

**Definição 1.1.17.** Um ideal  $I$  de um anel  $R$  é *primo* se as duas condições a seguir são satisfeitas:

- i)  $I$  é um subconjunto próprio de  $R$ .
- ii) Se  $pq \in I$ , então  $p \in I$  ou  $q \in I$ .

**Exemplo 1.1.18.** No anel  $\mathbb{Z}$ , o ideal  $2\mathbb{Z} = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$  é um ideal primo.

**Definição 1.1.19.** Seja  $R$  um anel com unidade 1. Um grupo abeliano  $M$  é um  $R$ -módulo (à esquerda) se está definida uma função de  $R \times M \rightarrow M$  tal que  $(a, m) \mapsto am$  para cada  $a \in R, m \in M$ , e para todos  $a, b \in R$  e  $m, m_1, m_2 \in M$ , valem:

- i)  $(a + b)m = am + bm$ ,
- ii)  $a(m_1 + m_2) = am_1 + am_2$ ,
- iii)  $a(bm) = (ab)m$ ,
- iv)  $1m = m$ .

Num  $R$ -módulo à direita, definimos uma função  $M \times R \rightarrow M$ , com  $(m, a) \mapsto ma$ , a qual cumpre as propriedades i) até iv) à direita.

Segue diretamente da definição que se  $\mathbb{K}$  é um corpo, então o conceito de  $\mathbb{K}$ -módulo coincide com a noção de espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$ .

**Exemplo 1.1.20.** Sejam  $A$  um grupo abeliano,  $a \in A$  e  $m \in \mathbb{Z}^+$ . Define-se

$$ma = \begin{cases} 0_A \text{ (o neutro do grupo } A \text{)}, & \text{se } m = 0, \\ \underbrace{a + a + \cdots + a}_{m\text{-vezes}}, & \text{se } m \in \mathbb{Z}^+, \\ \underbrace{(-a) + (-a) + \cdots + (-a)}_{|m|\text{-vezes}}, & \text{se } m \in \mathbb{Z}^-. \end{cases}$$

Assim  $A$  é um  $\mathbb{Z}$ -módulo.

**Definição 1.1.21.** Um  $R$ -módulo é *livre* se tem uma base.

**Definição 1.1.22.** Seja  $R$  um anel comutativo. Um  $R$ -módulo  $A$  é uma  $R$ -álgebra se há uma multiplicação  $\cdot$ , definida em  $A$ , tal que  $(A, +, \cdot)$  é um anel e ainda valem as seguintes condições:

$$r(ab) = (ra)b = a(rb),$$

para todo  $r \in R$  e para todos  $a, b \in A$ .

**Exemplo 1.1.23.** O conjunto  $\mathbb{Z}$  dos números inteiros, o conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números racionais, o conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais e o conjunto  $\mathbb{C}$  dos números complexos, com a adição e multiplicação usuais, são  $\mathbb{Z}$ -álgebras.

**Definição 1.1.24.** Uma álgebra  $A$  é *comutativa* se  $ab = ba$ , para todos  $a, b \in A$ .

**Exemplo 1.1.25.** No Exemplo 1.1.23, todas as  $\mathbb{Z}$ -álgebras são comutativas.

Uma álgebra de dimensão finita que tenha uma base fica determinada pelos produtos dos elementos de sua base, como a seguir.

**Definição 1.1.26.** Sejam  $A$  uma álgebra  $n$ -dimensional sobre um corpo  $\mathbb{K}$  e  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base desta álgebra. As *constantes de estrutura* de  $A$  são os números  $c_{ij}^k \in \mathbb{K}$  tais que

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e_k, \quad \text{para } 1 \leq i, j \leq n. \quad (1.2)$$

**Observação 1.1.27.** O expoente da constante é também um índice, que denota a constante que acompanha o vetor  $e_k$ ; os outros dois índices denotam o produto dos vetores  $e_i$  e  $e_j$ . Ao longo da dissertação denotamos ou diferenciamos as álgebras por meio do produto de seus elementos básicos.

**Exemplo 1.1.28.** Se  $A$  é uma álgebra com base  $\{e_1, e_2\}$  sobre de dimensão 2 sobre o corpo finito  $\mathbb{F}_3$  com três elementos, definida pelos produtos  $e_1 e_2 = e_1 + 2e_2$  e  $e_1 e_1 = e_2 e_1 = e_2 e_2 = 0$  então  $c_{12}^1 = 1$ ,  $c_{12}^2 = 2$  e  $c_{11}^1 = c_{11}^2 = c_{21}^1 = c_{21}^2 = c_{22}^1 = c_{22}^2 = 0$ .

**Definição 1.1.29.** Uma álgebra  $A$  é *abeliana* se todas suas constantes de estrutura são iguais a zero.

**Exemplo 1.1.30.** Se no Exemplo 1.1.28,  $e_1e_2 = 0$ , temos

$$c_{11}^1 = c_{11}^2 = c_{12}^1 = c_{12}^2 = c_{21}^1 = c_{21}^2 = c_{22}^1 = c_{22}^2 = 0,$$

isto é, se todas as constantes de estrutura são iguais a zero, a álgebra  $A$  é abeliana.

**Observação 1.1.31.** Na Definição 1.1.29, se uma álgebra  $A$  é abeliana, então todos os produtos dos elementos de qualquer base de  $A$  são todos iguais a zero pela equação (1.2).

**Observação 1.1.32.** Uma álgebra comutativa não necessariamente é abeliana. Isto porque a definição de álgebra comutativa não tem nenhuma condição sobre as constantes de estrutura.

**Exemplo 1.1.33.** Para exemplificar a Observação 1.1.32, tomamos a álgebra  $A$  bidimensional com base  $e_1, e_2$  sobre o corpo  $\mathbb{K}$  (qualquer corpo) definida pelos produtos  $e_1e_1 = e_1$ ,  $e_2e_2 = e_2$  e  $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$ . A álgebra  $A$  é comutativa mas não é abeliana.

**A partir de agora, todas as álgebras estudadas terão estrutura de espaço vetorial.**

Uma das estruturas importantes para o último capítulo é o centro de uma álgebra, por isto tendo em conta a Definição 1.1.29, definimos a seguinte estrutura.

**Definição 1.1.34.** Seja  $S$  um subespaço vetorial de uma álgebra  $A$ . Os *anuladores à esquerda* e *à direita* de  $S$  em  $A$  são definidos, respectivamente, por

$$Ann_{A^-}(S) = \{u \in A \mid uv = 0, \text{ para todo } v \in S\}$$

e

$$Ann_{A^+}(S) = \{u \in A \mid vu = 0, \text{ para todo } v \in S\}.$$

A interseção dos dois conjuntos anteriores é chamado o *anulador* de  $S$  em  $A$  e é definido por

$$Ann_A(S) = \{u \in A \mid uv = vu = 0, \text{ para todo } v \in S\}. \quad (1.3)$$

**Exemplo 1.1.35.** Sejam  $A$  uma álgebra abeliana e  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base de  $A$ . Então  $e_i e_j = 0$ , para todos  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , por isto, para todos  $u, v \in A$ ,  $uv = 0 = vu$ , já que

$$uv = (a_1e_1 + \dots + a_n e_n)(b_1e_1 + \dots + b_n e_n) = a_1b_1e_1e_1 + \dots + a_nb_n e_n e_n = 0 = vu.$$

Por isto,  $\text{Ann}_A(A) = A$ .

**Definição 1.1.36.** Dado um subespaço vetorial  $S$  de uma álgebra  $A$ , definimos o subespaço vetorial  $SA = \{uv \mid u \in S \text{ e } v \in A\}$ .

**Exemplo 1.1.37.** Seja  $S = \{\mathbf{0}\}$  o subespaço vetorial nulo do corpo finito de dois elementos  $\mathbb{F}_2$  visto como álgebra sobre si mesmo. Assim,

$$S\mathbb{F}_2 = \{uv \mid u \in \{\mathbf{0}\} \text{ e } v \in \mathbb{F}_2\} = \{\mathbf{0}\}.$$

Enunciamos as seguintes definições com o objetivo de estudar no Capítulo 2 as álgebras de Lie nilpotentes.

**Definição 1.1.38.** A *álgebra derivada* da álgebra  $A$  é definida como a subálgebra

$$A^2 = AA = \{uv \mid u, v \in A\} \subseteq A.$$

**Exemplo 1.1.39.** Seja  $\mathbb{F}_2$  uma álgebra sobre si mesmo. Temos

$$\mathbb{F}_2^2 = \mathbb{F}_2\mathbb{F}_2 = \{uv \mid u, v \in \mathbb{F}_2\} = \mathbb{F}_2.$$

**Definição 1.1.40.** Sejam  $A$  uma álgebra e  $u \in A$ . A *ação adjunta* de  $u$  em  $A$  é a função  $ad_u : A \rightarrow A^2$  tal que  $ad_u(v) = uv$ , para todo  $v \in A$ .

**Definição 1.1.41.** A *série derivada* da álgebra  $A$  é definida como

$$\mathcal{C}_1(A) = A \supseteq \mathcal{C}_2(A) = A^2 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{C}_k(A) = (\mathcal{C}_{k-1}(A))^2 \supseteq \dots$$

**Definição 1.1.42.** Uma álgebra  $A$  é *solúvel* se existir um número inteiro positivo  $m$  tal que  $\mathcal{C}_{m+1}(A) = \{\mathbf{0}\}$ . O menor desses números inteiros é chamado *índice de solubilidade* da álgebra.

**Exemplo 1.1.43.** Seja  $A$  uma álgebra abeliana. Então  $A$  é solúvel, com índice de solubilidade  $m = 1$ , pois

$$\mathcal{C}_1(A) = A \supseteq \mathcal{C}_2(A) = A^2 = \{uv \mid u, v \in A\} = \{\mathbf{0}\},$$

já que  $uv = 0$ , para todos  $u, v \in A$ .

**Definição 1.1.44.** A *série central descendente* da álgebra  $A$  é definida como

$$\mathcal{C}^1(A) = A \supseteq \mathcal{C}^2(A) = A^2 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{C}^k(A) = (\mathcal{C}^{k-1}(A))A \supseteq \dots$$

**Definição 1.1.45.** A álgebra  $A$  é dita *nilpotente* se existe um inteiro positivo  $m$  tal que  $\mathcal{C}^{m+1}(A) = \{0\}$ . O menor desses números inteiros é chamado de *índice de nilpotência* da álgebra.

**Exemplo 1.1.46.** Seja  $A$  uma álgebra abeliana. Então  $A$  é nilpotente, com índice de nilpotência  $m = 1$ , pois

$$\mathcal{C}^1(A) = A \supseteq \mathcal{C}^2(A) = A^2 = \{uv \mid u, v \in A\} = \{0\},$$

já que  $uv = 0$ , para todos  $u, v \in A$ .

O índice de solubilidade, o índice de nilpotência junto com as dimensões de cada subespaço vetorial  $\mathcal{C}_k(A)$  e  $\mathcal{C}^k(A)$  são todos preservados por isomorfismos.

**Definição 1.1.47.** O *tipo* de álgebra  $A$  de índice de nilpotência  $m$  é definido como a sequência

$$\{\dim A/\mathcal{C}^2(A), \dim \mathcal{C}^2(A)/\mathcal{C}^3(A), \dots, \dim \mathcal{C}^{m-1}(A)/\mathcal{C}^m(A)\}. \quad (1.4)$$

## 1.2 Isotopismos de álgebras

Nesta seção definimos os isotopismos sobre qualquer par de álgebras e fazemos algumas classificações por meio de isotopismos. Estabelecemos também uma relação entre os anuladores de duas álgebras isotópicas. Além disso, fazemos um pequeno estudo dos magmas associados a uma álgebra e outras propriedades dos magmas entre álgebras isotópicas.

Consideremos duas álgebras  $n$ -dimensionais  $A$  e  $A'$ , com bases  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  e  $B' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ , respectivamente. Para  $\sigma \in S_n$ , definimos uma transformação linear não singular  $T_\sigma : A \rightarrow A'$  tal que  $T_\sigma(e_i) = e'_{\sigma(i)}$ .

**Exemplo 1.2.1.** Dadas duas álgebras tridimensionais  $A$  e  $A'$  com bases  $\{e_1, e_2, e_3\}$  e  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ , respectivamente, o isomorfismo denotado como  $T_{(23)}$  com  $(23) \in S_3$  é linearmente definido como  $T_{(23)}(e_1) = e'_1$ ,  $T_{(23)}(e_2) = e'_3$  e  $T_{(23)}(e_3) = e'_2$ .

Daqui em diante a notação para a função identidade nos índices é  $T_{Id}$ .

**Definição 1.2.2.** Duas álgebras  $n$ -dimensionais  $(A, \cdot)$  e  $(A', \circ)$  definidas sobre um mesmo corpo  $\mathbb{K}$  são ditas *isotópicas* se existirem três transformações lineares não singulares  $f, g$  e  $h$  de  $A$  em  $A'$  tais que

$$f(u) \circ g(v) = h(u \cdot v), \quad \text{para todos } u, v \in A. \quad (1.5)$$

A terna  $(f, g, h)$  é dita um *isotopismo* entre as álgebras  $A$  e  $A'$ .

- i) Se  $h$  é a transformação identidade  $Id$ , então o isotopismo é chamado *principal*.
- ii) Se  $f = g$ , então dizemos que há um *isotopismo forte* e, as álgebras são consideradas *fortemente isotópicas*.
- iii) Se  $f = g = h$ , então o isotopismo constitui um *isomorfismo*, que é denotado por  $f$  em vez de  $(f, f, f)$ .

Daqui em diante, a fim de simplificar a notação e sempre que não houver confusão, não escrevemos explicitamente os produtos  $\cdot$  e  $\circ$ , ou seja, escrevemos a identidade (1.5) como  $f(u)g(v) = h(uv)$ , para todos  $u, v \in A$ .

**Exemplo 1.2.3.** O primeiro exemplo de isotopismo é  $(id_A, id_A, id_A)$  da álgebra  $A$  nela mesma, com  $id_A : A \rightarrow A$  tal que  $id_A(u) = u$ , para todo  $u \in A$ .

$$id_A(u) \cdot id_A(v) = uv = id_A(u \cdot v), \quad \text{para todos } u, v \in A.$$

Ao longo da dissertação apresentamos outros exemplos de isotopismos.

**Observação 1.2.4.** Um isomorfismo de álgebras  $f : A \rightarrow A'$  é um isotopismo com a terna  $(f, f, f)$ , pois é uma transformação linear bijetora que também é um homomorfismo tal que

$$f(u \cdot v) = f(u) \cdot f(v), \quad \text{para todos } u, v \in A.$$

O isotopismo, o isotopismo forte ou o isomorfismo são relações de equivalência entre álgebras. Usamos as notações  $A \sim A'$ ,  $A \simeq A'$  e  $A \cong A'$  para denotar que  $A$  é isotópica a  $A'$ ,  $A$  é fortemente isotópica a  $A'$  e  $A$  é isomorfa a  $A'$ , respectivamente.

Sejam  $A$  e  $A'$  álgebras isotópicas  $n$ -dimensionais sobre um mesmo corpo  $\mathbb{K}$  e  $\{e_1, \dots, e_n\}$  e  $\{e'_1, \dots, e'_n\}$  suas respectivas bases. Qualquer isotopismo  $(f, g, h)$  entre as duas álgebras é determinado exclusivamente por seus respectivos conjuntos de constantes de estrutura,  $c_{ij}^k$  e  $c'_{ij}^k$ , e as entradas correspondentes das matrizes não singulares  $F = (f_{ij})$ ,  $G = (g_{ij})$  e  $H = (h_{ij})$  que estão respectivamente relacionadas às funções  $f$ ,  $g$  e  $h$ . Aqui, temos  $\alpha(e_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} e'_j$ , para cada  $\alpha \in \{f, g, h\}$ .

As próximas igualdades seguem em particular dos coeficientes de cada vetor básico na expressão  $f(e_i)g(e_j) = h(e_i e_j)$ .

$$\sum_{k,l=1}^n c_{kl}^m f_{ik} g_{jl} = \sum_{s=1}^n c_{ij}^s h_{sm}, \quad \text{para todo } i, j \leq n. \quad (1.6)$$

Da igualdade  $\alpha(e_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} e'_j$ , para cada  $\alpha \in \{f, g, h\}$ , temos

$$f(e_i) = \sum_{k=1}^n f_{ik} e'_k \quad \text{e} \quad g(e_j) = \sum_{l=1}^n g_{jl} e'_l,$$

Disto e abrindo o somatório de  $g(e_j)$ ,

$$\begin{aligned} f(e_i)g(e_j) &= \left( \sum_{k=1}^n f_{ik} e'_k \right) \left( \sum_{l=1}^n g_{jl} e'_l \right) \\ &= \left( \sum_{k=1}^n f_{ik} e'_k \right) g_{j1} e'_1 + \dots + \left( \sum_{k=1}^n f_{ik} e'_k \right) g_{jn} e'_n. \end{aligned}$$

Abrindo o somatório de  $f(e_i)$ , obtemos

$$\begin{aligned} f(e_i)g(e_j) &= (f_{i1} e'_1) g_{j1} e'_1 + \dots + (f_{in} e'_n) g_{j1} e'_1 + \dots + (f_{i1} e'_1) g_{jn} e'_n + \dots + (f_{in} e'_n) g_{jn} e'_n \\ &= ((f_{i1} g_{j1}) e'_1) e'_1 + \dots + ((f_{in} g_{j1}) e'_n) e'_1 + \dots \\ &\quad + ((f_{i1} g_{jn}) e'_1) g_{jn} e'_n + \dots + ((f_{in} g_{jn}) e'_n) g_{jn} e'_n, \end{aligned}$$

e, associando as constantes de estrutura, temos

$$\begin{aligned} f(e_i)g(e_j) &= \sum_{k=1}^n ((f_{ik} g_{j1}) e'_k) e'_1 + \dots + \sum_{k=1}^n ((f_{ik} g_{jn}) e'_k) e'_n \\ &= \sum_{l=1}^n \left( \sum_{k=1}^n ((f_{ik} g_{jl}) e'_k) e'_l \right) = \sum_{k,l=1}^n f_{ik} g_{jl} (e'_k e'_l). \end{aligned}$$



Reescrevendo os produtos dos vetores temos

$$\begin{aligned} f(e_i)g(e_j) &= \sum_{k,l=1}^n f_{ik}g_{jl} \left( \sum_{m=1}^n c'_{kl}{}^m e'_m \right) = \sum_{k,l=1}^n \left( \sum_{m=1}^n c'_{kl}{}^m f_{ik}g_{jl} e'_m \right) \\ &= \sum_{m=1}^n \left( \sum_{k,l=1}^n c'_{kl}{}^m f_{ik}g_{jl} e'_m \right) = \sum_{m=1}^n \left( \sum_{k,l=1}^n c'_{kl}{}^m f_{ik}g_{jl} \right) e'_m. \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} h(e_i e_j) &= h \left( \sum_{s=1}^n c'_{ij}{}^s e'_s \right) = \sum_{s=1}^n h(c'_{ij}{}^s e'_s) \\ &= \sum_{s=1}^n c'_{ij}{}^s h(e'_s) = \sum_{s=1}^n c'_{ij}{}^s \left( \sum_{m=1}^n h_{sm} e'_m \right) = \sum_{s=1}^n \left( \sum_{m=1}^n c'_{ij}{}^s h_{sm} e'_m \right) \\ &= \sum_{m=1}^n \left( \sum_{s=1}^n c'_{ij}{}^s h_{sm} e'_m \right) = \sum_{m=1}^n \left( \sum_{s=1}^n c'_{ij}{}^s h_{sm} \right) e'_m. \end{aligned}$$

Por conseguinte,  $\sum_{s=1}^n c'_{ij}{}^s h_{sm} = \sum_{k,l=1}^n c'_{kl}{}^m f_{ik}g_{jl}$ .

Seguindo o objetivo de classificar as álgebras por meio de isotopismos, enunciamos como primeira classificação o seguinte lema.

**Lema 1.2.5.** *Uma álgebra abeliana  $n$ -dimensional não é isotópica a qualquer outra álgebra não abeliana  $n$ -dimensional.*

**Demonstração:** Suponhamos que exista um isotopismo  $(f, g, h)$  entre uma álgebra não abeliana  $n$ -dimensional  $(A, \cdot)$  e uma álgebra abeliana  $n$ -dimensional  $(A', \circ)$ . Sejam  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base de  $A$  e  $1 \leq i, j \leq n$  índices tais que  $e_i e_j \neq 0$ . Pela não singularidade de  $h$ , temos  $h(e_i e_j) \neq 0$ , já que  $e_i e_j \neq 0$ , isto porque  $h$  é injetora. Como  $f, g$  e  $h$  são transformações lineares, então os elementos da base de  $A$  são enviados por  $f, g$  e  $h$  a elementos da base de  $A'$ . Logo  $f(e_i)g(e_j) = 0$ .

Agora, pela definição de isotopismo, concluímos  $f(e_i)g(e_j) = h(e_i e_j)$ . Portanto,

$$0 = f(e_i)g(e_j) = h(e_i e_j) \neq 0,$$

que é uma contradição. Assim, não existe um isotopismo entre uma álgebra não abeliana  $n$ -dimensional e uma álgebra abeliana  $n$ -dimensional. ■

**Proposição 1.2.6.** *Existem duas classes de isomorfismo e isotopismo de álgebras unidimensionais: a abeliana e aquela descrita pelo produto dos vetores da base  $e_1e_1 = e_1$ .*

**Demonstração:** Primeiro provamos que toda álgebra  $(A, \cdot)$  não abeliana de dimensão um é descrita pelo produto do elemento da base de  $A$  da seguinte forma  $e_1e_1 = ae_1$ , com  $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . Na equação (1.2), temos que  $i, j$  e  $k$  são iguais a 1, já que só existe um elemento na base de  $A$ . Assim

$$e_1e_1 = \sum_{k=1}^1 c_{11}^k e_k \Rightarrow e_1e_1 = c_{11}^1 e_1, \text{ com } c_{11}^1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\},$$

porque se  $c_{11}^1 = 0$  então  $A$  é abeliana. Fazendo  $c_{11}^1 = a$ , obtemos  $e_1e_1 = ae_1$  com  $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ .

Sejam  $(A', \circ)$  a álgebra um-dimensional descrita pelo produto  $e_1e_1 = e_1$  e  $f : A \rightarrow A'$ , com  $f(e_1) = ae_1$ . Provamos que  $f$  é um isomorfismo. Já que  $f$  é uma transformação linear, para todos  $a \in \mathbb{K}$  e  $x, y \in A$ , com  $x = \alpha e_1$  e  $y = \beta e_1$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ , temos

$$f(ax) = af(x) \text{ e } f(x + y) = f(x) + f(y),$$

porque  $f$  é linear. Agora

$$\begin{aligned} f(x \cdot y) &= f(a(\alpha e_1) \cdot \beta e_1) = f((a\alpha\beta)e_1) \\ &= (a\alpha\beta)f(e_1) = a\alpha f(e_1) \circ \beta f(e_1) \\ &= f((a\alpha)e_1) \circ f(\beta e_1) = f(x) \circ f(y). \end{aligned}$$

Por isto,  $f$  é um homomorfismo de álgebras e, como  $f$  é uma transformação linear não singular,  $f$  é bijetora. Existem, portanto, só duas classes de isotopismos de dimensão um: a classe das álgebras descritas pelo produto  $e_1e_1 = e_1$  e pelo Lema 1.2.5, a classe das álgebras abelianas. ■

Outro dos nossos objetivos nesta dissertação, além da classificação de álgebras, é identificar algumas estruturas que são invariantes por meio de isotopismos entre álgebras.

**Lema 1.2.7.** *Seja  $(f, g, h)$  um isotopismo entre duas álgebras  $n$ -dimensionais  $A$  e  $A'$ . Seja  $S$  um subespaço vetorial de  $A$ . Então*

- a)  $f(\text{Ann}_{A^-}(S)) = \text{Ann}_{A'^-}(g(S))$  e  $\dim \text{Ann}_{A^-}(S) = \dim \text{Ann}_{A'^-}(g(S))$ .
- b)  $g(\text{Ann}_{A^+}(S)) = \text{Ann}_{A'^+}(f(S))$  e  $\dim \text{Ann}_{A^+}(S) = \dim \text{Ann}_{A'^+}(f(S))$ .
- c)  $f(\text{Ann}_{A^-}(S)) \cap g(\text{Ann}_{A^+}(S)) = \text{Ann}_{A'}(f(S) \cap g(S))$ .

**Demonstração:** Para provar a), sejam  $u \in g(S)$  e  $v \in f(\text{Ann}_{A^-}(S))$ . Então

$$\begin{aligned} vu &= f(f^{-1}(v))g(g^{-1}(u)) \\ &= h(f^{-1}(v)g^{-1}(u)) = h(0) = 0. \end{aligned} \tag{1.7}$$

A primeira igualdade decorre de  $v = f(f^{-1}(v))$  e  $u = g(g^{-1}(u))$ , pois  $f$  e  $g$  são bijetoras; a segunda igualdade pela definição de isotopismo na equação (1.5); a terceira igualdade porque  $f^{-1}(v) \in \text{Ann}_{A^-}(S)$  pela definição do anulador,  $f^{-1}(v)w = 0$ , para todo,  $w \in S$ . Além disso,  $g^{-1}(u) \in S$ . Logo  $f^{-1}(v)g^{-1}(u) = 0$  e, a última igualdade decorre de  $h$  ser bijetora.

Da equação (1.7),  $vu = 0$ , para todo  $u \in g(S)$  e, como  $v \in f(\text{Ann}_{A^-}(S)) \subset A'$ , vem que  $v \in \text{Ann}_{A'^-}(g(S))$ . Por isto  $f(\text{Ann}_{A^-}(S)) \subseteq \text{Ann}_{A'^-}(g(S))$ .

Agora, sejam  $u \in \text{Ann}_{A'^-}(g(S))$  e  $v \in S$ . Então, da não singularidade de  $f$  temos

$$h(f^{-1}(u)v) = f(f^{-1}(u))g(v) = ug(v) = 0. \tag{1.8}$$

A primeira igualdade vem da definição de isotopismo na equação (1.5); a segunda igualdade porque  $f$  é bijetora; a terceira, porque  $v \in S \subseteq A$ , de onde  $g(v) \in A'$  e  $u \in \text{Ann}_{A'^-}(g(S))$ . Pela definição do anulador,  $ug(v) = 0$ , para todo  $g(v) \in g(S)$ .

Portanto da equação (1.8) e, já que  $h$  é bijetora temos  $f^{-1}(u)v = 0$ , para todo  $v \in S \subseteq A$ . Assim  $u \in f(\text{Ann}_{A^-}(S))$ , por isto  $\text{Ann}_{A'^-}(g(S)) \subseteq f(\text{Ann}_{A^-}(S))$ ; daqui obtemos  $\text{Ann}_{A'^-}(g(S)) = f(\text{Ann}_{A^-}(S))$ . Por último, como  $f$  é bijetora, sabemos que se cumpre  $\dim \text{Ann}_{A'^-}(g(S)) = \dim \text{Ann}_{A^-}(S)$ .

Para provar b), sejam  $u \in f(S)$  e  $v \in g(\text{Ann}_{A^+}(S))$ . Então

$$uv = f(f^{-1}(u))g(g^{-1}(v)) = h(f^{-1}(u)g^{-1}(v)) = h(0) = 0. \tag{1.9}$$

A primeira igualdade é porque  $u = f(f^{-1}(u))$  e  $v = g(g^{-1}(v))$ , já que  $f$  e  $g$  são bijetoras;

a segunda igualdade pela definição de isotopismo na equação (1.5); a terceira igualdade porque  $g^{-1}(v) \in \text{Ann}_{A^+}(S)$  e, pela definição do anulador  $g^{-1}(u)w = 0$ , para todo  $w \in S$ . Além disso,  $f^{-1}(u) \in S$ , logo  $f^{-1}(u)g^{-1}(v) = 0$  e a última igualdade segue de  $h$  ser bijetora  $h$ .

Da equação (1.9)  $uv = 0$ , para todo  $u \in f(S)$  e, como  $v \in g(\text{Ann}_{A^+}(S)) \subseteq A'$ , assim  $v \in \text{Ann}_{A'+}(f(S))$ . Por isto,  $g(\text{Ann}_{A^+}(S)) \subseteq \text{Ann}_{A'+}(f(S))$ .

Agora, sejam  $u \in \text{Ann}_{A'+}(f(S))$  e  $v \in S$ . Então da não singularidade de  $f$ , temos

$$h(vg^{-1}(u)) = f(v)g(g^{-1}(u)) = f(v)u = 0. \quad (1.10)$$

A primeira igualdade decorre da definição de isotopismo na equação (1.5); a segunda de que  $g$  é bijetora; a terceira igualdade porque  $v \in S \subseteq A$  de onde  $f(v) \in f(S) \subseteq A'$  e,  $u \in \text{Ann}_{A'+}(f(S))$  por definição do anulador  $f(v)u = 0$ , para todo  $f(v) \in f(S)$ .

Da equação (1.10) e, já que por definição  $h$  é bijetora,  $vg^{-1}(u) = 0$ , para todo  $v \in S \subseteq A$ . Portanto,  $u \in g(\text{Ann}_{A^+}(S))$ , por isto  $\text{Ann}_{A'+}(f(S)) \subseteq g(\text{Ann}_{A^+}(S))$ ; daqui  $\text{Ann}_{A'+}(f(S)) = g(\text{Ann}_{A^+}(S))$ . Por último, como  $g$  é bijetora por definição,  $\dim \text{Ann}_{A'+}(f(S)) = \dim \text{Ann}_{A^+}(S)$ .

Agora provamos c). Temos

$$\begin{aligned} f(\text{Ann}_{A^-}(S)) \cap g(\text{Ann}_{A^+}(S)) &= \text{Ann}_{A'^-}(g(S)) \cap \text{Ann}_{A'+}(f(S)) \\ &\supseteq \text{Ann}_{A'+}(g(S)) \cap \text{Ann}_{A'^-}(g(S)) \\ &\cap \text{Ann}_{A'+}(f(S)) \cap \text{Ann}_{A'^-}(f(S)) \\ &= \text{Ann}_{A'}(g(S)) \cap \text{Ann}_{A'}(f(S)) \\ &= \text{Ann}_{A'}(g(S) \cap f(S)) \\ &= \text{Ann}_{A'}(f(S) \cap g(S)). \end{aligned}$$

A primeira igualdade segue de a) e b); a inclusão da segunda linha por propriedades da interseção; a terceira e quarta linhas pela definição de anulador.

Agora, para obter a igualdade dos conjuntos no enunciado, provamos a outra inclusão. Se  $v \in f(\text{Ann}_{A^-}(S)) \cap g(\text{Ann}_{A^+}(S))$ , então existem  $u_1, u_2$  tais que  $f(u_1) = v = g(u_2)$ , logo

seja  $v' \in f(S) \cap g(S)$  tal que  $f(u'_1) = v' = g(u'_2)$ . Assim

$$v \cdot v' = f(u_1)g(u'_2) = h(u_1u'_2) = h(0) = 0.$$

Aqui a segunda igualdade vem da definição de isotopismo, a terceira, da definição de anulador e porque  $u_1 \in \text{Ann}_{A^-}(S)$  e  $u'_2 \in S$ ; a última igualdade da não singularidade de  $h$ . ■

**Proposição 1.2.8.** *Seja  $(f, g, h)$  um isotopismo entre duas álgebras  $n$ -dimensionais  $A$  e  $A'$ . Então*

$$a) f(\text{Ann}_{A^-}(A)) = \text{Ann}_{A'^-}(A') \quad e \quad \dim \text{Ann}_{A^-}(A) = \dim \text{Ann}_{A'^-}(A').$$

$$b) g(\text{Ann}_{A^+}(A)) = \text{Ann}_{A'^+}(A') \quad e \quad \dim \text{Ann}_{A^+}(A) = \dim \text{Ann}_{A'^+}(A').$$

$$c) f(\text{Ann}_{A^-}(A)) \cap g(\text{Ann}_{A^+}(A)) = \text{Ann}_{A'}(A').$$

**Demonstração:** Como  $A$  é subespaço vetorial de  $A$ , o resultado segue direto do Lema 1.2.7, trocando  $S$  por  $A$  e, como  $f$  e  $g$  são bijetoras, temos  $f(A) = g(A) = A'$ . ■

Agora tendo em conta nosso interesse no estudo das estruturas que são invariantes por meio dos isotopismos de álgebras, enunciamos o seguinte lema.

**Lema 1.2.9.** *Seja  $(f, g, h)$  um isotopismo entre duas álgebras  $n$ -dimensionais  $A$  e  $A'$ . Então  $h(A^2) = A'^2$  e  $\dim(A^2) = \dim(A'^2)$ .*

**Demonstração:** Da não singularidade de  $f$  e  $g$ , temos que  $f$  e  $g$  são bijetoras. Logo  $f(A) = g(A) = A'$ . Por isto temos  $f(A)g(A) = A'^2$  e, pela definição de isotopismo,  $f(A)g(A) = h(A^2)$ . Portanto,

$$A'^2 = f(A)g(A) = h(A^2),$$

e, como  $h$  é bijetora, segue  $\dim(A'^2) = \dim(A^2)$ . ■

Terminamos a seção com o estudo de álgebras magmas parciais e para isto primeiro enunciamos quando dois magmas parciais são isotópicos.

**Definição 1.2.10.** Dois magmas (parciais)  $([n], \cdot)$  e  $([n], \circ)$  são ditos *isotópicos* se existem três permutações  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  no grupo simétrico  $S_n$  tais que

$$\alpha(i) \circ \beta(j) = \gamma(i \cdot j), \quad \text{para todos } i, j \leq n \text{ tal que existe } i \cdot j. \quad (1.11)$$

Se  $\alpha = \beta = \gamma$ , então os magmas (parciais) são considerados *isomorfos*. A terna  $(\alpha, \beta, \gamma)$  constitui um isotopismo de magmas (parciais) (um isomorfismo se  $\alpha = \beta = \gamma$ ).

**Observação 1.2.11.** Na Definição 1.2.10, o conjunto base é o mesmo, neste caso  $[n]$ . Não conhecemos uma definição de isotopismo de magmas com conjuntos que sejam diferentes. Essa definição poderia ser feita para isomorfismos, porém a ideia desta seção é estudar os isotopismos.

Tendo em conta as definições de magma e de magma parcial, fazemos uma relação com as álgebras, para estudar mais para frente isotopismos sobre outro tipo de álgebras. A relação é a seguinte.

**Definição 1.2.12.** Uma álgebra  $n$ -dimensional sobre um corpo  $\mathbb{K}$  é uma *álgebra magma parcial* se existem uma base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  da álgebra e um magma parcial  $([n], \cdot)$  de modo que

$$e_i e_j = \begin{cases} c_{ij} e_{i \cdot j}, & \text{se } i \cdot j \text{ existe,} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (1.12)$$

para cada par de elementos  $i, j \leq n$  e alguma constante de estrutura  $c_{ij} \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ .

Denotamos uma tal álgebra por  $A^\bullet$  e dizemos que a álgebra é *baseada no magma parcial*  $([n], \cdot)$ .

**Definição 1.2.13.** Seja  $([n], \cdot)$  um magma parcial, a estrutura algébrica baseada no magma parcial é um *anel magma parcial* se todas as constantes de estrutura diferentes de zero de (1.12) são iguais a 1.

**Definição 1.2.14.** Seja  $([n], \cdot)$  um magma, a álgebra baseada no magma é uma *álgebra magma* (um *anel magma* se todas as constantes da estrutura são 1).

Álgebras magmas parciais constituem, portanto, uma natural generalização do conceito de álgebra de quase-grupos, uma vez que a condição de ser baseado em um quase-grupo é substituído por ser baseado em um magma parcial.

Provamos no seguinte resultado que nos diz que magmas parciais isotópicos (isomorfos, respectivamente) dão origem a anéis magmas parciais isotópicos (isomorfos, respectivamente).

**Lema 1.2.15.** *Dois anéis magmas parciais são isotópicos (isomorfos, respectivamente) se seus respectivos magmas parciais nas quais são baseadas são isotópicos (isomorfos, respectivamente).*

**Demonstração:** Sejam  $A^\bullet$  e  $A^\circ$  dois anéis magmas parciais baseados em dois magmas parciais isotópicos  $([n], \cdot)$  e  $([n], \circ)$ , respectivamente. Seja  $\{e_1, \dots, e_n\}$  o conjunto que representa uma base das álgebras  $A^\bullet$  e  $A^\circ$ , e  $(f, g, h)$  o isotopismo entre  $([n], \cdot)$  e  $([n], \circ)$ . Para cada  $\alpha \in \{f, g, h\}$  definimos a função  $\bar{\alpha}(e_i) = e_{\alpha(i)}$ . Daí

$$\bar{f}(e_i)\bar{g}(e_j) = e_{f(i)}e_{g(j)} = e_{f(i)g(j)} = e_{h(ij)} = \bar{h}(e_{ij}) = \bar{h}(e_i e_j).$$

A primeira igualdade é pela definição de  $\bar{f}$  e  $\bar{g}$ , a segunda, pela definição de isotopismo, lembrando a equação (1.12), tendo em conta que  $c'_{ij} = 1$ , para todos  $i$  e  $j$ , já que  $A^\circ$  é um anel magma parcial; a terceira, pela definição de isotopismo, a quarta, pela definição de  $\bar{h}$  e, por último, a quinta, pela equação (1.12), tendo que  $A^\bullet$  é um anel magma parcial.

A partir da linearidade, a terna  $(f, g, h)$  determina, portanto, um isotopismo entre as álgebras  $A^\bullet$  e  $A^\circ$ . Se  $f = g = h$ , então isso constitui um isomorfismo. ■

A recíproca do Lema 1.2.15 não é verdadeira em geral.

**Exemplo 1.2.16.** Como contraexemplo da recíproca do Lema 1.2.15, temos os dois magmas parciais  $([2], \bullet)$  e  $([2], \circ)$  que são respectivamente descritos pelos produtos não nulos  $1 \bullet 1 = 1$  e  $1 \circ 1 = 1 = 2 \circ 1$ , estes magmas parciais não são isotópicos. No entanto, os anéis magmas parciais  $A^\bullet$  e  $A^\circ$ , com as respectivas bases  $\{e_1, e_2\}$  e  $\{e'_1, e'_2\}$ , são isotópicos por meio do isotopismo  $(f, T_{Id}, T_{Id})$ , com a transformação linear  $f$  descrita por  $f(e_1) = e'_1$  e  $f(e_2) = e'_2 - e'_1$ .

Já que os outros produtos dos elementos das bases não são enunciados, assumimos

$$e_2 \bullet e_2 = e_1 \bullet e_2 = e_2 \bullet e_1 = 0 \quad \text{e} \quad e'_1 \circ e'_2 = e'_2 \circ e'_2 = 0.$$

Verificamos se  $(f, T_{Id}, T_{Id})$  é um isotopismo, isto é,  $f(u) \circ T_{Id}(v) = T_{Id}(u \bullet v)$ , para todos

$uv \in A$ . De fato:

- $f(e_1) \circ T_{Id}(e_1) = e'_1 \circ e'_1 = e'_1 = T_{Id}(e_1) = T_{Id}(e_1 \bullet e_1)$ ,
- $f(e_2) \circ T_{Id}(e_2) = (e'_2 - e'_1) \circ e'_2 = e'_2 \circ e'_2 - e'_1 \circ e'_2 = 0 - 0 = 0 = T_{Id}(0) = T_{Id}(e_2 \bullet e_2)$ ,
- $f(e_1) \circ T_{Id}(e_2) = e'_1 \circ e'_2 = 0 = T_{Id}(0) = T_{Id}(e_1 \bullet e_2)$ ,
- $f(e_2) \circ T_{Id}(e_1) = (e'_2 - e'_1) \circ e'_1 = e'_2 \circ e'_1 - e'_1 \circ e'_1 = e'_1 - e'_1 = 0 = T_{Id}(0) = T_{Id}(e_2 \bullet e_1)$ .

Portanto,  $(f, T_{Id}, T_{Id})$  é um isotopismo entre os anéis magmas parciais  $A^\bullet$  e  $A^\circ$ .

A observação anterior dá origem ao problema aberto de distribuição de certos tipos de anéis magmas parciais em classes de isotopismo e isomorfismo para as quais a correspondente classificação dos magmas parciais em que se baseiam seja conhecida.

## 1.3 Geometria Algébrica Computacional

Expomos alguns conceitos básicos e resultados da Geometria Algébrica Computacional que usamos ao longo da dissertação para analisar a distribuição de álgebras em classes de isotopismos e isomorfismos por meio de exemplos. A seção é ilustrativa, o objetivo é entender qual é a teoria que Falcón em [32] precisa para usar diferentes algoritmos no cálculo das bases de Gröbner das diferentes álgebras. Para este estudo usamos os livros de Cox, Little e O'Shea [23] e [24].

### 1.3.1 Preliminares

Esta seção tem como finalidade enunciar dois teoremas que estabelecem o tempo dos algoritmos para calcular as bases de Gröbner.

**Definição 1.3.1.** Sejam  $X$  e  $\mathbb{K}[X]$ , respectivamente, o conjunto de  $n$  variáveis  $\{x_1, \dots, x_n\}$  e o anel de polinômios multivariados relacionados a  $X$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$ , dotado da *gradação padrão* induzida pelo grau de polinômios, isto é,  $\mathbb{K}[X] = \bigoplus_{0 \leq d} \mathbb{K}_d[X]$ , com cada  $\mathbb{K}_d[X]$  o conjunto de polinômios homogêneos em  $\mathbb{K}[X]$  de grau  $d$ . Qualquer monômio de  $\mathbb{K}[X]$  tem a forma  $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$  e é identificado com o ponto  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ .



Lembramos a ordem que usamos num anel de polinômios, primeiro entre os polinômios e depois entre os monômios.

**Definição 1.3.2.** Uma *ordem total*  $\leq$  em  $\mathbb{K}[X]$  é uma relação binária entre os polinômios de  $\mathbb{K}[X]$  tal que, dados três polinômios  $p, q, r \in \mathbb{K}[X]$ , verificam-se as seguintes condições:

- i) Se  $p \leq q$  e  $q \leq p$ , então  $p = q$ .
- ii)  $p \leq q$  ou  $q \leq p$ .
- iii) Se  $p \leq q$  e  $q \leq r$ , então  $p \leq r$ .

**Definição 1.3.3.** Uma *ordem de termo monomial*  $\prec$  em  $\mathbb{K}[X]$  é uma ordem total no conjunto de monômios em  $\mathbb{K}[X]$  tal que

- i)  $1 \prec x^a$ , para todo  $a \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$ .
- ii) Se  $x^a \prec x^b$  para alguns  $a, b \in \mathbb{N}^n$ , então  $x^{a+c} \prec x^{b+c}$ , para todo  $c \in \mathbb{N}^n$ .

**Definição 1.3.4.** A *ordem lexicográfica*  $\prec_{lex}$  é uma ordem de termo monomial definida em  $\mathbb{K}[X]$  tal que, dados dois monômios  $x^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$  e  $x^{\mathbf{b}} = x_1^{b_1} \dots x_n^{b_n}$  em  $\mathbb{K}[X]$ , temos  $x^{\mathbf{a}} \prec_{lex} x^{\mathbf{b}}$  se existe um inteiro positivo  $m \leq n$  tal que  $a_i = b_i$ , para todo  $i \leq m$  e  $a_m < b_m$ .

Na prática, sabemos que o algoritmo para determinar se  $x^{\mathbf{a}} \prec_{lex} x^{\mathbf{b}}$  é o seguinte, calculamos  $\mathbf{b} - \mathbf{a} = (b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)$  e verificamos se a primeira entrada não nula é positiva

**Exemplo 1.3.5.** Vemos dois exemplos com diferentes  $n$ -uplas.

1. Se tomamos  $(0, 3, 4)$  e  $(1, 2, 0)$ , temos  $(0, 3, 4) \prec_{lex} (1, 2, 0)$ , isto porque ao fazer  $(1, 2, 0) - (0, 3, 4) = (1, -1, -4)$  a primeira entrada diferente de zero é 1 que é positivo.
2. Se tomamos os dois vetores  $(-1, -2, -3, 4, 5, 6)$  e  $(2, 3, 4, 5, 6, 7)$ , a relação entre eles é  $(2, 3, 4, 5, 6, 7) \prec_{lex} (-1, -2, -3, 4, 5, 6)$ , isto porque ao fazer  $\mathbf{b} - \mathbf{a}$  obtemos  $(2, 3, 4, 5, 6, 7) - (-1, -2, -3, -4, 5, 6) = (3, 5, 7, 9, 1, 1)$ , logo a primeira entrada diferente de zero é 3 que é positivo.

Daí  $x^{(0,3,4)} \prec_{lex} x^{(1,2,3)}$  e  $x^{(2,3,4,5,6,7)} \prec_{lex} x^{(-1,-2,-3,4,5,6)}$ .

**Definição 1.3.6.** (*Ordem Lexicográfica Graduada*). Sejam  $x^{\mathbf{a}}$  e  $x^{\mathbf{b}}$  dois monômios em  $\mathbb{K}[X]$ . Dizemos que  $x^{\mathbf{a}} \prec_{grlex} x^{\mathbf{b}}$  se  $\sum_i^n a_i < \sum_i^n b_i$  ou se  $\sum_i^n a_i = \sum_i^n b_i$ , e  $x^{\mathbf{a}} \prec_{lex} x^{\mathbf{b}}$ .

**Exemplo 1.3.7.** Vemos alguns exemplos para ilustrar a Definição 1.3.6.

1. Tomamos  $(3, 2, 0)$  e  $(1, 2, 3)$ . Logo  $x^{(3,2,0)} \prec_{grlex} x^{(1,2,3)}$ , já que

$$3 + 2 + 0 = 5 < 6 = 1 + 2 + 3.$$

2. Tomamos  $(4, 2, 6, 8)$  e  $(5, 3, 7, 9)$ . Logo  $x^{(4,2,6,8)} \prec_{grlex} x^{(5,3,7,9)}$ , já que

$$4 + 2 + 6 + 8 = 20 < 24 = 5 + 3 + 7 + 9.$$

Da Teoria de Anéis, lembramos algumas propriedades e definições, isto porque precisamos deles nos diferentes cálculos que Falcón em [32] realiza por meio dos diferentes algoritmos.

**Definição 1.3.8.** A *altura*  $ht(I)$  de um ideal primo  $I$  num anel  $R$  é definida como o supremo dos inteiros positivos  $n \in \mathbb{N}$  de forma que exista uma cadeia  $I_0 \subset \dots \subset I_n = I$  de ideais primos distintos em  $R$ .

**Observação 1.3.9.** Na Definição 1.3.8 o ideal  $I_0$  em cada uma das cadeias não é necessariamente o ideal zero, já que  $I_0$  é um ideal primo e não podemos assegurar que o ideal zero seja também primo em todos os possíveis anéis.

**Definição 1.3.10.** A *dimensão de Krull* de  $\mathbb{K}[X]$  é o supremo de todas as alturas de todos os seus ideais principais.

**Definição 1.3.11.** O *ideal gerado* por um conjunto finito de polinômios  $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{K}[X]$  é definido como

$$\langle p_1, \dots, p_m \rangle = \{p \in \mathbb{K}[X] \mid p = \sum_{i=1}^m q_i \cdot p_i, \text{ com } q_i \in \mathbb{K}[X], \text{ para todo } i \leq m\}. \quad (1.13)$$

**Exemplo 1.3.12.** Tomamos o ideal  $I = \langle x \rangle$  no qual todos os polinômios tem termo independente igual a zero

**Definição 1.3.13.** Dois polinômios  $p, q \in \mathbb{K}[X]$  são *congruentes módulo* um ideal  $I$  de  $\mathbb{K}[X]$  se  $p - q \in I$ .

Esta é uma relação de equivalência.

**Exemplo 1.3.14.** No anel de polinômios  $\mathbb{Q}[x]$ , tomando o ideal  $\langle x \rangle$  os polinômios  $5x + 2$  e  $4x + 2$  são congruentes módulo o ideal  $\langle x \rangle$ , porque

$$(5x + 2) - (4x + 2) = x \in \langle x \rangle.$$

**Definição 1.3.15.** O *anel quociente polinomial*  $\mathbb{K}[X]/I$  é então definido como o conjunto de classes de equivalência de  $\mathbb{K}[X]$  com respeito a esta relação.

**Exemplo 1.3.16.** No anel  $\mathbb{Q}[x]$  se tomamos o ideal  $\langle x^2 + 1 \rangle$ , o anel quociente  $\mathbb{Q}[x]/\langle x^2 + 1 \rangle$  é isomorfo ao corpo  $\mathbb{Q}(i)$ .

**Definição 1.3.17.** O *conjunto algébrico* definido por um ideal  $I$  de  $\mathbb{K}[X]$  é o conjunto  $\mathcal{V}(I)$  de zeros comuns a todos os polinômios em  $I$ , ou seja,

$$\mathcal{V}(I) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \mid p(a_1, \dots, a_n) = 0, \text{ para todo } p \in I\}. \quad (1.14)$$

**Definição 1.3.18.** O *radical* do ideal  $I$  em  $\mathbb{K}[X]$  é a coleção de polinômios  $\mathbb{K}[X]$  tais que existe uma potência deles em  $I$ , isto é, o conjunto  $\{p \in \mathbb{K}[X] : p^m \in I \text{ para algum } m \text{ inteiro positivo com } m \geq 1\}$ .

**Exemplo 1.3.19.** No anel  $\mathbb{Z}_7[x]$  o radical do ideal  $\langle x^2 \rangle$  é  $\langle x \rangle$ .

**Definição 1.3.20.** Seja  $\prec$  uma ordem de termo monomial no conjunto de monômios em  $\mathbb{K}[X]$ . O maior monômio de um polinômio  $f$  em  $I$  com respeito a  $\prec$  é seu *monômio principal*  $LM(f)$ , cujo coeficiente em  $f$  é o *coeficiente principal*  $LC(f)$ . O *termo principal* de  $f$  é o produto  $LT(f) = LC(f) \cdot LM(f)$ .

**Exemplo 1.3.21.** Seja  $p = 2x^4 + 3x^2 + 5$ , então  $LC(p) = 2$ ,  $LM(p) = x^4$  com a ordem lexicográfica.

**Definição 1.3.22.** O ideal gerado por todos os termos principais dos elementos de  $I$ ,  $\langle LT(I) \rangle$ , é definido como o *ideal inicial*  $I_{\prec}$ .

**Observação 1.3.23.** Uma observação relevante que faz Falcón em [32] é que, independentemente da ordem do termo monomial, se o ideal  $I$  é zero dimensional, então a dimensão de Krull do anel quociente polinomial  $\mathbb{K}[X]/I$  coincide com o número de monômios padrão

de  $I$ . Este número é sempre maior ou igual ao número de pontos de  $\mathcal{V}(I)$ . A igualdade se mantém sempre que  $I$  seja radical. A dimensão de Krull de  $\mathbb{K}[X]/I$  e os pontos de  $\mathcal{V}(I)$  podem ser completamente determinados por meio das bases de Gröbner.

**Definição 1.3.24.** Uma base de *Gröbner* de um ideal  $I$  de  $\mathbb{K}[X]$ , com respeito a  $\prec$ , é qualquer subconjunto  $G = \{g_1, \dots, g_s\}$  de polinômios em  $I$  cujos termos principais geram o ideal inicial  $I_{\prec}$ , isto é, se

$$\langle LT(g_1), \dots, LT(g_s) \rangle = \langle LT(I) \rangle.$$

**Exemplo 1.3.25.** No anel de polinômios  $\mathbb{Q}[x]$  tomamos o ideal  $I = \langle x \rangle$ . Logo uma base de Gröbner com a ordem lexicográfica é  $\{2x, x^2 + 5x\}$ , já que  $LT(2x) = 2x$  e  $LT(x^2 + 5x) = x^2$ , assim

$$\langle LT(2x), LT(x^2 + 5x) \rangle = \langle 2x, x^2 \rangle = \langle x \rangle = \langle LT(I) \rangle.$$

Agora vemos um exemplo do livro [23] nas páginas 75 e 77 de um conjunto que não é uma base de Gröbner.

**Exemplo 1.3.26.** Seja  $I = \langle p_1, p_2 \rangle \subseteq \mathbb{K}[x, y]$ , com  $p_1 = x^3 - 2xy$  e  $p_2 = x^2y - 2y^2 + x$ . Usando a ordem lexicográfica graduada nos monômios em  $\mathbb{K}[x, y]$ , temos  $LT(p_1) = x^3$  e  $LT(p_2) = x^2y$ . Logo

$$x \cdot p_2 - y \cdot p_1 = x(x^2y - 2y^2 + x) - y(x^3 - 2xy) = x^3y - 2xy^2 + x^2 - x^3y + 2xy^2 = x^2.$$

Portanto,  $x^2 \in I$  e  $LT(x^2) \in \langle LT(I) \rangle$ , mas  $x^2$  não é divisível por  $LT(p_1)$  nem por  $LT(p_2)$ , por isto  $x^2 \notin \langle LT(p_1), LT(p_2) \rangle$ , ou seja,  $\langle LT(p_1), LT(p_2) \rangle \neq \langle LT(I) \rangle$ . Assim  $\{p_1, p_2\}$  não é uma base de Gröbner, isto porque a Definição 1.3.24 é equivalente a provar que o termo principal de qualquer elemento diferente de zero do ideal  $I$  é divisível por  $x$  ou  $y$ .

**Definição 1.3.27.** Uma base de Gröbner é *reduzida* se todos os seus polinômios forem mônicos e nenhum monômio de um polinômio em  $G$  da Definição 1.3.24 é gerado pelos termos principais dos outros polinômios da base.

**Exemplo 1.3.28.** No anel de polinômios  $\mathbb{Q}[x]$ , tomamos o ideal  $I = \langle x \rangle$  no qual todos os polinômios tem termo independente igual a zero. Uma base de Gröbner reduzida com

a ordem lexicográfica para este ideal é  $\{x, x^2\}$ , já que  $LT(x) = x$  e  $LT(x^2) = x^2$ . Assim,

$$\langle LT(x^3), LT(x^2) \rangle = \langle x, x^2 \rangle = \langle x \rangle = \langle LT(I) \rangle.$$

Falcón na sua tese de doutorado [32] disse que o cálculo de uma base de Gröbner reduzida é sempre extremamente sensível ao número de variáveis [40], [41], [45]. Particularmente, com relação ao tempo de complexidade necessário para calcular uma base de Gröbner reduzida sobre um corpo finito  $\mathbb{F}_q$ , com  $q$  uma potência de um primo, encontramos o seguinte resultado o qual é provado por Gao em [34] na Proposição 4.1.1.

**Teorema 1.3.29.** *O tempo de complexidade exigido pelo algoritmo de Buchberger para calcular as bases de Gröbner reduzidas de um ideal  $\langle p_1, \dots, p_m, p_1^q - p_1, \dots, p_m^q - p_m \rangle$  definido sobre um anel polinomial  $\mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_n]$ , com  $p_1, \dots, p_m$  polinômios dados na forma esparsa, e que têm o comprimento mais longo  $l$ , é  $q^{O(n)} + O(m^2l)$ . Aqui, esparsidade se refere ao número de monômios.*

### 1.3.2 Enumeração de álgebras

Com ajuda da teoria da Subseção 1.3.1, podemos estabelecer a enumeração de álgebras  $n$ -dimensionais sobre um corpo  $\mathbb{K}$ , a distribuição em classes de isotopismo e isomorfismo e assim estudar o problema de analisar álgebras  $n$ -dimensionais proposto em [32].

Sejam  $\mathfrak{A}$  uma álgebra  $n$ -dimensional sobre o corpo  $\mathbb{K}$  com base  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . Denotamos por  $\mathfrak{C}_n$  o conjunto das constantes de estrutura desta álgebra, isto é

$$\mathfrak{C}_n = \{\mathfrak{c}_{ij}^k \mid i, j, k \leq n\}. \quad (1.15)$$

Podemos definir  $\mathbb{K}[\mathfrak{C}_n]$  como o conjunto dos polinômios nas indeterminadas  $\mathfrak{c}_{ij}^k$ .

**Observação 1.3.30.** Uma estrutura algébrica que é relacionada a qualquer ideal  $I$  de  $\mathbb{K}[\mathfrak{C}_n]$  é então relacionada a um conjunto de álgebras  $n$ -dimensionais sobre  $\mathbb{K}$  cujas constantes de estrutura constituem zeros de qualquer polinômio desse ideal  $I$ . Cada zero  $(c_{11}^1, \dots, c_{nn}^n) \in \mathcal{V}(I)$  constitui as constantes de estrutura de uma álgebra  $n$ -dimensional, com base  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , de modo que  $e_i e_j = c_{ij}^k e_k$ , para todos  $i, j \leq n$ . Por isto, ideais distintos do anel polinomial  $\mathbb{K}[\mathfrak{C}_n]$  podem ser descritos para determinar o conjunto de

álgebras  $n$ -dimensionais com uma determinada propriedade.

Um dos nossos objetivos é examinar a teoria apresentada em corpos finitos. O cálculo da base de Gröbner reduzida de cada um desses ideais permite que Falcón em [32] enumere explicitamente as álgebras magmas parciais em determinados corpos finitos, com a ajuda dos algoritmos que apresentamos nesta seção.

**Teorema 1.3.31.** *O conjunto de álgebras magmas parciais  $n$ -dimensionais sobre o corpo finito  $\mathbb{F}_q$ , com  $q$  uma potência de um número primo, é identificado com o conjunto algébrico definido pelo seguinte ideal de  $\mathbb{F}_q[\mathfrak{C}_n]$*

$$I = \langle \mathfrak{c}_{ij}^k \mathfrak{c}_{ij}^{k'} \mid 1 \leq i, j, k, k' \leq n; k < k', i, j, k, k' \in \{1, \dots, n\} \rangle.$$

Além disso,

$$|\mathcal{V}(I)| = \dim_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_q[\mathfrak{C}_n]/I).$$

Como os cálculos da base de Gröbner são feitos por meio de algoritmos num programa computacional, é importante ter uma noção de quanto tempo levaria o cálculo, por isto temos o seguinte resultado.

**Corolário 1.3.32.** *Seja  $\mathbb{F}_q$  um corpo finito, com  $q$  uma potência de um primo. A complexidade de tempo exigida pelo algoritmo de Buchberger para calcular a base de Gröbner reduzida do ideal no Teorema 1.3.31 é  $q^{O(n^3)} + O(n^8)$ .*

No desenvolvimento desta dissertação, os cálculos estudados de bases de Gröbner reduzidas, conjuntos algébricos e dimensões de Krull são feitos em [32] por meio do sistema de álgebra computacional aberto para computações polinomiais SINGULAR [26].

A correção e finalização dos cálculos são baseados naqueles do algoritmo *slimgb* [7] para o cálculo de bases de Gröbner reduzidas e, portanto, naquelas do algoritmo de Buchberger [9]. Particularmente, a enumeração de tipos distintos de álgebras  $n$ -dimensionais sobre um determinado corpo finito é implementada no procedimento *ALGEBRA*, cujo pseudocódigo é descrito no Algoritmo 1. Expomos os algoritmos usados na tese de Falcón [32] para entender melhor como ele faz alguns resultados.

O seguinte algoritmo enumera álgebras de uma determinada dimensão  $n$  sobre um corpo

finito de uma dada ordem  $q$  e, algumas constantes de estrutura. Com ajuda desta informação o algoritmo dá como resultado o número de possíveis álgebras.

---

**Algoritmo 1** Enumeração de álgebras finito-dimensionais de um certo tipo de estruturas constantes dadas.

---

```

1:  procedure ALGEBRA( $n, q, C, alg, opt$ )
2:    O ideal base  $I$  é inicializado dependendo no argumento  $alg$ 
3:    for  $i \leftarrow 1, size(C)$  do
4:       $I = I + (\mathfrak{c}_{C_{i1}C_{i2}}^{C_{i3}} - C_{i4})$ ;
5:    end for
6:     $I = slimgb(I)$ ;
7:    if  $opt = 1$  then
8:      return  $|\mathcal{V}(I)|$ 
9:    else
10:     if  $opt = 2$  then
11:       return  $A \in \mathcal{V}(I)$ 
12:     else
13:       if  $opt = 3$  then
14:         return  $\mathcal{V}(I)$ 
15:       end if
16:     end if
17:   end if
18: end procedure

```

---

Este procedimento *ALGEBRA* recebe como entrada

- A dimensão  $n$  das álgebras necessárias.
- A ordem  $q$  do corpo finito.
- Uma lista  $C$  formada pelas quádruplas  $(i, j, k, c_{ij}^k)$  que indicam algumas constantes de estrutura diferentes de zero que devem conter as álgebras necessárias.
- Uma lista  $alg$  de inteiros positivos que nos permite selecionar o tipo de álgebra no qual estamos interessados. Particularmente, os tipos implementados são:

- Álgebras magmas parciais.
  - Álgebras de Lie.
  - Álgebras de evolução.
- Uma opção de número inteiro positivo que nos permite seleccionar a saída que gera o procedimento. Particularmente, o procedimento indica:
    - o número de álgebras que satisfazem as condições impostas, sempre que  $opt = 1$ .
    - as constantes de estrutura de uma álgebra verificando as condições impostas, sempre que  $opt = 2$ .
    - a lista completa de álgebras que comprovam as condições impostas, sempre que  $opt = 3$ .

Com o fim de verificar a eficiência do procedimento *ALGEBRA* e do Algoritmo 1, Falcón trata o cálculo do número de álgebras magmas parciais  $n$ -dimensionais sobre o corpo finito  $\mathbb{F}_q$ . A Tabela 1.1 expõe o tempo de execução e o uso de memória necessários para lidar com pedidos pequenos. O objetivo principal deste estudo de álgebras não é o cálculo de todas essas álgebras, mas apenas sua distribuição em classes de isomorfismo e isotopismo.

$n$	$q$	Número de álgebras magmas parciais	Tempo de execução	Memória usada
2	2	81	0 s	0 MB
	3	625	0 s	0 MB
	⋮	⋮	⋮	⋮
	101	1632240801	0 s	0 MB
3	2	262144	0 s	0 MB
	3	40353607	0 s	0 MB
	⋮	⋮	⋮	⋮
	101	20281424743202871242701	0 s	0 MB
4	2	152587890625	823 s	0 MB
	3	–	> 2 horas	–

Tabela 1.1: Calculando álgebras magmas parciais  $n$ -dimensionais sobre o corpo finito  $\mathbb{F}_q$ .



### 1.3.3 Classificação de álgebras

Como o enfoque deste estudo é a distribuição das álgebras sobre corpos finitos em classes de isomorfismo e isotopismo, fazemos uso da geometria algébrica computacional. Para este fim, definimos os seguintes três conjuntos de variáveis

$$\mathfrak{F}_n = \{f_{ij} | i, j \leq n\},$$

$$\mathfrak{G}_n = \{g_{ij} | i, j \leq n\},$$

$$\mathfrak{H}_n = \{h_{ij} | i, j \leq n\}.$$

Estes três conjuntos contém as constantes das entradas nas matrizes não singulares relacionadas a um possível isotopismo entre álgebras bidimensionais sobre  $\mathbb{K}$  das respectivas constantes de estrutura  $c_{ij}^k$  e  $c'_{ij}^k$ . Especificamente, da mesma forma que (1.6), temos

$$\sum_{k,l=1}^n f_{ik} g_{jl} c_{kl}^m = \sum_{s=1}^n c_{ij}^s h_{sm} \quad \text{para todos } i, j, m \leq n. \quad (1.16)$$

Os seguintes resultados seguem de forma semelhante ao Teorema 1.3.31 e, constituem os fundamentos na distribuição de álgebras de dimensão finita sobre corpos finitos em classes de isotopismo e isomorfismo.

**Teorema 1.3.33.** *O grupo de isomorfismos entre duas álgebras  $n$ -dimensionais  $A$  e  $A'$  sobre um corpo finito  $\mathbb{F}_q$ , com  $q$  uma potência de um primo, com base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  para as duas e respectivas constantes de estrutura  $c_{ij}^k$  e  $c'_{ij}^k$ , é identificado com o conjunto algébrico definido pelo seguinte ideal de  $\mathbb{F}_q[\mathfrak{F}_n]$*

$$I_{A,A'}^{Isom} = \left\langle \sum_{k,l=1}^n f_{ik} f_{jl} c_{kl}^m - \sum_{s=1}^n c_{ij}^s f_{sm} \mid i, j, m \leq n \right\rangle + \langle \det(F)^{q-1} - 1 \rangle,$$

com  $F$  denotando a matriz de entradas  $\{f_{ij} | i, j \leq n\}$ . Além disso,

$$|\mathcal{V}(I_{A,A'}^{Isom})| = \dim_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_q[\mathfrak{F}_n]/I_{A,A'}^{Isom}).$$

Como no Teorema 1.3.31, existe um corolário sobre o tempo do algoritmo para calcular a base de Gröbner reduzida do ideal no Teorema 1.3.33.

**Corolário 1.3.34.** *O tempo de complexidade exigido pelo algoritmo de Buchberger para calcular a base de Gröbner reduzida do ideal no Teorema 1.3.33 é  $q^{O(n^2)} + O(n^6n!)$ .*

No Teorema 1.3.33 enunciamos o resultado para um ideal baseado nos isomorfismos entre as álgebras  $A$  e  $A'$ , agora vemos um resultado parecido para isotopismos.

**Teorema 1.3.35.** *O grupo de isotopismos entre as duas álgebras do Teorema 1.3.33 é identificado com o conjunto algébrico definido pelo seguinte ideal de  $\mathbb{F}_q[\mathfrak{F}_n \cup \mathfrak{G}_n \cup \mathfrak{H}_n]$*

$$I_{A,A'}^{Isot} = \langle \sum_{k,l=1}^n f_{ik} g_{jl} c_{kl}^m - \sum_{s=1}^n c_{ij}^s h_{sm} \mid i, j, m \leq n \rangle + \langle \det(M)^{q-1} - 1 \mid M \in \{F, G, H\} \rangle.$$

Aqui  $F$ ,  $G$  e  $H$  denotam, respectivamente, as três matrizes de entradas  $\{f_{ij} \mid i, j \leq n\}$ ,  $\{g_{ij} \mid i, j \leq n\}$  e  $\{h_{ij} \mid i, j \leq n\}$ . Além disso,

$$|\mathcal{V}(I_{A,A'}^{Isot})| = \dim_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}_q[\mathfrak{F}_n \cup \mathfrak{G}_n \cup \mathfrak{H}_n] \setminus I_{A,A'}^{Isot}).$$

Também é necessário saber o tempo que leva para fazer o cálculo da base de Gröbner do ideal no Teorema 1.3.35.

**Corolário 1.3.36.** *O tempo de complexidade exigido pelo algoritmo de Buchberger para calcular a base de Gröbner reduzida do ideal no Teorema 1.3.35 é  $q^{O(3n^2)} + O(n^6n!)$ .*

Usamos o Teorema 1.3.33 e o Teorema 1.3.35 no procedimento *isoAlg*, que foi incluído na biblioteca *isotopism.lib* (<http://personales.us.es/raufalgalan/LS/isotopism.lib>). Obtemos como resultado o número de isomorfismos ou de isotopismos, dependendo do teorema, entre duas álgebras  $n$ -dimensionais  $A$  e  $A'$  dadas sobre o corpo finito  $\mathbb{F}_q$ , com  $q$  uma potência de um número primo. Este procedimento recebe como entradas:

- A dimensão  $n$  de ambas álgebras.
- A ordem  $q$  do corpo finito.
- Uma lista  $C1$  formada por  $n$ -uplas  $(i, j, k, c_{ij}^k)$  que indica as estruturas contantes diferentes de zero da álgebra  $A$ .
- Uma lista  $C2$  formada por  $n$ -uplas  $(i, j, k, c'_{ij}^k)$  que indica as estruturas contantes diferentes de zero da álgebra  $A'$ .

- Um inteiro positivo  $opt \leq 2$  que nos permite usar o ideal  $I_{A,A'}^{Isot}$  se  $opt = 1$ , ou o ideal  $I_{A,A'}^{Isom}$  se  $opt = 2$ .

Falcón faz uso do procedimento *isoAlg* para determinar a distribuição de anéis de quase-grupos parciais bidimensionais sobre o corpo finito  $\mathbb{F}_2$  em classes de isotopismo e isomorfismo.

**Exemplo 1.3.37.** Nos concentramos em particular, no par de anéis parciais  $B$  e  $B'$  de quase grupos que estão respectivamente relacionados aos quadrados latinos parciais

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array} .$$

Esses dois quadrados latinos parciais não são isotópicos porque os isotopismos entre quadrados latinos preservam o número de células preenchidas. No entanto, seus anéis de quase-grupos parciais relacionados sobre  $\mathbb{F}_2$ , com respectivas bases  $\{e_1, e_2\}$  e  $\{e'_1, e'_2\}$  e que são respectivamente descritos pelos produtos

$$\begin{cases} e_1 e_1 = e_1, \\ e_1 e_2 = e_2 = e_2 e_1 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} e'_1 e'_1 = e'_1 = e'_2 e'_2, \\ e'_1 e'_2 = e'_2 = e'_2 e'_1 \end{cases}$$

são isotópicos (um resultado parecido ao Exemplo 1.2.16). Para entender isso, Falcón usa o procedimento *isoAlg* com os parâmetros

$$\begin{aligned} n = 2, \quad q = 2, \quad C1 = \{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 2, 1), (2, 1, 2, 1)\}, \\ C2 = \{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 2, 1), (2, 1, 2, 1), (2, 2, 1, 1)\}, \quad opt = 1. \end{aligned}$$

O sistema é capaz de calcular num tempo de 0 segundos a existência de quatro isotopismos entre os quais encontra dois anéis de quase-grupos parciais. Um desses isotopismos é, por exemplo, o isomorfismo  $f$  relacionado à matriz  $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , Este isomorfismo é definido

como:  $f(e_1) = e'_1$  e  $f(e_2) = e'_1 + e'_2$ . Se é considerado o parâmetro  $opt = 2$ , o procedimento *isoAlg* nos garante a existência de  $f$  como o único isomorfismo possível.

Pode acontecer que o tempo de execução necessário para os cálculos envolvidos no Teorema 1.3.33 e no Teorema 1.3.35 seja muito grande. Nesse caso Falcón diz que é recomendável eliminar os geradores do ideal correspondente que se referem aos determinantes das matrizes  $F$ ,  $G$  e  $H$ . Com isso se pode reduzir o tempo de complexidade para  $q^{O(n^2)} + O(n^8)$  e  $q^{O(3n^2)} + O(n^8)$ , respectivamente, e se obtém informações suficientes para a análise dos diferentes cálculos nas álgebras em que se definem os possíveis isomorfismos e isotopismos.

**Exemplo 1.3.38.** Fazendo uso do procedimento *isoAlg*, Falcón pode garantir que, qualquer que seja o corpo de base, a base de Gröbner reduzida do ideal no Teorema 1.3.35 relacionada ao grupo de isotopismo entre os dois anéis de quase-grupos parciais do Exemplo 1.3.37 se mantém. Em particular, que as constantes de estrutura são

$$\begin{cases} 2\mathfrak{h}_{22}^3 = 0, \\ \mathfrak{h}_{21}^2 + \mathfrak{h}_{22}^2 = 0. \end{cases}$$

Agora, se a característica do corpo base não é dois, então  $\mathfrak{h}_{21} = \mathfrak{h}_{22} = 0$ . Isto significa que  $H$  deve ser singular e, portanto, esses dois anéis de quase-grupos parciais não são isotópicos. Caso contrário, quando a característica do corpo é dois, a transformação linear  $f$  indicada no Exemplo 1.3.37 constitui um isomorfismo entre os dois anéis.

Fazemos agora uma distribuição dos anéis de quase-grupo por meio de isotopismos.

**Teorema 1.3.39.** *O conjunto de anéis de quase-grupos parciais não abelianos bidimensionais é distribuído em seis classes de isotopismo.*

**Demonstração:** Usando um raciocínio semelhante ao exposto no Exemplo 1.3.38, isto é, fazendo uso do procedimento *isoAlg*, podemos expor este resultado. Em particular, se a característica do corpo não é dois, então as seis classes de isotopismo em consideração são aquelas relacionadas aos seguintes quadrados latinos parciais de ordem 2:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array} .$$

Caso contrário, se a característica do corpo é dois, então as classes de isotopismo relacionadas aos dois últimos quadrados latinos parciais coincidem. Neste caso, o seguinte quadrado latino parcial corresponde à sexta classe de isotopismo

1	
	2

Se a característica do corpo base não é dois, o anel do quase-grupo parcial relacionado a este quadrado latino parcial é isotópico ao relacionado a um quadrado latino da lista anterior. ■

---

**Algoritmo 2** Cálculo das classes de isomorfismo (isotopismo, respectivamente) de um conjunto de álgebras de dimensão finita sobre um corpo finito.

---

**Requerer:** Um conjunto  $S$  de álgebras  $n$ -dimensionais sobre um corpo finito

**Garantir:**  $C$ , o conjunto de classes de isomorfismos(isotopismos respectivamente) de  $S$

```

1:   $C = \emptyset$ .
2:  while  $S \neq \emptyset$  do
3:      Take  $A \in S$ .
4:       $S := S \setminus \{A\}$ .
5:       $C := C \cup \{A\}$ .
6:  for  $A' \in S$  do;
7:      if  $|\mathcal{V}(I_{A,A'}^{Som})| > 0$  ( $|\mathcal{V}(I_{A,A'}^{Isot})| > 0$ , respectivamente) then
8:           $S := S \setminus \{A'\}$ .
9:      end if
10: end for
11: end while
12: return  $C$ .
```

---

Os Teoremas 1.3.33 e 1.3.35 também podem ser usados para determinar a distribuição em classes de isotopismo e isomorfismo de um determinado conjunto de álgebras de dimensão finita sobre um corpo finito. O Algoritmo 2 nos ajuda a fazer isso.

**Exemplo 1.3.40.** É conhecido por [33] que existem 2, 8 e 81 classes distintas de isotopismo de quadrados latinos parciais das respectivas ordens 1 a 3. Falcón usa o procedimento *isoAlg* para determinar em particular aquelas classes distintas de isotopismo que dão origem a anéis de quase-grupos parciais isotópicos sobre o corpo finito  $\mathbb{F}_2$ . O tempo de execução foi de 761 segundos. Especificamente, Falcón em [32] obteve que existem 2, 7 e 72 classes distintas de isotopismo de anéis de quase-grupos parciais de respectivas dimensões 1 a 3. A implementação do Algoritmo 2 nos permite determinar aquelas classes de isotopismo de quadrados latinos parciais que dão origem à mesma classe de isotopismo de anéis parciais de quasigrupo. A ordem 1 é imediata. A única classe de isotopismo que desaparece dos quadrados latinos parciais de ordem 2 para anéis de quase-grupos parciais bidimensionais é a exposta no Exemplo 1.3.37. Finalmente, para a ordem 3, os seguintes nove pares de quadrados latinos parciais não isotópicos dão origem a anéis de quase-grupos parciais isotópicos.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \\ \hline 2 & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \text{ e } \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \\ \hline 2 & 1 & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \\ \hline 2 & & \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} \text{ e } \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \\ \hline 2 & 1 & \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \\ \hline 2 & & \\ \hline & & 3 \\ \hline \end{array} \text{ e } \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \\ \hline 2 & 1 & \\ \hline & & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \\ \hline & 1 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \text{ e } \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \\ \hline 2 & 1 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 3 \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \text{ e } \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 1 & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \\ \hline & 1 & \\ \hline 3 & & 2 \\ \hline \end{array} \text{ e } \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \\ \hline 2 & 1 & \\ \hline 3 & & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \\ \hline 2 & & 3 \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array} \text{ e } \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline & & 1 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 3 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \text{ e } \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 3 \\ \hline 3 & & 2 \\ \hline \end{array} \text{ e } \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 1 & \\ \hline 3 & & 1 \\ \hline \end{array}$$

Na prática, é interessante introduzir alguns invariantes de isomorfismo e isotopismo de álgebras que nos permitam diminuir o número de bases Gröbner reduzidas a serem calculadas no desenvolvimento do Algoritmo 2. Para este fim, descrevemos no próximo capítulo um par de grafos, cujos invariantes de isomorfismo dão origem a isotopismo e invariantes de isomorfismo de álgebras.

## Capítulo 2

# Isotopismos de álgebras de Lie filiformes

Fazemos uso da seção 1.3 sobre a Geometria Algébrica Computacional e da Teoria de Grafos para estudar e analisar os resultados em [32] sobre a distribuição de álgebras de dimensão finita em classes de isotopismo. Neste capítulo tratamos em particular os isotopismos das álgebras de Lie em geral e, mais especificamente, as álgebras de Lie filiformes. Os elementos das bases das diferentes álgebras são denotados de modo igual daqui em diante, a fim de não sobrecarregar a notação.

### 2.1 Isotopismos de álgebras de Lie

Nas seções anteriores identificamos algumas das estruturas invariantes nas álgebras por meio de isotopismos. Nesta seção expomos alguns conceitos básicos e resultados sobre isotopismos de álgebras de Lie. Particularmente, analisamos algumas estruturas invariantes por meio de isotopismos, as quais desempenham um papel importante na distribuição de álgebras de Lie filiformes. Para mais detalhes sobre os fundamentos das álgebras de Lie, consultamos a monografia de Varadarajan [58] e, em particular, usamos o livro de San Martín [53].

**Definição 2.1.1.** Uma *Álgebra de Lie* consiste de um espaço vetorial  $\mathfrak{g}$  munido de um produto (colchete ou comutador)

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

com as propriedades:

- i)  $[\cdot, \cdot]$  é bilinear.
- ii)  $[\cdot, \cdot]$  é anti-simétrico, isto é,  $[X, X] = 0$ , para todo  $X \in \mathfrak{g}$  (o que isto implica é  $[X, Y] = -[Y, X]$ , para todos  $X, Y \in \mathfrak{g}$ ). Essas duas condições são equivalentes se o corpo de escalares não é de característica dois.
- iii)  $[\cdot, \cdot]$  satisfaz a *identidade de Jacobi*, isto é, para todos  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ ,

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0.$$

Esta igualdade pode ser reescrita alternativamente de uma das duas formas:

- a)  $[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$ ;
- b)  $[[X, Y], Z] = [[X, Z], Y] + [X, [Y, Z]]$ .

Outra forma de escrever a definição de álgebra de Lie é com a notação de produto.

**Definição 2.1.2.** Uma álgebra  $A$  é considerada uma *álgebra de Lie* se

- i) O produto em  $A$  é anticommutativo, ou seja,  $uv = -vu$ , para todos  $u, v \in A$ .
- ii) O produto em  $A$  cumpre a chamada identidade Jacobi

$$J(u, v, w) = u(vw) + v(wu) + w(uv) = 0, \text{ para todos } u, v, w \in A. \quad (2.1)$$

**Exemplo 2.1.3.** Qualquer espaço vetorial dotado de um colchete de Lie identicamente nulo é uma álgebra de Lie. O espaço euclidiano tridimensional  $\mathbb{R}^3$  com o colchete de Lie dado pelo produto vetorial é uma álgebra de Lie tridimensional.

**Definição 2.1.4.** Duas álgebras de Lie  $\mathfrak{h}$  e  $\mathfrak{g}$  são ditas *isotópicas* se existem três transformações lineares não singulares  $f, g$  e  $h$  de  $\mathfrak{g}$  em  $\mathfrak{h}$  tais que

$$[f(u), g(v)] = h([u, v]), \text{ para todos } u, v \in \mathfrak{g}.$$

**Observação 2.1.5.** A anticomutatividade implica que se  $f = g$ , a terna  $(f, f, h)$  é um *isotopismo* entre as álgebras  $\mathfrak{h}$  e  $\mathfrak{g}$ .



No Capítulo 3 estudamos alguns resultados sobre o centro de uma álgebra de Lie, por isso lembramos a definição do centro.

**Definição 2.1.6.** O *centralizador* de um subconjunto  $S$  de uma álgebra de Lie  $A$  é o subespaço vetorial

$$Cen_A(S) = \{u \in A \mid uv = 0, \text{ para todo } v \in S\} \subset A. \quad (2.2)$$

**Definição 2.1.7.** O *centro* da álgebra de Lie  $A$  é definido como o centralizador de  $A$  em  $A$ , isto é,

$$Z(A) = Cen_A(A). \quad (2.3)$$

**Observação 2.1.8.** Particularmente, temos que uma álgebra de Lie  $A$  é abeliana se, e somente se,  $Z(A) = A$ . Observamos que o conceito de centralizador de uma álgebra de Lie coincide com o conceito de anulador de uma álgebra. É muito útil para as propriedades que provamos no Capítulo 3.

Da mesma forma que o Lema 1.2.7 e a Proposição 1.2.8, os seguintes resultados valem, tendo em conta a Observação 2.1.8.

**Lema 2.1.9.** *Sejam  $(f, g, h)$  um isotopismo entre duas álgebras de Lie  $A$  e  $A'$ , e  $S$  um subconjunto de  $A$ . Então*

- a)  $f(Cen_A(S)) = Cen_{A'}(g(S))$ .
- b)  $g(Cen_A(S)) = Cen_{A'}(f(S))$ .
- c)  $\dim(Cen_A(S)) = \dim(Cen_{A'}(f(S))) = \dim(Cen_{A'}(g(S)))$ .

**Demonstração:** Por definição  $Cen_A(S) = Ann_A(S)$  e, do Lema 1.2.7, obtemos

- a)  $f(Cen_A(S)) = f(Ann_A(S)) = Ann_{A'}(g(S)) = Cen_{A'}(g(S))$ .
- b)  $g(Cen_A(S)) = g(Ann_A(S)) = Ann_{A'}(f(S)) = Cen_{A'}(f(S))$ .
- c)  $\dim(Cen_A(S)) = \dim(Cen_{A'}(f(S))) = \dim(Cen_{A'}(g(S)))$  isto de a) e b) já que  $f$  e  $g$  são bijetoras. ■

Tendo em conta a teoria exposta de isotopismos entre álgebras de Lie, provamos que o centralizador é invariante por meio de isotopismos.

**Proposição 2.1.10.** *Sejam  $(f, g, h)$  um isotopismo entre duas álgebras de Lie  $A$  e  $A'$ , e  $S$  um subconjunto de  $A$ . Então*

$$a) f(\text{Cen}_A(S)) = \text{Cen}_{A'}(f(S)).$$

$$b) g(\text{Cen}_A(S)) = \text{Cen}_{A'}(g(S)).$$

**Demonstração:** Pela Observação 2.1.5 e do Lema 2.1.9 obtemos

$$a) f(\text{Cen}_A(S)) = \text{Cen}_{A'}(g(S)) = \text{Cen}_{A'}(f(S))$$

$$b) g(\text{Cen}_A(S)) = \text{Cen}_{A'}(f(S)) = \text{Cen}_{A'}(g(S)). \quad \blacksquare$$

Além do centralizador ser invariante sabemos também que o centro é invariante por isotopismos.

**Proposição 2.1.11.** *Seja  $(f, g, h)$  um isotopismo entre duas álgebras de Lie  $A$  e  $A'$ . Então  $f(Z(A)) = Z(A')$  e  $\dim(Z(A)) = \dim(Z(A'))$ .*

**Demonstração:** Da Proposição 1.2.8 e de (2.3), temos

$$f(Z(A)) = f(\text{Cen}_A(A)) = f(\text{Ann}_A(A)) = \text{Ann}_{A'}(A) = \text{Cen}_{A'}(A') = Z(A').$$

■

Com estes resultados que acabamos de ver podemos estudar duas novas séries de invariantes por isotopismos.

**Definição 2.1.12.** *Seja  $n$  a dimensão da álgebra de Lie  $A$ . Para cada inteiro positivo  $m \leq n$ , definimos*

$$d_m(A) := \min\{\dim(\text{Cen}_A(S)) \mid S \text{ é um subespaço vetorial } m\text{-dimensional de } A\}.$$

$$D_m(A) := \max\{\dim(\text{Cen}_A(S)) \mid S \text{ é um subespaço vetorial } m\text{-dimensional de } A\}.$$

Provamos na seguinte proposição que ambos os valores são preservados por isotopismos, isto é que são invariantes.

**Proposição 2.1.13.** *Sejam  $A$  e  $A'$  duas álgebras de Lie  $n$ -dimensionais isotópicas e seja  $m \leq n$  um número inteiro positivo. Então,  $d_m(A) = d_m(A')$  e  $D_m(A) = D_m(A')$ .*

**Demonstração:** Do Lema 2.1.9, temos

$$\dim(\text{Cen}_A(S)) = \dim(\text{Cen}_{A'}(f(S))) = \dim(\text{Cen}_{A'}(g(S))).$$

Logo

$$\begin{aligned} d_m(A) &= \min\{\dim(\text{Cen}_A(S)) \mid S \text{ é um subespaço vetorial } m\text{-dimensional de } A\} \\ &= \min\{\dim(\text{Cen}_{A'}(f(S))) \mid f(S) \text{ é um subespaço vetorial } m\text{-dimensional de } A\} \\ &= d_m(A'). \end{aligned}$$

Portanto  $\dim(f(S)) = \dim(S)$  porque  $f$  é bijetora. Agora

$$\begin{aligned} D_m(A) &= \max\{\dim(\text{Cen}_A(S)) \mid S \text{ é um subespaço vetorial } m\text{-dimensional de } A\} \\ &= \max\{\dim(\text{Cen}_{A'}(f(S))) \mid f(S) \text{ é um subespaço vetorial } m\text{-dimensional de } A\} \\ &= D_m(A'). \end{aligned}$$

Assim  $\dim(f(S)) = \dim(S)$  porque,  $f$  é bijetora. ■

## 2.2 Funtores fiéis entre álgebras e grafos

Esta seção tem como objetivo principal ajudar na redução das bases de Gröbner a serem calculadas pelo Algoritmo 2 e, com isto, facilitar os cálculos. Ao longo da Teoria da Computação encontramos muito o uso de grafos no tratamento de dados e este caso não é uma exceção.

A Teoria dos Grafos é uma boa ferramenta para lidar com distintos aspectos no estudo de álgebras, essencialmente naqueles que são de coleta de dados. Assim, como um primeiro exemplo, podemos mencionar os chamados diagramas de Dynkin para álgebras de Lie de dimensão finita simples [15], [38]. Mais recentemente, Carriazo em [14] propôs o uso de dígrafos ponderados que podem ser identificados com certas famílias de álgebras de Lie (ver também [20]). Também existem alguns resultados e estudos nos quais as álgebras de Lie estão associadas a tipos distintos de grafos. Como outro exemplo mais associado ao que pretendemos estudar, Dani e Mainkar em [25] definem uma classe de álgebras de Lie nilpotentes relacionadas a um tipo de grafo para o qual resultou que duas dessas álgebras

de Lie são isomorfas se, e somente se, seus grafos associados são equivalentes [47]. A Teoria dos Grafos também é usada para classificar outros tipos de álgebras como álgebras finitamente geradas [21] ou álgebras de evolução [28], [50], [51].

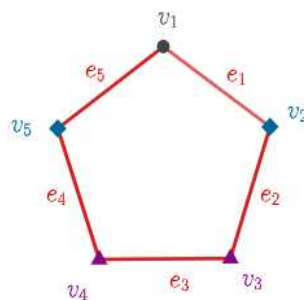
No entanto, até onde sabemos, o problema de identificar um funtor fiel que relaciona a categoria de álgebras com a de grafos permanece aberto. Ambas categorias são referidas em relação aos seus isomorfismos correspondentes entre álgebras e grafos.

Com base na proposta de McKay, Meynert, e Myrvold em [48] para identificar isomorfismos de quadrados latinos com isomorfismo de grafos de vértices coloridos, analisamos aqui um par de famílias de grafos que nos permitem encontrar um funtor fiel entre álgebras de dimensão finita sobre corpos finitos.

Nesta seção usamos como referências o livro de Harary [39], o artigo de Wang [59] e a dissertação de Falcón [32] para enunciar alguns resultados da teoria de grafos. Primeiro lembramos a definição de grafo.

**Definição 2.2.1.** Um *grafo* é um par  $G = (V, E)$  formado por um conjunto  $V$  de *pontos ou vértices* e um conjunto  $E$  de *arestas ou lados* formado por subconjuntos de dois vértices de  $V$ .

**Exemplo 2.2.2.** A seguinte figura representa um grafo  $G_1$  com conjunto de vértices  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  e conjunto de arestas  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ .



**Definição 2.2.3.** Seja  $G = (V, E)$  um grafo. Um vértice  $v \in V$  é *adjacente* a um vértice  $w \in V$  se está conectado a  $w$  por uma aresta.

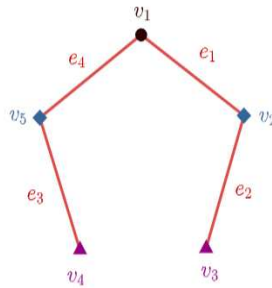
**Exemplo 2.2.4.** No Exemplo 2.2.2 o vértice  $v_1$  é adjacente aos vértices  $v_2$  e  $v_5$ .

**Definição 2.2.5.** O *grau* de um vértice  $v \in V$  é o número de arestas que colidem em  $v$  (ou de vértices que são adjacentes a esse vértice) e é denotado por  $d(v)$ .

**Exemplo 2.2.6.** No Exemplo 2.2.2 todos os vértices têm grau dois.

**Definição 2.2.7.** Um conjunto de vértices  $M \subseteq V$  de um grafo  $G = (V, E)$  é *independente* se nenhum de seus vértices são adjacentes.

**Exemplo 2.2.8.** No seguinte grafo o conjunto  $M = \{v_3, v_4\}$  é um conjunto independente.



Agora enunciamos o Primeiro Teorema da Teoria de Grafos

**Teorema 2.2.9.** A soma dos graus dos vértices de um grafo  $G = (V, E)$  é duas vezes o número de arestas, isto é,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|. \quad (2.4)$$

**Definição 2.2.10.** Uma *coloração* é uma atribuição de cores aos vértices do grafo  $G$  de forma que não hajam dois vértices adjacentes com a mesma cor. Se o grafo  $G$  admite uma coloração é um *grafo de vértices coloridos*.

**Exemplo 2.2.11.** No Exemplo 2.2.2, o grafo não tem uma coloração já que os vértices  $v_3$  e  $v_4$  são adjacentes e têm a mesma cor. Se estes vértices não fossem adjacentes, então o grafo teria uma coloração. No exemplo 2.2.8, o grafo tem uma coloração já que nenhum dos vértices adjacentes têm a mesma cor.

**Exemplo 2.2.12.** No Exemplo 2.2.2, o grafo é um grafo de vértices coloridos. A partição é feita da seguinte maneira  $\{v_1\}$ ,  $\{v_2, v_5\}$ , e  $\{v_3, v_4\}$ .

**Observação 2.2.13.** Num grafo de vértices coloridos fica determinada uma partição em subconjuntos de seu conjunto de vértices por meio da coloração.

O termo cor se refere literalmente a cores, mas em algumas pesquisas se prefere trabalhar com números, criando uma função que enumera as cores.

**Definição 2.2.14.** Um *isomorfismo* entre dois grafos de vértices coloridos  $G = (V, E)$  e  $G' = (V', E')$  é qualquer função bijetiva  $f$  entre o conjunto de vértices  $V$  e  $V'$  que preserva o grau dos vértices e tal que  $cor(f(v)) = cor(v)$ , para todo  $v \in V$ .

Seja  $L = (l_{ij})$  um quadrado latino de ordem  $n$  que é a tabuada de um quase-grupo  $([n], \cdot)$ . McKay, Meynert, e Myrvold em [48] constroem o grafo de vértices coloridos  $G_2(L)$  e  $G_1(L)$  da seguinte forma.

O grafo de vértices coloridos  $G_2(L)$  é tal que o seu conjunto de vértices é o conjunto  $V = \{r_i | i \leq n\} \cup \{c_i | i \leq n\} \cup \{s_i | i \leq n\} \cup \{t_{ij} | i, j \leq n\}$  de  $n^2 + 3n$  vértices, no qual cada um dos quatro subconjuntos (relacionados às linhas  $(r_i)$ , colunas  $(c_i)$ , símbolos  $(s_i)$  e células  $(t_{ij})$  do quadrado latino  $L$ ) têm uma cor diferente e  $E = \{r_i t_{ij}, c_j t_{ij}, s_{i \cdot j} t_{ij} | i, j \leq n\}$  é o conjunto de  $3n^2$  arestas.

Eles também constroem os grafos de vértices coloridos  $G_1(L)$  e  $G_3(L)$  a partir do grafo  $G_2(L)$ .

O grafo de vértices coloridos  $G_1(L) = (V', E')$  é o grafo cujo conjunto de vértices é  $V' = V \cup \{R, C, S\}$ , sendo  $V$  o conjunto de vértices do grafo  $G_2(L)$ , e o conjunto de arestas  $E' = E \cup \{Rr_i, Cc_i, Ss_i | i \leq n\}$ , com  $E$  o conjunto de arestas do grafo  $G_2(L)$ .

**Observação 2.2.15.** A construção do grafo  $G_1(L)$  estabelece que, a partir do grafo  $G_2(L)$ , adicionando três vértices  $\{R, C, S\}$ , temos um novo conjunto de vértices  $V'$  e  $3n$  arestas  $\{Rr_i, Cc_i, Ss_i | i \leq n\}$ , obtendo assim um novo conjunto de arestas  $E'$ . Deste modo, o grafo  $G_1(L) = (V', E')$ . Aqui, existem três cores: uma para  $\{R, C, S\}$ , uma para  $\{r_i, c_i, s_i | i \leq n\}$  e uma para o resto dos vértices.

O grafo de vértices coloridos  $G_3(L)$  é definido a partir do grafo  $G_2(L)$  adicionando  $3n$  arestas  $\{r_i c_i, c_i s_i, r_i s_i | i \leq n\}$ .

No grafo  $G_3(L)$  a cor dos vértices coincide com a de  $G_1(L)$ . Esses autores provam a seguinte propriedade (Teorema 6 em [48]).

**Teorema 2.2.16.** *Dois quadrados latinos  $L_1$  e  $L_2$  de mesma ordem são respectivamente, isotópicos ou isomorfos se, e somente se, os grafos  $G_1(L_1)$  e  $G_1(L_2)$  (respectivamente,  $G_2(L_1)$  e  $G_2(L_2)$ , e  $G_3(L_1)$  e  $G_3(L_2)$ ) são isomorfos.*

**Exemplo 2.2.17.** As Figuras 2.1, 2.2 e 2.3 mostram exemplos dos três grafos relacionados

ao seguinte quadrado latino de ordem 2,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Usamos marcadores distintos ( $\odot$ ,  $\blacktriangle$ ,  $\blacktriangleright$ ,  $\blacktriangleleft$ ,  $\bullet$ ) nos vértices dos grafos para representá-los.

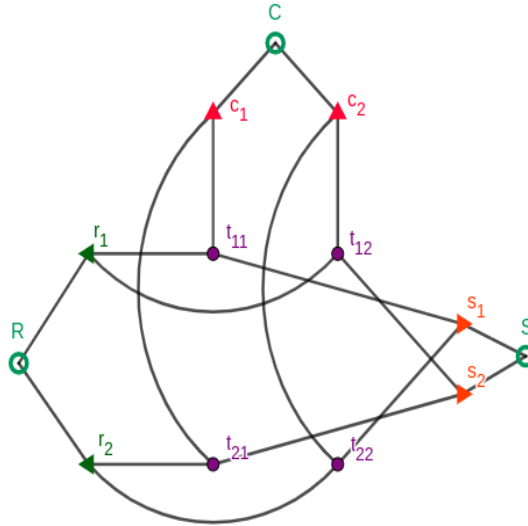


Figura 2.1: Grafo  $G_1$  relacionado ao quadrado latino de ordem  $L$ .

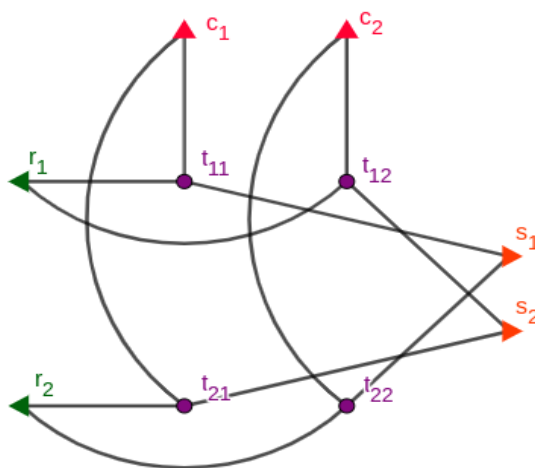


Figura 2.2: Grafo  $G_2$  relacionado ao quadrado latino de ordem  $L$ .

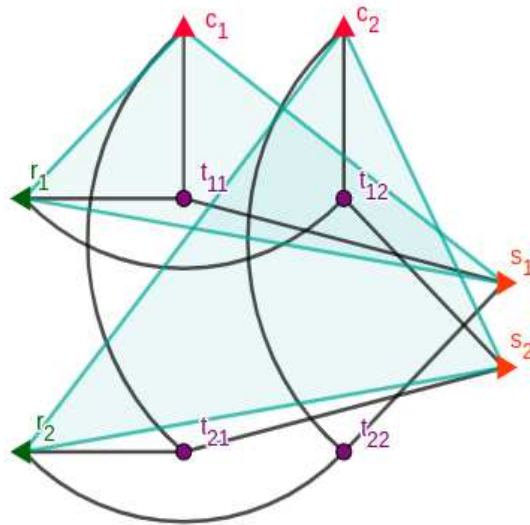


Figura 2.3: Grafo  $G_3$  relacionado ao quadrado latino de ordem  $L$ .

**Observação 2.2.18.** É muito importante ter em conta que, nas definições dos grafos  $G_1(L)$ ,  $G_2(L)$  e  $G_3(L)$ ,  $L$  é um quadrado latino, não podendo ser um quadrado latino parcial, já que as construções dos grafos não são as mesmas.

Tomando por base a proposta de McKay, Meynert, e Myrvold para quadrados latinos, descrevemos agora um par de grafos que estão exclusivamente relacionados a uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo finito. Isto nos permite garantir que quaisquer duas álgebras isotópicas ou isomorfas correspondam a dois grafos isomorfos.

**Definição 2.2.19.** Seja  $A$  uma álgebra  $n$ -dimensional sobre um corpo finito  $\mathbb{K}$ . Definimos o grafo de vértices coloridos  $G_1(A)$ , como o grafo com conjunto de vértices que é formado pela união dos quatro subconjuntos de vértices  $R_A = \{r_u | u \in A \setminus \text{Ann}_{A^-}(A)\}$ ,  $C_A = \{c_u | u \in A \setminus \text{Ann}_{A^+}(A)\}$ ,  $S_A = \{s_u | u \in A^2 \setminus \{0\}\}$  e  $T_A = \{t_{u,v} | u, v \in A, uv \neq 0\}$ , isto é,

$$V = R_A \cup C_A \cup S_A \cup T_A,$$

e com conjunto de arestas

$$E = \{r_u t_{u,v}, c_v t_{u,v}, s_w t_{u,v} | u, v, w \in A, uv = w \neq 0\}. \quad (2.5)$$

Seja  $A$  um álgebra. A partir do grafo  $G_1(A)$  definimos o grafo de vértices coloridos  $G_2(A)$



adicionando as arestas

$$\{r_u c_u, |u \in A \setminus \text{Ann}_A(A)\} \cup \{c_u s_u |u \in A^2 \setminus \text{Ann}_{A^+}(A)\} \cup \{r_u s_u |u \in A^2 \setminus \text{Ann}_{A^-}(A)\}. \quad (2.6)$$

Assim, o conjunto de vértices de  $G_2(A)$  é o mesmo conjunto de vértices em  $G_1(A)$ , isto é, o conjunto em (2.5). O conjunto de arestas de  $G_2(A)$  é o conjunto de arestas de  $G_1(A)$  unido ao conjunto em (2.6).

**Exemplo 2.2.20.** Podemos ver como exemplo as Figuras 2.4 e 2.5 que mostram os dois grafos que estão relacionados a qualquer álgebra de Lie  $n$ -dimensional sobre o corpo finito  $\mathbb{F}_2$ , com base  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , que é descrita pelo produto  $e_1 e_2 = e_1$ .

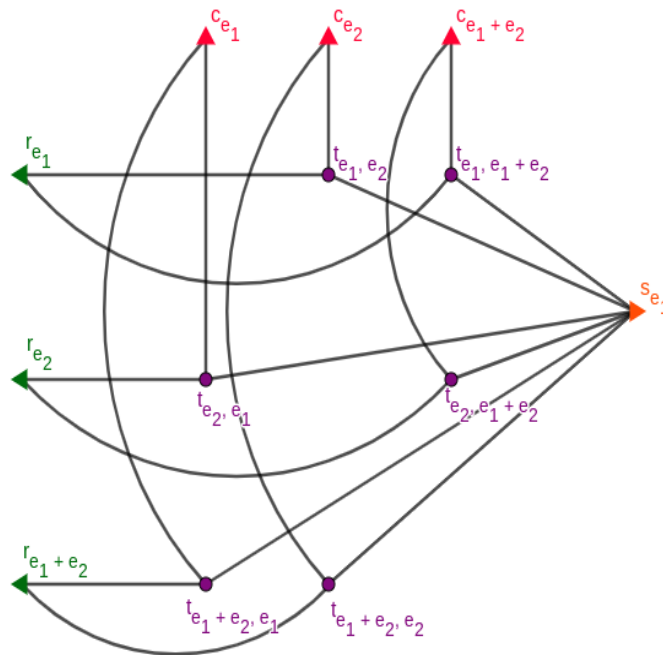


Figura 2.4: Grafos  $G_1$  relacionado à álgebra de Lie  $e_1 e_2 = e_1$  sobre o corpo finito  $\mathbb{F}_2$ .

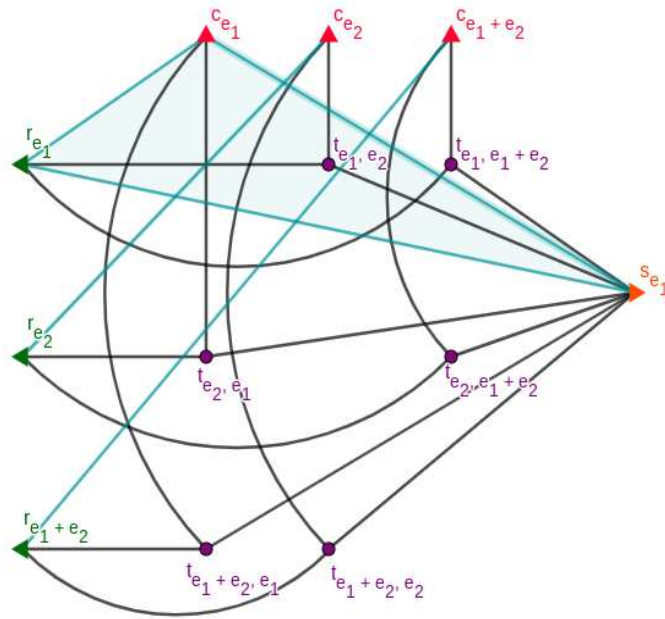


Figura 2.5: Grafos  $G_2$  relacionado à álgebra de Lie  $e_1e_2 = e_1$  sobre o corpo finito  $\mathbb{F}_2$ .

Graças a esses exemplos podemos entender com um pouco mais de clareza os resultados que enunciamos no seguinte lema.

**Lema 2.2.21.** *Seja  $A$  uma álgebra  $n$ -dimensional sobre um corpo finito  $\mathbb{K}$ . Então*

- Se a álgebra  $A$  é abeliana, então ambos os grafos  $G_1(A)$  e  $G_2(A)$  são vazios.*
- O grafo  $G_1(A)$  não contém triângulos.*
- Em ambos os grafos  $G_1(A)$  e  $G_2(A)$ ,*
  - o número de vértices é*

$$|A \setminus \text{Ann}_{A^-}(A)| + |A \setminus \text{Ann}_{A^+}(A)| + |A^2| + |(u, v) \in A \times A | uv \neq 0| - 1.$$

- $d(t_u, v) = 3$ , para todos  $u, v \in A$  tais que  $uv \neq 0$ .*

*d) No grafo  $G_1(A)$ ,*

- $d(r_u) = |A \setminus \text{Ann}_{A^+}(\{u\})|$ , para todo  $u \in A \setminus \text{Ann}_{A^-}(A)$ .*
- $d(c_u) = |A \setminus \text{Ann}_{A^-}(\{u\})|$ , para todo  $u \in A \setminus \text{Ann}_{A^+}(A)$ .*
- $d(s_u) = \sum_{v \in A} |ad_v^{-1}(u)|$ , para todo  $u \in A^2 \setminus \{0\}$ .*

e) No grafo  $G_2(A)$ ,

$$\begin{aligned} - d(r_u) &= |A \setminus \text{Ann}_{A^+}(\{u\})| + \mathbf{1}_{A \setminus \text{Ann}_{A^-}(A)}(u) + \mathbf{1}_{A^2}(u), \quad \text{para todo } u \in A \setminus \text{Ann}_{A^-}(\{u\}). \\ - d(c_u) &= |A \setminus \text{Ann}_{A^-}(\{u\})| + \mathbf{1}_{A \setminus \text{Ann}_{A^+}(A)}(u) + \mathbf{1}_{A^2}(u), \quad \text{para todo } u \in A \setminus \text{Ann}_{A^+}(\{u\}). \\ - d(s_u) &= \mathbf{1}_{A \setminus \text{Ann}_{A^-}(A)}(u) + \mathbf{1}_{A \setminus \text{Ann}_{A^+}(A)}(u) + \sum_{v \in A} |ad_v^{-1}(u)|, \quad \text{para todo } u \in A^2 \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Aqui,  $\mathbf{1}$  denota a função característica.

**Demonstração:** Todas as afirmações seguem diretamente a partir da definição dos grafos  $G_1(A)$  e  $G_2(A)$ .

- a) Lembramos que se uma álgebra é abeliana, então todas as constantes de estrutura são zero, portanto a tabela de operações dos elementos da base é só de zeros. Por isto,  $\text{Ann}_{A^+}(A) = \text{Ann}_{A^-}(A) = A^2 = A$ , assim  $R_A = C_A = S_A = T_A = \emptyset$ .
- b) O grafo  $G_1$  não contém triângulos, porque as arestas do grafo que estão no conjunto em (2.5) e, para fazer os triângulos no grafo, precisamos ter as arestas  $r_u c_u$ ,  $r_u s_u$  e  $c_u s_u$ , para algum  $u \in A \setminus \text{Ann}_A(A)$ .
- c) Usando o Teorema de inclusão-exclusão da Teoria de Conjuntos, obtemos

$$\begin{aligned} |R_A \cup C_A \cup S_A \cup T_A| &= |R_A| + |C_A| + |S_A| + |T_A| - |R_A \cap C_A| - |C_A \cap S_A| - \\ &\quad |S_A \cap T_A| - |R_A \cap S_A| - |R_A \cap T_A| - |C_A \cap T_A| \\ &\quad + |R_A \cap C_A \cap S_A| + |R_A \cap C_A \cap T_A| + |C_A \cap S_A \cap T_A| \\ &\quad + |R_A \cap S_A \cap T_A| - |R_A \cap C_A \cap S_A \cap T_A|. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Como todos os conjuntos de vértices são disjuntos pelas suas definições, temos que (2.7) é igual a

$$\begin{aligned} &|R_A| + |C_A| + |S_A| + |T_A| - |\emptyset| - |\emptyset| - |\emptyset| - |\emptyset| - |\emptyset| - |\emptyset| + |\emptyset| + |\emptyset| + |\emptyset| + |\emptyset| - |\emptyset| \\ &= |\{r_u \mid u \in A \setminus \text{Ann}_{A^-}(A)\}| + |\{c_u \mid u \in A \setminus \text{Ann}_{A^+}(A)\}| + |\{s_u \mid u \in A^2 \setminus \{0\}\}| \\ &\quad + |\{t_{u,v} \mid u, v \in A, uv \neq 0\}| \\ &= |A \setminus \text{Ann}_{A^-}(A)| + |A \setminus \text{Ann}_{A^+}(A)| + |A^2 \setminus \{0\}| + |\{u, v \in A \times A, uv \neq 0\}| \\ &= |A \setminus \text{Ann}_{A^-}(A)| + |A \setminus \text{Ann}_{A^+}(A)| + |A^2| - |\{0\}| + |\{u, v \in A \times A, uv \neq 0\}| \\ &= |A \setminus \text{Ann}_{A^-}(A)| + |A \setminus \text{Ann}_{A^+}(A)| + |A^2| - 1 + |\{u, v \in A \times A, uv \neq 0\}|. \end{aligned}$$

Agora,  $d(t_{u,v}) = 3$ , porque  $t_{u,v}$  está conectado aos vértices  $r_u$  e  $c_u$  primeiro e logo está conectado ao vértice  $s_w$ , com  $w = uv \neq 0$ .

- d) – Temos que  $r_u$  e  $c_v$  não estão conectados por arestas, mas  $r_u$  e  $c_v$  estão conectados a  $t_{u,v}$ , se  $uv \neq 0$ . Assim, para que existam os  $t_{u,v}$ , os possíveis  $v$  estão no conjunto  $A \setminus \text{Ann}_{A^+}(\{u\})$ . Como  $r_u$  só está conectado a  $t_{u,v}$  em  $G_1$ , então

$$d(r_u) = |A \setminus \text{Ann}_{A^+}(\{u\})|, \quad \text{para todo } u \in A \setminus \text{Ann}_{A^-}(A).$$

- Com um raciocínio similar, para que os  $t_{u,v}$  existam, os possíveis  $u$  estão no conjunto  $A \setminus \text{Ann}_{A^-}(\{u\})$ . Como  $c_v$  só está conectado a  $t_{u,v}$  em  $G_1$ , então

$$d(c_u) = |A \setminus \text{Ann}_{A^-}(\{u\})|, \quad \text{para todo } u \in A \setminus \text{Ann}_{A^+}(A).$$

- Os únicos vértices que se conectam aos  $s_u$  são os  $t_{u,v}$  e quantidade destes vértices que cumprem  $uv \neq 0$  é

$$d(s_u) = \sum_{v \in A} |ad_v^{-1}(u)|, \quad \text{para todo } u \in A^2 \setminus \{0\}.$$

- e) Sabemos que no grafo  $G_2$  temos as mesmas arestas e vértices que no grafo  $G_1$ , adicionando outras arestas que estão no conjunto em (2.6), isto é, se  $u$  está em dois dos conjuntos  $R_A$ ,  $C_A$  ou  $S_A$ , adicionamos outra aresta. Assim, concluímos as três equações. ■

Agora enunciamos alguns resultados com a ajuda do Lema 2.2.21 para álgebras de Lie.

**Proposição 2.2.22.** *Seja  $A$  uma álgebra de Lie  $n$ -dimensional sobre um corpo finito  $\mathbb{K}$ . Então*

- a) *O número de arestas de seu grafo relacionado  $G_1(A)$  é*

$$\sum_{u \notin \text{Ann}_{A^-}(A)} |A \setminus \text{Ann}_{A^+}(\{u\})| + \sum_{v \in A^2 \setminus \{0\}} |ad_u^{-1}(v)| + \sum_{u \notin \text{Ann}_{A^+}(A)} |A \setminus \text{Ann}_{A^-}(\{u\})|.$$

- b) *O número de arestas de seu grafo relacionado  $G_2(A)$  coincide com aqueles de  $G_1(A)$  mais  $|A \setminus \text{Ann}_A(A)| + |A^2 \setminus \text{Ann}_{A^-}(A)| + |A^2 \setminus \text{Ann}_{A^+}(A)|$ .*

**Demonstração:** Sabemos:

- a) Do Primeiro Teorema de Grafos 2.2.9, do fato que o número dois nesse teorema é porque as aretas se repetem na conta dos graus dos vértices e da demonstração já feita no Lema 2.2.21, sabemos que os únicos vértices que estão conectados com todos os vértices são os  $t_{u,v}$ . Por isto, se não consideramos esses vértices na soma dos graus de cada vértice então, obtemos a quantidade de arestas totais, isto é, no grafo  $G_1 = (V_1, E_1)$  com  $V_1 = R_A \cup C_A \cup S_A \cup T_A$ , temos

$$\begin{aligned} \sum_{v \in V_1 \setminus T_A} d(v) &= \sum_{v \in R_A \cup C_A \cup S_A} d(v) \\ &= \sum_{u \notin \text{Ann}_{A^-}(A)} (|A \setminus \text{Ann}_{A^+}(\{u\})| + \sum_{u \notin \text{Ann}_{A^+}(A)} |A \setminus \text{Ann}_{A^-}(\{u\})| + \sum_{v \in A^2 \setminus \{0\}} |ad_u^{-1}(v)|) \\ &= |E|. \end{aligned}$$

- b) Para o grafo  $G_2$ , lembramos da prova do Lema 2.2.21 que as novas arestas em comparação às arestas do grafo  $G_1$  são aquelas que estão em dois dos conjuntos de índices dos vértices. Os conjuntos de interseção entre estes conjuntos de índices dos vértices são

–  $A \setminus \text{Ann}_A(A)$ , porque

$$\begin{aligned} A \setminus \text{Ann}_{A^+}(A) \cap A \setminus \text{Ann}_{A^-}(A) &= (A \cap A) \setminus (\text{Ann}_{A^+}(A) \cup \text{Ann}_{A^-}(A)) \\ &= A \setminus (\text{Ann}_{A^+}(A) \cup \text{Ann}_{A^-}(A)) \\ &\subseteq A \setminus \text{Ann}_A(A). \end{aligned}$$

–  $A^2 \setminus \text{Ann}_{A^+}(A)$ , já que

$$\begin{aligned} A \setminus \text{Ann}_{A^+}(A) \cap A^2 \setminus \{0\} &= (A \cap A) \setminus (\text{Ann}_{A^+}(A) \cup \{0\}) \\ &= A^2 \setminus \text{Ann}_{A^+}(A). \end{aligned}$$

–  $A^2 \setminus \text{Ann}_{A^-}(A)$ , porque

$$\begin{aligned} A \setminus \text{Ann}_{A^-}(A) \cap A^2 \setminus \{0\} &= (A \cap A) \setminus (\text{Ann}_{A^-}(A) \cup \{0\}) \\ &= A^2 \setminus \text{Ann}_{A^-}(A). \end{aligned}$$

–  $\emptyset$ , já que

$$R_A \cap T_A = C_A \cap T_A = S_A \cap T_A.$$

Logo é só fazer a soma das arestas de  $G_1$  com os cardinais destes conjuntos.  $\blacksquare$

A classificação do Capítulo 3 é feita em álgebras bidimensionais, por isto é importante conhecer quais são as propriedades para as álgebras bidimensionais.

**Teorema 2.2.23.** *Sejam  $A$  e  $A'$  álgebras de dimensão dois sobre um corpo finito  $\mathbb{K}$ . Então*

- a) *Se as álgebras são isotópicas, então seus grafos correspondentes  $G_1(A)$  e  $G_1(A')$  são isomorfos. Reciprocamente, se os grafos  $G_1(A)$  e  $G_1(A')$  são isomorfos, então existem três funções bijetoras  $f$ ,  $g$  e  $h$  entre  $A$  e  $A'$  tais que  $f(u)g(v) = h(uv)$ .*
- b) *Se as álgebras são isomorfas, então seus grafos correspondentes  $G_2(A)$  e  $G_2(A')$  também são isomorfos. Reciprocamente, se os grafos  $G_2(A)$  e  $G_2(A')$  são isomorfos, então existe uma função bijetora multiplicativa entre as álgebras  $A$  e  $A'$ , ou seja, uma função bijetiva  $f : A \rightarrow A'$  de modo que  $f(u)f(v) = f(uv)$ , para todos  $u, v \in A$ .*

**Demonstração:** Seja  $(f, g, h)$  um isotopismo entre as álgebras  $A$  e  $A'$ . Definimos a função  $\alpha$  entre  $G_1(A)$  e  $G_1(A')$  de modo que

$$\begin{cases} \alpha(r_u) = r_{f(u)}, & \text{para todo } u \in A \setminus \text{Ann}_A(A), \\ \alpha(c_u) = c_{g(u)}, & \text{para todo } u \in A \setminus \text{Ann}_{A^+}(A), \\ \alpha(s_u) = s_{h(u)}, & \text{para todo } u \in A^2 \setminus \{0\}, \\ \alpha(t_{u,v}) = t_{f(u),g(v)}, & \text{para todos } u, v \in A \text{ tal que } uv \neq 0. \end{cases}$$

A descrição de ambos os grafos  $G_1(A)$  e  $G_1(A')$ , com a Proposição 1.2.8, Lema 1.2.9 e a não singularidade de  $f$ ,  $g$  e  $h$ , descreve  $\alpha$  como um isomorfismo entre esses dois grafos de vértices coloridos, ou seja,  $\alpha$  é uma bijeção bem definida entre os vértices de  $G_1(A)$  e  $G_1(A')$  que preserva a colinearidade e a cor dos vértices. A mesma função  $\alpha$  constitui um isomorfismo entre os grafos  $G_2(A)$  e  $G_2(A')$  no caso de ser  $f = g = h$ , ou seja, se as álgebras  $A$  e  $A'$  forem isomorfas.

Reciprocamente, seja  $\alpha$  um isomorfismo entre os grafos  $G_1(A)$  e  $G_1(A')$ . A colinearidade ajuda a determinar esse isomorfismo exclusivamente por sua restrição a  $R_A \cup C_A \cup S_A$ .

Especificamente, a imagem de cada vértice  $t_{u,v} \in T_A$  por meio de  $\alpha$  é unicamente determinada pelas imagens correspondentes de  $r_u$ ,  $c_v$  e  $s_{uv}$ . Sejam  $\beta$  e  $\beta'$  as respectivas bases das álgebras  $A$  e  $A'$  e seja  $\pi : A \rightarrow A'$  a função natural que preserva as componentes de cada vetor em relação às bases mencionadas, ou seja,  $\pi((u_1, \dots, u_n)_\beta) = (u_1, \dots, u_n)_{\beta'}$ , para todos  $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{K}$ . Definimos três funções  $f$ ,  $g$  e  $h$  de  $A$  a  $A'$  de tal modo que

$$f(u) = \begin{cases} \pi(u), & \text{para todo } u \in \text{Ann}_{A^-}(A), \\ v, & \text{caso contrário, com } v \in A \text{ tal que } \alpha(r_u) = r_v. \end{cases}$$

$$g(u) = \begin{cases} \pi(u), & \text{para todo } u \in \text{Ann}_{A^+}(A), \\ v, & \text{caso contrário, com } v \in A \text{ tal que } \alpha(c_u) = c_v. \end{cases}$$

$$h(u) = \begin{cases} \pi(u), & \text{para todos } u \in (A \setminus A^2) \cup \{0\}, \\ v, & \text{caso contrário, com } v \in A \text{ tal que } \alpha(s_u) = s_v. \end{cases}$$

Da Proposição 1.2.8 e do Lema 1.2.9, essas três funções são bijetoras. Sejam  $u, v \in A$ , se  $u \in \text{Ann}_{A^-}(A)$  ou  $v \in \text{Ann}_{A^+}(A)$ , então não existe o vértice  $t_{u,v}$  no grafo  $G_1(A)$ . Como  $\alpha$  preserva a colinearidade, não existe o vértice  $t_{f(u),g(v)}$  no grafo  $G_1(A')$ , o que significa que  $f(u) \in \text{Ann}_{A'^-}(A')$  ou  $g(v) \in \text{Ann}_{A'^+}(A')$ . Em qualquer caso, temos  $f(u)g(v) = 0 = h(uv)$ . Finalmente, se  $u \notin \text{Ann}_{A^-}(A)$  e  $v \notin \text{Ann}_{A^+}(A)$ , então o vértice  $t_{u,v}$  conecta os vértices  $r_u$ ,  $c_v$  e  $s_{uv}$  no grafo  $G_1(A)$ .

Agora, o isomorfismo  $\alpha$  envia este vértice  $t_{u,v}$  em  $G_1(A)$  para um vértice  $t_{u',v'}$  em  $G_2(A)$  que está conectado aos vértices  $r_{u'}$ ,  $c_{v'}$  e  $s_{u'v'}$ . Novamente, como  $\alpha$  preserva a colinearidade, é  $f(u) = u'$ ,  $g(v) = v'$  e, finalmente,  $h(uv) = f(u)g(v)$ . No caso de ser  $\alpha$  um isomorfismo entre os grafos  $G_2(A)$  e  $G_2(A')$ , basta considerar  $f = g = h$  na descrição anterior. Isso está bem definido devido às novas arestas que são incluídas nos grafos  $G_1(A)$  e  $G_1(A')$  para definir, respectivamente, os grafos  $G_2(A)$  e  $G_2(A')$ . Similarmente ao raciocínio anterior, essas arestas dão um análise da relação entre os vértices e assim dos índices os quais cumprem um caráter multiplicativo da aplicação bijetiva  $f$ , ou seja,  $f(u)g(v) = h(uv)$ , para todos  $u, v \in A$ . ■

Com a ajuda do Teorema 2.2.23, podemos determinar álgebras não isomorfas a partir de seus grafos não isomorfos correspondentes, como no exemplo a seguir.

**Exemplo 2.2.24.** Sabemos que a álgebra  $n$ -dimensional  $A$  sobre o corpo finito  $\mathbb{F}_2$ , com  $n \geq 3$  descrita pelo produto  $e_1e_2 = e_3$  não é isomorfa à álgebra  $n$ -dimensional  $B$  sobre  $\mathbb{F}_2$  descrita pelo produto  $e_1e_2 = e_1$ . Isso decorre diretamente do fato de que o grafo correspondente  $G_2(B)$  relacionado ao  $G_1(B)$  coincide com aquele associado a este último que é mostrado na Figura 2.5, até o vértice  $s_{e_1}$ , que se torna  $s_{e_3}$ , e as duas arestas  $r_{e_1s_{e_1}}$  e  $c_{e_1s_{e_1}}$ , que desaparecem. Os grafos  $G_2(A)$  e  $G_1(A)$  são não isomorfos e, portanto, as álgebras não são isomorfas.

Para calcular os grafos  $G_1$  e  $G_2$  relacionados a uma dada álgebra sobre um corpo finito, Falcón implementa o procedimento *isoGraph* na biblioteca *isotopism.lib*, tendo como saída uma sequência com o número de vértices de cada cor, o número de arestas e de triângulos do grafo em consideração. Este procedimento recebe como entradas:

1. A dimensão  $n$  da álgebra.
2. A ordem  $q$  do corpo finito.
3. Uma lista  $C$  formada pela quádrupla  $(i, j, k, c_{ij}^k)$  que indica as constantes de estrutura diferentes de zero da álgebra.
4. Um inteiro positivo  $opt \leq 2$  que nos permite lidar com o grafo  $G_1$  da álgebra se  $opt = 1$ , ou o grafo  $G_2$  se  $opt = 2$ .

---

**Algoritmo 3** Polinômios relacionados ao produto de dois vetores em uma álgebra.

---

```

1:  procedure PROD( $u, v$ )
2:    for  $k \leftarrow 1, n$ , do
3:      for  $i \leftarrow 1, n$ , do
4:        for  $j \leftarrow i, n$ , do
5:           $L_k \leftarrow L_k + u_i v_j c_{ij}^k$ ;
6:        end for
7:      end for
8:    end for
9:    return
10: end procedure

```

---



Também implementa o procedimento auxiliar *Prod* que produz a lista de polinômios que constituem os coeficientes de cada vetor da base no produto de dois vetores arbitrários da álgebra  $A$ . Seu pseudocódigo é descrito no Algoritmo 3 (2.2) .

Quadrados latinos parciais	$G_1$ e $G_2$	$G_1$	$G_2$	
	Vértices	Aristas	Aristas	Triângulos
10 00	(2, 2, 1, 4)	12	16	7
10 01	(3, 3, 1, 6)	18	23	7
10 02	(3, 3, 3, 7)	21	30	16
10 20	(3, 2, 3, 6)	18	25	12
12 00	(2, 3, 3, 6)	18	25	12
12 20	(3, 3, 3, 8)	24	33	13
12 21	(3, 3, 3, 8)	24	33	13

Tabela 2.1: Invariantes do grafo para os grafos  $G_1$  e  $G_2$  relacionados a anéis de quase-grupos parciais não abelianos bidimensionais sobre o corpo finito  $\mathbb{F}_2$ .

Quadrados latinos parciais	$G_1$ e $G_2$	$G_1$	$G_2$	
	Vértices	Aristas	Aristas	Triângulos
10 00	(6, 6, 2, 36)	108	118	20
10 01	(8, 8, 2, 48)	144	156	22
10 02	(8, 8, 8, 56)	168	192	48
10 20	(8, 6, 8, 48)	144	164	42
12 00	(6, 8, 8, 48)	144	164	42
12 20	(8, 8, 8, 60)	180	204	38
12 21	(8, 8, 8, 56)	168	192	48

Tabela 2.2: Invariantes do grafo para os grafos  $G_1$  e  $G_2$  relacionados a anéis de quase-grupos parciais não abelianos bidimensionais sobre o corpo finito  $\mathbb{F}_3$ .

Agora para mostrar como funcionam os dois procedimentos anteriores, estudamos um exemplo ilustrativo que enfoca aqueles grafos  $G_1$  e  $G_2$  relacionados ao conjunto de anéis de quase-grupos parciais não abelianos sobre um corpo finito, que são baseados nas conhecidas distribuições de quadrados latinos parciais de ordem  $n \leq 3$  em classes de isotopismo. Assim, por exemplo, a Tabela 2.1 e a Tabela 2.2 mostram os invariantes de isomorfismo

de grafos que estão relacionados ao caso bidimensional sobre os corpos finitos  $\mathbb{F}_2$  e  $\mathbb{F}_3$ , respectivamente. Os quadrados latinos parciais são escritos linha após linha em uma única linha, com células vazias representadas por zeros, isto é o primeiro quadrado latino no Teorema 1.3.39 é representado como 10 00.

Quadrados latinos parciais	Vértices	Aristas	Quadrados latinos parciais	Vértices	Aristas
100 000 000	(4, 4, 1, 16)	48	120 200 300	(7, 6, 7, 36)	108
120 000 000	(4, 6, 3, 24)	72	120 010 300	(7, 6, 7, 38)	114
123 000 000	(4, 7, 7, 28)	84	120 210 300	(7, 6, 7, 38)	114
100 200 000	(6, 4, 3, 24)	72	120 230 300	(7, 6, 7, 40)	120
100 010 000	(6, 6, 1, 24)	72	120 230 310	(7, 6, 7, 40)	120
100 020 000	(6, 6, 3, 28)	84	100 010 001	(7, 7, 1, 28)	84
120 200 000	(6, 6, 3, 32)	96	100 010 002	(7, 7, 3, 34)	120
120 210 000	(6, 6, 3, 32)	96	120 001 002	(7, 7, 3, 36)	108
120 000 300	(6, 6, 6, 32)	96	120 200 002	(7, 7, 3, 36)	108
120 000 310	(6, 6, 6, 36)	108	120 200 001	(7, 7, 3, 38)	114
120 001 000	(6, 7, 3, 32)	96	120 210 001	(7, 7, 3, 38)	114
120 012 000	(6, 7, 3, 36)	108	120 201 010	(7, 7, 3, 40)	120
120 003 000	(6, 7, 7, 34)	102	120 201 012	(7, 7, 3, 40)	120
120 000 302	(6, 7, 7, 36)	108	100 020 003	(7, 7, 7, 37)	111
123 200 000	(6, 7, 7, 36)	108	120 002 003	(7, 7, 7, 38)	114
120 013 000	(6, 7, 7, 38)	114	120 002 300	(7, 7, 7, 38)	114
123 210 000	(6, 7, 7, 38)	114	120 003 300	(7, 7, 7, 38)	114
123 230 000	(6, 7, 7, 40)	120	120 001 300	(7, 7, 7, 39)	117
123 231 000	(6, 7, 7, 40)	120	120 200 003	(7, 7, 7, 40)	120
100 200 300	(7, 4, 7, 28)	84	120 200 302	(7, 7, 7, 40)	120
100 200 010	(7, 6, 3, 32)	96	120 210 003	(7, 7, 7, 40)	120
120 200 010	(7, 6, 3, 36)	108	123 010 001	(7, 7, 7, 40)	120
100 200 030	(7, 6, 7, 34)	102	123 200 300	(7, 7, 7, 40)	120
120 030 300	(7, 6, 7, 36)	108	120 001 302	(7, 7, 7, 41)	123

Tabela 2.3: Alguns dos invariantes do grafo para os grafos  $G_1$  e  $G_2$  relacionados a anéis de quase-grupos parciais não abelianos de dimensão 3 sobre o corpo finito  $\mathbb{F}_2$ .

Para cada classe de isotopismo, o resultado indica a sequência com o número de vértices de cada cor, o número de arestas e de triângulos dos grafos correspondentes  $G_1$  e  $G_2$ . Observamos que há uma coerência entre ambas as tabelas e as observações expostas na prova do Teorema 1.3.39.

A implementação do procedimento *isoGraph* nos permite reduzir o custo de computação que é necessário para calcular todas as bases de Gröbner reduzidas envolvidas no Algoritmo 2. Especificamente, na sétima linha desse algoritmo, é necessário apenas calcular a dimensão de Krull desses ideais  $I_{A,A'}^{Isot}$  ( $I_{A,A'}^{Isom}$ , respectivamente) para os quais os invariantes de isomorfismo dos grafos correspondentes  $G_1(A)$  e  $G_1(A')$  ( $G_2(A)$  e  $G_2(A')$ , respectivamente) coincidem. Essa implementação nos permite, por exemplo, reduzir o tempo de execução necessário para determinar a distribuição de anéis de quasigrupo parciais  $n$ -dimensionais não abelianos sobre o corpo finito  $\mathbb{F}_2$  em classes de isotopismo, para  $n \leq 3$ , de 761 segundos no Exemplo 1.3.40 a 30 segundos. Este último tempo de execução inclui os 9 segundos extras de computação necessários para calcular os invariantes de isotopismo que acabamos de expor na Tabela 2.1 e aqueles expostos na Tabela 2.3. Na tese de Falcón [32] podemos encontrar a Tabela 2.3 completa.

## 2.3 Álgebras de Lie pré-filiformes

Esta seção trata da distribuição em classes de isomorfismos e classes de isotopismos do conjunto  $\mathcal{P}_{n,q}$  das álgebras de Lie sobre o corpo finito  $\mathbb{F}_q$ , com  $q$  é uma potência de um primo e  $n$  é um inteiro positivo, de modo que exista uma base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  tal que o produto na álgebra seja determinado por

$$e_i e_n \in \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle. \quad (2.8)$$

Eventualmente, os produtos que não são escritos são aqueles em (2.8) que são nulos.

**Definição 2.3.1.** Sejam  $A$  uma álgebra de Lie e  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base de  $A$ . Considere  $T = (t_1, \dots, t_{n-1}) \in \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle^{n-1}$  uma  $(n-1)$ -upla de estrutura se  $t_i = e_1 e_i$ , para todo  $i < n$ . Chamamos  $T$  de  $(n-1)$ -upla de estrutura da álgebra de Lie  $A$ . Denotamos a álgebra  $A$  por  $A_T$ .

A  $(n-1)$ -upla  $T$  é um conjunto de produtos dos elementos da base. Considerando isto,

qualquer álgebra de Lie em  $\mathcal{P}_{n,q}$  é descrita exclusivamente, portanto, por uma  $(n-1)$ -upla  $T$ . Além disso, daqui em diante, o conjunto de  $(n-1)$ -uplas de estrutura das álgebras de Lie em  $\mathcal{P}_{n,q}$  é denotado como  $\mathcal{T}_{n,q}$ . Isso coincide com o espaço vetorial  $(n-1)$ -dimensional sobre  $\mathbb{F}_q$  com componentes em  $\langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$ .

**Exemplo 2.3.2.** Seja  $A$  uma das álgebras de Lie em  $\mathcal{P}_{4,2}$  que tem como terna de estrutura  $(e_1, e_2 + e_3, e_2)$ , isto é,  $t_1 = e_1e_1 = e_1$ ,  $t_2 = e_1e_2 = e_2 + e_3$  e  $t_3 = e_1e_3 = e_2$ .

**Definição 2.3.3.** Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie nilpotente. Dizemos que  $\mathfrak{g}$  é *filiforme*, se cumpre

$$\dim \mathfrak{g}^2 = n - 2, \dots, \dim \mathfrak{g}^k = n - k, \dots, \dim \mathfrak{g}^n = 0,$$

com  $\dim \mathfrak{g} = n$  e  $\mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}]$ ,  $2 \leq k \leq n$ .

**Observação 2.3.4.** No Capítulo 1 falamos de índice de nilpotência. Uma álgebra de Lie nilpotente  $n$ -dimensional  $A$  com índice de nilpotência máximo  $n$  é filiforme. Neste caso,  $\dim \mathcal{C}^k(A) = n - k$ , para todo  $k \in \{2, \dots, n\}$ .

No artigo [31] podemos encontrar exemplos de álgebras de Lie filiformes como as seguintes.

**Exemplo 2.3.5.** Numa álgebra de dimensão 2 com qualquer colchete a única álgebra que é filiforme é a álgebra abeliana.

**Exemplo 2.3.6.** Sejam  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de dimensão 6 sobre o corpo  $\mathbb{F}_2$  e  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$  uma base de  $\mathfrak{g}$ . Se definimos o colchete como  $[e_4, e_5] = e_2$ ,  $[e_4, e_6] = e_3$ , e  $[e_5, e_6] = e_2 + e_4$ , então  $\mathfrak{g}$  é uma álgebra de Lie filiforme.

Podemos dizer que as álgebras de Lie filiformes constituem o subconjunto mais estruturado de álgebras de Lie nilpotentes e também que têm um grande número de aplicações em Matemática Aplicada, Engenharia e Física. Para mais informação destas aplicações, citamos os livros [35], [36].

A distribuição em classes de isomorfismo de álgebras de Lie filiformes  $n$ -dimensionais sobre o corpo complexo é conhecida para  $n \leq 12$  por [4], enquanto que só é conhecida para álgebras de Lie nilpotentes sobre o corpo complexo de dimensão  $n \leq 7$  por [2]. Mais recentemente, alguns autores têm lidado com a classificação de álgebras de Lie nilpotentes  $n$ -dimensionais sobre corpos finitos  $\mathbb{F}_q$ , com  $q$  uma potência de um primo.

Especificamente, Schneider [55] obteve o número de classes de isomorfismo sobre o corpo finito  $\mathbb{F}_2$ , para  $n \leq 9$ , e sobre  $\mathbb{F}_3$  e  $\mathbb{F}_5$ , para  $n \leq 7$ .

Agora, a classificação de álgebras de Lie nilpotentes seis dimensionais sobre um corpo de característica diferente de dois são determinadas por Graaf em [37] e, sobre qualquer corpo arbitrário por Cicalo, Graaf e Schneider em [22]. Na classificação das álgebras de Lie filiformes sobre  $\mathbb{F}_q$ , Schneider obtém, em particular, que existem seis álgebras de Lie filiformes de dimensão seis sobre  $\mathbb{F}_2$  e, existem cinco sobre  $\mathbb{F}_3$  e  $\mathbb{F}_5$ ; ao passo que existem 15 álgebras de Lie filiformes de dimensão sete sobre  $\mathbb{F}_2$ , 11 sobre  $\mathbb{F}_3$  e 13 sobre  $\mathbb{F}_5$ . A importância de estudar a família de álgebras de Lie pré-filiformes vem da similaridade que existe entre as constantes de estrutura de seus elementos e aquelas de uma álgebra de Lie filiforme.

Assim, o conjunto  $\mathcal{P}_{n,q}$  pode ser considerado como um precursor do conjunto de álgebras de Lie filiformes  $n$ -dimensionais sobre o corpo finito  $\mathbb{F}_q$ . Por isto, as chamamos de álgebras de Lie pré-filiformes. Essas álgebras são introduzidas por Boza, Frediani e Núñez em [6], que identificam cada uma das álgebras de Lie de  $\mathcal{P}_{n,2}$  com um pseudografo direcionado. Isso lhes permite determinar a distribuição de tais álgebras de Lie em classes de isomorfismo para  $n \leq 5$ . O caso  $q = 3$  e  $n < 5$  é determinado de forma semelhante em [5].

Ambas as distribuições são respectivamente expostas na Tabela 2.4 e na Tabela 2.5, nas quais cada classe é enumerada de acordo com a notação original que é usada em [5]. Sua álgebra representativa correspondente é convenientemente escolhida para concordar com os resultados que são expostos nesta seção. Em ambas as tabelas, as álgebras são ordenadas de acordo com os invariantes de isomorfismo de seus grafos correspondentes  $G_1$  e  $G_2$ , que são introduzidos na Seção 2.2.

Além disso, é notável a existência de pelo menos  $n$  classes de isotopismo em cada um dos casos em consideração. Para mais exemplos destas álgebras e de suas classes de isotopismos, ver [32].

Na próxima subseção, expomos resultados distintos que nos permitem lidar com a distribuição de álgebras de Lie pré-filiformes de ordens superiores, não apenas em classes de isomorfismo e de isotopismo.

$n$	$A_T$	$T$	$G_1$ e $G_2$	$G_1$	$G_2$	
			Vértices	Aristas	Aristas	Triângulos
2	$\mathfrak{h}_2^1$	(0)	(0, 0, 0, 0)	0	0	0
	$\mathfrak{h}_2^2$	( $e_1$ )	(3, 3, 1, 6)	18	23	5
3	$\mathfrak{h}_3^1$	(0, 0)	(0, 0, 0, 0)	0	0	0
	$\mathfrak{h}_3^3$	( $e_2, 0$ )	(6, 6, 1, 24)	72	78	0
	$\mathfrak{h}_3^2$	( $e_1, 0$ )	(6, 6, 1, 24)	72	80	9
	$\mathfrak{h}_3^5$	( $e_2, e_1 + e_2$ )	(7, 7, 3, 36)	108	121	3
	$\mathfrak{h}_3^4$	( $e_2, e_1$ )	(7, 7, 3, 36)	108	121	11
	$\mathfrak{h}_3^6$	( $e_1, e_2$ )	(7, 7, 3, 36)	108	121	27
4	$\mathfrak{h}_4^4$	(0, 0, 0)	(0, 0, 0, 0)	0	0	0
	$\mathfrak{h}_4^3$	( $e_2, 0, 0$ )	(12, 12, 1, 96)	288	300	0
	$\mathfrak{h}_4^2$	( $e_1, 0, 0$ )	(12, 12, 1, 96)	288	302	17
	$\mathfrak{h}_4^6$	( $e_2, e_3, 0$ )	(14, 14, 3, 144)	432	450	2
	$\mathfrak{h}_4^7$	( $e_1, e_3, 0$ )	(14, 14, 3, 144)	432	450	18
	$\mathfrak{h}_4^5$	( $e_2, e_1 + e_2, 0$ )	(14, 14, 3, 144)	432	452	3
	$\mathfrak{h}_4^4$	( $e_2, e_1, 0$ )	(14, 14, 3, 144)	432	452	19
	$\mathfrak{h}_4^8$	( $e_1, e_2, 0$ )	(14, 14, 3, 144)	432	452	51
	$\mathfrak{h}_4^{12}$	( $e_2, e_2 + e_3, e_1$ )	(15, 15, 7, 168)	504	533	7
	$\mathfrak{h}_4^{13}$	( $e_2, e_1 + e_3, e_1$ )	(15, 15, 7, 168)	504	533	7
	$\mathfrak{h}_4^{10}$	( $e_2, e_3, e_1$ )	(15, 15, 7, 168)	504	533	23
	$\mathfrak{h}_4^9$	( $e_2, e_1, e_3$ )	(15, 15, 7, 168)	504	533	55
	$\mathfrak{h}_4^{11}$	( $e_2, e_1 + e_3, e_3$ )	(15, 15, 7, 168)	504	533	23
	$\mathfrak{h}_4^{14}$	( $e_1, e_2, e_3$ )	(15, 15, 7, 168)	504	533	119

Tabela 2.4: Invariantes do grafo para os grafos  $G_1$  e  $G_2$  relacionados às álgebras de Lie em  $\mathcal{P}_{n,2}$  para  $n \leq 4$ .

### 2.3.1 Classes de isotopismos de $\mathcal{P}_{n,q}$

Com o objetivo de determinar a distribuição de  $\mathcal{P}_{n,q}$  em classes de isotopismo, estudamos as  $n$ -uplas de estrutura deste tipo de álgebras de Lie, uma vez que estas as determinam.

**Lema 2.3.7.** *Sejam  $T$  e  $T'$  duas  $n$ -uplas de estrutura em  $\mathcal{T}_{n,q}$  que são iguais até a per-*

mutação e reclassificação dos subíndices dos vetores de base de  $\mathcal{P}_{n,q}$ . As álgebras de Lie  $A_T$  e  $A_{T'}$  são fortemente isotópicas.

**Demonstração:** Sejam  $\{e_1, \dots, e_n\}$  e  $\{e'_1, \dots, e'_n\}$  bases para  $A_T$  e  $A_{T'}$ , respectivamente. Suponhamos

$$T = \left( \sum_{j=1}^{n-1} t_{1j} e_j, \dots, \sum_{j=1}^{n-1} t_{(n-1)j} e_j \right) \text{ e } T' = \left( \sum_{j=1}^{n-1} t'_{1j} e'_j, \dots, \sum_{j=1}^{n-1} t'_{(n-1)j} e'_j \right).$$

Por hipótese, existem duas permutações  $\alpha, \beta \in S_{n-1}$  tais que  $t'_{\alpha(i)\beta(j)} = t_{ij}$ , para todos  $i, j < n$ . Basta então definir por linearidade o isotopismo forte  $(f, f, h)$  de  $A_T$  para  $A_{T'}$  tal que  $f(e_n) = h(e_n) = e'_n$ ,  $f(e_i) = e'_{\alpha(i)}$  e  $h(e_i) = e'_{\beta(i)}$ , para todos  $i < n$ . Temos

$$\begin{aligned} f(e_i)f(e_n) &= e'_{\alpha(i)}e'_n = \sum_{j=1}^{n-1} t'_{\alpha(i)j} e'_j \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} t'_{\alpha(i)\beta(j)} e'_{\beta(j)} = \sum_{j=1}^{n-1} t_{ij} e'_{\beta(j)}. \end{aligned}$$

A primeira igualdade se justifica pela definição de  $f$ , a segunda igualdade pelo produto entre  $e'_{\alpha(i)}$  e  $e'_n$ , a terceira igualdade porque  $\beta$  é uma permutação. Logo na soma temos os mesmos adendos, e a quarta igualdade pela definição de  $t'_{\alpha(i)\beta(j)}$ . Agora

$$\begin{aligned} h(e_i e_n) &= h\left(\sum_{j=1}^{n-1} t_{ij} e_j\right) = \sum_{j=1}^{n-1} h(t_{ij} e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} t_{ij} h(e_j) = \sum_{j=1}^{n-1} t_{ij} e'_{\beta(j)}. \end{aligned}$$

A primeira igualdade decorre do produto entre  $e_i$  e  $e_n$ , a segunda e terceira igualdades de que  $h$  é linear, e a quarta igualdade da definição de  $h(e_j)$ . Então

$$f(e_i)f(e_n) = h(e_i e_n), \text{ para todo } i < n. \quad \blacksquare$$

$n$	$A_T$	$T$	$G_1$ e $G_2$	$G_1$	$G_2$	
			Vértices	Aristas	Aristas	Triângulos
2	$\mathfrak{g}_2^1$	(0)	(0, 0, 0, 0)	0	0	0
	$\mathfrak{g}_2^2$	( $e_1$ )	(8, 8, 2, 48)	144	156	18
3	$\mathfrak{g}_3^1$	(0, 0)	(0, 0, 0, 0)	0	0	0
	$\mathfrak{g}_3^3$	( $e_2, 0$ )	(24, 24, 2, 432)	1296	1320	0
	$\mathfrak{g}_3^2$	( $e_1, 0$ )	(24, 24, 2, 432)	1296	1324	38
	$\mathfrak{g}_3^6$	( $e_2, 2e_1$ )	(26, 26, 8, 576)	1728	1770	8
	$\mathfrak{g}_3^5$	( $e_2, e_1 + e_2$ )	(26, 26, 8, 576)	1728	1770	8
	$\mathfrak{g}_3^7$	( $e_2, 2e_1 + e_2$ )	(26, 26, 8, 576)	1728	1770	44
	$\mathfrak{g}_3^4$	( $e_2, e_1$ )	(26, 26, 8, 576)	1728	1770	80
	$\mathfrak{g}_3^8$	( $e_1, e_2$ )	(26, 26, 8, 576)	1728	1770	152

Tabela 2.5: Invariantes do grafo para os grafos  $G_1$  e  $G_2$  relacionados às álgebras de Lie em  $\mathcal{P}_{n,3}$  para  $n \leq 3$ .

**Exemplo 2.3.8.** Do Lema 2.3.7, temos que as álgebras de Lie não isomorfas  $\mathfrak{h}_4^4$ ,  $\mathfrak{h}_4^6$ ,  $\mathfrak{h}_4^7$  e  $\mathfrak{h}_4^8$  em  $\mathcal{P}_{4,2}$  (ver Tabela 3.1) são fortemente isotópicas em pares. Da mesma forma, as álgebras de Lie não isomorfas  $\mathfrak{h}_4^{11}$  e  $\mathfrak{h}_4^{13}$  também são fortemente isotópicas. A seguinte Tabela mostra a permutação que as faz, em pares, fortemente isotópicas

$A_T$	$A_{T'}$	Permutação
$\mathfrak{h}_4^4$	$\mathfrak{h}_4^6$	(13)
$\mathfrak{h}_4^4$	$\mathfrak{h}_4^7$	(132)
$\mathfrak{h}_4^4$	$\mathfrak{h}_4^8$	(12)
$\mathfrak{h}_4^6$	$\mathfrak{h}_4^7$	(12)
$\mathfrak{h}_4^6$	$\mathfrak{h}_4^8$	(132)
$\mathfrak{h}_4^7$	$\mathfrak{h}_4^8$	(23)



$n$	$A_T$	$T$	$G_1$ e $G_2$	$G_1$	$G_2$	
			Vértices	Aristas	Aristas	Triângulos
4	$\mathfrak{g}_1^4$	$(0, 0, 0)$	$(0, 0, 0, 0)$	0	0	0
	$\mathfrak{g}_4^3$	$(e_2, 0, 0)$	$(72, 72, 2, 3888)$	11664	11736	0
	$\mathfrak{g}_4^2$	$(e_1, 0, 0)$	$(72, 72, 2, 3888)$	11664	11740	110
	$\mathfrak{g}_4^8$	$(e_2, e_3, 0)$	$(78, 78, 8, 5184)$	15552	15642	6
	$\mathfrak{g}_4^9$	$(e_1, e_3, 0)$	$(78, 78, 8, 5184)$	15552	15642	114
	$\mathfrak{g}_4^4$	$(e_2, e_1, 0)$	$(78, 78, 8, 5184)$	15552	15646	8
	$\mathfrak{g}_4^5$	$(e_2, e_1 + e_2, 0)$	$(78, 78, 8, 5184)$	15552	15646	8
	$\mathfrak{g}_4^6$	$(e_2, 2e_1, 0)$	$(78, 78, 8, 5184)$	15552	15646	8
	$\mathfrak{g}_4^7$	$(e_2, 2e_1 + e_2, 0)$	$(78, 78, 8, 5184)$	15552	15646	116
	$\mathfrak{g}_4^{10}$	$(e_1, e_2, 0)$	$(78, 78, 8, 5184)$	15552	15646	440
	$\mathfrak{g}_4^{18}$	$(e_3, e_2 + e_3, e_1 + e_2)$	$(80, 80, 26, 5616)$	16848	16980	26
	$\mathfrak{g}_4^{19}$	$(e_3, e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3)$	$(80, 80, 26, 5616)$	16848	16980	26
	$\mathfrak{g}_4^{20}$	$(e_3, e_2 + e_3, e_1 + 2e_2)$	$(80, 80, 26, 5616)$	16848	16980	26
	$\mathfrak{g}_4^{21}$	$(e_3, e_2 + e_3, e_1 + 2e_2 + 2e_3)$	$(80, 80, 26, 5616)$	16848	16980	26
	$\mathfrak{g}_4^{12}$	$(e_2, e_1 + e_2, e_3)$	$(80, 80, 26, 5616)$	16848	16980	134
	$\mathfrak{g}_4^{13}$	$(e_3, e_2, e_1 + 2e_3)$	$(80, 80, 26, 5616)$	16848	16980	134
	$\mathfrak{g}_4^{15}$	$(e_2, 2e_1, e_3)$	$(80, 80, 26, 5616)$	16848	16980	134
	$\mathfrak{g}_4^{17}$	$(e_3, e_2, 2e_1 + e_2 + 2e_3)$	$(80, 80, 26, 5616)$	16848	16980	134
	$\mathfrak{g}_4^{14}$	$(e_3, e_2, e_1 + e_2)$	$(80, 80, 26, 5616)$	16848	16980	242
	$\mathfrak{g}_4^{16}$	$(e_3, e_2, 2e_1 + 2e_3)$	$(80, 80, 26, 5616)$	16848	16980	458
	$\mathfrak{g}_4^{11}$	$(e_2, e_1, e_3)$	$(80, 80, 26, 5616)$	16848	16980	566
	$\mathfrak{g}_4^{22}$	$(e_1, e_2, 2e_3)$	$(80, 80, 26, 5616)$	16848	16980	566

Tabela 2.6: Invariantes do grafo para os grafos  $G_1$  e  $G_2$  relacionados às álgebras de Lie em  $\mathcal{P}_{n,3}$  para  $n = 4$ .

Por meio do isotopismo entre duas álgebras podemos enunciar condições nos elementos das entradas das  $n$ -uplas de estrutura.

**Proposição 2.3.9.** *Seja  $T$  uma  $n$ -upla de estrutura em  $\mathcal{T}_{n,q}$ . Sempre existe uma  $n$ -upla de estrutura  $T' = \left( \sum_{j=1}^{n-1} t'_{1j} e'_j, \dots, \sum_{j=1}^{n-1} t'_{(n-1)j} e'_j \right) \in \mathcal{T}_{n,q}$  tal que  $A_{T'}$  é fortemente isotópica a  $A_T$  e as próximas duas condições se verificam:*

a) Se  $t'_{ii} = 0$ , para algum  $i \geq 1$ , então  $t'_{jk} = 0$ , para todo  $j, k \geq i$ .

b) Se  $t'_{ii} \neq 0$ , para algum  $i \geq 1$ , então  $t'_{ij} = 0$ , para todo  $j \neq i$ .

**Demonstração:** Seja  $T = \left( \sum_{j=1}^{n-1} t_{1j}e_j, \dots, \sum_{j=1}^{n-1} t_{(n-1)j}e_j \right) \in \mathcal{T}_{n,q}$ . Considerando que a  $n$ -upla de estrutura  $T'$  existe, então se cumpre o isotopismo forte entre as álgebras e daí temos as condições a) e b). Tomamos dois casos na escolha de  $T$ .

- Caso 1)  $T' = T$ . Do Lema 2.3.7, qualquer permutação dos componentes de  $T'$  e qualquer remarcação dos índices dos vetores de base de  $\mathcal{P}_{n,q}$  dá origem a uma nova  $n$ -upla de estrutura de uma álgebra de Lie em  $\mathcal{P}_{n,q}$  que é fortemente isotópica a  $A_T$ . Assim, podemos modificar  $T'$  de modo que, se  $t'_{ii} = 0$ , para algum  $i < n$ , então
  - $t'_{ji} = 0$ , para todo  $j > i$ . Caso contrário, reorganizamos convenientemente do  $i$ -ésimo para os  $(n-1)$  ésimos componentes de  $T'$ .
  - $t'_{ij} = 0$ , para todo  $j > i$ . Caso contrário, permutamos convenientemente os índices dos vetores de base  $e_i, \dots, e_{n-1}$ .

A condição a) na declaração se aplica então à combinação dessas duas premissas.

- Caso 2)  $T \neq T'$ . Modificamos  $T'$  de forma que, para cada  $i < n$  tal que  $t'_{ii} \neq 0$ , definimos por linearidade o isotopismo forte  $(T_{Id}, T_{Id}, h)$  de  $A_T$  em  $A_{T'}$  tal que  $h(e_i) = e'_i - \frac{1}{t'_{ii}} \left( \sum_{j=1}^{i-1} t'_{ij}e'_j + \sum_{j=i+1}^{n-1} t'_{ij}e'_j \right)$  e  $h(e_j) = e'_j$ , para todo  $j \neq i$ . Então deve cumprir-se  $T_{Id}(e_i)T_{Id}(e_n) = h(e_i e_n)$ . Agora,

$$\begin{aligned} T_{Id}(e_i)T_{Id}(e_n) &= e'_i e'_n = \sum_{j=1}^{n-1} t'_{ij} e'_j \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} t'_{ij} e'_j + t'_{ii} e'_i + \sum_{j=i+1}^{n-1} t'_{ij} e'_j \end{aligned}$$

e no outro lado da igualdade temos

$$\begin{aligned} h(e_i e_n) &= h\left( \sum_{j=1}^{n-1} t'_{ij} e_j \right) = h\left( \sum_{j=1}^{i-1} t'_{ij} e_j + t'_{ii} e_i + \sum_{j=i+1}^{n-1} t'_{ij} e_j \right) \\ &= h\left( \sum_{j=1}^{i-1} t'_{ij} e_j \right) + h(t'_{ii} e_i) + h\left( \sum_{j=i+1}^{n-1} t'_{ij} e_j \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{i-1} t'_{ij} h(e_j) + t'_{ii} h(e_i) + \sum_{j=i+1}^{n-1} t'_{ij} h(e_j) \\
&= \sum_{j=1}^{i-1} t'_{ij} e'_j + t'_{ii} \left( e'_i \frac{-1}{t'_{ii}} \left( \sum_{j=1}^{i-1} t'_{ij} e'_j - \sum_{j=i+1}^{n-1} t'_{ij} e'_j \right) \right) + \sum_{j=i+1}^{n-1} t'_{ij} e'_j \\
&= \sum_{j=1}^{i-1} t'_{ij} e'_j + t'_{ii} e'_i - \sum_{j=1}^{i-1} t'_{ij} e'_j - \sum_{j=i+1}^{n-1} t'_{ij} e'_j + \sum_{j=i+1}^{n-1} t'_{ij} e'_j = t'_{ii} e'_i.
\end{aligned}$$

Portanto, se  $(T_{Id}, T_{Id}, h)$  é um isotopismo forte, então  $t'_{ij} = 0$ , para todo  $j \neq i$ .

Assim a condição b) é válida. ■

A Proposição 2.3.9 determina que toda álgebra de Lie em  $\mathcal{P}_{n,q}$  é fortemente isotópica a uma álgebra de Lie cuja  $n$ -upla de estrutura cumpre as condições a) e b), isto é, que a matriz  $(t'_{ij})$  associada as constantes de estrutura tem forma triangular.

**Exemplo 2.3.10.** Seja a álgebra de Lie em  $\mathcal{P}_{4,2}$  com terna de estrutura  $T = (e_3, e_3 + e_4, e_2)$ . Do Lema 2.3.7, esta álgebra é fortemente isotópica à álgebra de Lie em  $\mathcal{P}_{4,2}$  com terna de estrutura  $T' = (e'_1, e'_2 + e'_3, e'_2)$ , quando permutamos o primeiro e o terceiro componentes em  $T$  e renumeramos  $e_2, e_3$  e  $e_4$  para  $e'_1, e'_2$  e  $e'_3$ , respectivamente. Esta é, por sua vez, fortemente isotópica à álgebra de Lie em  $\mathcal{P}_{4,2}$  com terna de estrutura  $T'' = (e''_1, e''_2, e''_2 - e''_3)$ , se consideramos o isotopismo forte  $(T_{Id}, T_{Id}, h)$ , com  $h$  linearmente definido por  $h(e'_2) = e''_2 - e''_3$  e  $h(e'_i) = e''_i$ , para todo  $i \in \{1, 3\}$ . Lembremos que a primeira terna  $T'$  significa que os produtos dos elementos da base são:

- $e'_1 e'_4 = e'_1$ ,
- $e'_2 e'_4 = e'_2 + e'_3$ ,
- $e'_3 e'_4 = e'_2$ .

Na segunda terna  $T''$  são:

- $e''_1 e''_4 = e''_1$ ,
- $e''_2 e''_4 = e''_2$ ,
- $e''_3 e''_4 = e''_2 - e''_3$ .

Provamos que, de fato,  $(T_{Id}, T_{Id}, h)$  é um isotopismo entre estas duas algebras, isto é,  $h(e'_i e'_4) = T_{Id}(e'_i) T_{Id}(e'_4)$ , para todo  $i < 4$ .

- $h(e'_1 e'_4) = h(e'_1) = e''_1 = e''_1 e''_4 = T_{Id}(e'_1)T_{Id}(e'_4)$ ,
- $h(e'_2 e'_4) = h(e'_2 + e'_3) = h(e'_2) + h(e'_3) = e''_2 - e''_3 + e''_3 = e''_2 = e''_2 e''_4 = T_{Id}(e'_2)T_{Id}(e'_4)$ ,
- $h(e'_3 e'_4) = h(e'_2) = e''_2 - e''_3 = e''_3 e''_4 = T_{Id}(e'_3)T_{Id}(e'_4)$ .

Considerando os produtos da segunda terna de estrutura  $T''$ , vemos que a matriz quadrática das constantes de estrutura  $(t_{ij})$  é dada tem forma triangular. Lembrando a definição dos produtos  $e''_i e''_n$ , temos

$$\begin{cases} t_{11} = 1, & t_{12} = t_{13} = t_{14} = 0, \\ t_{22} = 1, & t_{21} = t_{23} = t_{24} = 0, \\ t_{32} = t_{33} = 1, & t_{31} = t_{34} = 0, \\ t_{41} = t_{42} = t_{43} = t_{44} = 0. \end{cases}$$

Por isto a matriz é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nos seguintes resultados, vemos que toda álgebra de Lie em  $\mathcal{P}_{n,q}$  é fortemente isotópica a uma álgebra de Lie cuja terna de estrutura tem forma diagonal.

**Exemplo 2.3.11.** A álgebra de Lie em  $\mathcal{P}_{4,2}$  com terna de estrutura  $T = (e_1, e_2, e_2 - e_3)$  é fortemente isotópica à álgebra de Lie em  $\mathcal{P}_{4,2}$  com terna de estrutura  $T' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ , uma vez que consideramos o isotopismo forte  $(T_{Id}, T_{Id}, h')$ , com  $h'$  definido linearmente por  $h'(e_3) = -e'_3 + e'_2$  e  $h'(e_i) = e'_i$ , para todo  $i \in \{1, 2\}$ . Provamos que, de fato,  $(T_{Id}, T_{Id}, h')$  é um isotopismo, isto é  $h'(e_i e_4) = T_{Id}(e_i)T_{Id}(e_4)$ , para todo  $i < 4$ .

- $h'(e_1 e_4) = h'(e_1) = e'_1 = e'_1 e'_4 = T_{Id}(e_1)T_{Id}(e_4)$ ,
- $h'(e_2 e_4) = h'(e_2) = e'_2 = e'_2 e'_4 = T_{Id}(e_2)T_{Id}(e_4)$ ,
- $h'(e_3 e_4) = h'(e_2 - e_3) = h'(e_2) - h'(e_3) = e'_2 - (-e'_3 + e'_2) = e'_3 = e'_3 e'_4 = T_{Id}(e_3)T_{Id}(e_4)$ .

Obtemos a matriz quadrática das constantes de estrutura  $(t_{ij})$  na forma diagonal. Primeiro temos os produtos

$$\begin{cases} e'_1 e'_4 = e'_1, \\ e'_2 e'_4 = e'_2, \\ e'_3 e'_4 = e'_3. \end{cases}$$

Lembramos que, da definição dos produtos  $e'_i e'_n$ , temos

$$\begin{cases} t_{11} = 1, & t_{12} = t_{13} = t_{14} = 0, \\ t_{22} = 1, & t_{21} = t_{23} = t_{24} = 0, \\ t_{33} = 1, & t_{31} = t_{32} = t_{34} = 0, \\ t_{41} = t_{42} = t_{43} = t_{44} = 0. \end{cases}$$

Por isto a matriz é

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Lema 2.3.12.** *Seja  $T = (t_1, \dots, t_{n-1})$  uma  $(n-1)$ -upla de estrutura em  $\mathcal{T}_{n,q}$  e sejam  $i, j$  dois inteiros positivos distintos menores que  $n$ . Seja  $T' = (t_1, \dots, t_{i-1}, at_i + bt_j, t_{i+1}, \dots, t_{n-1}) \in \mathcal{T}_{n,q}$ , para alguns  $a, b \in \mathbb{F}_q$  tal que  $a \neq 0$ . Então  $A_T$  é fortemente isotópica à  $A_{T'}$ .*

**Demonstração:** Sejam  $\{e_1, \dots, e_n\}$  e  $\{e_1, \dots, ae_i + be_j, e_{i+1}, \dots, e_n\}$  bases para  $A_T$  e  $A_{T'}$ , respectivamente. Basta definir, por linearidade, o isotopismo forte  $(f, f, Id)$  de  $A_T$  a  $A_{T'}$  tal que  $f(e_i) = \frac{1}{a}(e_i - be_j)$  e  $f(e_k) = e_k$ , para todo  $k \in [n] \setminus \{i\}$ . Para evitar confusão, denotamos por  $\cdot$  e  $\circ$  os respectivos produtos em  $A_T$  e  $A_{T'}$ . Assim

$$\begin{aligned} Id(e_i \cdot e_n) &= e_i \circ e_n = (e_i - be_j + be_j) \circ e_n \\ &= \left[ \left( a \frac{1}{a} (e_i - be_j) \right) + be_j \right] \circ e_n = (af(e_i) + bf(e_j)) \circ f(e_n) \\ &= f(ae_i + be_j) \circ f(e_n) = f(e_i) \circ f(e_n). \end{aligned}$$

A primeira igualdade segue de  $Id$  ser um isotopismo; a segunda porque estamos somando

zero; a terceira porque multiplicamos por um; a quarta, pela definição de  $f$ ; a quinta, pela linearidade de  $f$  e a última, pela definição de  $T'$ , pois na posição  $i$  da base em  $A_{T'}$  a entrada é  $ae_i + be_j$ . Portanto,  $(f, f, Id)$  é um isotopismo entre  $A_T$  e  $A_{T'}$ . ■

## Capítulo 3

# Isotopismos de álgebras de evolução

A teoria exposta nos Capítulos 1 e 2 nos dá as bases para falar de isotopismo de outras álgebras sobre outros corpos. Neste último capítulo a ideia principal é analisar o conjunto  $\mathcal{E}_n(\mathbb{K})$  de álgebras de evolução  $n$ -dimensionais sobre um corpo  $\mathbb{K}$ , as quais têm uma semelhança com as álgebras de Lie pre-filiformes. Graças a esta semelhança conseguimos enunciar e provar algumas propriedades parecidas àquelas do Capítulo 2. Em especial, utilizamos a Seção 1.3 de Geometria Algébrica Computacional, para estudar algumas distribuições de álgebras de evolução sobre um corpo. Enunciamos qual é a distribuição de álgebras de evolução bidimensionais em classes de isotopismo e de isomorfismo.

### 3.1 Preliminares

A motivação para compreender álgebras de evolução é entender sua relação com a Genética. Por isto precisamos enunciar algumas definições que são desta área. Para este estudo e para mais informações sobre isto, usamos os livros de Wörz-Busekros [60] e Tian [56], e ao longo da dissertação usamos a tese do Falcón [32]. Definimos ainda as álgebras de evolução e enunciamos uma de suas propriedades nesta seção.

**Definição 3.1.1.** Um *gene* é a unidade molecular de informação hereditária. Este consiste no *ácido desoxirribonucléico (ADN)*, o qual contém o código para sintetizar proteínas e determina cada um dos atributos que caracterizam e distinguem cada organismo.

**Exemplo 3.1.2.** Exemplo de genes nos humanos são: a cor dos olhos, a cor da pele e a cor do cabelo.

**Definição 3.1.3.** Os genes relacionados a um determinado atributo podem ter formas alternativas, que são chamadas de *alelos*.

**Exemplo 3.1.4.** A cor dos olhos está relacionada aos alelos castanhos, verdes e azuis.

**Definição 3.1.5.** Os genes estão dispostos nos *cromossomos*, que constituem longas fitas de ADN formadas por sequências ordenadas de genes.

**Definição 3.1.6.** A localização dos alelos relacionados a um determinado atributo em um cromossomo é seu *locus*, que é preservado por herança.

Os cromossomos carregam, portanto, o código genético de qualquer organismo. Os cromossomos na genética desempenham um papel importante no processo de reprodução, pois os atributos que caracterizam a prole são herdados dos alelos que estão contidos nos cromossomos dos pais. Essa herança depende do tipo de organismos em consideração.

**Definição 3.1.7.** Os organismos *diploides* carregam um conjunto duplo de cromossomos (um de cada progenitor).

**Definição 3.1.8.** Os organismos se reproduzem por meio de *células sexuais ou gametas*, cada um carregando um único conjunto de cromossomos.

**Definição 3.1.9.** A fusão de dois gametas do sexo oposto dá origem a um *zigoto*, que contém um conjunto duplo de cromossomos. Se  $A$  e  $a$  denotam esses dois alelos, diz-se que o novo indivíduo é do *tipo zigótico*  $Aa$ . Se  $A = a$ , então o zigoto é denominado *homozigoto*. Caso contrário, é denominado *heterozigoto*.

**Observação 3.1.10.** Existem leis distintas que regulam, do ponto de vista probabilístico, a influência teórica de cada um desses dois alelos no atributo final herdado da prole. Assim, por exemplo, as leis de *herança simples de Mendel* indicam que, para cada par de alelos relacionados a um determinado atributo, a próxima geração herdará com igual frequência ambos os alelos.

A teoria das álgebras não associativas é introduzida na Genética por Etherington [29] e [30], a fim de estudar as leis de Mendel com ajuda de uma formulação matemática. Isto nos permite entender a reprodução sexual e o mecanismo de herança de um organismo, considerando a fusão de gametas em um zigoto como uma multiplicação algébrica cujas constantes de estrutura determinam a distribuição de probabilidade da produção gamética.



**Definição 3.1.11.** Seja  $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$  um conjunto de alelos geneticamente distintos que estão relacionados a um determinado atributo de uma população. Uma *álgebra genética* sobre um corpo  $\mathbb{K}$  que é baseada no conjunto  $\beta$  é uma álgebra  $n$ -dimensional de base  $\beta$ , cujas constantes de estrutura em cada produto  $e_i e_j = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k e_k$  referem-se à probabilidade de que um gameta arbitrário, produzido por um indivíduo do tipo zigótico  $e_i e_j$ , contenha o alelo  $e_k$ . Assim,  $\sum_{k=1}^n c_{ij}^k = 1$ , para todos  $i, j \leq n$ .

Daqui em diante os produtos  $e_i e_j$  que não forem explicitados devem ser considerados nulos.

**Exemplo 3.1.12.** Seja  $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ . No Exemplo 3.1.4, definimos  $e_1$  como a cor azul,  $e_2$  como a cor verde e  $e_3$  como a cor mel. Assim, uma álgebra  $A$  com base  $\beta$  e definida pelo produto  $e_1 e_2 = \frac{2}{5}e_1 + \frac{2}{5}e_2 + \frac{1}{5}e_3$  é uma álgebra genética.

**Observação 3.1.13.** Observamos que a nilpotência e a solubilidade das álgebras genéticas caracterizam o desaparecimento da população em processos de evolução.

Dependendo de algumas variações possíveis nas condições iniciais, tipos distintos de álgebras genéticas podem ser definidos.

**Definição 3.1.14.** Uma *álgebra gamética* é uma álgebra genética real de dimensão finita, na qual cada elemento  $\sum_{i=1}^n a_i e_i$ , tal que  $0 \leq a_i \leq 1$ , para todo  $i \leq n$ , e  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ , pode representar uma população, um único indivíduo ou um único gameta. Para cada  $i \leq n$ , o coeficiente  $a_i$  constitui, respectivamente, a porcentagem de frequência do alelo  $e_i$  na população, indivíduo ou gameta correspondente.

**Exemplo 3.1.15.** Na herança mendeliana simples, por exemplo, temos  $e_i e_j = \frac{1}{2}(e_i + e_j)$ , para qualquer par de alelos  $e_i$  e  $e_j$ .

**Observação 3.1.16.** Observamos que, se dois gametas carregam o mesmo alelo, então a prole o herdará. Particularmente, no caso de se tratar de um organismo diplóide, a tabela de multiplicação da álgebra gamética bidimensional correspondente de base  $\{e_1, e_2\}$  é, portanto,

	$e_1$	$e_2$	
$e_1$	$e_1$	$\frac{1}{2}(e_1 + e_2)$	.
$e_2$	$\frac{1}{2}(e_1 + e_2)$	$e_2$	

Holgate e Campos [13] e [43] mostram que certas famílias conhecidas de álgebras genéticas são isotópicas. Particularmente, eles consideram os isotopismos de álgebras genéticas como uma forma de formular matematicamente a mutação de alelos no processo de herança. Neste sentido, um segundo tipo de álgebra genética, que é interessante ser considerado aqui, é o formada por *álgebras de mutação*. Nessas álgebras, antes de participar da formação de um zigoto, cada alelo  $e_i$  se modifica num alelo  $e_j$  com probabilidade  $m_{ij}$ . Portanto,  $0 \leq m_{ij} \leq 1$  e  $\sum_{j=1}^n m_{ij} = 1$ .

**Definição 3.1.17.** Sejam  $(A, \cdot)$  uma álgebra genética sobre um corpo  $\mathbb{K}$  com base  $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$  e  $M = (m_{ij})$  uma matriz  $n \times n$  com entradas em  $\mathbb{K}$ . Definimos a *álgebra de mutação*  $(A, \circ)$ , com base  $\beta$ , tal que  $e_i \circ e_j = \sum_{k=1}^n m_{ik} e_k \cdot \sum_{l=1}^n m_{jl} e_l = \sum_{k,l=1}^n m_{ik} m_{jl} e_i \cdot e_k$ .

**Exemplo 3.1.18.** Consideremos a álgebra  $A$  no Exemplo 3.1.12 e a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definimos a álgebra de mutação  $A'$ , com o produto

$$e_1 \circ e_2 = \sum_{k,l=1}^n m_{1k} m_{2l} e_1 \cdot e_k = e_1 e_2 = \frac{2}{5} e_1 + \frac{2}{5} e_2 + \frac{1}{5} e_3.$$

Neste caso  $A$  e  $A'$  são isomorfas.

Um terceiro tipo de álgebras genéticas, cujo estudo constitui de fato o objetivo principal deste capítulo, é aquele formado por álgebras de evolução. Para estudar os processos de reprodução assexuada, Tian e Vojtechovsky [56] e [57] introduzem essas álgebras como um tipo de álgebra genética que possibilita lidar algebricamente com a autorreprodução de alelos na genética não mendeliana. Essas álgebras também constituem uma conexão fundamental entre Álgebra, Sistemas Dinâmicos, processos de Markov, Teoria dos Grafos e Teoria de Grupos (ver [44] e [56]).

**Definição 3.1.19.** Uma álgebra  $n$ -dimensional sobre um corpo  $\mathbb{K}$  é considerada uma *álgebra de evolução* se admite uma base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de modo que as próximas duas condições sejam satisfeitas:

i)  $e_i e_j = 0$ , se  $i \neq j$ .

ii)  $e_i e_i = \sum_{j=1}^n t_{ij} e_j$ , para algumas constantes de estrutura  $t_{i1}, \dots, t_{in} \in \mathbb{K}$

**Exemplo 3.1.20.** Seja  $A$  a álgebra de dimensão 2, com base  $\{e_1, e_2\}$ , definida pelos produtos  $e_1 e_1 = e_1$ ,  $e_1 e_2 = e_2 e_1 = e_2 e_2 = 0$ . Portanto, a álgebra  $A$  é uma álgebra de evolução.

**Definição 3.1.21.** Uma álgebra de evolução é dita *não degenerada* se não existirem linhas nulas na matriz quadrática  $(t_{ij})$  formada por suas constantes de estrutura, isto é, se  $e_i e_i \neq 0$ , para todo  $i \leq n$ . Caso contrário, é considerada *degenerada*.

**Observação 3.1.22.** Da Definição 3.1.21, numa álgebra de evolução não degenerada as constantes de estrutura  $t_{ii}$  são todas diferentes de zero; no caso de alguma ser igual a zero, a álgebra é degenerada.

**Exemplo 3.1.23.** Um exemplo de uma álgebra de evolução degenerada é a álgebra  $A$  do Exemplo 3.1.20. Um exemplo de álgebra de evolução não degenerada é a álgebra  $A'$  com base  $\{e'_1, e'_2\}$  descrita pelos produtos  $e'_1 e'_1 = e'_2$  e  $e'_2 e'_2 = e'_1$ .

Daqui em diante, o conjunto de álgebras de evolução  $n$ -dimensionais sobre um corpo  $\mathbb{K}$  será denotado por  $\mathcal{E}_n(\mathbb{K})$ .

**Observação 3.1.24.** Cada vetor básico de uma álgebra de evolução constitui um alelo; o produto  $e_i e_i$  representa a *autorreplacação*; e cada constante de estrutura  $t_{ij}$  constitui a probabilidade de que o alelo  $e_i$  se torne o alelo  $e_j$  na próxima geração.

De acordo com [10], [12], [16] e [18], a teoria das álgebras de evolução vem sendo desenvolvida nos últimos anos sem restrições probabilísticas nas constantes de estrutura.

Segundo Falcón, em [32], um dos problemas principais da teoria de álgebras de evolução  $n$ -dimensionais é sua distribuição em classes de isomorfismo e isotopismo. A distribuição em classes de isomorfismo foi tratada para álgebras de evolução bidimensionais sobre o corpo dos complexos. Camacho, Gomez, Omirov, em Turdibaev em [11] e Casas em [17] estudam as álgebras de evolução em  $\mathcal{E}_2(\mathbb{C})$ , cujas matrizes quadráticas são, respectivamente, matrizes de Jordan e matrizes triangulares superiores. Com respeito a corpos arbitrários, Hegazi e Abdelwahab [42] classificam álgebras de evolução nilpotentes de dimensão até quatro. Particularmente, o seguinte resultado é conhecido.

**Teorema 3.1.25.** (Teorema 4.1.1, [17]) Cada álgebra de evolução complexa não-abeliana bidimensional  $E \in \mathcal{E}_2(\mathbb{C})$  é isomorfa a exatamente uma das seguintes álgebras:

a)  $\dim E^2 = 1$  :

- $E_1 : e_1e_1 = e_1$  e  $e_2e_2 = 0$ .
- $E_2 : e_1e_1 = e_1$  e  $e_2e_2 = e_1$ .
- $E_3 : e_1e_1 = e_1 + e_2$  e  $e_2e_2 = -e_1 - e_2$ .
- $E_4 : e_1e_1 = e_2$  e  $e_2e_2 = 0$ .

b)  $\dim E^2 = 2$  :

- $E_5 : e_1e_1 = e_1 + a_2e_2$  e  $e_2e_2 = a_3e_1 + e_2$ , com  $a_2, a_3 \in \mathbb{C}$  tais que  $1 - a_2a_3 \neq 0$ .  
Aqui,  $E_{5_{a_2, a_3}} \cong E'_{5_{a_3, a_2}}$ , para todos  $a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ .
- $E_{6_{a_4}} : e_1e_1 = e_2$  e  $e_2e_2 = e_1 + a_4e_2$ , com  $a_4 \in \mathbb{C}$ . Se  $a_4, a'_4 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , então  $E_{6_{a_4}} \cong E_{6_{a'_4}}$  se e só se,  $\frac{a'_4}{a_4} = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}$ , para algum  $k \in \{0, 1, 2\}$ .

**Demonstração:** Como  $E$  é uma álgebra de evolução com base  $\{e_1, e_2\}$ , temos

$$e_1e_1 = a_1e_1 + a_2e_2, \quad e_2e_2 = a_3e_1 + a_4e_2 \quad \text{e} \quad e_1e_2 = e_2e_1 = 0.$$

a) Como  $\dim E^2 = 1$ , tem-se  $e_1e_1 = c_1(a_1e_1 + a_2e_2)$ ,  $e_2e_2 = c_2(a_1e_1 + a_2e_2)$  e  $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$ . Evidentemente,  $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ , porque se não, a álgebra seria abeliana. Como  $e_1$  e  $e_2$  são simétricos, podemos supor  $c_1 \neq 0$  e, por uma simples mudança de base, podemos supor  $c_1 = 1$ .

- Caso 1.  $a_1 \neq 0$ . Tomamos uma mudança apropriada da base  $e'_1 = a_1e_1 + a_2e_2$  e  $e'_2 = Ae_1 + Be_2$ , com  $a_1B - a_2A \neq 0$ . Consideramos o produto

$$\begin{aligned} 0 &= e'_1e'_2 = (a_1e_1 + a_2e_2)(Ae_1 + Be_2) \\ &= a_1Ae_1^2 + a_2Ae_2e_1 + a_1Be_1e_2 + a_2Be_2^2 = a_1Ae_1^2 + a_2Be_2^2 \\ &= a_1A(a_1e_1 + a_2e_2) + a_2Bc_2(a_1e_1 + a_2e_2) = (a_1A + a_2Bc_2)(a_1e_1 + a_2e_2). \end{aligned}$$

Portanto,  $a_1A + a_2Bc_2 = 0$ , ou seja,  $A = \frac{-a_2Bc_2}{a_1}$  e  $a_1B - a_2A = a_1B + \frac{a_2^2Bc_2}{a_1} \neq 0$ ; assim  $0 \neq \frac{a_1^2B + a_2^2Bc_2}{a_1} = \frac{(a_1^2 + a_2^2c_2)B}{a_1}$ . Isso significa que, no

caso  $a_1^2 + a_2^2 c_2 \neq 0$ , consideramos a mudança de base acima. Temos os produtos

$$\begin{aligned} e'_1 e'_1 &= (a_1 e_1 + a_2 e_2)(a_1 e_1 + a_2 e_2) \\ &= a_1^2 e_1^2 + a_2 a_1 e_2 e_1 + a_1 a_2 e_1 e_2 + a_2^2 e_2^2 = a_1^2 e_1^2 + a_2^2 e_2^2 \\ &= a_1^2 (a_1 e_1 + a_2 e_2) + a_2^2 c_2 (a_1 e_1 + a_2 e_2) = (a_1^2 + a_2^2 c_2)(a_1 e_1 + a_2 e_2) \\ &= (a_1^2 + a_2^2 c_2) e'_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e'_2 e'_2 &= (A e_1 + B e_2)(A e_1 + B e_2) \\ &= A^2 e_1^2 + B A e_2 e_1 + A B e_1 e_2 + B^2 e_2^2 = A^2 e_1^2 + B^2 e_2^2 \\ &= A^2 (a_1 e_1 + a_2 e_2) + B^2 c_2 (a_1 e_1 + a_2 e_2) = (A^2 + B^2 c_2)(a_1 e_1 + a_2 e_2) \\ &= (A^2 + B^2 c_2) e'_1 = \left( \frac{a_2^2 B^2 c_2^2}{a_1^2} + B^2 c_2 \right) e'_1 \\ &= \left( \frac{B^2 c_2 (a_1^2 + a_2^2 c_2)}{a_1^2} \right) e'_1 \end{aligned}$$

– Caso 1.1  $c_2 = 0$ . Por isto  $e_1 e_1 = a_1^2 e_1$  e  $e_2 e_2 = e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$ . Tomamos  $e'_1 = \frac{e_1}{a_1^2}$ , conseguimos a álgebra  $E_1$ .

– Caso 1.2  $c_2 \neq 0$ . Neste caso,  $B = \sqrt{\frac{a_1^2}{c_2}}$  e obtemos  $e_1 e_1 = (a_1^2 + a_2^2 c_2) e_1$  e  $e_2 e_2 = (a_1^2 + a_2^2 c_2) e_1$ .

Se  $a_1^2 + a_2^2 c_2 \neq 0$ , a mudança de base  $e'_1 = \frac{e_1}{a_1^2 + a_2^2 c_2}$  e  $e'_2 = \frac{e_2}{a_1^2 + a_2^2 c_2}$  nos traz à álgebra com multiplicação  $e_1 e_1 = e_1$  e  $e_2 e_2 = e_1$ .

Se  $a_1^2 + a_2^2 c_2 = 0$ , então  $c_2 = -\frac{a_1^2}{a_2^2}$  e daí  $e_1 e_1 = a_1 e_1 + a_2 e_2$  e  $e_2 e_2 = -\frac{a_1^3}{a_2^2} e_1 - \frac{a_1^2}{a_2} e_2$ .

A mudança de base  $e'_1 = \frac{e_1}{a_1}$  e  $e'_2 = \frac{a_2}{a_1^2}$  fornece a álgebra  $E_3$ .

– Caso 2.  $a_1 = 0$ . Portanto,  $e_1 e_1 = a_2 e_2$  e  $e_2 e_2 = c_2 a_2 e_2$ , com  $a_2 \neq 0$ .

Se  $c_2 = 0$ , pela mudança  $e'_1 = \frac{e_1}{\sqrt{a_2}}$ , obtemos a álgebra  $E_4$ .

Se  $c_2 \neq 0$ , por  $e'_1 = \frac{e_1}{\sqrt{c_2 a_2^2}}$  e  $e'_2 = \frac{e_2}{c_2 a_2}$ , temos a álgebra determinada por  $e_1 e_1 = e_2$ ,  $e_2 e_2 = e_2$ , que é isomorfa à álgebra  $E_2$ .

b) Agora consideramos álgebras com  $\dim E^2 = 2$ . Escrevemos  $e_1 e_1 = a_1 e_1 + a_2 e_2$  e  $e_2 e_2 = a_3 e_1 + a_4 e_2$ , com  $a_1 a_4 - a_2 a_3 \neq 0$ .

– Caso 1.  $a_1 \neq 0$  e  $a_4 \neq 0$ . Por consequência, a mudança de base  $f_1 = a_1^{-1} e_1$  e  $f_2 = a_4^{-1} e_2$  se torna possível supondo  $a_1 = a_4 = 1$ . Portanto, obtemos a família

biparamétrica  $E_{5_{a_2, a_3}} : e_1e_1 = e_1 + a_2e_2, e_2e_2 = a_3e_1 + e_2, 1 - a_2a_3 \neq 0$ .

Tomemos a mudança geral de base  $e'_1 = A_1e_1 + A_2e_2$ , e  $e'_2 = B_1e_1 + B_2e_2$ , com  $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$ . Consideramos o produto

$$\begin{aligned} 0 &= e'_1e'_2 = (A_1e_1 + A_2e_2)(B_1e_1 + B_2e_2) \\ &= A_1B_1(e_1 + a_2e_2) + A_2B_2(a_3e_1 + e_2) \\ &= (A_1B_1 + A_2B_2a_3)e_1 + (A_1B_1a_2 + A_2B_2)e_2. \end{aligned}$$

Já que esta nova álgebra deve ser também uma álgebra de evolução, temos  $A_1B_1 + A_2B_2a_3 = 0$  e  $A_1B_1a_2 + A_2B_2 = 0$ . Disto sabemos  $A_2B_2(1 - a_2a_3) = 0$  e  $A_1B_1(1 - a_2a_3) = 0$ . Como  $1 - a_2a_3 \neq 0$ , concluímos  $A_1B_1 = A_2B_2 = 0$ .

– Caso 1.1.  $A_2 = 0$ . Então  $B_1 = 0$ . Consideramos os produtos

$$\begin{aligned} e'_1e'_1 &= A_1^2(e_1 + a_2e_2) = e'_1 + a'_2e'_2 = A_1e_1 + a'_2B_2e_2 \\ &\Rightarrow A_1^2 = A_1, A_1^2a_2 = a'_2B_2 \Rightarrow A_1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e'_2e'_2 &= B_2^2(a_3e_1 + e_2) = a'_3e'_1 + e'_2 = a'_3A_1e_1 + B_2e_2 \\ &\Rightarrow B_2^2a_3 = a'_3A_1, B_2^2 = B_2 \Rightarrow B_2 = 1 \end{aligned}$$

– Caso 1.2.  $A_1 = 0$ . Então  $B_2 = 0$  e, da família de álgebras  $E_{5_{a_2, a_3}}$ , temos a família  $E_{5_{a_3, a_2}}$ .

– Caso 2.  $a_1 = 0$  ou  $a_4 = 0$ . Como  $e_1$  e  $e_2$  são simétricos, sem perda de generalidade podemos supor  $a_1 = 0$ , ou seja,  $e_1e_1 = a_2e_2$  e  $e_2e_2 = a_3e_1 + a_4e_2$ , com  $a_2a_3 \neq 0$ .

Pela mudança de base  $e'_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{a_2^2a_3}}e_1$  e  $e'_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{a_2a_3^2}}e_2$ , obtemos a família uniparamétrica de álgebras  $E_{6_{a_4}} : e_1e_1 = e_2, e_2e_2 = e_1 + a_4e_2$ .

Tomamos a mudança geral de base  $e'_1 = A_1e_1 + A_2e_2$  e  $e'_2 = B_1e_1 + B_2e_2$ , com  $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$ . Consideramos o produto

$$\begin{aligned} 0 &= e'_1e'_2 = (A_1e_1 + A_2e_2)(B_1e_1 + B_2e_2) \\ &= A_1B_1e_1^2 + A_1B_2e_1e_2 + A_2B_1e_2e_1 + A_2B_2e_2^2 \\ &= A_1B_1e_2 + A_2B_2(e_1 + a_4e_2). \end{aligned}$$

Portanto,  $A_1B_1 + A_2B_2a_4 = 0$  e  $A_2B_2 = 0$ , implicando  $A_1B_1 = 0$  e  $A_2B_2 = 0$ .

Sem perda de generalidade, podemos assumir  $A_2 = 0$  e daí  $B_1 = 0$ .

Consideramos os produtos

$$\begin{aligned} e'_1 e'_1 &= A_1^2 e_2 = B_2 e_2 \Rightarrow A_1^2 = B_2, \\ e'_2 e'_2 &= B_2^2 (e_1 + a_4 e_2) = e'_1 + a'_4 e'_2 = A_1 e_1 + a'_4 B_2 e_2 \\ &\Rightarrow B_2^2 = A_1, B_2^2 a_4 = B_2 a'_4. \end{aligned}$$

Destas igualdades concluímos  $B_2^3 = 1$  e  $B_2 a_4 = a'_4$ .

Se  $\frac{a'_4}{a_4} = \cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right)$ , para algum  $k = 0, 1, 2$ . Agora colocamos a constante  $B_2 = \cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right)$  e obtemos o isomorfismo entre as álgebras  $E_{6_{a_4}}$  e  $E_{6_{a'_4}}$ .

As álgebras obtidas são não isomorfas em pares, o que verificamos por comparação das propriedades algébricas listadas na tabela a seguir:

	$\dim E^2$	Nilpotência a direita	$\dim(\text{centro})$	Elementos nil	Solubilidade
$E_1$	1	Não	1	Sim	Não
$E_2$	1	Não	0	Sim	Não
$E_3$	1	Não	0	Sim	Sim
$E_4$	1	Sim	1	Sim	Sim
$E_5$	2	Não	0	Não	Não
$E_6$	2	Não	0	Sim	Não

Isso completa a prova do teorema. ■

Os isotopismos são uma ferramenta interessante para simular mutações em álgebras genéticas e são considerados no caso de lidar com álgebras de evolução em [32]. O principal objetivo deste capítulo é aprofundar este aspecto. Particularmente, a seguinte seção trata da distribuição de álgebras de evolução de dimensão finita sobre qualquer corpo base em classes de isotopismo de acordo com suas  $n$ -uplas de estrutura e com a dimensão de seus anuladores.

## 3.2 $n$ -uplas de estrutura e anuladores

Nesta seção, analisamos duas estruturas relacionadas às álgebras de evolução que podem ser muito importantes na hora de determinar sua distribuição em classes de isotopismo e isomorfismo. Estudamos estas duas estruturas separadamente.

### 3.2.1 $n$ -uplas de estrutura de álgebras de evolução

A semelhança das álgebras de evolução com as álgebras de Lie pre-filiformes dá origem a esta seção, já que os produtos dos elementos das bases nos dois conjuntos de álgebras é parecido. Numa álgebra de Lie pre-filiforme  $n$ -dimensional, os produtos são da forma  $e_i e_n$ , com  $i \leq n$  e os outros produtos zero; na álgebra de evolução  $n$ -dimensional os produtos são da forma  $e_i e_i$ , com  $i \leq n$  e os outros produtos zero. Por conseguinte, podemos usar alguns dos resultados do Capítulo 2. Assim, desta semelhança, temos a primeira definição.

**Definição 3.2.1.** Uma  $n$ -upla de estrutura de uma álgebra de evolução em  $\mathcal{E}_n(\mathbb{K})$  é uma  $n$ -upla  $T = (t_1, \dots, t_n)$  tal que  $t_i = e_i e_i$ , para todo  $i \leq n$ . Denotamos essa álgebra de evolução por  $A_T$ .

Daqui em diante, o conjunto de  $n$ -uplas de estrutura de álgebras de evolução em  $\mathcal{E}_n(\mathbb{K})$  será denotado por  $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ .

**Exemplo 3.2.2.** No Teorema 3.1.25, a álgebra de evolução  $E_1$  tem  $n$ -upla de estrutura  $T = (e_1, 0)$ . Assim,  $t_1 = e_1$  e  $t_2 = 0$ .

Os seguintes resultados seguem analogamente ao Lema 2.3.7 e à Proposição 2.3.9, que foram expostos no Capítulo 2.

**Lema 3.2.3.** *Sejam  $T$  e  $T'$  duas  $n$ -uplas de estrutura em  $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$  que são iguais a menos da permutação de suas entradas e da ordem dos vetores da base. As álgebras de evolução  $A_T$  e  $A_{T'}$  são fortemente isotópicas.*

**Demonstração:** Sejam  $\{e_1, \dots, e_n\}$  e  $\{e'_1, \dots, e'_n\}$  bases para  $A_T$  e  $A_{T'}$ , respectivamente. Suponhamos

$$T = \left( \sum_{j=1}^n t_{1j} e_j, \dots, \sum_{j=1}^n t_{nj} e_j \right) \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \text{ e } T' = \left( \sum_{j=1}^n t'_{1j} e_j, \dots, \sum_{j=1}^n t'_{nj} e_j \right) \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K}).$$

Partindo da hipótese, existem duas permutações  $\alpha, \beta \in S_n$  tais que  $t'_{\alpha(i)\beta(j)} = t_{ij}$ , para todos  $i, j \leq n$ . Basta então definir, por linearidade, o isotopismo forte  $(f, f, h)$  de  $A_T$  para  $A_{T'}$  tal que  $f(e_n) = h(e_n) = e'_n$ ,  $f(e_i) = e'_{\alpha(i)}$  e  $h(e_i) = e'_{\beta(i)}$ , para todo  $i \leq n$ . Então

$$f(e_i) f(e_n) = e'_{\alpha(i)} e'_n = \sum_{j=1}^n t'_{\alpha(i)j} e'_j = \sum_{j=1}^n t'_{\alpha(i)\beta(j)} e'_{\beta(j)} = \sum_{j=1}^n t'_{ij} e'_{\beta(j)} = h(e_i e_n),$$



para todo  $i \leq n$ . ■

Para mais detalhes da demonstração é só ver a demonstração do Lema 2.3.7.

**Exemplo 3.2.4.** Do Lema 3.2.3, as álgebras de evolução  $E_1$  e  $E_4$  no Teorema 3.1.25 são fortemente isotópicas. Por definição  $E_1 : e_1e_1 = e_1, e_2e_2 = 0$  e  $E_4 : e'_1e'_1 = e'_2, e'_2e'_2 = 0$ . Especificamente, a terna  $(T_{Id}, T_{Id}, T_{(12)})$  é um isotopismo forte entre as duas álgebras, já que  $T = (e_1, 0)$  e  $T' = (e_2, 0)$ . Com  $T_{(12)} : E_1 \rightarrow E_4$  tal que  $T_{(12)}(e_1) = e_2$  e  $T_{(12)}(e_2) = e_1$ , então

$$\begin{aligned} T_{Id}(e_1)T_{Id}(e_1) &= e'_1e'_1 = e'_2 = T_{(12)}(e_1) = T_{(12)}(e_1e_1), \\ T_{Id}(e_2)T_{Id}(e_2) &= 0 = f(0) = f(e_2e_2). \end{aligned}$$

**Proposição 3.2.5.** *Seja  $T$  uma  $n$ -upla de estrutura em  $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ . Sempre existe uma  $n$ -upla de estrutura  $T' = \left( \sum_{j=1}^n t'_{1j}e'_j, \dots, \sum_{j=1}^n t'_{nj}e'_j \right) \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$  tal que  $A_{T'}$  é fortemente isotópica à  $A_T$  e as próximas duas condições são satisfeitas:*

- a) *Se  $t'_{ii} = 0$ , para algum  $i \geq 1$ , então  $t'_{jk} = 0$ , para todos  $j, k \geq i$ .*
- b) *Se  $t'_{ii} \neq 0$ , para algum  $i \geq 1$ , então  $t'_{ij} = 0$ , para todo  $j \neq i$ .*

**Demonstração:** Seja  $T' = \left( \sum_{j=1}^n t'_{1j}e'_j, \dots, \sum_{j=1}^n t'_{nj}e'_j \right) \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ . Como um primeiro passo na construção da  $n$ -upla de estrutura necessária  $T'$ , consideramos  $T' = T$ . Do Lema 3.2.3, qualquer permutação dos componentes de  $T'$  e qualquer remarcação dos índices dos vetores da base em  $\mathcal{T}_n$  dão origem a uma nova  $n$ -upla de estrutura de uma álgebra em  $\mathcal{T}_n$  que é fortemente isotópica a  $A_T$ . Tendo isto em mente, podemos modificar  $T'$  de modo que, se  $t'_{ii} = 0$ , para algum  $i \leq n$ , então

- $t'_{ji} = 0$ , para todo  $j > i$ . Caso contrário, reorganizamos convenientemente da  $i$ -ésima para as  $n$ -ésimas entradas de  $T'$ .
- $t'_{ij} = 0$ , para todo  $j > i$ . Caso contrário, permutamos convenientemente os índices dos vetores da base  $e_i, \dots, e_n$ .

A condição a) no enunciado da proposição se aplica então à combinação dessas duas premissas.

Agora, para obter a condição b), modificamos  $T'$  de forma que, para cada  $i \leq n$  tal que

$t'_{ii} \neq 0$ , definimos por linearidade o isotopismo forte  $(T_{Id}, T_{Id}, h)$  de  $A_T$  em  $A_{T'}$  de forma que  $h(e_i) = e'_i \frac{-1}{t'_{ii}} \left( \sum_{j=1}^{i-1} t'_{ij} e'_j - \sum_{j=i+1}^n t'_{ij} e'_j \right)$  e  $h(e_j) = e'_j$ , para todo  $j \neq i$ . Então

$$e'_i e'_n = T_{Id}(e_i) T_{Id}(e_n) = h(e_i e_n) = h\left(\sum_{j=1}^n t'_{ij} e_j\right) = \sum_{j=1}^{i-1} t'_{ij} e'_j + t'_{ii} h(e_i) + \sum_{j=i+1}^n t'_{ij} e'_j = t'_{ii} e'_i,$$

assim a condição b) é válida. ■

**Exemplo 3.2.6.** Seguindo os passos da prova anterior, obtemos que a álgebra de evolução  $E_3$  no Teorema 3.1.25 é fortemente isotópica à álgebra de evolução  $A_{(e'_1, -e'_1)} \in \mathcal{E}_2(\mathbb{C})$  por meio do isotopismo forte  $(T_{Id}, T_{Id}, h)$ , com  $h : E_3 \rightarrow A_{(e'_1, -e'_1)}$  tal que  $h(e_1) = e'_1 - e'_2$  e  $h(e_2) = e'_2$ . Provamos que de fato  $(T_{Id}, T_{Id}, h)$  é um isotopismo, já que

$$h(e_1 e_1) = h(e_1 + e_2) = h(e_1) + h(e_2) = e'_1 - e'_2 + e'_2 = e'_1 = e'_1 e'_1 = T_{Id}(e_1) T_{Id}(e_1),$$

$$h(e_2 e_2) = h(e_1 - e_2) = h(e_1) - h(e_2) = -e'_1 + e'_2 - e'_2 = -e'_1 = e'_2 e'_2 = T_{Id}(e_2) T_{Id}(e_2).$$

Da mesma forma, qualquer álgebra de evolução  $E_{5_{a,b}}$  no Teorema 3.1.25, é fortemente isotópica à álgebra  $E_{5_{0,0}}$ . Especificamente, se  $a$  e  $b$  são dois números complexos tais que  $ab \neq 1$ , então a terna  $(T_{Id}, T_{Id}, h')$  tal que  $h' : E_{5_{a_2, a_3}} \rightarrow A_T$  com  $h'(e_1) = e'_1 - a_2 e'_2$  e  $h'(e_2) = e'_2$  é um isotopismo forte entre a álgebra de evolução  $E_{5_{a_2, a_3}}$  e a álgebra de evolução  $A_T$  com dupla de estrutura  $T = (e'_1, b e'_1 + (1 - ab)e'_2) \in \mathcal{T}_2(\mathbb{C})$ . Provamos que de fato é um isotopismo, já que

- $h'(e_1 e_1) = h'(e_1 + a_2 e_2) = h'(e_1) + a_2 h'(e_2) = e'_1 - a_2 e'_2 + a_2 e'_2 = e'_1 = e'_1 e'_1 = T_{Id}(e_1) T_{Id}(e_1),$

- $h'(e_2 e_2) = h'(a_3 e_1 + e_2) = a_3 h'(e_1) + h'(e_2) = a_3 (e'_1 - a_2 e'_2) + e'_2 = a_3 e'_1 - a_3 a_2 e'_2 + e'_2 = a_3 e'_1 + (1 - a_2 a_3) e'_2 = e'_2 e'_2 = T_{Id}(e_2) T_{Id}(e_2).$

Agora, a terna  $(T_{Id}, T_{Id}, h'')$  tal que  $h'' : A_T \rightarrow E_{5_{0,0}}$  com  $h''(e'_2) = \frac{1}{1 - a_2 a_3} (e''_2 - a_3 e''_1)$  e  $h''(e'_1) = e''_1$  é um isotopismo forte entre as álgebras de evolução  $A_T$  e  $E_{5_{0,0}}$ . Provamos que  $h''$  é um isotopismo, pois

- $h''(e'_1 e'_1) = h''(e'_1) = e''_1 = e''_1 e''_1 = T_{Id}(e'_1) T_{Id}(e'_1),$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad h''(e'_2 e'_2) &= h''(a_3 e'_1 + (1 - a_2 a_3) e'_2) = a_3 h''(e'_1) + (1 - a_2 a_3) h''(e'_2) \\
&= a_3 e''_1 + (1 - a_2 a_3) \frac{1}{(1 - a_2 a_3)} (e''_2 - a_3 e''_1) = a_3 e''_1 + e''_2 - a_3 e''_1 \\
&= e''_2 = e''_2 e''_2 = T_{Id}(e'_2) T_{Id}(e'_2).
\end{aligned}$$

Finalmente, podemos provar que qualquer álgebra de evolução  $E_{6_a}$  no Teorema 3.1.25, também é fortemente isotópica à álgebra  $E_{5_{0,0}}$ . Especificamente, se  $a$  é um número complexo distinto de zero, então a terna  $(T_{(12)}, T_{(12)}, h''')$  tal que  $h''' : E_{6_{a_4}} \rightarrow E_{5_{0,0}}$ , com  $h'''(e'''_1) = e''_1 - a_4 e''_2$  e  $h'''(e'''_2) = e''_2$ , é um isotopismo forte entre as álgebras de evolução  $E_{6_{a_4}}$  e  $E_{5_{0,0}}$ . Provamos que de fato  $h'''$  é um isotopismo, já que

$$\begin{aligned}
\bullet \quad h'''(e'''_1 e'''_1) &= h'''(e'''_2) = e''_2 = e''_2 e''_2 = T_{(12)}(e_1) T_{(12)}(e_1), \\
\bullet \quad h'''(e'''_2 e'''_2) &= h'''(e'''_1 + a_2 e'''_2) = e''_1 - a_2 e''_2 + a_2 e''_2 = e''_1 = e''_1 e''_1 = T_{(12)}(e'''_2) T_{(12)}(e'''_2).
\end{aligned}$$

**Observação 3.2.7.** As álgebras de evolução, ao contrário das álgebras de Lie pre-filiformes, não apresentam um resultado semelhante ao Lema 2.3.12, o qual afirma que  $n$ -uplas de estrutura que são iguais, a menos da adição de suas entradas, dão origem a álgebras de Lie pré-filiformes fortemente isotópicas.

**Exemplo 3.2.8.** Da Observação 3.2.7, a álgebra de evolução  $E_3 = A_{(e_1+e_2, -e_1-e_2)}$  no Teorema 3.1.25 não é isotópica à álgebra de evolução  $A_{(e_1+e_2, 0)} \in \mathcal{E}_2(\mathbb{C})$ , cuja dupla de estrutura resulta daquela de  $E_3$  após adicionar sua primeira entrada à segunda. Isto segue da Proposição 1.2.8 e de  $\dim(\text{Ann}_{E_3}(E_3)) = 0 \neq 1 = \dim(\text{Ann}_{A_{(e_1+e_2, 0)}}(A_{(e_1+e_2, 0)}))$ .

Terminamos esta subseção determinando explicitamente a distribuição do conjunto  $\mathcal{E}_2(\mathbb{C})$  em classes de isotopismo.

**Proposição 3.2.9.** *Existem quatro classes de isotopismo de álgebras de evolução complexas bidimensionais. Elas correspondem à álgebra abeliana e às álgebras de evolução  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_{5_{0,0}}$  do Teorema 3.1.25.*

**Demonstração:** Dos Exemplos 3.2.4 e 3.2.6, temos:

- $E_1 \simeq E_4$ ;
- $E_3 \simeq A_{(e_1, -e_1)}$  e
- $E_{5_{a,b}} \simeq E_{6_c}$ , para todos  $a, b, c \in \mathbb{C}$  tais que  $ab \neq 1$  e  $c \neq 0$ .

Agora provamos que a terna  $(f, f, T_{Id})$  tal que  $f : E_2 \rightarrow A_{(e'_1, -e'_1)}$ , com  $f(e_1) = -ie'_2$  e  $f(e_2) = e'_1$ , é um isotopismo forte entre as álgebras  $E_2$  e  $A_{(e'_1, -e'_1)}$ . De fato,

- $f(e_1)f(e_1) = ie'_2 - ie'_2 = -e'_2e'_2 = -(-e'_1) = e'_1 = e'_1e'_1 = T_{Id}(e'_1e'_1)$ ,
- $f(e_2)f(e_2) = e'_2e'_2 = -e'_1 = T_{Id}(-e_1) = T_{Id}(e_2e_2)$ .

Assim,  $E_2 \simeq E_3$ . Basta provar, portanto, que as quatro álgebras de evolução do enunciado não são isotópicas. Do Lema 1.2.5, podemos nos concentrar nas três álgebras  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_{5_0,0}$ . Da Proposição 1.2.8, o primeiro não é isotópico à  $E_2$  ou  $E_{5_0,0}$ , porque

$$\dim \text{Ann}_{E_1}(E_1) = 1 \neq 0 = \dim \text{Ann}_{E_2}(E_2) = \dim \text{Ann}_{E_{5_0,0}}(E_{5_0,0}).$$

Finalmente, a partir do Lema 1.2.9, as álgebras de evolução  $E_2$  e  $E_{5_0,0}$  não são isotópicas, porque  $E_2^2 = \langle e_1 \rangle$  e  $\langle e''_1, e''_2 \rangle = E_{5_0,0}^2$ . ■

**Observação 3.2.10.** A prova da Proposição 3.2.9 envolve o fato de que a existência de elementos nilpotentes de álgebras de evolução não é preservada por isotopismos.

**Exemplo 3.2.11.** Da Observação 3.2.10, as álgebras de evolução  $E_2$  e  $E_3$  são isotópicas. No entanto, mesmo que o vetor base  $e_2$  seja nilpotente em  $E_2$  (especificamente,  $e_3^2 = (e_2^2)e_2 = e_1e_2 = 0$ ), a álgebra de evolução  $E_3$  não possui elementos nilpotentes.

### 3.2.2 Anuladores de álgebras de evolução

Considerando a estrutura do anulador, definimos um conjunto de álgebras de evolução com uma característica específica sobre os anuladores dessas álgebras.

**Definição 3.2.12.** Sejam  $n$  e  $m$  inteiros não negativos tais que  $m \leq n$  e  $\mathcal{E}_{n,m}(\mathbb{K})$  o subconjunto de álgebras de evolução  $n$ -dimensionais sobre um corpo  $\mathbb{K}$  com anulador  $(n-m)$ -dimensional. O conjunto  $\{\mathcal{E}_{n,m}(\mathbb{K}) \mid 0 \leq m \leq n\}$  constitui, portanto, uma partição do conjunto  $\mathcal{E}_n(\mathbb{K})$ .

Valem os seguintes resultados.

**Lema 3.2.13.** Cada álgebra de evolução em  $\mathcal{E}_{n,m}(\mathbb{K})$  é isomorfa a uma álgebra de evolução  $n$ -dimensional com uma base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  tal que  $e_i e_i \neq 0$  se, e somente se,  $i \leq m$ .

**Demonstração:** Seja  $A \in \mathcal{E}_{n,m}(\mathbb{K})$  uma álgebra de evolução de base  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . A partir da descrição do conjunto  $\mathcal{E}_{n,m}(\mathbb{K})$ , existe um subconjunto  $S = \{i_1, \dots, i_m\} \subset [n]$ , porque a dimensão do anulador de  $A$  é  $(n - m)$ . Logo existem  $m$  vetores linearmente independentes que não pertencem ao anulador de  $A$ . Como os elementos da álgebra são determinados pelos produtos  $e_i e_i$  dos elementos da base, temos  $e_i e_i \neq 0$  se, e somente se,  $i \in S$ . Basta assim considerar o isomorfismo que envia, respectivamente, os vetores da base  $e_{i_1}, \dots, e_{i_m}$  a  $e_1, \dots, e_m$  e fixa os outros vetores da base, isto é, um isomorfismo que neste caso corresponde a uma permutação entre  $m$  índices e que deixa fixos  $n - m$  índices. ■

**Proposição 3.2.14.** *Sejam  $m$  e  $m'$  dois inteiros não negativos distintos menores ou iguais a  $n$ . Então nenhuma álgebra de evolução em  $\mathcal{E}_{n,m}(\mathbb{K})$  é isotópica a uma álgebra de evolução em  $\mathcal{E}_{n,m'}(\mathbb{K})$ .*

**Demonstração:** As álgebras em  $\mathcal{E}_{n,m}(\mathbb{K})$  têm anuladores de dimensão  $n - m$  e em  $\mathcal{E}_{n,m'}(\mathbb{K})$  têm anuladores de dimensão  $n - m' \neq n - m$ . Pela Proposição 1.2.8, nenhuma álgebra em  $\mathcal{E}_{n,m}(\mathbb{K})$  é isotópica a uma álgebra em  $\mathcal{E}_{n,m'}(\mathbb{K})$ . ■

O seguinte resultado trata da distribuição do conjunto  $\mathcal{E}_{n,m}(\mathbb{K})$  em classes de isomorfismo e de isotopismo, para todos os inteiros positivos  $n \in \mathbb{N}$  e  $m \in \{0, 1, 2\}$ . No resultado, usamos a descrição das álgebras que são expostas no Teorema 3.1.25. Porém aqui falamos de álgebras de evolução  $n$ -dimensionais sobre um corpo  $\mathbb{K}$  em vez de álgebras de evolução complexas bidimensionais. Abuso semelhante de notação é feito daqui em diante, a fim de obter uma rotulação simples e coerente das álgebras de evolução que são expostas neste capítulo.

**Proposição 3.2.15.** *As próximas afirmações são válidas.*

- a) *O conjunto  $\mathcal{E}_{n,0}(\mathbb{K})$  é formado apenas pela álgebra abeliana  $n$ -dimensional.*
- b) *Qualquer álgebra de evolução em  $\mathcal{E}_{1,1}(\mathbb{K})$  é isomorfa à álgebra  $E_1$ .*
- c) *Se  $n > 1$ , então qualquer álgebra de evolução em  $\mathcal{E}_{n,1}(\mathbb{K})$  é isomorfa à álgebra  $E_1$  ou à álgebra  $E_4$ .*
- d) *Qualquer álgebra de evolução em  $\mathcal{E}_{n,1}(\mathbb{K})$  é isotópica para a álgebra  $E_1$ .*

- e) Qualquer álgebra de evolução em  $\mathcal{E}_{2,2}(\mathbb{K})$  é isomorfa a uma álgebra de evolução em  $\mathcal{E}_{2,2}(\mathbb{K})$  com base  $\{e_1, e_2\}$  tal que  $e_1e_1 \in \{e_1, e_2, e_1 + e_2\}$ .
- f) Qualquer álgebra de evolução em  $\mathcal{E}_{n,2}(\mathbb{K})$  é isotópica para  $E_2$  ou  $E_{50,0}$ .

**Demonstração:** Provamos cada afirmação separadamente.

- a) Esta afirmação segue diretamente da definição de  $\mathcal{E}_{n,0}(\mathbb{K})$ , já que a dimensão dos anuladores é  $n$ , portanto  $e_i e_i = 0$ , para todo  $i \in [n]$ , com  $e_i$  na base do anulador  $\text{Ann}_A(A)$ .
- b) De a)  $\mathcal{E}_{1,1}(\mathbb{K})$  não é abeliana. Portanto, da Proposição 1.2.6,  $\mathcal{E}_{1,1}(\mathbb{K})$  é isomorfa à álgebra definida pelo produto  $e_1e_1 = e_1$ , ou seja, à álgebra  $E_1$  (do Teorema 3.1.25).
- c) Seja  $A$  uma álgebra de evolução  $n$ -dimensional em  $\mathcal{E}_{n,1}(\mathbb{K})$  com uma base  $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ , que é descrita por sua matriz quadrática de constantes de estrutura  $(t_{ij})$ . Pelo Lema 3.2.13, temos  $e'_i e'_i \neq 0$  se, e somente se,  $i \leq 1$ . Logo  $e'_i e'_i = 0$  e, assim,  $t_{ij} = 0$ , para todo  $i > 1$ . Denotamos por  $j_0 \leq n$  o menor inteiro positivo tal que  $t_{1j_0} \neq 0$ . Tal  $j_0$  existe, porque  $A$  não é abeliana. Além disso, podemos supor  $j_0 \in \{1, 2\}$ . Caso contrário, basta considerar o isomorfismo  $T_{(2j_0)}$  que troca os vetores da base  $e_2$  e  $e_{j_0}$ . Estudamos os dois casos.

- Se  $j_0 = 1$ , então temos que a transformação linear  $f : A \rightarrow E_1$  que é definida por  $f(e'_1) = t_{11}e_1 - \frac{1}{t_{11}} \sum_{j=2}^n t_{1j}e_j$  e  $f(e'_i) = e_i$ , para todo  $i > 1$ , é um isomorfismo entre  $A$  e a álgebra de evolução  $E_1$ , pois

$$\begin{aligned}
 * \quad & f(e'_i)f(e'_i) = e_i e_i = 0 = f(0) = f(e'_i e'_i), \text{ para } i > 1. \\
 * \quad & f(e'_1)f(e'_1) = \left(t_{11}e_1 - \frac{1}{t_{11}} \sum_{j=2}^n t_{1j}e_j\right)^2 = t_{11}^2 e_1 e_1 - e_1 \sum_{j=2}^n t_{1j}e_j - \left(\sum_{j=2}^n t_{1j}e_j\right)e_1 + \\
 & \frac{1}{t_{11}^2} \left(\sum_{j=2}^n t_{1j}e_j\right)^2 = t_{11}^2 = t_{11}^2 e_1 e_1 = t_{11}^2 e_1 = t_{11}^2 - \sum_{j=2}^n t_{1j}e_j + \sum_{j=2}^n t_{1j}e_j = \\
 & t_{11}f(e'_1) + \sum_{j=2}^n t_{1j}f(e'_j) = f\left(t_{11}e'_1 + \sum_{j=2}^n t_{1j}e'_j\right) = f\left(\sum_{j=1}^n t_{1j}e'_j\right) = f(e'_1 e'_1).
 \end{aligned}$$

- Se  $j_0 = 2$ , então temos que a transformação linear  $f : A \rightarrow E_4$  que é definida por  $f(e'_2) = \frac{1}{t_{12}}(e''_2 - \sum_{j=3}^n t_{1j}e''_j)$  e  $f(e'_i) = e''_i$ , para todo  $i \neq 2$ , é um isomorfismo entre  $A$  e a álgebra de evolução  $E_4$ . De fato,

$$* \quad f(e'_i)f(e'_i) = e''_i e''_i = 0 = f(0) = f(e'_i e'_i) \text{ para } i, j \neq 1, 2.$$

$$\begin{aligned}
* \quad f(e'_2)f(e'_2) &= \left(\frac{e''_2}{t_{12}} - \frac{1}{t_{12}} \sum_{j=3}^n t_{1j}e''_j\right) \left(\frac{e''_2}{t_{12}} - \frac{1}{t_{12}} \sum_{j=3}^n t_{1j}e''_j\right) = \frac{(e''_2)^2}{t_{12}^2} - \frac{e''_2}{t_{12}^2} \sum_{j=3}^n t_{1j}e''_j - \\
&\quad \frac{1}{t_{12}^2} \left(\sum_{j=3}^n t_{1j}e''_j\right) e''_2 + \frac{1}{t_{12}^2} \left(\sum_{j=3}^n t_{1j}e''_j\right)^2 = \frac{(e''_2)^2}{t_{12}^2} = 0 = f(0) = f(e'_2e'_2), \\
* \quad f(e'_1)f(e'_1) &= e''_1e''_1 = e''_2 = t_{11}e''_1 + e''_2 = t_{11}e''_1 + e''_2 - \sum_{j=3}^n t_{1j}e''_j + \sum_{j=3}^n t_{1j}e''_j = \\
&\quad t_{11}e''_1 + t_{12} \left(\frac{e''_2}{t_{12}} - \frac{1}{t_{12}} \sum_{j=3}^n t_{1j}e''_j\right) + \sum_{j=3}^n t_{1j}e''_j = t_{11}f(e'_1) + t_{12}f(e'_2) + \sum_{j=3}^n t_{1j}f(e'_j) = \\
&\quad f\left(t_{11}e'_1 + t_{12}e'_2 + \sum_{j=3}^n t_{1j}e'_j\right) = f\left(\sum_{j=1}^n t_{1j}e'_j\right) = f(e'_1e'_1).
\end{aligned}$$

d) Caso  $n = 1$ , então por *b*) concluímos o resultado.

Caso  $n \neq 1$ , basta observar que a terna  $(T_{Id}, T_{Id}, T_{(12)})$  é um isotopismo forte entre as álgebras de evolução  $E_1$  e  $E_4$  em *c*). Temos

$$\begin{aligned}
- \quad T_{Id}(e_1)T_{Id}(e_1) &= e''_1e''_1 = e''_2 = T_{(12)}(e_1) = T_{(12)}(e_1e_1), \\
- \quad T_{Id}(e_2)T_{Id}(e_2) &= e''_2e''_2 = 0 = T_{(12)}(0) = T_{(12)}(e_2e_2).
\end{aligned}$$

e) Seja  $A$  uma álgebra de evolução em  $\mathcal{E}_{2,2}(\mathbb{K})$  com base  $\{e'_1, e'_2\}$ . Do Lema 3.2.13, podemos supor a existência de um par  $(a, b) \in \mathbb{K}^2 \setminus (0, 0)$  tal que  $e'_1e'_1 = ae'_1 + be'_2$ . Se  $a \neq 0$ , então a álgebra  $A$  é isomorfa à álgebra de evolução com a mesma base tal que  $e_1e_1 = e_1$ , sempre que  $b = 0$ , e  $e_1e_1 = e_1 + e_2$ , sempre que  $b \neq 0$ . Para este fim, basta considerar o isomorfismo  $f : A \rightarrow E_1$  tal que  $f(e'_1) = ae_1$  e

$$f(e'_2) = \begin{cases} e_2, & \text{se } b = 0, \\ \frac{a^2}{b}e_2, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se  $a = 0$ , então  $b \neq 0$  e a álgebra  $A$  é isomorfa à álgebra de evolução com a mesma base tal que  $e_1e_1 = e_2$ , por meio do isomorfismo que envia  $e'_2$  para  $be_2$  e envia  $e'_1$  para  $e_1$ .

Assim, com  $a \neq 0$  e  $b = 0$ , temos

$$\begin{aligned}
- \quad f(e'_1)f(e'_1) &= ae_1ae_1 = a^2e_1^2 = a^2e_1 = a(ae_1) = af(e'_1) = f(ae'_1) = f(e'_1e'_1), \\
- \quad f(e'_2)f(e'_2) &= e_2e_2 = 0 = f(0) = f(e'_2e'_2).
\end{aligned}$$

Com  $a \neq 0$  e  $b \neq 0$ , temos

$$\begin{aligned}
- f(e'_1)f(e'_1) &= ae_1ae_1 = a^2e_1^2 = a^2(e_1 + e_2) = a^2e_1 + a^2e_2 = a(ae_1) + b \frac{a^2}{b}e_2 = \\
&= af(e'_1) + bf(e'_2) = f(ae'_1 + be'_2) = f(e'_1e'_1), \\
- f(e'_2)f(e'_2) &= \frac{a^2}{b}e_2 \frac{a^2}{b}e_2 = \frac{a^4}{b^2}e_2^2 = 0 = f(0) = f(e'_2e'_2).
\end{aligned}$$

Agora com  $a = 0$  e  $b \neq 0$ , temos o isomorfismo  $f : A \rightarrow E_4$  tal que  $f(e'_1) = e''_1$  e  $f(e'_2) = be''_2$ . De fato,

$$\begin{aligned}
- f(e'_1)f(e'_1) &= e''_1e''_1 = (e''_1)^2 = e''_2 = \frac{b}{b}e''_2 = bf(e'_2) = f(be'_2) = f(e'_1e'_1)f(ae'_1 + \\
&= be'_2) = f(e'_1e'_1), \\
- f(e'_2)f(e'_2) &= be''_2be''_2 = b^2(e''_2)^2 = 0 = f(0) = f(e'_2e'_2).
\end{aligned}$$

f) Seja  $A$  uma álgebra de evolução em  $\mathcal{E}_{n;2}(\mathbb{K})$ . Pela Proposição 3.2.5 e pelo Lema 3.2.13, podemos supor a existência de dois elementos  $a, b \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  tais que  $A$  é fortemente isotópica à álgebra de evolução em  $\mathcal{E}_{n;2}(\mathbb{K})$  com  $n$ -upla de estrutura  $T = (ae_1, be_1, 0, \dots, 0)$  ou  $T' = (ae_1, be_2, 0, \dots, 0)$  em  $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ . A álgebra de evolução  $A_T$  é isotópica a  $E_2$  por meio da terna  $(f, T_{Id}, T_{Id})$  com  $f : A_T \rightarrow E_2$  tal que  $f(e_1) = ae'_1$ ,  $f(e_2) = be'_2$  e  $f(e_i) = e'_i$ , para todo  $i > 2$ , pois

$$\begin{aligned}
- f(e_1)T_{Id}(e_1) &= ae'_1e'_1 = a(e'_1)^2 = ae_1 = T_{Id}(ae_1) = T_{Id}(e_1e_1), \\
- f(e_2)T_{Id}(e_2) &= be'_2e'_2 = b(e'_2)^2 = be_1 = T_{Id}(be_1) = T_{Id}(e_2e_2).
\end{aligned}$$

Enquanto a álgebra de evolução  $A_{T'}$  é fortemente isotópica à  $E_{50,0}$  por meio da terna  $(T_{Id}, T_{Id}, h)$  com  $h : A_{T'} \rightarrow E_{50,0}$  tal que  $h(e_1) = \frac{1}{a}e''_1$ ,  $h(e_2) = \frac{1}{b}e''_2$  e  $h(e_i) = e''_i$ , para todo  $i > 2$ , pois

$$\begin{aligned}
- T_{Id}(e_1)T_{Id}(e_1) &= e''_1e''_1 = e''_1 = a \left( \frac{1}{a}e''_1 \right) = ah(e_1) = h(ae_1) = h(e_1e_1), \\
- T_{Id}(e_2)T_{Id}(e_2) &= e''_2e''_2 = e''_2 = b \left( \frac{1}{b}e''_2 \right) = bh(e_2) = h(be_2) = h(e_2e_2). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

O seguinte teorema segue direto das últimas propriedades estudadas nesta seção.

**Teorema 3.2.16.** *Existem quatro classes de isotopismo de álgebras de evolução bidimensionais sobre qualquer corpo. Elas correspondem à álgebra abeliana e às álgebras de evolução  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_{50,0}$ .*

**Demonstração:** A Proposição 3.2.15 generaliza a Proposição 3.2.9 e determina explicitamente a distribuição de álgebras de evolução bidimensionais em classes de isotopismo,



qualquer que seja o corpo base. Assim podemos concluir que as classes de isotopismo são: a abeliana,  $E_1$ ,  $E_2$  e  $E_{5_0,0}$ . ■

### 3.3 Classes de isomorfismo do conjunto $\mathcal{E}_2(\mathbb{K})$

Estudamos particularmente as classes de isomorfismo do conjunto  $\mathcal{E}_2(\mathbb{K})$  com  $q$  uma potência de um primo. Especificamente nesta seção usamos o procedimento *isoAlg* no Algoritmo 2, com o objetivo de conhecer a distribuição de conjunto  $\mathcal{E}_2(\mathbb{K})$  em classes de isomorfismo para  $q \in \{2, 3, 5, 7\}$  do mesmo jeito que é feito no Capítulo 2. Por isto também mostramos para cada classe os invariantes dos grafos  $G_1$  e  $G_2$  nas Tabela 3.1, Tabela 3.2 e Tabela 3.3. Assim vemos com mais clareza as classes enunciadas no Teorema 3.2.16, as quais são identificadas por esses invariantes.

$q$	$n$ -upla de estrutura	$G_1$ e $G_2$ Vértices	$G_1$ Aristas	$G_2$ Aristas	$G_2$ Triângulos
2	$(0, 0)$	$(0, 0, 0, 0)$	0	0	0
	$(e_2, 0)$	$(2, 2, 1, 4)$	12	16	2
	$(e_1, 0)$	$(2, 2, 1, 4)$	12	18	7
	$(e_1, e_1)$	$(3, 3, 1, 6)$	18	25	7
	$(e_1 + e_2, e_1 + e_2)$	$(3, 3, 1, 6)$	18	25	7
	$(e_2, e_1)$	$(3, 3, 3, 7)$	21	33	8
	$(e_2, e_1 + e_2)$	$(3, 3, 3, 7)$	21	33	8
	$(e_1, e_1 + e_2)$	$(3, 3, 3, 7)$	21	33	12
	$(e_1, e_2)$	$(3, 3, 3, 7)$	21	33	16
	3	$(0, 0)$	$(0, 0, 0, 0)$	0	0
$(e_2, 0)$		$(6, 6, 2, 36)$	108	120	6
$(e_1, 0)$		$(6, 6, 2, 36)$	108	124	20
$(e_1, 2e_1)$		$(8, 8, 2, 48)$	144	160	18
$(e_1 + e_2, 2e_1 + 2e_2)$		$(8, 8, 2, 48)$	144	160	18
$(e_1, e_1)$		$(8, 8, 2, 48)$	144	164	22
$(e_2, e_1)$		$(8, 8, 8, 56)$	168	200	24
$(e_2, e_1 + e_2)$		$(8, 8, 8, 56)$	168	200	24
$(e_2, e_1 + 2e_2)$		$(8, 8, 8, 56)$	168	200	24
$(e_1 + e_2, 2e_1 + e_2)$		$(8, 8, 8, 56)$	168	200	24
$(e_1, e_1 + e_2)$		$(8, 8, 8, 56)$	168	200	36
$(e_1, 2e_1 + e_2)$		$(8, 8, 8, 56)$	168	200	36
$(e_1, e_2)$		$(8, 8, 8, 56)$	168	200	48

Tabela 3.1: Invariantes para os grafos  $G_1$  e  $G_2$  relacionados ao conjunto  $\mathcal{E}_2(\mathbb{F}_q)$  para  $q \in \{2, 3\}$ .

Para conhecer a eficiência do procedimento, expomos na Tabela 3.3 o tempo de execução e o uso de memória necessários para calcular cada distribuição.

$n$ -upla de estrutura	$G_1$ e $G_2$	$G_1$	$G_2$	
	Vértices	Aristas	Aristas	Triângulos
(0, 0)	(0, 0, 0, 0)	0	0	0
( $e_2$ , 0)	(20, 20, 4, 400)	1200	1240	20
( $e_1$ , 0)	(20, 20, 4, 400)	1200	1248	64
( $e_1$ , $e_1$ )	(24, 24, 4, 480)	1440	1488	60
( $e_1 + e_2$ , $4e_1 + 4e_2$ )	(24, 24, 4, 480)	1440	1488	60
( $e_1$ , $2e_1$ )	(24, 24, 4, 480)	1440	1496	68
( $e_2$ , $e_1$ )	(24, 24, 24, 544)	1632	1728	80
( $e_2$ , $e_1 + e_2$ )	(24, 24, 24, 544)	1632	1728	80
( $e_2$ , $e_1 + 2e_2$ )	(24, 24, 24, 544)	1632	1728	80
( $e_2$ , $e_1 + 3e_2$ )	(24, 24, 24, 544)	1632	1728	80
( $e_2$ , $e_1 + 4e_2$ )	(24, 24, 24, 544)	1632	1728	80
( $e_1 + e_2$ , $e_1 + 2e_2$ )	(24, 24, 24, 544)	1632	1728	80
( $e_1 + e_2$ , $e_1 + 3e_2$ )	(24, 24, 24, 544)	1632	1728	80
( $e_1 + e_2$ , $e_1 + 4e_2$ )	(24, 24, 24, 544)	1632	1728	80
( $e_1 + e_2$ , $2e_1 + e_2$ )	(24, 24, 24, 544)	1632	1728	80
( $e_1 + e_2$ , $3e_1 + e_2$ )	(24, 24, 24, 544)	1632	1728	80
( $e_1 + e_2$ , $2e_1 + 3e_2$ )	(24, 24, 24, 544)	1632	1728	80
( $e_1 + e_2$ , $3e_1 + 2e_2$ )	(24, 24, 24, 544)	1632	1728	80
( $e_1$ , $e_1 + e_2$ )	(24, 24, 24, 544)	1632	1728	120
( $e_1$ , $2e_1 + e_2$ )	(24, 24, 24, 544)	1632	1728	120
( $e_1$ , $3e_1 + e_2$ )	(24, 24, 24, 544)	1632	1728	120
( $e_1$ , $4e_1 + e_2$ )	(24, 24, 24, 544)	1632	1728	120
( $e_1$ , $e_2$ )	(24, 24, 24, 544)	1632	1728	160

Tabela 3.2: Invariantes para os grafos  $G_1$  e  $G_2$  relacionados ao conjunto  $\mathcal{E}_2(\mathbb{F}_5)$ .

$n$ -uplas de estrutura			
(0, 0)	( $e_2$ , $2e_1 + e_2$ )	( $e_1 + e_2$ , $e_1 + 2e_2$ )	( $e_1 + e_2$ , $3e_1 + 5e_2$ )
( $e_1$ , 0)	( $e_2$ , $2e_1 + 3e_2$ )	( $e_1 + e_2$ , $e_1 + 3e_2$ )	( $e_1 + e_2$ , $3e_1 + 6e_2$ )
( $e_2$ , 0)	( $e_2$ , $3e_1 + e_2$ )	( $e_1 + e_2$ , $e_1 + 4e_2$ )	( $e_1 + e_2$ , $4e_1 + 3e_2$ )
( $e_1$ , $e_1$ )	( $e_2$ , $3e_1 + 3e_2$ )	( $e_1 + e_2$ , $e_1 + 5e_2$ )	( $e_1 + e_2$ , $4e_1 + 5e_2$ )
( $e_1$ , $2e_1$ )	( $e_1$ , $e_1 + e_2$ )	( $e_1 + e_2$ , $e_1 + 6e_2$ )	( $e_1 + e_2$ , $4e_1 + 6e_2$ )
( $e_1$ , $3e_1$ )	( $e_1$ , $e_1 + 2e_2$ )	( $e_1 + e_2$ , $2e_1 + e_2$ )	( $e_1 + e_2$ , $6e_1 + 3e_2$ )
( $e_1$ , $e_2$ )	( $e_1$ , $e_1 + 3e_2$ )	( $e_1 + e_2$ , $2e_1 + 3e_2$ )	( $e_1 + e_2$ , $6e_1 + 5e_2$ )
( $e_2$ , $e_1$ )	( $e_1$ , $3e_1 + e_2$ )	( $e_1 + e_2$ , $2e_1 + 4e_2$ )	( $e_1 + e_2$ , $6e_1 + 6e_2$ )
( $e_2$ , $e_1 + e_2$ )	( $e_1$ , $3e_1 + 2e_2$ )	( $e_1 + e_2$ , $2e_1 + 5e_2$ )	
( $e_2$ , $e_1 + 3e_2$ )	( $e_1$ , $3e_1 + 3e_2$ )	( $e_1 + e_2$ , $2e_1 + 6e_2$ )	

Tabela 3.3: Distribuição em classes de isomorfismo do conjunto  $\mathcal{E}_2(\mathbb{F}_7)$ .

$q$	Tempo de execução	uso de memória
2	0 segundos	0 MB
3	3 segundos	0 MB
5	38 segundos	80 MB
7	278 segundos	1360 MB

Tabela 3.4: Tempo de execução e uso de memória necessários para calcular a distribuição do conjunto  $\mathcal{E}_2(\mathbb{F}_q)$  para  $q \leq 7$ .

O seguinte resultado segue direto do cálculo anterior.

**Teorema 3.3.1.** *Os conjuntos  $\mathcal{E}_2(\mathbb{F}_q)$ , com  $q \in \{2, 3, 5, 7\}$ , são respectivamente distribuídos em 9, 13, 23 e 38 classes de isomorfismo.*

Observamos que na Tabela 3.3, a distribuição do conjunto  $\mathcal{E}_2(\mathbb{F}_7)$  em nove classes de isomorfismo concorda com a correspondente ao conjunto  $\mathcal{E}_2(\mathbb{C})$ , que foi exposta no Teorema 3.1.25. Mas isto não se aplica a corpos finitos com grande número de elementos.

**Exemplo 3.3.2.** A álgebra de evolução  $A_{(e_1, 2e_1)}$ , que tem uma álgebra derivada unidimensional, não é isomorfa a nenhuma das quatro álgebras de evolução correspondentes  $E_1$  a  $E_4$  em  $\mathcal{E}_2(\mathbb{F}_q)$ , para  $q > 2$ .

Estudos adicionais são necessários para que se generalizem os resultados de Casas, Ladra e Omirov em [17] para um corpo qualquer. Nesta direção, usamos a Geometria Algébrica Computacional. Pela Proposição 3.2.15, podemos nos concentrar na distribuição do conjunto  $\mathcal{E}_{2,2}(\mathbb{K})$  em classes de isomorfismo e, mais especificamente, nas álgebras de evolução bidimensionais com base  $\{e_1, e_2\}$  tais que  $e_1e_1 \in \{e_1, e_2, e_1 + e_2\}$ .

Sejam  $A = A_{(ae_1+be_2, ce_1+de_2)}$  e  $A' = A_{(\alpha e'_1+\beta e'_2, \gamma e'_1+\delta e'_2)}$  duas álgebras de evolução bidimensionais isomorfas em  $\mathcal{E}_{2,2}(\mathbb{K})$  com as respectivas bases naturais  $\{e_1, e_2\}$  e  $\{e'_1, e'_2\}$ . Seja  $f$  um isomorfismo entre as duas álgebras com matriz não singular  $F = (f_{ij})$  tal que  $f(e_i) = f_{i1}e'_1 + f_{i2}e'_2$ , para todo  $i \in \{1, 2\}$ . A implementação do procedimento *isoAlg* nos permite garantir que, qualquer que seja o corpo base, a base de Gröbner reduzida do ideal no Teorema 1.3.33 relacionado ao isomorfismo de grupo entre as álgebras de evolução  $A$

e  $A'$  envolve em particular que

$$\begin{cases} (ad - bc)f_{11}f_{21} = 0, \\ (ad - bc)f_{12}f_{22} = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

De (3.1), podemos distinguir dois casos dependendo de  $ad = bc$  ou  $ad \neq bc$ . Eles se referem, respectivamente, a álgebras de evolução bidimensionais com uma álgebra derivada de uma ou duas dimensões. Lembramos que qualquer isomorfismo entre duas álgebras preserva a dimensão de suas álgebras derivadas correspondentes. Nas próximas duas subseções, analisamos cada um dos dois casos mencionados separadamente.

### 3.3.1 Álgebra derivada unidimensional ( $ad = bc$ )

Da observação anterior temos o estudo que realizamos nesta subseção,  $f$  é um isomorfismo com matriz não singular  $F = (f_{ij})$  entre um par de álgebras de evolução  $A = A_{(ae_1+be_2, ce_1+de_2)}$  e  $A' = A_{(\alpha e'_1+\beta e'_2, \gamma e'_1+\delta e'_2)}$  em  $E_{2,2}(\mathbb{K})$ , tal que  $ad = bc$  e  $\alpha\delta = \beta\gamma$ . Do item (e) na Proposição 3.2.15, podemos supor que  $a, b, \alpha, \beta \in \{0, 1\}$ . Em primeiro lugar, supomos  $A = A_{(e_1, ce_1)}$ , com  $c \in K \setminus \{0\}$ . A afirmação (e) na Proposição 3.2.15 dá origem ao seguinte estudo de casos:

- Caso 1.  $A' = A_{(e'_1, \gamma e'_1)}$ , com  $\gamma \in K \setminus \{0\}$ .

A identificação de coeficientes de um mesmo vetor base em cada uma das igualdades  $f(e_i e_j) = f(e_i)f(e_j)$ , para todo  $i, j \leq 2$ , envolve que  $f$  é um isomorfismo entre as duas álgebras em consideração se, e só se,  $f_{11}f_{21} = f_{12}f_{22} = 0$ . A não singularidade da matriz  $F$  implica  $f_{11} = f_{22} = 0$  ou  $f_{21} = f_{12} = 0$ . No primeiro caso, obtemos que  $f_{21}$  deve ser zero, o que é uma contradição com a não singularidade da matriz  $F$ . No segundo caso, obtemos  $c = \gamma f_{22}$ . Esse fato implica  $A_{(e_1, ce_1)} \cong A_{(e_1, cm^2 e_1)}$ , para todo  $c, m \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ .

- Caso 2.  $A' = A_{(e'_2, \delta e'_2)}$ , com  $\delta \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . O cálculo da base de Gröbner reduzida correspondente, que foi mencionado anteriormente, relacionada a essas suposições

nos permite garantir

$$\begin{cases} f_{11} = f_{22} = 0, \\ f_{12} = 1/\delta, \\ f_{21}^2 = c/\delta. \end{cases} \quad (3.2)$$

Se tomamos  $f_{21} = 1$ , então podemos assegurar, em particular,  $A_{(e_2, ce_2)} \cong A_{(e_1, ce_1)}$ , para todo  $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ .

- Caso 3.  $A' = A_{(e'_1+e'_2, \gamma(e'_1+e'_2))}$ , com  $\gamma \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . A partir da base de Gröbner reduzida relacionada a este caso, deduzimos

$$\begin{cases} \gamma \neq -1, \\ f_{11} = f_{12} = 1/(\gamma + 1), \\ f_{21} = -\gamma f_{22}, \\ c = \gamma(\gamma + 1)^2 f_{22}^2. \end{cases} \quad (3.3)$$

Particularmente, o determinante da matriz  $F$  coincide com  $f_{22}$ , que deve ser diferente de zero. Como consequência,  $A_{(e_1+e_2, c(e_1+e_2))} \cong A_{(e_1, c(c+1)^2 e_1)}$ , para todo  $c \in \mathbb{K} \setminus \{0, -1\}$ .

Do estudo de caso anterior, o caso  $A = A_{(e_2, de_2)}$ , com  $d \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ , pode ser referido ao Caso 1.2, porque  $A_{(e_2, de_2)} \cong A_{(e_1, de_1)}$ . Além disso, o caso  $A = A_{(e_1+e_2, c(e_1+e_2))}$ , com  $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ , pode ser referido ao Caso 1.3 exceto para o caso  $c = -1$ , ou seja, exceto para a álgebra de evolução  $A_{(e_1+e_2, -(e_1+e_2))}$ . Os seguintes resultados reúnem o que acabamos de expor no estudo de caso anterior.

**Proposição 3.3.3.** *As próximas afirmações são válidas no conjunto  $\mathcal{E}_{2,2}(\mathbb{K})$ .*

- $A_{(e_1, ce_1)} \cong A_{(e_1, cm^2 e_1)}$  para todo  $c, m \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ .
- $A_{(e_2, ce_2)} \cong A_{(e_1, ce_1)}$ , para todo  $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ .
- $A_{(e_1+e_2, c(e_1+e_2))} \cong A_{(e_1, c(c+1)^2 e_1)}$ , para todo  $c \in \mathbb{K} \setminus \{0, -1\}$ .

**Demonstração:** Mostramos qual é o isomorfismo que existe nos dois primeiros itens, porém com o estudo dos casos é suficiente para a prova dos três itens.

a) A função  $f : A_{(e_1, cm^2e_1)} \rightarrow A_{(e_1, ce_1)}$  com  $f(e_1) = e_1$  e  $f(e_2) = me_2$ .

$$- f(e_1)f(e_1) = e_1e_1 = e_1 = f(e_1) = f(e_1e_1),$$

$$- f(e_2)f(e_2) = me_2me_2 = m^2e_2^2 = m^2ce_1 = m^2cf(e_1) = f(m^2ce_1) = f(cm^2e_1) = f(e_2e_2).$$

b) A função  $f : A_{(e_1, ce_1)} \rightarrow A_{(e_2, ce_2)}$  com  $f(e_1) = e_2$  e  $f(e_2) = \sqrt{c}e_1$ .

$$- f(e_1)f(e_1) = e_2e_2 = e_2 = f(e_1) = f(e_1e_1),$$

$$- f(e_2)f(e_2) = \sqrt{c}e_1\sqrt{c}e_1 = ce_2^2 = cf(e_1) = f(ce_1) = f(e_2e_2). \quad \blacksquare$$

Dos resultados na Proposição 3.3.3 temos a seguinte classificação.

**Teorema 3.3.4.** *Qualquer álgebra de evolução bidimensional em  $\mathcal{E}_{2,2}(\mathbb{K})$  com uma álgebra derivada unidimensional é isomorfa a exatamente uma das próximas álgebras*

- $A_{(e_1, ce_1)}$ , com  $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . Aqui,  $A_{(e_1, ce_1)} \cong A_{(e'_1, \gamma e'_1)}$  se e somente se  $\gamma = cm^2$  para algum  $m \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ .
- $A_{(e_1+e_2, -e_1-e_2)}$ .

### 3.3.2 Álgebra derivada bidimensional ( $ad \neq bc$ )

Agora estudamos o caso em que a álgebra de evolução  $A = A_{(ae_1+be_2, ce_1+de_2)} \in \mathcal{E}_{2,2}(\mathbb{K})$  é tal que  $ad \neq bc$ .

**Lema 3.3.5.** *Seja  $A = A_{(ae_1+be_2, ce_1+de_2)}$  uma álgebra de evolução bidimensional em  $\mathcal{E}_{2,2}(\mathbb{K})$  tal que  $ad \neq bc$ . Então, qualquer isomorfismo de  $A$  para outra álgebra de evolução em  $\mathcal{E}_{2,2}(\mathbb{K})$ , com matriz não singular relacionada  $F = (f_{ij})$ , mantém que  $f_{11} = f_{22} = 0$  ou  $f_{12} = f_{21} = 0$ .*

**Demonstração:** O resultado segue direto das condições em (3.1) e como  $ad - bc \neq 0$ , da não singularidade da matriz  $F$ , temos  $f_{11} = 0$  ou  $f_{21} = 0$  e  $f_{12} = 0$  ou  $f_{22} = 0$ . Lembramos que estas constantes são as entradas da matriz  $F$  e, pela não singularidade de  $F$  não podemos ter linhas ou colunas só de zeros, por isto  $f_{11} = 0$  e  $f_{22} = 0$  ou  $f_{21} = 0$  e  $f_{12} = 0$ . ■

Pelo resultado no Lema 3.3.5 estudamos cada um dos caso separadamente. Aqui,  $f$  é um isomorfismo de matriz não singular  $F = (f_{ij})$  entre um par de álgebras de evolução  $A = A_{(ae_1+be_2, ce_1+de_2)}$  e  $A' = A_{(\alpha e'_1+\beta e'_2, \gamma e'_1+\delta e'_2)}$  em  $\mathcal{E}_{2,2}(\mathbb{K})$ , com  $ad \neq bc$  e  $\alpha\delta \neq \beta\gamma$ .

1. Caso 1.  $f_{11} = f_{22} = 0$ .

Seja  $f_{12} \neq 0 \neq f_{21}$ , tomamos  $f(e_1) = f_{12}e'_2$  e  $f(e_2) = f_{21}e'_1$ . Similarmente ao raciocínio exposto no estudo de caso da subseção anterior, a identificação de coeficientes de um mesmo vetor base nas igualdades  $f(e_i e_j) = f(e_i)f(e_j)$ , para todos  $i, j \leq 2$ , envolve que  $f$  é um isomorfismo entre as duas álgebras em consideração, se e somente se,

$$\begin{cases} a = \delta f_{12}, \\ bf_{21} = \gamma f_{12}^2, \\ cf_{12} = \beta f_{21}^2, \\ d = \alpha f_{21} \end{cases} \quad (3.4)$$

A não singularidade da matriz  $F$  implica que um coeficiente  $a, b, c$  ou  $d$  é zero na  $n$ -upla de estrutura da álgebra  $A$  se, e somente se, o respectivo coeficiente  $\delta, \gamma, \beta$  ou  $\alpha$  é zero na  $n$ -upla de estrutura de  $A'$ . Agora, a afirmação (e) na Proposição 3.2.15 nos permite focar nos seguintes casos para as álgebras de evolução  $A$  e  $A'$  sobre as condições do Lema 3.3.5.

– Caso 1.1.  $A = A_{(e_1, ce_1 + de_2)}$  e  $A' = A_{(e'_1, \delta e'_2)}$ , com  $d \neq 0 \neq \delta$ . De (3.4), temos:

$$\begin{cases} f_{12} = 1/\delta, f_{21} = d, c = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Logo,  $A_{(e_1, de_2)} \cong A_{(e_1, e_2)}$ , para todo  $d \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ .

– Caso 1.2.  $A = A_{(e_1, ce_1 + de_2)}$  e  $A' = A_{(e'_1 + e'_2, \delta e'_2)}$ , com  $d \neq 0 \neq \delta$ . De (3.4), temos:

$$f_{12} = 1/\delta, f_{21} = d, \delta = c/d \quad (3.6)$$

Logo,  $A_{(e_1 + e_2, de_2)} \cong A_{(e_1, de_1 + e_2)}$ , para todo  $d \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ .

– Caso 1.3.  $A = A_{(e_2, ce_1 + de_2)}$  e  $A' = A_{(e'_2, \gamma e'_1)}$ , com  $c \neq 0 \neq \gamma$ . De (3.4), temos:

$$\begin{cases} f_{21} = \gamma f_{12}^2, \\ c = \gamma^2 f_{12}^3, \\ d = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Logo,  $A_{(e_2, c^2 m^3 e_1)} \cong A_{(e_2, ce_1)}$ , para todo  $c, m \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ .

- Caso 1.4.  $A = A_{(e_2, ce_1 + de_2)}$  e  $A' = A_{(e'_1 + e'_2, \gamma e'_1)}$ , com  $c, d$  e  $\gamma$  são todos distintos de zero. De (3.4), temos:

$$\begin{cases} f_{12} = d^2/c, \\ f_{21} = d, \\ c^2 = \gamma d^3. \end{cases} \quad (3.8)$$

Logo,  $A_{(e_1 + e_2, ce_1)} \cong A_{(e_2, \frac{1}{c}(e_1 + e_2))}$ , para todo  $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ .

- Caso 1.5.  $A = A_{(e_1 + e_2, ce_1 + de_2)}$  e  $A' = A_{(e'_1 + e'_2, \gamma e'_1 + \delta e'_2)}$ , com  $c \neq d$  e  $c, d, \gamma$  e  $\delta$  são todos deles distintos de zero. De (3.4), temos:

$$\begin{cases} f_{12} = 1/\delta, \\ f_{21} = d, \\ \gamma = c^2/d^3, \\ \delta = c/d^2. \end{cases} \quad (3.9)$$

Portanto,  $A_{(e_1 + e_2, ce_1 + de_2)} \cong A_{(e_1 + e_2, \frac{c}{d^2}(\frac{c}{d}e_1 + e_2))}$ , para todo  $c, d \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  tal que  $c \neq d$ .

2. Caso 2.  $f_{12} = f_{21} = 0$ . Aqui,  $f(e_1) = f_{11}e'_1$  e  $f(e_2) = f_{22}e'_2$ , com  $f_{11} \neq 0 \neq f_{22}$ . Similarmente ao caso anterior, a identificação de coeficientes de um mesmo vetor base nas igualdades  $f(e_i e_j) = f(e_i)f(e_j)$ , para todos  $i, j \leq 2$ , implica:

$$\begin{cases} a = \alpha f_{11}, \\ f_{22}b = \beta f_{11}^2, \\ f_{11}c = \gamma f_{22}^2, \\ d = \delta f_{22}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Novamente a partir da não singularidade da matriz  $F$ , temos que  $a, b, c$  ou  $d$  é zero se e somente se  $\alpha, \beta, \gamma$  ou  $\delta$  for zero, respectivamente. Da assertiva (e) na Proposição 3.2.15, consideramos o seguinte estudo de caso.

- Caso 2.1.  $A = A_{(e_1, ce_1 + de_2)}$  e  $A' = A_{(e'_1, \gamma e'_1 + \delta e'_2)}$ , com  $d \neq 0 \neq \delta$ . De (3.10),



temos:

$$\begin{cases} f_{11} = 1, \\ f_{22} = d/\delta, \\ c\delta^2 = d^2\gamma. \end{cases} \quad (3.11)$$

Portanto,  $A_{(e_1, ce_1+de_2)} \cong A_{(e'_1, \gamma e'_1+\delta e'_2)}$  para todos os  $c, d, \gamma, \delta \in \mathbb{K}$  tais que  $d \neq 0 \neq \delta$  e  $c\delta^2 = d^2\gamma$ .

– Caso 2.2.  $A = A_{(e_2, ce_1+de_2)}$  e  $A' = A_{(e'_2, \gamma e'_1+\delta e'_2)}$ , com  $c \neq 0 \neq \gamma$ . De (3.10), temos:

$$\begin{cases} f_{11}^3 = c/\gamma, \\ f_{22} = f_{11}^2, \\ d = \delta f_{22}. \end{cases} \quad (3.12)$$

Portanto,  $A_{(e_2, ce_1+de_2)} \cong A_{(e_2, cm^3e_1+dm^2e_2)}$  para todos  $c, d, m \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ .

– Caso 2.3.  $A = A_{(e_1+e_2, ce_1+de_2)}$  e  $A' = A_{(e'_1+e'_2, \gamma e'_1+\delta e'_2)}$ , com  $c \neq d$ . De (3.10), temos que  $f$  é o isomorfismo trivial e que  $A'$  coincide com  $A$ .

Os seguintes resultados reúnem o que acabamos de expor no caso anterior estudado.

**Proposição 3.3.6.** *As próximas afirmações são válidas no conjunto  $\mathcal{E}_{2,2}(\mathbb{K})$ .*

a)  $A_{(e_1, de_2)} \cong A_{(e_1, e_2)}$ , para todo  $d \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ .

b)  $A_{(e_1+e_2, de_2)} \cong A_{(e_1, de_1+e_2)}$ , para todo  $d \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ .

c)  $A_{(e_2, c^2m^3e_1)} \cong A_{(e_2, ce_1)}$ , para todo  $c, m \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ .

d)  $A_{(e_1+e_2, ce_1)} \cong A_{(e_2, \frac{1}{c}(e_1+e_2))}$ , para todo  $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ .

e)  $A_{(e_1+e_2, ce_1+de_2)} \cong A_{(e_1+e_2, \frac{c}{d^2}(\frac{c}{d}e_1+e_2))}$ , para todo  $c, d \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  tal que  $c \neq d$ .

f)  $A_{(e_1, ce_1+de_2)} \cong A_{(e'_1, \gamma e'_1+\delta e'_2)}$  para todos  $c, d, \gamma, \delta \in \mathbb{K}$  tais que  $d \neq 0 \neq \delta$  e  $c\delta^2 = d^2\gamma$ .

g)  $A_{(e_2, ce_1+de_2)} \cong A_{(e_2, cm^3e_1+dm^2e_2)}$  para todo  $c, d, m \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ .

**Demonstração:** Mostramos qual é o isomorfismo que existe nos dois primeiros itens, porém com o estudo dos casos é suficiente para a prova dos sete itens.

a) A função  $f : A_{(e_1, de_1)} \rightarrow A_{(e_1, e_2)}$  com  $f(e_1) = e_1$  e  $f(e_2) = \sqrt{d}e_2$ .

- $f(e_1)f(e_1) = e_1e_1 = e_1 = f(e_1) = f(e_1e_1)$ ,
- $f(e_2)f(e_2) = \sqrt{d}e_2\sqrt{d}e_2 = de_2^2 = de_2 = df(e_2) = f(de_2) = f(e_2e_2)$ .

b) A função  $f : A_{(e_1+e_2, de_2)} \rightarrow A_{(e_1, de_1+e_2)}$  com  $f(e_1) = e_2$  e  $f(e_2) = de_1$ .

- $f(e_1)f(e_1) = e_2e_2 = de_1 + e_2 = f(e_2) + f(e_1) = f(e_2 + e_1) = f(e_1e_1)$ ,
- $f(e_2)f(e_2) = de_1de_1 = d^2e_1^2 = d^2e_1 = df(e_2) = f(de_2) = f(e_2e_2)$ . ■

**Teorema 3.3.7.** *Qualquer álgebra de evolução bidimensional em  $\mathcal{E}_{2,2}(\mathbb{K})$ , com uma álgebra derivada bidimensional, é isomorfa a exatamente uma das próximas álgebras*

- $A_{(e_1, ce_1+de_2)}$ , com  $d \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . Aqui,  $A_{(e_1, ce_1+de_2)} \cong A_{(e'_1, \gamma e'_1 + \delta e'_2)}$  se, e somente se,  $c\delta^2 = d^2\gamma$ .
- $A_{(e_2, ce_1+de_2)}$ , com  $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . Aqui,  $A_{(e_2, ce_1+de_2)} \cong A_{(e'_2, \gamma e'_1 + \delta e'_2)}$  se, e somente se, existir um elemento  $m \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  tal que  $c = \gamma m^3$  e  $d = \delta m^2$ , ou,  $c = \gamma^2 m^3$  e  $d = \delta = 0$ .
- $A_{(e_1+e_2, ce_1+de_2)}$ , com  $c, d \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ . Aqui,  $A_{(e_1+e_2, ce_1+de_2)} \cong A_{(e'_1+e'_2, \gamma e'_1 + \delta e'_2)}$  se, e somente se,  $\gamma = c^2/d^3$  e  $\delta = c/d^2$ .

## Considerações finais

Nesta dissertação tratamos diferentes aspectos da teoria dos isotopismos de álgebras. Especificamente, nos concentramos nos isotopismos de álgebras magma parciais, álgebras de Lie e álgebras de evolução, para os quais essa teoria não foi suficientemente estudada na literatura até a tese de Falcon [32]. Expomos aqui algumas conclusões e outros trabalhos que são deduzidos da dissertação.

No Capítulo 1, damos um breve introdução sobre a Teoria dos Isotopismos e a Geometria Algébrica Computacional por meio da qual conseguimos teoria inicial para uma classificação de álgebras. Enunciamos alguns resultados preliminares da distribuição de anéis de quase-grupos parciais sobre corpos finitos com ajuda da classificação conhecida de quadrados latinos parciais em classes de isotopismo. Apresentamos os diferentes algoritmos que usamos ao longo da dissertação para fazer os diferentes cálculos, como o cálculo da enumeração de álgebras de dimensão finita de um certo tipo de estrutura, que é o Algoritmo 1, e também o cálculo das classes de isomorfismo ou de isotopismo de um conjunto de álgebras de dimensão finita sobre um corpo finito que é o Algoritmo 2.

No Capítulo 2, exibimos uma pequena parte da teoria dos isotopismos sobre álgebras de Lie e assim falamos das aplicações da Geometria Algébrica Computacional e da Teoria de Grafos que usamos ao longo do manuscrito para calcular as classes de isotopismo de cada tipo de álgebra em consideração. Focamos na distribuição em classes de isomorfismo e isotopismo de uma família de álgebras de Lie, o conjunto  $\mathcal{P}_{n,q}$  de álgebras de Lie pré-filiformes  $n$ -dimensionais sobre o corpo finito  $\mathbb{F}_q$ . Definimos, em particular, um par de grafos que nos permite definir funtores fiéis entre álgebras de dimensão finita sobre corpos finitos e esses grafos. Mostramos invariantes de isomorfismo desses grafos na distribuição de diferentes famílias de álgebras em classes de isotopismos e isomorfismos.

Finalmente, no Capítulo 3 estudamos o conjunto  $\mathcal{E}_n(\mathbb{K})$  de álgebras de evolução  $n$ -dimen-

sionais sobre um corpo  $\mathbb{K}$ , no qual a distribuição em classes de isotopismo está relacionada exclusivamente com mutações na genética não mendeliana. Nos concentramos no caso bidimensional, que está relacionado aos processos de reprodução assexuada de organismos diplóides. Mostramos que o conjunto  $\mathcal{E}_2(\mathbb{K})$  é distribuído em quatro classes de isotopismo, qualquer que seja o corpo base, e caracterizamos suas classes de isomorfismo. Analisamos os diferentes algoritmos nestas álgebras e encontramos resultados interessantes os quais sugerem aprofundar na classificação das álgebras por meio de suas constantes de estrutura.

Dos algoritmos apresentados, temos resultados muito interessantes que sugerem uma possível classificação das listas de álgebras obtidas destes cálculos por meio das suas constantes de estrutura. A importância da teoria trabalhada ao longo da dissertação, além da classificação de álgebras, é entender que seu uso pode se converter numa ferramenta muito forte na análise da informação genética, da qual ainda temos muito a estudar. Como já falamos ao longo da dissertação, não encontramos muita informação da teoria exposta no Capítulo 3 e, por isto, temos poucas informações de suas aplicações. Estes estudos requerem um trabalho conjunto entre diferentes pesquisadores das áreas da Genética, Matemática e Computação.

# Bibliografía

- [1] A. Albert. *Non-Associative Algebras: I. Fundamental Concepts and Isotopy*, Ann. of Math. Second Series. **43**: 685-707, 1942.
- [2] J. M. Ancochea-Bermudez, M. Goze. *Classification des algèbres de Lie nilpotentes complexes de dimension 7*, Archiv der Mathematik. **52**: 175–185, 1989.
- [3] N. Bourbaki. *Elements of mathematics. Algebra I Chapters 1-3*, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1998.
- [4] L. Boza, E. M. Fedriani, J. Núñez J. *Complex filiform Lie algebras of dimension 11*, Appl. Math. Comput. **141**: 611–630, 2003.
- [5] L. Boza, E. M. Fedriani, Núñez J., A. M. Pacheco., M. T. Villar. *Directed pseudo-graphs and Lie algebras over finite fields*, Czechoslovak Math. J. **64**: 229–239, 2014.
- [6] L. Boza, E. M. Fedriani, J. Núñez J. *Una relación entre los pseudografos dirigidos sin aristas repetidas y algunas álgebras de Lie*, Proceedings of IV Encuentro Andaluz de Matemática Discreta. 99–104, 2005.
- [7] M. Brickenstein. *Slimgb: Gröbner bases with slim polynomials*, Rev. Mat. Complut. **23**: 453–466, 2010.
- [8] R. H. Bruck. *Some results in the theory of quasigroups*, Trans. Amer. Math. Soc. **55**: 19–52, 1944.
- [9] B. Buchberger. *An algorithm for finding the basis elements of the residue class ring of a zero dimensional polynomial ideal*, J. Symbolic Comput. **41**: 475–511, 2006.
- [10] Y. Cabrera Casado , M. Siles Molina, M. V. Velasco. *Evolution algebras of arbitrary dimension and their decompositions*, Linear Algebra App. **495**: 122-162, 2016.

- [11] L. M. Camacho, J. R. Gomez, B. A. Omirov, R. M. Turdibaev. *Some propierties of evolution algebras*, Bull. Korean Math. Soc. **50**: 1481–1494, 2013.
- [12] L. M. Camacho, J. R. Gómez, B. A. Omirov, R. M. Turdibaev. *The derivations of some evolution algebras*, Linear Multilinear A. **61**: 309–322, 2013.
- [13] T. M. M. Campos, P. Holgate, P. *Algebraic Isotopy in Genetics*, IMA J. Math. Appl. Med. Biol. **4**: 215–222, 1987.
- [14] A. Carriazo, L. M. Fernández, J. Núñez. *Combinatorial structures associated with Lie algebras of finite dimension*, Linear Algebra Appl. **389**: 43–61, 2004.
- [15] R. W. Carter. *Simple Groups of Lie Type*, John Wiley and Sons, London, England, 1972.
- [16] J. M. Casas, M. Ladra, U. A Rozikov. *A chain of evolution algebras*, Linear Algebra Appl. **435**: 852–870, 2011.
- [17] J. M. Casas, M. Ladra, B.A. Omirov, U.A. Rozikov. *On Evolution Algebras*, Algebra Colloquium. **21**: **2**, 331-342, 2014.
- [18] J. M. Casas, M. Ladra, B. A. Omirov, U. A. Rozikov. *On nilpotent index and dibaricity of evolution algebras*, Linear Algebra Appl. **439**: 90–05, 2013.
- [19] M. Ceballos, J. Núñez, A. F. Tenorio. *Low-dimensional Leibniz algebras and combinatorial structures*, Math. Comp. Sim. **125**: 126–138, 2016.
- [20] M. Ceballos, J. Núñez, A. F. Tenorio. *Study of Lie algebras by using combinatorial structures*, Linear Algebra Appl. **436**: 349–363, 2012.
- [21] T. G. Ceccherini-Silberstein, A. Y. Samet-Vaillant. *Asymtotic invariants of finitely generated algebras. A generalization of Gromov’s quasi-isometric viewpoint*, J. Math. Sci. **156**: 56–108, 2009.
- [22] S. Cicalo, W. De Graaf, C. Schneider. *Six-dimensional nilpotent Lie algebras*, Linear Algebra Appl. **436**: 163–189, 2012.
- [23] D. A. Cox, J. B. Little, D. O’Shea. *Ideals, varieties, and algorithms. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*, Springer, New York, USA, 2007.

- [24] D. A. Cox, J. B. Little, D. O’Shea. *Using Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York, USA, 1998.
- [25] S. G. Dani, M. G Mainkar. *Anosov automorphisms on compact nilmanifolds associated with graphs*, Trans. Amer. Math. Soc. **357**: 2235–2251, 2005.
- [26] W. Decker, G. M. Greuel, G. Pfister, H. Schönemann. *SINGULAR 4-0-2 — A computer algebra system for polynomial computations*, ACM Communications in Computer Algebra. **42(3)**: 180-181, 2016.
- [27] D. S. Dummit, R. M. Foote, *Abstract Algebra*, John Wiley and Sons, Inc, Burlington, USA, 2004.
- [28] A. Elduque, A. Labra. *Evolution algebras and graphs*, J. Algebra Appl. **14**: 1550103, 2013.
- [29] I. H. M. Etherington. *Duplication of linear algebras*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **(2) 6**: 222–230, 1941.
- [30] I. M. H. Etherington. *Genetic algebras*, Proc. Roy. Soc. Edin. **59**: 242–258, 1939.
- [31] O. J. Falcón, R. M. Falcón, J. Núñez, A. Pacheco, M. T. Villar. *Classification of Filiform Lie Algebras up to dimension 7 Over Finite Fields*, An. Sti. U. Ovid. Co. Mat. **2**, 2016.
- [32] O. J. Falcón. *Distribución de álgebras de Lie, Malcev y de evolución en clases de isotopismos*, Universidad de Sevilla, Sevilla, España, 2016.
- [33] R. M. Falcón. *The set of autotopisms of partial Latin squares*, Discrete Math. **313**: 1150–1161, 2013.
- [34] S. Gao. *Counting Zeros over Finite Fields Using Gröbner Bases*, Carnegie Mellon University, Pennsylvania, USA, 2009.
- [35] H. Georgi. *Lie algebras in Particle Physics: From isospin to unified theories. (Frontiers in Physics)*, Westview Press, Cambridge, England, 1999.
- [36] R. Gilmore. *Lie Groups, Lie algebras, and some of their applications*, New York, USA, 2005.

- [37] W. De Graaf. *Classification of 6-dimensional nilpotent Lie algebras over fields of characteristic not 2*, J. Algebra. **309**: 640–653, 2007.
- [38] R.C. Hamelink. *Graph theory and Lie algebra*. In: G. Chartrand, S. F. Kapoor (Eds.) *The Many Facets of Graph Theory, Proc. Conf., Western Mich. Univ., Kalamazoo, Mich., 1968*, Springer, Berlin, Germany, 1969.
- [39] F. Harary. *Graph Theory*, Addison Wesley, Reading, Mass, New York, USA, 1969.
- [40] A. Hashemi. *Nullstellenstze for zero-dimensional Gröbner bases*, Comput. Complexity. **18**: 155–168, 2009.
- [41] A. Hashemi, D. Lazard. *Sharper complexity bounds for zero-dimensional Gröbner bases and polynomial system solving*, Internat. J. Algebra Comput. **21**: 703–713, 2011.
- [42] A. S. Hegazi, H. Abdelwahab. *Nilpotent evolution algebras over arbitrary fields*, Linear Algebra App. **486**: 345–360, 2015.
- [43] P. Holgate. *Genetic algebras associated with polyploidy*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **15**: 1–9, 1966.
- [44] A. K. Khudoyberdiyev, B. A. Omirov, I. Qaralleh. *Few remarks on evolution algebras*, J. Algebra Appl. **14**: 1550053, 2015.
- [45] Y. N. Lakshman. *On the complexity of computing a Gröbner basis for the radical of a zero dimensional ideal*, In: H. Ortiz (Ed.) *Proceedings of the twenty-second annual ACM Symposium on Theory Of computing, STOC'90*. 555–563, 1990.
- [46] D. Lazard. *Solving zero-dimensional algebraic systems*, J. Symbolic Comput. **13**: 117-131, 1992.
- [47] M. G. Mainkar. *Graphs and two-step nilpotent Lie algebras*, Groups Geom. Dyn. **9**: 55–65, 2015.
- [48] B. D. McKay., A. Meynert, W. Myrvold. *Small Latin squares, quasigroups, and loops*, J. Combin. Des. **15**: 98–119, 2007.



- [49] H. M. Möller. *On decomposing systems of polynomial equations with finitely many solutions*, Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. **4**: 217–230, 1993.
- [50] J. Núñez, M. L. Rodríguez-Arévalo, M. T. Villar. *Certain particular families of graphicable algebras*, Appl. Math. Comp. **246**: 416–425, 2014.
- [51] J. Núñez, M. Silvero, M. T. Villar. *Mathematical tools for the future: Graph Theory and graphicable algebras*, Appl. Math. Comp. **219**: 6113–6125, 2013.
- [52] C. Polcino, S. K. Sehgal. *An Introduction to Group Rings*, Kluwer academic publishers, London, England, 2002.
- [53] L. A. B. San Martin. *Álgebras de Lie*. Editora da Unicamp, Campinas, Brasil, 1999.
- [54] R. D. Schaffer. *An introduction to nonassociative algebras*, Academic Press, New York, USA, 1966.
- [55] C. Schneider. *A computer-based approach to the classification of nilpotent Lie algebras*, Experiment. Math. **14**: 153–160, 2005.
- [56] J. P. Tian. *Evolution Algebras and their Applications, Lect. Notes Math. 1921*, SpringerVerlag, Berlin, Germany, 2008.
- [57] J. P. Tian, P. Vojtechovsky. *Mathematical concepts of evolution algebras in non-mendelian genetics*, Quasigroups Related Systems. **14**: 111–122, 2006.
- [58] V. S. Varadarajan. *Lie groups, Lie algebras and their representations*, Springer, New York, USA, 1984.
- [59] C. C. Wang. *An Algorithm for the Chromatic Number of a Graph*, Journal of the ACM. **21(3)**: 385–391, 1974.
- [60] A. Wörz-Busekros. *Algebras in Genetics, Lect. Notes Biomath. 36*, Springer-Verlag, New York, USA, 1980.