

**RODRIGO LUIZ PEREIRA LARA**

**DESEMPENHO DO GRÁFICO DE CONTROLE CUSUM TABULAR  
PARA O MONITORAMENTO DA MÉDIA**

**Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Estatística Aplicada e Biometria, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.**

**VIÇOSA  
MINAS GERAIS – BRASIL  
2012**

**Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e  
Classificação da Biblioteca Central da UFV**

T

L318d  
2012

Lara, Rodrigo Luiz Pereira, 1984-

Desempenho do gráfico de controle CUSUM tabular para o  
monitoramento da média / Rodrigo Luiz Pereira Lara.

– Viçosa, MG, 2012.

xii, 85f. : il. (algumas col.) ; 29cm.

Inclui anexos.

Orientador: José Ivo Ribeiro Júnior.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.

Referências bibliográficas: f. 60-63

1. Controle de qualidade. 2. Probabilidades. 3. Simulação  
(Computadores). I. Universidade Federal de Viçosa.

II. Título.

CDD 22. ed. 658.562

**RODRIGO LUIZ PEREIRA LARA**

**DESEMPENHO DO GRÁFICO DE CONTROLE CUSUM TABULAR  
PARA O MONITORAMENTO DA MÉDIA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Estatística Aplicada e Biometria, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

**APROVADA: 16 de fevereiro de 2012.**

---

**Moisés Nascimento**

---

**Adriana Ferreira de Faria**

---

**José Ivo Ribeiro Júnior**  
(Orientador)

*Aos meus pais*

*Maria Aparecida Pereira Lara  
e Luiz Alcides Mesquita Lara*

*e à minha irmã*

*Cinara Aparecida Lara Capucho*

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por me conduzir no caminho da vida.

Aos meus pais pela educação e amor incondicional, a quem sempre estarei em dívida; e à minha irmã Cinara que sempre esteve próxima a mim e partilhou de grandes momentos da minha vida.

À Universidade Federal de Viçosa que me acolheu como estudante.

Ao meu professor orientador e amigo José Ivo Ribeiro Júnior, pelo apoio, disponibilidade e ajuda prestada no desenvolvimento deste trabalho.

A todos os demais professores do Departamento de Estatística da Universidade Federal de Viçosa.

Aos companheiros de mestrado, tanto da minha turma como turmas adjacentes, cuja convivência e espírito de equipe se mostraram fundamentais ao longo da jornada. Agradeço a todos, principalmente Yury Vasconcellos, Gilson Silvério, Marconi Miranda e Rafael Rocha.

Aos funcionários do DET, Anita Paiva e Joel Teixeira, pela constante prontidão em nos auxiliar nas diversas atividades burocráticas do PPESTBIO/UFV.

Ao Otávio Brustolini pela oportunidade, amizade, conselhos e incentivo.

A todos os companheiros de república, principalmente Dennis Lai, Igor de Almeida, Luan Anício e Thales Heck.

A todos os amigos da graduação, que caminharam comigo em diversos períodos da minha vida, que me forneceram ajuda e companheirismo nas mais variadas situações.

Aos demais amigos, dentre eles Fabrício Zimmerer e Caio de Araújo.

Ao professor Sérgio Brommonschenkel, à CNPq e aos membros do Laboratório de Genômica pela oportunidade, apoio financeiro e experiências.

Aos professores membros da banca Moysés Nascimento e Adriana Faria pelas críticas e sugestões.

# SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS .....	vi
LISTA DE TABELAS .....	viii
LISTA DE SIGLAS E SÍMBOLOS .....	ix
RESUMO .....	xi
ABSTRACT .....	xii
1. INTRODUÇÃO .....	1
2. OBJETIVOS .....	3
2.1 Objetivo Geral .....	3
2.2 Objetivos Específicos .....	3
3. REFERENCIAL TEÓRICO .....	4
3.1 Planejamentos Visando Melhoria da Qualidade .....	4
3.2 Gráficos de Controle .....	6
3.3 Gráficos de Controle da Soma Acumulada .....	11
3.4 Resposta Inicial Rápida .....	13
3.5 Desempenho do Gráfico de Controle CUSUM Tabular .....	14
4. MATERIAL E MÉTODOS .....	17
4.1 Simulação dos Dados .....	17
4.2 Alarme Falso .....	19
4.3 Alarme Verdadeiro .....	23
4.4 Análise de Regressão .....	28
5. RESULTADOS E DISCUSSÃO .....	29
5.1 Alarme Falso .....	29
5.1.1 Probabilidade Estimada .....	29
5.1.2 Probabilidade Teórica .....	31
5.1.3 Recomendações .....	38

5.2	Alarme Verdadeiro .....	41
5.2.1	Probabilidade Estimada .....	41
5.2.2	Probabilidade Teórica .....	44
5.2.3	Recomendações .....	53
5.3	Recomendação Conjunta .....	56
6.	CONCLUSÕES .....	59
7.	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	60
	ANEXO A – Probabilidade observadas do alarme falso ( $\alpha$ ) em cada subgrupo racional $i$ para cada valor de $h^*$ entre 1 e 10 e $k^* = 0,25, 0,5, 1,0$ e $1,5$ e $n = 1, 5$ e 10 de acordo com a simulação de dados.....	64
	ANEXO B – Probabilidade observadas do alarme verdadeiro (Pd) em cada subgrupo racional $i$ para cada valor de $h^*$ entre 1 e 10, $k^* = 0,25, 0,5, 1,0$ e $1,5$ e $n = 1, 5$ e 10 de acordo com a simulação dos dados.....	67
	ANEXO C – Estimativa dos parâmetros das distribuições normal e lognormal ajustadas à variável aleatória $Z(i) + S_H(i-1)^*$ dado $\delta = 0$ .....	73
	ANEXO D – Estimativa dos parâmetros de distribuição normal ajustados à $Z(i) + S_H(i-1)^*$ dado $\delta > 0$ .....	75
	ANEXO E – Probabilidades observadas dos alarmes falsos ( $0 \leq \alpha \leq 0,05$ ) em função do subgrupo racional para diferentes combinações de $k^*$ , $h^*$ e $n$ , de acordo com a simulação dos dados .....	78
	ANEXO F – Probabilidades observadas dos alarmes verdadeiros em função do subgrupo racional para diferentes combinações de $k^*$ , $h^*$ e $n$ , de acordo com a simulação dos dados .....	82

## LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Ciclo DMAIC .....	5
Figura 3.2 – Poder ( $Pd$ ) de um gráfico e risco $\beta$ quando o processo está fora de controle estatístico para a média .....	8
Figura 3.3 – Gráfico de controle que monitora o estimador $W$ em um processo sob controle estatístico .....	9
Figura 5.1 – Probabilidade do alarme falso observado em função do subgrupo racional para diferentes combinações de $k^*$ e $h^*$ .....	30
Figura 5.2 – P-valores do teste de Kolmogorov-Smirnov referentes aos ajustes da variável aleatória $Z(i) + S_H(i-1)^*$ às distribuições de probabilidades normal e lognormal 3P .....	31
Figura 5.3 – Ajuste de $Z(i) + S_H(i-1)^*$ nos subgrupos racionais 1, 25 e 50 pelas distribuições lognormal 3P ( $k^* = 0,25$ e $0,5$ ) e normal ( $k^* = 1,0$ e $1,5$ ) ..	33
Figura 5.4 – Estimativa dos parâmetros da distribuição de probabilidade lognormal 3P ajustada aos valores aleatórios de $Z(i) + S_H(i-1)^*$ obtidas por $k^*$ igual a $0,25$ e $0,5$ em 50 subgrupos racionais .....	34
Figura 5.5 – Estimativa dos parâmetros da distribuição de probabilidade normal ajustada aos valores aleatórios de $Z(i) + S_H(i-1)^*$ obtidas por $k^*$ igual a $1,0$ e $1,5$ em 50 subgrupos racionais .....	35
Figura 5.6 – Probabilidade do alarme falso calculada em função do subgrupo racional para diferentes combinações entre $k^*$ e $h^*$ .....	36
Figura 5.7 – Probabilidade do alarme falso ( $\alpha \leq 0,05$ ) observada em função da ordem $i$ do subgrupo racional, para diferentes combinações entre $k^*$ e $h^*$ e independente do $n$ .....	38
Figura 5.8 – Probabilidade do alarme falso ( $\alpha \leq 0,01$ ) observada em função da ordem $i$ do subgrupo racional, para diferentes combinações entre $k^*$ e $h^*$ e independente do $n$ .....	39
Figura 5.9 – Probabilidade do alarme verdadeiro observado em função do subgrupo racional para diferentes combinações entre $k^*$ , $h^*$ e $n$ .....	43
Figura 5.10 – P-valores do teste de Kolmogorov-Smirnov referentes aos ajustes da variável aleatória $Z(i) + S_H(i-1)^*$ à distribuição de probabilidade normal	44



Figura 5.11 – Ajuste de $Z(i) + S_H(i-1)^*$ nos subgrupos racionais de ordens 1, 25 e 50 pela distribuição normal .....	45
Figura 5.12 – Estimativa dos parâmetros da distribuição de probabilidade normal para $n$ igual a 1, 5 e 10 .....	49
Figura 5.13 – Probabilidade teórica e observada do alarme verdadeiro calculadas em função do subgrupo racional para $k^* = 0,25$ , $h^* = 8$ e $n = 1, 5$ e 10 .....	50
Figura 5.14 – Probabilidade teórica e observada do alarme verdadeiro calculadas em função do subgrupo racional para $k^* = 0,5$ , $h^* = 4$ e $n = 1, 5$ e 10 .....	51
Figura 5.15 – Probabilidade teórica e observada do alarme verdadeiro calculadas em função do subgrupo racional para $k^* = 1,0$ , $h^* = 3$ e $n = 1, 5$ e 10 .....	51
Figura 5.16 – Probabilidade teórica e observada do alarme verdadeiro calculadas em função do subgrupo racional para $k^* = 1,5$ , $h^* = 2$ e $n = 1, 5$ e 10 .....	52
Figura 5.17 – Probabilidade observada do alarme verdadeiro em função do subgrupo racional para diferentes combinações entre $k^*$ , $h^*$ e $n$ .....	53
Figura 5.18 – Quantidade de itens não conformes ( $m \times n$ ) produzidos em função do tamanho $n$ do subgrupo racional para um processo visando $Pd \geq 0,90$ nas diversas combinações de $k^*$ e $h^*$ que proporcionam $\alpha \leq 0,05$ ou $\alpha \leq 0,01$ ....	54

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1. Valores de ARL para os procedimentos CUSUM .....	15
Tabela 3.2. Valores de $k^*$ e os correspondentes valores de $h^*$ que fornecem $ARL = 370$ para o CUSUM tabular bilateral .....	15
Tabela 4.1. Função densidade de probabilidade e função de distribuição acumulada das distribuições Normal e Lognormal de três parâmetros .....	22
Tabela 5.1. Probabilidade teórica e observada do alarme falso no primeiro subgrupo racional .....	37
Tabela 5.2. Valores recomendados para $k^*$ e $h^*$ para processos com $i$ subgrupos racionais visando $\alpha \leq 0,05$ .....	40
Tabela 5.3. Valores recomendados para $k^*$ e $h^*$ para processos com $i$ subgrupos racionais visando $\alpha \leq 0,01$ .....	40
Tabela 5.4. Ordem $i$ do subgrupo racional que detecta o descontrolo com $\alpha \leq 0,05$ e $Pd \geq 0,90$ para diferentes combinações entre $k^*$ , $h^*$ , $i$ e $n$ .....	55
Tabela 5.5. Ordem $i$ do subgrupo racional que detecta o descontrolo com $\alpha \leq 0,01$ e $Pd \geq 0,90$ para diferentes combinações entre $k^*$ , $h^*$ , $i$ e $n$ .....	55
Tabela 5.6. Valores recomendados para $k^*$ , $h^*$ , $i$ e $n$ visando $Pd \geq 0,90$ e $\alpha \leq 0,05$ .....	56
Tabela 5.7. Valores recomendados para $k^*$ , $h^*$ , $i$ e $n$ visando $Pd \geq 0,90$ e $\alpha \leq 0,01$ .....	57

## LISTA DE SIGLAS E SÍMBOLOS

ARL	Comprimento médio da sequência ( <i>Average Run Length</i> )
CUSUM	Soma Acumulada ( <i>Cumulative Sum</i> )
FIR	Resposta Inicial Rápida ( <i>Fast Initial Response</i> )
$f(x)$	função distribuição de probabilidade da variável aleatória X
$F(x)$	função de distribuição acumulada da variável aleatória X
$H$	intervalo de decisão
$h^*$	intervalo de decisão padronizado
$H_0$	hipótese de nulidade
$H_1$	hipótese alternativa
$i$	ordem do subgrupo racional
$j$	repetição dentro do subgrupo racional de ordem $i$
$K$	valor de referência, tolerância ou de folga para a variação $\delta$
$k^*$	valor padronizado de $K$
LC	Linha Central
LIC	Limite Inferior de Controle
LSC	Limite Superior de Controle
$n$	tamanho do subgrupo racional
$Pd$	probabilidade do alarme verdadeiro
$Pd_i$	probabilidade do alarme verdadeiro no subgrupo racional $i$
$\hat{P}d_i$	estimativa da probabilidade do alarme verdadeiro no subgrupo racional $i$
$R^2$	coeficiente de determinação
$s$	simulação
$S_H$	CUSUM unilateral superior
$S_L$	CUSUM unilateral inferior
$S_H^*$	CUSUM unilateral superior padronizada
$S_L^*$	CUSUM unilateral inferior padronizada
$S_H(i)^*$	variável aleatória da CUSUM unilateral superior padronizada no subgrupo racional $i$

$S_L(i)$ *	variável aleatória da CUSUM unilateral inferior padronizada no subgrupo racional $i$
$s_H(i)$ *	valor observado da CUSUM unilateral superior padronizada no subgrupo racional $i$
$s_H(i)$ *	valor observado da CUSUM unilateral inferior padronizada no subgrupo racional $i$
$y_i$	valor observado no subgrupo racional $i$
$y_{ijs}$	valor observado no subgrupo racional $i$ , repetição $j$ e simulação $s$
$\bar{y}_{is}$	média das observações do subgrupo racional $i$ , simulação $s$
$z_{is}$	valor padronizado referente a $\bar{y}_{is}$
$\alpha$	probabilidade do alarme falso (erro tipo I)
$\alpha_i$	probabilidade do alarme falso no subgrupo racional $i$
$\hat{\alpha}_i$	estimativa da probabilidade do alarme falso no subgrupo racional $i$
$\beta$	probabilidade da falta de detecção (erro tipo II)
$\delta$	diferença entre as médias fora e sob controle em número de desvios-padrão
$\mu_0$	média sob controle estatístico
$\mu_\delta$	média fora de controle estatístico sob uma variação de $\delta$ desvios-padrão
$\sigma_0$	desvio-padrão inicial do processo

## RESUMO

LARA, Rodrigo Luiz Pereira, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2012, **Desempenho do gráfico de controle CUSUM tabular para o monitoramento da média**. Orientador: José Ivo Ribeiro Júnior. Coorientadores: Fabyano Fonseca e Silva e Carlos Henrique Osório Silva.

O presente trabalho teve por objetivo estimar as probabilidades dos alarmes falsos e verdadeiros provocados pelo gráfico de controle CUSUM tabular ao longo dos  $i$  subgrupos racionais, em função de diferentes combinações entre o tamanho  $n$  do subgrupo racional, o intervalo de decisão padronizado  $h^*$  e o valor de tolerância  $k^*$ . Para estudá-los foram simulados dados de uma variável aleatória  $Y$ , sob distribuição normal com média  $\mu_0 = 0$  e desvio-padrão  $\sigma_0 = 1$  para um processo sob controle estatístico para até 50 subgrupos racionais com até 16 repetições. Para tanto, foram realizadas 1000 simulações por subgrupo racional. Em seguida foram estabelecidos outros quatro processos fora de controle estatístico para a média em todos os subgrupos racionais ( $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$ ), em que  $\delta$  se refere ao deslocamento da média em número de desvios-padrão do processo. A probabilidade do alarme falso ( $\alpha$ ) diminui com os respectivos aumento, aumento e diminuição de  $k^*$ ,  $h^*$  e  $i$ , enquanto a probabilidade do alarme verdadeiro ( $Pd$ ) possui relação direta com  $n$  e  $i$ , e inversa com  $h^*$  para uma mesma diferença mínima pré-definida entre as médias  $\mu_1$  e  $\mu_0$  e considerando-se a escolha de  $k^*$  como sendo a metade desta em número de desvios-padrão. Ambas probabilidades dos alarmes falso e verdadeiro foram obtidas por meio das distribuições de probabilidade normal e lognormal 3P ajustadas à variável aleatória  $Z(i) + S_H(i-1)^*$ . Para conferir um  $Pd$  igual ou superior a 0,90 e  $\alpha$  igual ou inferior a 0,05 ou 0,01 recomendou-se diferentes combinações de  $k^*$ ,  $h^*$ ,  $i$  e  $n$ .

## ABSTRACT

LARA, Rodrigo Luiz Pereira, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2012, **The performance of tabular CUSUM control chart for monitoring the mean.** Advisor: José Ivo Ribeiro Júnior. Co-Advisors: Fabyano Fonseca e Silva and Carlos Henrique Osório Silva.

This study aimed to estimate the probabilities of false and true alarms caused by the Cumulative Sum control chart over the  $i$  rational subgroups, according to various combinations of size  $n$  of subgroup rational, standardized decision interval  $h^*$  and the tolerance value  $k^*$ . To study them, were simulated data from a random variable  $Y$ , under normal distribution with mean  $\mu_0 = 0$  and standard deviation  $\sigma_0 = 1$  for a process under statistical control over 50 rational subgroups, for  $n$  between 1-16. To this end, 1000 simulations were performed by rational subgroup. Then four out of control processes have been set for the statistical average at all rational subgroup ( $\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0$ ) in which  $\delta$  refers to the displacement of the average in numbers of standard deviations of the process. The probability of false alarm  $\alpha$  decreases with the increase, increase and decrease of  $k^*$ ,  $h^*$  and  $i$  respectively, while the probability of true alarm  $Pd$  has direct relation to  $n$  and  $i$ , and inverse relation to  $h^*$  for the same pre-defined minimum difference between the means  $\mu_0$  and  $\mu_1$  considering the choice of  $k^*$  as being half of that difference in number of standard deviations. Both probabilities of true and false alarms were obtained by the normal and lognormal 3P probability distributions adjusted to the random variable  $Z(i) + S_H(i-1)^*$ . In order to give a power greater than 0.90 and  $\alpha$  equal or less than 0.05 or 0.01 were recommended to different combinations of  $k^*$ ,  $h^*$ ,  $i$  and  $n$ .

# 1. INTRODUÇÃO

Atualmente, a melhoria e o monitoramento da qualidade têm se tornado preocupações e necessidades para muitas organizações (MONTGOMERY & RUNGER, 2009). Dentro do contexto da qualidade total, o controle estatístico se refere a um conjunto de métodos usados com o objetivo de possibilitar a intervenção racional num sistema de produção a fim de conferir-lhe qualidade (WERKEMA, 1995; MUNIZ e OLIVEIRA, 2000).

Dentre os métodos que compõem o controle estatístico da qualidade, os gráficos de controle são simples e eficientes no monitoramento da média e da variabilidade de diversas características avaliadas. Esses gráficos atuam com base em subgrupos racionais retirados em intervalos de tempos regulares, estratificados ou não por fatores conhecidos. De acordo com Montgomery (2004), os gráficos de controle são métodos comprovados para a melhoria da produtividade, são efetivos na prevenção de defeitos, previnem ajustes desnecessários no processo, fornecem informações confiáveis para o diagnóstico do desempenho e para a capacidade de processos.

Como existem diferentes tipos de gráficos de controle com o mesmo objetivo, é importante conhecer o desempenho e a rapidez com que cada um deles detecta alterações reais no processo. A análise da relação entre os custos de amostragem e as interferências no processo devem nortear a escolha do tamanho dos subgrupos racionais, do intervalo de tempo entre eles, do tipo e dos valores dos termos utilizados nas construções dos gráficos de controle, como também no posicionamento dos limites de controle (COSTA *et al.*, 2004). Avaliando cuidadosamente a escolha dos valores desses termos no momento da construção de um gráfico de controle, outros fatores também estarão sendo considerados, como a minimização do número de alarmes falsos e a maximização da detecção de causas especiais no processo.

Reconhecido por Van Rij *et al.* (1995, *apud* COLQUHOUN, 2008, p. 296) como instrumento de pesquisa de ampla análise, o gráfico de controle das somas acumuladas (CUSUM, *Cumulative Sum*) possui a vantagem de poder ser relativamente sensível a pequenas mudanças no processo. Inicialmente proposto por Page (1954), o gráfico incorpora as informações de uma sequência de

observações amostrais plotando as somas acumuladas dos seus desvios em relação a um valor-alvo. Os termos requeridos para a sua construção são: número de subgrupos racionais ( $i$ ), número de repetições por subgrupo racional ( $n$ ), valor de referência ( $k^*$ ) e intervalo de decisão ( $h^*$ ) padronizados.

Vários trabalhos como os de Page (1954), Brook e Evans (1972), Lucas (1973, 1976), Lucas e Crosier (1982a, 1982b), Hawkins (1987, 1993a), King (1995), Montgomery (2004), Alves e Samohyl (2004) e Souza et al. (2008), já apresentaram o desempenho do gráfico de controle CUSUM em relação às probabilidades dos alarmes falsos e verdadeiros. Alguns forneceram recomendações sobre as utilizações e implicações das diferentes combinações entre os valores de  $n$ ,  $k^*$  e  $h^*$ . No entanto, ainda não existem informações para a escolha da quantidade de subgrupos racionais e das distribuições associadas aos cálculos dessas probabilidades. Desse modo, o presente trabalho contribui para diminuir as divergências sobre as recomendações que ainda existem e para disponibilizar aos usuários a utilização de forma correta de um gráfico de controle que possibilite detectar pequenas e grandes diferenças em relação à média de controle.



## 2. OBJETIVOS

### 2.1. Objetivo Geral

O presente trabalho tem por objetivo, estimar, por meio da simulação de dados, as probabilidades dos alarmes falsos e verdadeiros provocados pelo gráfico de controle CUSUM tabular ao longo dos subgrupos racionais, em função de diferentes combinações entre os valores de  $n$ ,  $k^*$  e  $h^*$ .

### 2.2. Objetivos Específicos

De forma específica, o presente trabalho tem os seguintes objetivos:

- Determinar as distribuições de probabilidade com os seus respectivos parâmetros para os cálculos das probabilidades dos alarmes falsos e verdadeiros, em função das diferentes combinações entre os valores de  $i$ ,  $n$ ,  $k^*$  e  $h^*$ .
- Determinar o número médio de subgrupos racionais necessários para sinalizar o primeiro alarme falso ou verdadeiro.
- Estabelecer recomendações para os valores de  $i$ ,  $n$ ,  $k^*$  e  $h^*$  para a realização do monitoramento pelo gráfico de controle CUSUM tabular visando detectar diferentes deslocamentos da média de controle.

### 3. REFERENCIAL TEÓRICO

#### 3.1 Planejamentos Visando Melhoria da Qualidade

Para que as empresas sejam capazes de promover as mudanças necessárias, em um tempo adequado, é preciso que tenham um sistema de gestão que as ajude a enfrentar os desafios que irão encontrar.

O programa seis sigma começou a ser difundido com base na divulgação dos resultados obtidos pela Motorola, General Electric, AlliedSignal e outras empresas de porte (AGUIAR, 2002). A sua aplicação requer o uso intensivo de métodos estatísticos com o objetivo de diminuir a variabilidade dos processos e, conseqüentemente, de obter produtos ou serviços com o mínimo de defeitos, baixo custo e máxima satisfação do cliente. Ele vem a contrastar com a forma tradicional de assegurar a qualidade, de inspecionar ao final da produção e de corrigir os defeitos após ocorridos.

Um processo seis sigma é aquele capaz de produzir com, no máximo, 3,4 defeitos por milhão, o que equivale a uma probabilidade acima de 0,9999 do produto ter qualidade. Este nível de qualidade confere, aproximadamente, zero defeitos e pode ser aplicado a processos industriais de manufatura, transacionais e comerciais de qualquer tipo, de serviços, financeiros, logísticos e outros. No Brasil o índice de rejeição encontra-se em torno de 10000 ppm, enquanto a média mundial é de 200 ppm. O Japão por sua vez já atingiu o índice de 10 ppm (Pande *et al.* 2001, *apud* Schlieper, 2007).

O ciclo PDCA é uma metodologia que auxilia as empresas a defrontarem os desafios que irão encontrar (WERKEMA, 1995; AGUIAR, 2002). Pode ser utilizado para a manutenção, melhoria, planejamento ou inovação da qualidade. O ciclo PDCA é constituído de quatro etapas: planejamento (*plan*), execução (*do*), verificação (*check*) e ação (*action*).

De acordo com o tipo do gerenciamento a ser realizado, o giro do PDCA assume características diferentes. No ciclo PDCA para a manutenção da qualidade, o S (*standard*) substitui o P (*plan*) porque a meta e os métodos utilizados para atingi-la são, justamente, a meta padrão e os procedimentos operacionais padrões

da empresa. Durante as etapas do ciclo PDCA ou SDCA, os gráficos de controle são adotados de forma integrada.

Já o DMAIC é uma metodologia de solução de problemas utilizada pela maioria das companhias americanas que empregam o programa seis sigma com o objetivo de realizar as melhorias nos produtos, serviços e processos e para projetá-los e/ou reprojeta-los (AGUIAR, 2002). As cinco etapas do DMAIC (Figura 3.1) podem ser descritas como: definir (*define*), medir (*measure*), analisar (*analyse*), melhorar (*improve*) e controlar (*control*). A etapa de controle, última fase do ciclo, é o foco do presente trabalho, no qual visa o permanente monitoramento do processo. Desse modo, buscou-se aprimorar os parâmetros que definem quando um processo está ou não sob controle. Jalali et al. (2008) ressaltam ainda que os fatores mais importantes dessa fase são a documentação, monitoramento visando melhoria, preservação dos resultados obtidos na fase *improve*, além de um bom preparo da equipe técnica.

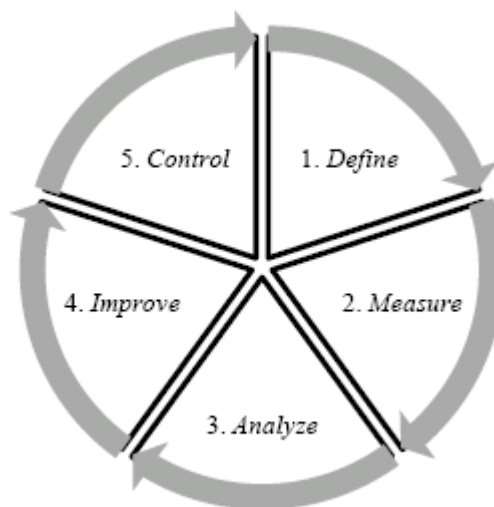


Figura 3.1 – Ciclo DMAIC. Fonte: CARVALHO (2010).

Outro elemento muito importante para o êxito do programa seis sigma é o treinamento e a capacitação dos colaboradores. O papel dos agentes de mudança seis sigma é fundamental para o sucesso do programa, em qualquer que seja a organização, automatizada ou ainda dependente de mão-de-obra humana direta. É preciso treinar pessoas que tenham o perfil apropriado, para que assumam, de

acordo com o desejado, os papéis de patrocinadores ou de especialistas dos métodos gerenciais e estatísticos.

### **3.2 Gráficos de Controle**

Desde o início da Revolução Industrial, o estatístico Walter A. Shewhart preocupou-se em estudar a variabilidade dos processos. Segundo ele, em qualquer processo de produção, independente de quão bem projetado ou cuidadosamente mantido ele seja, uma certa quantidade de variabilidade inerente ou natural, provocada por causas comuns ou aleatórias, sempre existirá. Neste caso, diz-se que o processo estará sob controle estatístico, apresentando comportamento estável ou previsível. De forma prática, o processo será considerado homogêneo em relação a todos os subgrupos racionais coletados durante o processo. (WERKEMA, 1995).

No entanto, outras causas de variação, chamadas de especiais, poderão surgir esporadicamente ou permanentemente, devido a situações particulares que fazem com que o processo se comporte de um modo completamente diferente do usual, o que poderá resultar em um deslocamento do seu nível de qualidade. Quando um processo está operando sob a atuação de causas especiais de variação, diz-se que ele está fora de controle estatístico. De forma prática, o processo será considerado heterogêneo ou se comportará de maneira diferenciada em relação aos diversos estratos (WERKEMA, 1995).

De acordo com Gallus *et al.* (1986, *apud* WILLIAMS *et al.*, 1992), o principal objetivo do uso do controle de qualidade consiste em monitoramento. Vários métodos têm sido desenvolvidos a fim de detectar mudanças em situações raras, como por exemplo, um produto final mal acabado ou a detecção de um indício de epidemia. Com essas investigações, é possível que ações corretivas possam ser empreendidas antes que muitas unidades não conformes sejam fabricadas. Com esse objetivo, o gráfico de controle permite a distinção entre os dois tipos de causas de variação, ou seja, de verificar se o processo está ou não sob controle estatístico.

Desse modo, o principal objetivo dos gráficos de controle é de avaliar a variabilidade do processo, para que se possa mantê-la ou diminuí-la mesmo quando é analisado o monitoramento da média de uma determinada característica de

qualidade, pois deslocamentos da média de controle também aumentam a variabilidade do processo.

Para o monitoramento da média de processos sob controle estatístico para a variabilidade, ou seja, quando todos os subgrupos racionais apresentarem o mesmo desvio-padrão de controle ( $\sigma_0$ ), as hipóteses de nulidade ( $H_0$ ) e alternativa ( $H_1$ ) estabelecidas para cada subgrupo racional são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} H_0 : \mu_Y &= \mu_0; \\ H_1 : \mu_Y &\neq \mu_0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

A especificação dos limites de controle é uma das decisões críticas que tem de ser feita no planejamento de um gráfico de controle. Pelo deslocamento dos limites de controle para mais longe da linha central, diminui-se a probabilidade do alarme falso ( $\alpha$ ), ou seja, a probabilidade de um ponto cair além dos limites de controle, indicando a condição de falta de controle quando nenhuma causa atribuída estiver presente ( $P(RH_0 / H_0$  é verdadeiro)). No entanto, o alargamento dos limites de controle aumentará também a probabilidade da falta de detecção ( $\beta$ ), isto é, a probabilidade de um ponto cair entre os limites de controle, quando o processo estiver realmente fora de controle ( $P(AH_0 / H_0$  é falso)). Se os limites de controle forem movidos para mais perto da linha central, o efeito oposto será obtido: o  $\alpha$  será aumentado, enquanto o  $\beta$  será diminuído (MONTGOMERY & RUNGER, 2009).

A consequência de ordem prática associada ao alarme falso é intervir no processo na hora errada, quando ele está isento de causas especiais, o que em si já acarreta um custo de interrupção do processo, de mão-de-obra, além de um risco de desajustar o processo que estava ajustado. E a consequência de ordem prática associada à falta de detecção é não intervir no processo na hora certa, quando ele está sob a influência de causas especiais (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2004).

Já o poder ( $Pd$ ) é a probabilidade do gráfico de controle rejeitar a hipótese de nulidade ( $H_0$ ) quando esta é falsa ( $P(RH_0 / H_0$  é falso)), isto é, a probabilidade do alarme verdadeiro. É importante observar que o  $\beta$  e o  $Pd$  de um gráfico de controle se complementam, ou seja,

$$P(AH_0 / H_0 \text{ é falso}) + P(RH_0 / H_0 \text{ é falso}) = 1 \quad (3.2)$$

onde o primeiro e segundo termos da equação acima correspondem, ao  $\beta$  e ao  $Pd$  respectivamente. Como ambas as probabilidades estão associadas à distribuição de  $H_1$  (Figura 3.2), então torna-se necessário definir a sua média ( $\mu_1$ ) e o seu desvio-padrão ( $\sigma_0$ ), para que elas possam ser calculadas.

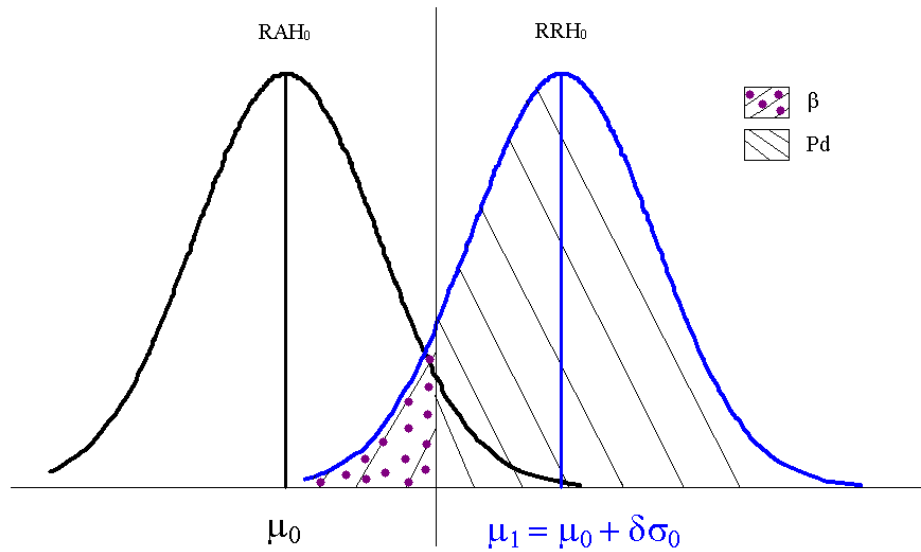


Figura 3.2 – Poder ( $Pd$ ) de um gráfico e risco  $\beta$  quando o processo está fora de controle estatístico para a média ( $RAH_0$  = região de aceitação de  $H_0$ ;  $RRH_0$  = região de rejeição de  $H_0$ ).

A diferença entre as médias fora ( $\mu_1$ ) e sob controle ( $\mu_0$ ) é dada pela seguinte equação:

$$\mu_1 - \mu_0 = \delta\sigma_0 \quad (3.3)$$

em que:

$$\delta = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_0} \quad (3.4)$$

O poder do gráfico de controle e a probabilidade do alarme falso são inversamente proporcionais ao número médio de subgrupos racionais ( $NMSR$ ) necessários para a obtenção do sinal, que pode ser falso ou verdadeiro. No primeiro

caso, é desejável ter um *NMSR* baixo e, no segundo, um *NMSR* alto. O *NMSR* é a medida de desempenho mais usual dos gráficos de controle e representa o número médio de pontos que tem de ser plotado antes de um ponto indicar uma condição fora de controle.

Os gráficos de controle constituem-se de gráficos temporais, onde os estimadores estudados de uma característica de qualidade são plotados no eixo vertical, sendo o eixo horizontal composto pela evolução temporal. Esses gráficos possuem uma linha central (*LC*) que representa a média da variável quando o processo está sob controle (livre de causas especiais) e duas outras linhas que representam os limites de controle do processo (Figura 3.3). O processo é dito fora de controle quando algum ponto do gráfico sair acima do limite superior de controle (*LSC*) ou abaixo do limite inferior de controle (*LIC*), ou ainda quando os pontos apresentarem algum comportamento sistemático ou não aleatório.

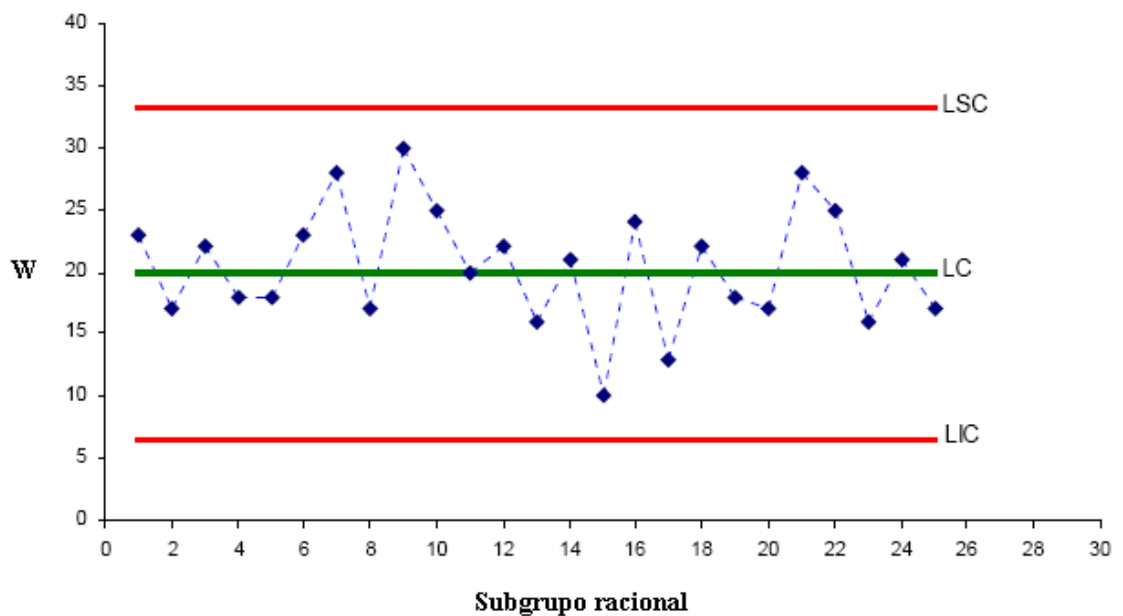


Figura 3.3 – Gráfico de controle que monitora o estimador *W* em um processo sob controle estatístico.

A determinação da linha central e dos limites de controle seguem um modelo geral, onde *W* é o estimador que representa a característica de qualidade de interesse,  $\mu_w$  é a média de *W* e  $\sigma_w$  é o desvio-padrão de *W*. O limite superior de

controle (*LSC*), a linha central (*LC*) e o limite inferior de controle (*LIC*) são dados por (MONTGOMERY & RUNGER, 2009):

$$LSC = \mu_w + k\sigma_w \quad (3.5)$$

$$LC = \mu_w \quad (3.6)$$

$$LIC = \mu_w - k\sigma_w \quad (3.7)$$

O valor de  $k$  se refere ao fator de alargamento do limite de controle, em número de desvios-padrão de controle ( $\sigma_0$ ) e, usualmente, é estabelecido o valor igual a 3. No entanto, outros valores de  $k$  que sejam de interesse também podem ser utilizados. Para valores de  $k$  iguais a 3, 2 e 1 considera-se que 99,73%, 95,45% e 68,27%, respectivamente, das estimativas estarão dentro do intervalo compreendido pelos *LIC* e *LSC*, sob causas aleatórias de variação e com base na distribuição normal. Além da normalidade, será necessário que as observações da característica de qualidade de interesse sejam independentes para a correta aplicação dos gráficos de controle. Para a *LC* ( $\mu_w$ ), é interessante coincidi-la com a média de controle ( $\mu_0$ ). Já o desvio-padrão do estimador ( $\sigma_w$ ) depende do desvio-padrão dos valores da característica de qualidade ( $\sigma$ ).

Quando da criação dos gráficos de controle, a regra de decisão proposta por Shewhart era bastante simples: um ponto amostral dentro dos limites de controle de  $3\sigma$  significa que não se deve intervir no processo e, um ponto fora desses limites, significa que deve-se intervir no processo em busca de causas especiais. No entanto, após a criação do gráfico de controle, surgiram novas regras de decisão (regras suplementares), todas com o propósito de acelerar a detecção de alterações no processo (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2004).

Uma regra suplementar seria a periodicidade ou a tendência de quatro pontos consecutivos alternando-se para cima e para baixo ou de seis pontos consecutivos aumentando ou decrescendo. Uma sequência ou deslocamento apresenta uma configuração em que nove pontos consecutivos do gráfico de controle aparecem em apenas um dos lados da *LC*, que indica uma mudança no nível de deslocamento do processo. Uma outra regra suplementar acusa o processo como fora de controle no sistema  $3\sigma$ , quando há a ocorrência de dois de três pontos



consecutivos entre os limites  $\mu + 2\sigma$  e  $\mu + 3\sigma$  ou entre  $\mu - 2\sigma$  e  $\mu - 3\sigma$  e na ocorrência de quatro de cinco pontos consecutivos entre os limites  $\mu + \sigma$  e  $\mu + 2\sigma$  ou entre  $\mu - \sigma$  e  $\mu - 2\sigma$ , apesar desses pontos ainda estarem dentro dos limites de controle  $\mu \pm 3\sigma$ . Também pode-se considerar o processo como fora de controle na ocorrência de cinco pontos consecutivos até os limites  $\mu \pm 1\sigma$ , o que confere uma variabilidade menor do que a esperada. Note que este último caso pode significar excesso de ênfase em tarefas desnecessárias caso os limites de controle estejam bem estimados. E, conseqüentemente, acarreta perda de tempo na produção.

### 3.3 Gráficos de Controle da Soma Acumulada

Inicialmente proposto por Page (1954) o gráfico de controle CUSUM tabular realiza somas de pequenas diferenças que se acumulam quando o processo começa a se desviar para algum valor superior ou inferior a  $\mu_0$ . O controle do processo se mantém quando os desvios ocorrem em ambos os lados (acima e abaixo do alvo) e, conseqüentemente, se anulam. E o descontrole vai ocorrer para um dos dois lados gerando uma tendência.

Para a construção do gráfico de controle CUSUM tabular foi utilizada a metodologia descrita por Montgomery (2004).

Para a detecção de uma mudança acima do alvo, utiliza-se a expressão  $S_H$  que realiza a soma acumulada de desvios acima da média. De forma análoga, a expressão  $S_L$  realiza a soma acumulada dos desvios que estão abaixo da média, de modo a detectar a mudança caso o processo migre para uma média abaixo do alvo. As expressões  $S_H$  e  $S_L$  são chamadas CUSUMs unilaterais superior e inferior, respectivamente. Elas são calculadas como seguem:

$$S_H(i) = \text{máx}[0, \bar{y}_i - (\mu_0 + K) + S_H(i-1)] \quad (3.8)$$

$$S_L(i) = \text{máx}[0, (\mu_0 - K) - \bar{y}_i + S_L(i-1)] \quad (3.9)$$

onde  $\bar{y}_i$  é a média das observações dentro do subgrupo racional  $i$  e  $S_H(0) = S_L(0) = 0$ . Em particular, para  $n = 1$  tem-se  $\bar{y}_i = y_i$ .

Note que  $S_H(i)$  e  $S_L(i)$  acumulam desvios da média que são maiores que  $K$  (valor de referência), com ambas as quantidades reajustadas para zero, caso se tornarem negativas. Se pelo menos um  $S_H(i)$  ou  $S_L(i)$  exceder a um valor  $H$  (intervalo de decisão), então o processo será considerado como fora de controle. Deste modo, para subgrupos racionais de tamanhos constantes, tem-se:  $LIC = -H$ ,  $LC = 0$  e  $LSC = H$ .

As CUSUMs unilaterais também podem ser calculadas através do procedimento de resposta inicial rápida (FIR) com *headstart* de 50%, ou seja, aplicando-se  $S_H(0) = S_L(0) = H/2$ .

Os valores de  $H$  e  $K$  são definidos, respectivamente, por:

$$H = h^* \sigma_{\bar{y}} = h^* \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \quad (3.10)$$

$$K = k^* \sigma_{\bar{y}} = k^* \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \quad (3.11)$$

em que:

$h^*$  = valor padronizado de  $H$ ;

$k^* = \frac{\delta}{2}$  = valor padronizado de  $K$ ;

$\delta$  = deslocamento da média de controle (valor-alvo) em número de desvios-padrão de controle ( $\sigma_0$ ).

Alternativamente, pode-se padronizar a variável  $Y$ , fazendo-se:

$$z_i = \frac{\bar{y}_i - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}} \quad (3.12)$$

Desse modo, as CUSUMs tabulares padronizadas são dadas por:

$$S_H(i)^* = \text{máx}[0, z_i - k^* + S_H(i-1)^*] \quad (3.13)$$

$$S_L(i)^* = \text{máx}[0, -k^* - z_i + S_L(i-1)^*] \quad (3.14)$$

Deve-se notar que as regras suplementares descritas por Costa *et al.* (2004) não podem ser seguramente aplicadas ao gráfico CUSUM, porque valores sucessivos de  $S_H(i)$  e  $S_L(i)$  ou mesmo padronizados, não são independentes. De fato, as CUSUMs tabulares ou padronizadas são médias ponderadas até o subgrupo racional  $i$ , cujos valores, apesar de altamente correlacionados, ocorrem em função de valores aleatórios da característica de qualidade se somente causas aleatórias estiverem atuando. Caso contrário, a manifestação de pelo menos uma regra suplementar ocorrerá com maior evidência.

Por fim, de modo a recomendar um bom planejamento de um gráfico de controle, Ribeiro Júnior e Gonçalves (2009) recomendam escolher valores de  $\delta$  maiores que 2,5 no início do controle do processo, valores entre 1,5 e 2,5 nas fases intermediárias e, menores que 1,5 quando o controle estiver numa fase mais avançada, em termos da redução da variabilidade do processo.

### 3.4 Resposta Inicial Rápida

Um modo alternativo de utilização do gráfico de controle CUSUM tabular consiste em aplicar o procedimento da resposta inicial rápida (*Fast Initial Response – FIR*) proposto por Lucas & Crosier (1982a). O *FIR* consiste em atribuir valores não nulos para os valores iniciais  $S_H(0)$  e  $S_L(0)$  da soma acumulada. Em geral, utiliza-se no *FIR*  $S_H(0) = S_L(0) = \frac{H}{2}$ , ou  $S_H(0)^* = S_L(0)^* = \frac{h^*}{2}$  (chamado *FIR* de 50%).

A aplicabilidade do *FIR* ocorre na maior rapidez em detectar o descontrole quando o processo, desde o seu início, atua fora da média especificada. Desse modo, o procedimento da resposta inicial rápida garante que um número reduzido de subgrupos racionais não conformes seja suficiente para detectar que o processo esteja fora de controle estatístico.

### 3.5 Desempenho do Gráfico de Controle CUSUM Tabular

Lucas (1976, *apud* KING, 1995) propõe um procedimento para obter  $K$  e  $H$  baseado no Comprimento Médio da Sequência (ARL – *Average Run Length*) do gráfico de controle CUSUM tabular no qual assume-se que:

- a média-alvo  $\mu_0$  do processo seja conhecida;
- a variação crítica  $\Delta$  do alvo, em unidades de desvio, esteja bem definida;
- o desvio-padrão  $\sigma_0$  seja conhecido ou tenha sido previamente estimado.

Os passos para a determinação de  $K$  e  $H$  são os seguintes:

- 1) Seja  $K = \frac{|\Delta|}{2}$  ( $\Delta = \mu_1 - \mu_0$ ). Em geral o gráfico de controle CUSUM obtém melhor desempenho adotando esse valor para  $K$ .
- 2) Calculam-se os valores padronizados  $k^*$  e  $\delta$  pelas respectivas equações:  
 $k^* = K/(\sigma_0/\sqrt{n})$  e  $\delta = \Delta/(\sigma_0/\sqrt{n})$ .
- 3) Verifique o conjunto de ARL obtido por Lucas (1976, *apud* KING 1995). Escolha o valor de  $h^*$  mais adequado para ARL de tamanhos 0 e  $\delta$  (Tabela 3.1).
- 4) Calcula-se  $H = h^* \cdot (\sigma/\sqrt{n})$
- 5) Calcula-se o ARL para os valores obtidos de  $K$  e  $H$ . Se os ARLs não forem satisfatórios, repete-se o processo usando um novo  $h^*$ .

Ainda quanto à escolha do valor de  $K$ , Lucas *et al.* (1982, *apud* OSANAIYE *et al.*, 1989) recomenda que, para o monitoramento de uma média  $\Delta$  no processo, tal valor deve estar também próximo de  $\frac{\mu_1 - \mu_0}{\ln \mu_1 - \ln \mu_0}$ .

Hawkins (1993a, *apud* ALVES 2003) obteve os valores de  $k^*$  e os correspondentes valores de  $h^*$  que atingirão ARL = 370, ou seja,  $\alpha = 0,0027$  ( $\delta = 0$ ). No entanto, ele não apresenta recomendações sobre as probabilidades dos alarmes verdadeiros, dado  $\delta > 0$ . A Tabela 3.2 resume suas recomendações.

Tabela 3.1: Valores de ARL para os procedimentos CUSUM. Fonte: LUCAS & CROSIER (1982a)

$h^*$	$k^*$	$\delta$									
		0		0,5		1		2		3	
		s/ FIR	FIR	s/ FIR	FIR	s/ FIR	FIR	s/ FIR	FIR	s/ FIR	FIR
2,5	0,25	13,6	9,24	7,67	5,08	4,06	2,62	2,06	1,37	1,42	1,07
4	0,25	38,5	28	13,2	8,68	6,06	3,69	2,93	1,77	2,05	1,23
6	0,25	125	100	20,9	13,4	8,73	5,05	4,07	2,37	2,74	1,64
8	0,25	368	316	28,8	17,8	11,4	6,39	5,21	2,94	3,48	2,04
10	0,25	1036	936	737	22,1	14,1	7,72	6,35	3,51	4,2	2,38
2	0,5	19,3	15,1	9,63	7,17	4,49	3,09	1,99	1,39	1,32	1,06
3	0,5	58,8	49,2	17,2	12,9	6,4	4,19	2,68	1,68	1,77	1,16
4	0,5	168	149	26,6	20,1	8,38	5,29	3,34	2,01	2,19	1,32
5	0,5	465	430	38	28,7	10,4	6,35	4,01	2,36	2,57	1,54
6	0,5	1280	1215	51,3	38,7	12,4	7,38	4,67	2,7	2,98	1,77
1,5	0,75	21,3	18,2	11	8,99	4,77	3,62	1,89	1,43	1,24	1,07
2,3	0,75	69,9	62,1	22	18,2	7,13	5,12	2,51	1,67	1,56	1,13
3	0,75	221	205	39,3	33	9,68	6,75	3,12	1,95	1,93	1,24
3,8	0,75	688	657	65,6	56,2	12,4	8,45	3,71	2,25	2,27	1,39
4,5	0,75	2069	2068	105	91,6	15,2	10,1	4,31	2,56	2,59	1,56
1	1	17,6	15,9	10,4	9,12	4,72	3,93	1,78	1,47	1,17	1,07
1,5	1	46,9	42,8	20,3	17,8	7,07	5,63	2,24	1,66	1,34	1,11
2	1	129	121	37,9	33,6	10	7,77	2,74	1,87	1,58	1,17
2,5	1	358	342	67,8	61	13,6	10,3	3,25	2,11	1,85	1,25
3	1	981	953	117	108	17,4	13,4	3,75	2,35	2,12	1,35
3,5	1	2670	2621	199	186	21,8	16,6	4,25	2,61	2,37	1,46
0,7	1,5	33,9	32,6	18,9	17,9	7,59	6,92	2,18	1,89	1,25	1,15
1,1	1,5	92,1	89,6	40,9	38,7	12,7	11,8	2,8	2,22	1,43	1,21
1,5	1,5	275	268	91,6	87,3	21,1	18,7	3,5	2,61	1,66	1,28
1,9	1,5	881	866	208	201	34,3	30,5	4,26	3,02	1,92	1,37
2,3	1,5	2950	2930	474	461	54,5	49	5,03	3,45	2,2	1,47

Tabela 3.2: Valores de  $k^*$  e os correspondentes valores de  $h^*$  que fornecem ARL = 370 para o CUSUM tabular bilateral. Fonte: Hawkins (1993a, *apud* ALVES, 2003)

$k^*$	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5
$h^*$	8,01	4,77	3,34	2,52	1,99	1,61

Montgomery (2004) recomenda  $h^* = 4$  ou  $h^* = 5$  visando monitoramento de processos sujeitos à variação  $\delta = 1,0$ , utilizando  $k^* = 0,5$ .

Souza *et al.* (2008) também realizaram uma série de estudos a fim de obter uma baixa probabilidade do alarme falso  $\alpha$  e do alarme verdadeiro acima de 90%.

Tais recomendações são as seguintes:

- $n = 1$ ,  $k^* = 0,5$  e  $h^* = 3$ , para  $\delta \geq 1$ ;
- $n = 1$ ,  $k^* = 0,5$  e  $h^* = 4$ , para  $0 \leq \delta < 1$ ;

## 4. MATERIAL E MÉTODOS

### 4.1 Simulação dos Dados

Para um processo sob controle estatístico, foram simulados no software Microsoft Excel 2003 dados de uma variável resposta  $Y$  padronizada, sob distribuição normal com média  $\mu_0 = 0$  e desvio-padrão  $\sigma_0 = 1$  para até 50 subgrupos racionais com até 16 repetições ( $1 \leq n \leq 16$ , para  $n \in \mathbb{N}$ ), onde um determinado subgrupo racional foi especificado pelo índice  $i$  ( $1 \leq i \leq 50$ , para  $i \in \mathbb{N}$ ) e uma determinada repetição foi especificada pelo índice  $j$  ( $1 \leq j \leq n$ , para  $j \in \mathbb{N}$ ). Para tanto, foram realizadas 1000 simulações ( $1 \leq s \leq 1000$ , para  $s \in \mathbb{N}$ ) por subgrupo racional. É importante ressaltar que na prática são utilizados geralmente 25 subgrupos racionais. Portanto, foi adotado o dobro para que o estudo pudesse ser realizado com maior precisão. Já o maior número de repetições foi escolhido para atender com folga as recomendações mais utilizadas na prática, que normalmente vão até 10 repetições.

Em seguida desenvolveu-se um aplicativo na linguagem de programação C++ em que foram estabelecidos quatro processos fora de controle estatístico para a média em todos os subgrupos racionais, como segue:

$$\mu_\delta = \mu_0 + \delta\sigma_0, \quad (4.1)$$

para valores de  $\delta$  iguais a  $\frac{1}{2}$ , 1, 2 e 3, em que:

$$\mu_{\frac{1}{2}} = \mu_0 + \frac{1}{2}\sigma_0,$$

$$\mu_1 = \mu_0 + 1\sigma_0,$$

$$\mu_2 = \mu_0 + 2\sigma_0 \text{ e}$$

$$\mu_3 = \mu_0 + 3\sigma_0$$

Esses quatro processos fora de controle estatístico com média  $\mu_\delta$  e desvio-padrão  $\sigma_0$  foram obtidos pela soma de cada valor simulado por  $\delta\sigma_0$ , como segue:

$$y_{ijs} + \delta\sigma_0, \text{ para } s = 1, 2, \dots, 1000$$

em que:  $i = 1, 2, \dots, 50$  e  $j = 1, 2, \dots, n$  ( $1 \leq n \leq 16$ ).

Os valores de  $\delta$  acima foram escolhidos a partir dos estudos previamente realizados por Souza *et al.* (2008) visando comparar as eficiências dos gráficos de controle CUSUM tabular, Shewhart e EWMA. Tais valores estão relacionados a uma gradação de pequena a grande diferenças entre as médias consideradas como fora e sob controle que o gráfico de controle CUSUM tabular consegue detectar.

Para os quatro processos foram estabelecidos 40 gráficos de controle CUSUM tabular padronizado em função das combinações entre os valores de  $k^*$  e  $h^*$ , definidos a seguir:

$$k^* = \frac{\delta}{2} (0,25, 0,5, 1 \text{ e } 1,5) \quad (4.2)$$

$$h^* = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \text{ e } 10 \quad (4.3)$$

No total, foram construídos  $40 \times 16 = 640$  gráficos de controle CUSUM tabular para os processos fora de controle, mais 640 para os processos sob controle, totalizando assim 1280 gráficos de controle CUSUM tabular. O valor de  $k^*$  apresentado na Equação 4.2 é o valor padronizado de  $K$  (valor de referência). Esse valor  $k^*$  é usualmente escolhido a meio caminho entre a média de controle  $\mu_0$  e a média fora de controle  $\mu_1$ , cuja mudança da média é expressa em unidades de desvio-padrão (Equação 4.1). Assim, para os valores de  $\delta$  iguais a 0,5, 1, 2 e 3, têm-se os respectivos valores de  $k^*$ : 0,25, 0,5, 1 e 1,5.

Considerando que o processo esteja fora de controle desde o primeiro subgrupo racional, conforme ocorre na simulação de dados do presente estudo, então o seu número será substituído pelo próprio contador. É claro que na prática o processo pode sair de controle a qualquer momento (não necessariamente no



primeiro subgrupo racional). O importante é que a partir desse momento o gráfico CUSUM tabular começará a registrar a saída de controle.

## 4.2 Alarme Falso

Quando  $\delta = 0$ , o processo estará sujeito ao erro tipo I, cujo alarme falso no subgrupo racional  $i$  e simulação  $s$  ocorrerá quando a estimativa  $\bar{y}_{is}$  de  $Y_{is} \sim N(\mu_0 = 0, \sigma_0 = 1)$  para  $i = 1, 2, \dots, 50$  e  $s = 1, 2, \dots, 1000$ , corresponder às seguintes situações:

$$S_L(i)^* \geq h^* \text{ ou } S_H(i)^* \geq h^*, \text{ para o respectivo } z_{is},$$

$$\text{em que: } z_{is} = \frac{\bar{y}_{is} - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}$$

Note que  $\bar{y}_{is}$  é a média aritmética dos valores do subgrupo racional  $i$  para a simulação  $s$  sob controle estatístico. Em particular, para  $n = 1$ , tem-se  $\bar{y}_{is} = y_{is}$ ,

$$\text{sendo } \bar{y}_{is} = \frac{\sum_{j=1}^n y_{ijs}}{n}, \text{ para } 1 \leq n \leq 16.$$

Do mesmo modo, foram geradas 1000 CUSUMs para cada subgrupo racional e pela programação desenvolvida em C++, foram calculados todos os  $S_H^*$ 's e  $S_L^*$ 's de acordo com os dados simulados. Desse modo, a estimativa da probabilidade do alarme falso para cada subgrupo racional  $i$ , foi obtida por:

$$\hat{\alpha}_i = \frac{NPFC_i}{1000} = \frac{\sum_{s=1}^{1000} I_{is}}{1000}, \text{ para } \delta = 0, \text{ onde:} \quad (4.4)$$

$NPFC_i$  = número de pontos fora de controle no subgrupo racional  $i$ , e

$$I_{is} = \begin{cases} 0 & \text{se } s_H(i)^* < h^* \text{ e } s_L(i)^* < h^* \text{ para o respectivo } z_{is} \\ 1 & \text{se } s_H(i)^* \geq h^* \text{ ou } s_L(i)^* \geq h^* \text{ para o respectivo } z_{is} \end{cases}$$

em que:

$s_H(i)^*$  = valor observado da CUSUM unilateral superior padronizada no subgrupo racional  $i$ , e

$s_L(i)^*$  = valor observado da CUSUM unilateral inferior padronizada no subgrupo racional  $i$ .

Para o gráfico de controle CUSUM tabular, pode-se definir a probabilidade do alarme falso do subgrupo racional  $i$  ( $\alpha_i$ ), como a probabilidade do  $S_H(i)^*$  ser maior que  $h^*$  somada à probabilidade do  $S_L(i)^*$  do subgrupo racional  $i$  ser maior que  $h^*$ , dado que não há variação na média do processo, ou seja,  $\delta = 0$  (Equação 4.5).

$$\alpha_i = P(S_H(i)^* \geq h^*) + P(S_L(i)^* \geq h^*), \text{ para } \delta = 0 (\mu_0 = 0), \text{ onde} \quad (4.5)$$

$S_H(i)^*$  = variável aleatória da CUSUM unilateral superior padronizada no subgrupo racional  $i$ , e

$S_L(i)^*$  = variável aleatória da CUSUM unilateral inferior padronizada no subgrupo racional  $i$ .

Como essas duas probabilidades são iguais, quando  $Y$  é uma variável aleatória com distribuição de probabilidades simétricas, então neste caso tem-se:

$$\alpha_i = 2 P(S_H(i)^* \geq h^*), \text{ para } i = 1, 2, \dots, 50 \quad (4.6)$$

Como o  $S_H(i)^*$  depende do  $S_H(i-1)^*$ , e assim sucessivamente, então a probabilidade do alarme falso no subgrupo racional  $i$  pode ser definida por:

$$\begin{aligned}\alpha_i &= 2 P(Z_i - k^* + S_H(i-1)^* \geq h^*) \\ &= 2 P(Z_i + S_H(i-1)^* \geq k^* + h^*)\end{aligned}, \text{ para } \delta = 0 \text{ e } i = 1, 2, \dots, 50. \quad (4.7)$$

Como  $Z_i$  e  $S_H(i-1)^*$  são variáveis aleatórias em cada subgrupo racional  $i$ , a soma das duas também é uma variável aleatória. Entretanto, a distribuição dessa combinação linear depende do valor de  $k^*$  e do subgrupo racional  $i$ . Desse modo, a probabilidade do alarme falso de acordo com a ordem  $i$  do subgrupo racional, é dada por:

$$\begin{aligned}\alpha_i &= 2 P(Z_i + S_H(i-1)^* \geq k^* + h^*), \text{ para } \delta = 0 \\ &\Rightarrow \alpha_i = 2[1 - P(Z_i + S_H(i-1)^* \leq k^* + h^*)] \\ &\Rightarrow \alpha_i = 2[1 - F(k^* + h^*)], \text{ para } i = 1, 2, \dots, 50\end{aligned}$$

No presente trabalho escolheu-se ajustar as distribuições normal e lognormal de três parâmetros a fim de obter as estimativas das probabilidades dos alarmes falsos e verdadeiros. Desse modo, as conclusões a serem obtidas nesse trabalho não se basearão somente na simulação de dados, mas também pelos ajustes a distribuições. A função densidade de probabilidade (FDP) e função de distribuição acumulada (FDA) dessas duas distribuições estão apresentadas na Tabela 4.1.

Portanto, foram realizados ajustes das distribuições normal e lognormal de três parâmetros (3P) em todo  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, 50$ ) para valores de  $k^*$  iguais a 0,25, 0,5, 1 e 1,5 para o processo sob controle estatístico. Daí, segue que:

$$\alpha_i = 2 \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{(k^*+h^*)-\mu_i}{\sigma_i}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right], \text{ para } \delta = 0 \quad (4.8)$$

obtido pela distribuição normal, e

$$\alpha_i = 2 \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln(k^*+h^*-\gamma_i)-\mu_i}{\sigma_i}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right], \text{ para } \delta = 0 \quad (4.9)$$

obtido pela distribuição lognormal 3P.

Tabela 4.1: Função densidade de probabilidade e função de distribuição acumulada das distribuições Normal e Lognormal de três parâmetros.

<b>Distribuição Normal</b>	
Função Densidade de Probabilidade	$f(x) = \left[ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right] e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2}, -\infty < x < +\infty$
Função de Distribuição Acumulada	$F(x) = \Phi\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right], \text{ onde } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$
<b>Distribuição Lognormal 3P</b>	
Função Densidade de Probabilidade	$f(x) = \left[ \frac{1}{(x-\gamma)\sigma\sqrt{2\pi}} \right] e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln(x-\gamma)-\mu}{\sigma}\right]^2}, \gamma < x < +\infty$
Função de Distribuição Acumulada	$F(x) = \Phi\left[\frac{\ln(x-\gamma)-\mu}{\sigma}\right], \text{ onde } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Para testar a aderência às distribuições normal e lognormal 3P foi aplicado o teste de Kolmogorov-Smirnov a 5% de probabilidade para cada subgrupo racional  $i$ . Utilizou-se o software EasyFit 5.5 versão demo para obter o ajuste e a aplicação do teste.

A partir da obtenção dos parâmetros, realizou-se uma análise de regressão de modo a obter uma equação ajustada para cada um deles em função da ordem  $i$  do subgrupo racional. Em suma, para cada subgrupo racional  $i$ , obteve-se as estimativas  $\hat{\mu}_i, \hat{\sigma}_i$  (ajuste pela normal) ou  $\hat{\mu}_i, \hat{\sigma}_i, \hat{\gamma}_i$  (ajuste pela lognormal 3P) e, conseqüentemente, para um determinado  $k^*$  e  $h^*$ , obteve-se as seguintes probabilidades teóricas do alarme falso:

$$\hat{\alpha}_i = 2 \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{(k^*+h^*)-\hat{\mu}_i}{\hat{\sigma}_i}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right], \text{ para } \delta = 0 \quad (4.10)$$

obtido pela distribuição normal, e

$$\hat{\alpha}_i = 2 \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln(k^*+h^*-\hat{\gamma}_i)-\hat{\mu}_i}{\hat{\sigma}_i}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right], \text{ para } \delta = 0 \quad (4.11)$$

obtido pela distribuição lognormal 3P.

As equações de estimação dos parâmetros da normal e lognormal 3P, juntamente com o teste t para verificar a significância do efeito do subgrupo racional, foram obtidos pelo software SAEG versão demo e Minitab 16. As probabilidades teóricas  $\hat{\alpha}_i$  foram calculadas no Minitab 16 e Microsoft Excel 2003. Para plotar as distribuições ajustadas de  $Z(i) + S_H(i-1)^*$  foi utilizado o Minitab 16. Para a plotagem dos diversos gráficos referentes a probabilidade do alarme falso, estimativa dos parâmetros das distribuições ajustadas e p-valor, sendo que, todos eles em função da ordem  $i$  do subgrupo racional, foi utilizado o Microsoft Excel 2003.

### 4.3 Alarme Verdadeiro

Para registrar o desempenho do gráfico de controle CUSUM tabular em termos de alarme verdadeiro para cada subgrupo racional, separadamente, foram anotadas as estimativas  $\bar{y}_{is}$  de  $Y_{is} \sim N(\mu_1 = \delta, \sigma_0 = 1)$  para  $i = 1, 2, \dots, 50$  e  $s = 1, 2, \dots, 1000$ , que estavam associadas também aos seguintes casos:

$$S_L(i)^* \geq h^* \text{ ou } S_H(i)^* \geq h^*, \text{ para o respectivo } z_{is},$$

$$\text{em que: } z_{is} = \frac{\bar{y}_{is} - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}}$$

onde  $\bar{y}_{is}$  é a média aritmética dos valores do subgrupo racional  $i$  para a simulação  $s$  fora de controle estatístico. Em particular, para o subgrupo racional de tamanho  $n = 1$ , tem-se  $\bar{y}_{is} = y_{is}$ , sendo

$$\bar{y}_{is}' = \frac{\sum_{j=1}^n y_{ijs}'}{n}, \text{ para } 1 \leq n \leq 16 \text{ e } y_{ijs}' = y_{ijs} + \delta\sigma_0.$$

Para calcular o  $Pd_i$ , também foi desenvolvido um aplicativo em C++, no qual foram obtidas as seguintes estimativas por meio da simulação dos dados:

$$\hat{Pd}_i = \frac{NPFC_i}{1000} = \frac{\sum_{s=1}^{1000} I_{is}}{1000}, \text{ para } \delta > 0, \text{ onde:} \quad (4.12)$$

$NPFC_i$  = número de pontos fora de controle no subgrupo racional  $i$ , e

$$I_{is} = \begin{cases} 0 & \text{se } s_H(i)^* < h^* \text{ e } S_L(i)^* < h^* \text{ para o respectivo } z_{is} \\ 1 & \text{se } s_H(i)^* \geq h^* \text{ ou } S_L(i)^* \geq h^* \text{ para o respectivo } z_{is} \end{cases}$$

em que:

$s_H(i)^*$  = valor observado da CUSUM unilateral superior padronizada no subgrupo racional  $i$ , e

$s_L(i)^*$  = valor observado da CUSUM unilateral inferior padronizada no subgrupo racional  $i$ .

Para compreender o efeito dos termos  $k^*$  e  $i$ , deve-se analisar a Equação 3.13. Supondo que o processo esteja fora de controle, então os valores observados podem ser representados pela variável aleatória  $Y_\delta \sim N(\mu_0 + \delta\sigma_0, \sigma_0)$  e, conseqüentemente,  $Z_\delta \sim N(\delta, \sigma_0)$ .

Para o primeiro subgrupo racional, tem-se:

$$S_H(1)^* = \max\left[0, z_1 - k^* + S_H(0)^*\right], \text{ onde } k^* = \frac{\delta}{2}$$

Daí, o valor esperado para  $S_H(1)^*$  pode ser escrito como:

$$E[S_H(1)^*] = E[z_1 - k^* + S_H(0)^*] = E[z_1] - k^* + S_H(0)^* = \delta - k^* + 0 = k^*$$

Em seguida, para o segundo subgrupo racional, tem-se:

$$S_H(2)^* = \max[0, z_2 - k^* + S_H(1)^*]$$

E o seu valor esperado é:

$$E[S_H(2)^*] = E[z_2 - k^* + S_H(1)^*] = E[z_2] - k^* + S_H(1)^* = \delta - k^* + k^* = 2k^*$$

E, para o terceiro subgrupo racional:

$$S_H(3)^* = \max[0, z_3 - k^* + S_H(2)^*]$$

$$E[S_H(3)^*] = E[z_3 - k^* + S_H(2)^*] = E[z_3] - k^* + S_H(2)^* = \delta - k^* + 2k^* = 3k^*$$

De forma geral, pode-se ver que:

$$E[S_H(i)^*] = ik^*, \text{ para } \delta > 0 \quad (4.13)$$

Para o gráfico de controle CUSUM tabular pode-se definir a probabilidade de alarme verdadeiro por:

$$Pd_i = P(S_H(i)^* \geq h^* - \delta\sqrt{n}) + P(S_L(i)^* \geq h^* - \delta\sqrt{n}), \quad (4.14)$$

para  $\delta \neq 0$  ( $\mu_1 = \delta\sqrt{n}$ ), onde

$S_H(i)^*$  = variável aleatória da CUSUM unilateral superior padronizada no subgrupo racional  $i$ , e

$S_L(i)^*$  = variável aleatória da CUSUM unilateral inferior padronizada no subgrupo racional  $i$ .

Logo,

$$\begin{aligned} Pd_i &= P(Z_i - k^* + S_H(i-1) \geq h^* - \delta\sqrt{n}) + P(-Z_i - k^* + S_H(i-1) \geq h^* - \delta\sqrt{n}) \\ &= P(Z_i + S_H(i-1) \geq h^* + k^* - \delta\sqrt{n}) + P(-Z_i + S_L(i-1) \geq h^* + k^* - \delta\sqrt{n}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Entretanto, ao supor  $\delta \neq 0$ , segue que o processo se desloca ou para acima da média de controle ( $\delta > 0$ ), ou para baixo da média de controle ( $\delta < 0$ ). Então, a probabilidade de alarme verdadeiro definida pela Equação 4.14 pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} Pd_i &= P(S_H(i)^* \geq h^* - \delta\sqrt{n}), \text{ para } \delta > 0 \\ Pd_i &= P(S_L(i)^* \geq h^* - \delta\sqrt{n}), \text{ para } \delta < 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Assim, finalizando o desenvolvimento de  $Pd_i$  para  $\delta > 0$  chega-se que:

$$Pd_i = P(Z_i + S_H(i-1)^* \geq h^* + k^* - \delta\sqrt{n}), \text{ para } \delta > 0 \quad (4.17)$$

A partir da Equação 4.17, a probabilidade do alarme verdadeiro é dado por:

$$\begin{aligned} Pd_i &= 1 - P(Z_i + S_H(i-1) \leq h^* + k^* - \delta\sqrt{n}), \text{ para } \delta > 0 \\ &= 1 - F(h^* + k^* - \delta\sqrt{n}) \end{aligned}$$

Assim, ajustou-se pelo software EasyFit 5.5 as distribuições normal e lognormal de três parâmetros (Tabela 4.1) a fim de obter as estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros.

$$Pd_i = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{(k^*+h^*-\delta\sqrt{n})-\mu_i}{\sigma_i}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \text{ para } \delta > 0 \quad (4.18)$$

ajustado pela distribuição normal, e



$$Pd_i = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln[(k^*+h^*-\delta\sqrt{n})-\gamma_i]-\mu_i}{\sigma_i}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \text{ para } \delta > 0 \quad (4.19)$$

ajustado pela distribuição lognormal 3P.

Do mesmo modo, para testar os ajustes às distribuições, foi aplicado o teste de Kolmogorov-Smirnov a 5% de probabilidade para cada subgrupo racional  $i$ .

Assim como feito para a probabilidade do alarme falso, realizou-se aqui uma análise de regressão de modo a obter uma equação ajustada para cada um dos parâmetros previamente obtidos em função da ordem  $i$  do subgrupo racional. Uma vez estimados os parâmetros, obteve-se as seguintes probabilidades teóricas do alarme verdadeiro:

$$\hat{Pd}_i = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{(k^*+h^*-\delta\sqrt{n})-\hat{\mu}_i}{\hat{\sigma}_i}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \text{ para } \delta > 0 \quad (4.20)$$

obtido pela distribuição normal, e

$$\hat{Pd}_i = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln[(k^*+h^*-\delta\sqrt{n})-\hat{\gamma}_i]-\hat{\mu}_i}{\hat{\sigma}_i}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \text{ para } \delta > 0 \quad (4.21)$$

obtido pela distribuição lognormal 3P.

As equações de estimação dos parâmetros da normal e lognormal 3P, juntamente com o teste t para verificar a significância do efeito do subgrupo racional, foram obtidos pelo software SAEG versão demo e Minitab 16. As probabilidades teóricas  $\hat{Pd}_i$  foram calculadas no Minitab 16 e Microsoft Excel 2003. Para plotar as distribuições ajustadas de  $Z(i) + S_H(i-1)^*$  foi utilizado o Minitab 16. Para a plotagem dos diversos gráficos referentes a probabilidade do alarme verdadeiro, estimativa dos parâmetros das distribuições ajustadas e p-valor, sendo que, todos eles em função da ordem do subgrupo racional, foi utilizado o Microsoft Excel 2003.

## 4.4 Análise de Regressão

Para verificar o efeito dos termos do gráfico de controle CUSUM tabular que podem ser modificados, ou seja,  $k^*$ ,  $h^*$ ,  $n$  e  $i$ , foi realizada uma análise de regressão do  $\alpha$  e do poder.

Para a probabilidade do alarme falso, o maior modelo de regressão adotado foi do tipo:

$$\begin{aligned} \alpha = \beta_0 + \beta_1 k^* + \beta_2 h^* + \beta_3 n + \beta_4 i + \beta_5 k^* h^* + \beta_6 k^* n + \beta_7 k^* i + \\ + \beta_8 h^* n + \beta_9 h^* i + \beta_{10} ni + \varepsilon \end{aligned} \quad (4.22)$$

e, analogamente para a probabilidade do alarme verdadeiro obtida dentro de cada valor de  $k^* = \delta/2$ :

$$Pd = \beta_0 + \beta_1 h^* + \beta_2 n + \beta_3 i + \beta_4 h^* n + \beta_5 h^* i + \beta_6 ni + \varepsilon \quad (4.23)$$

Para selecionar a melhor equação de regressão ajustada para as probabilidades dos dois alarmes, foram retirados os coeficientes não significativos, um de cada vez e começando pelos mais complexos de interpretação (interações), de acordo com o teste t de Student ao nível de 5% de significância.

As equações de regressão que estimaram  $\alpha$  e  $Pd$ , juntamente com o teste t que verificou a significância dos efeitos referentes aos fatores individuais e interações duplas, foram realizadas no software Minitab 16.

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 5.1 Alarme Falso

#### 5.1.1 Probabilidade Estimada

A probabilidade do alarme falso proporcionada pelo gráfico CUSUM tabular para o monitoramento da média, não depende ( $P > 0,05$ ) do número de repetições por subgrupo racional ( $n$ ) e nem das suas interações, mas diminui ( $P < 0,05$ ) em função dos aumentos dos valores de  $k^*$  e  $h^*$  e aumenta ( $P < 0,05$ ) em função da ordem  $i$  do subgrupo racional.

A equação de regressão estimada para a probabilidade do alarme falso, com todos os termos significativos ( $P < 0,05$ ), de acordo com o teste t de Student foi:

$$\hat{\alpha} = 0,448639 - 0,365440k^* - 0,0624714h^* + 0,0038661i + 0,0522259k^*h^* - 0,001914771k^*i - 0,00026694h^*i \quad (R^2 = 0,60) \quad (5.1)$$

para  $0,25 \leq k^* \leq 1,5$ ,  $1 \leq h^* \leq 10$  e  $1 \leq i \leq 50$ .

Pela análise da Equação 5.1, pode-se observar que os efeitos dos termos  $k^*$  e  $h^*$  são negativos, ou seja, o aumento dos seus valores acarreta a diminuição da probabilidade do alarme falso ( $\alpha$ ). Por outro lado, o aumento da ordem  $i$  do subgrupo racional favorece o seu aumento. Tais resultados estão de acordo com os encontrados por Souza *et al.* (2008) em relação aos efeitos de  $k^*$ ,  $h^*$  e  $n$ .

A respeito da interação positiva  $k^*h^*$ , tem-se o seguinte raciocínio: os aumentos de  $k^*$  e  $h^*$  diminuem o  $\alpha$ . Porém, à medida que se aumenta os seus valores, a taxa de decréscimo de  $\alpha$  diminui. Portanto, apesar da intenção ser de aumentar os valores de  $k^*$  e  $h^*$ , a partir de um determinado valor não compensa, pois a interação  $k^*h^*$  vai neutralizar os efeitos negativos e isolados de  $k^*$  e  $h^*$  sobre o  $\alpha$ .

A interação  $k^*i$  pode ser interpretada pelo seguinte modo: o aumento da ordem  $i$  acarreta naturalmente no aumento de  $\alpha$ . Porém, esse efeito gerado pelo

aumento de  $i$  é amenizado quando se utiliza um  $k^*$  alto ( $1 \leq k^* \leq 1,5$ ), dado que a interação  $k^*i$  é negativa. Logo, quando o valor de  $k^*$  é alto, não há necessidade de se preocupar com o efeito do aumento de  $i$  sobre o  $\alpha$ . Por outro lado, quando o  $k^*$  é baixo ( $0,25 \leq k^* \leq 0,5$ ), o efeito do aumento de  $i$  será expressivo e a probabilidade de alarme falso  $\alpha$  aumentará mais rapidamente.

Para a interação negativa  $h^*i$ , sabe-se que o efeito de  $h^*$  é maior (em módulo) que o efeito da ordem  $i$ , que é maior que o efeito da interação  $h^*i$ . Logo, para valores altos de  $h^*$  obter-se-á baixos valores de  $\alpha$  mesmo para altos valores de  $i$ . Entretanto, para valores baixos de  $h^*$ , nota-se o aumento do  $\alpha$  numa taxa cada vez menor à medida que se aumenta a ordem  $i$  do subgrupo racional.

Pela Figura 5.1, construída a partir dos valores simulados para um processo sob controle estatístico (Anexo A), tem-se uma visão global do comportamento da probabilidade do alarme falso em função da ordem  $i$  do subgrupo racional, levando-se em conta a sua variação dentro do intervalo de 0 a 1.

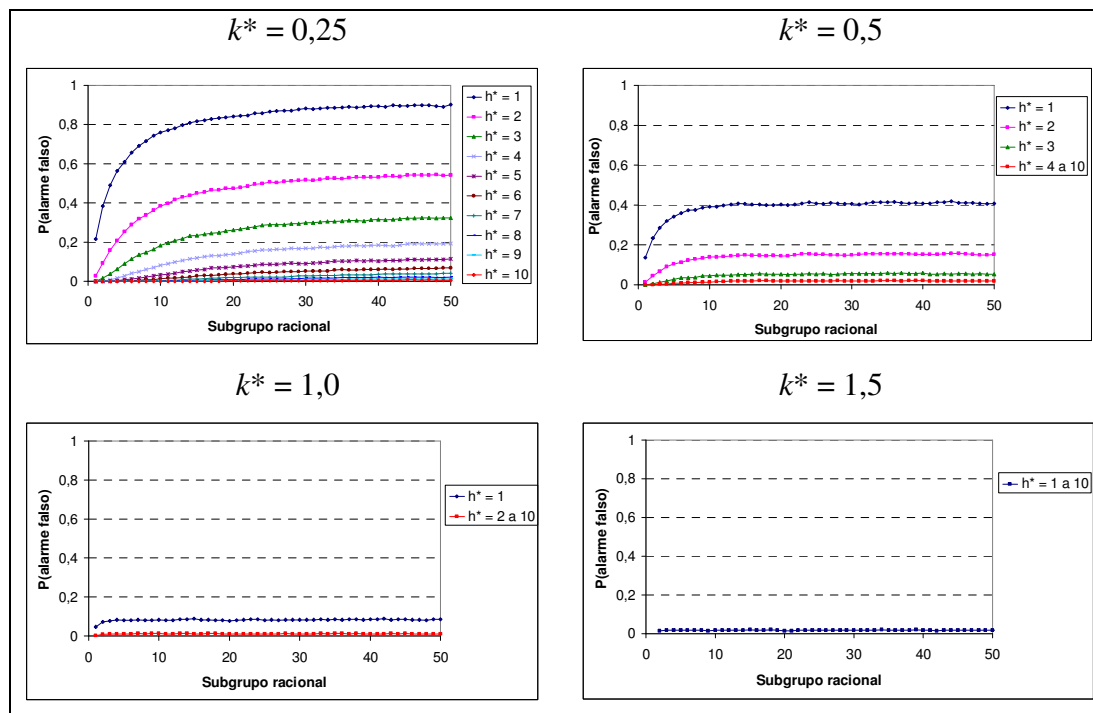


Figura 5.1 – Probabilidade do alarme falso observado em função do subgrupo racional, para diferentes combinações entre  $k^*$  e  $h^*$ .

No Anexo A estão apresentados os valores obtidos da simulação de alarme falso que geraram os gráficos relativos à Figura 5.1.

Retornando à Equação 5.1, nota-se que não houve ( $P > 0,05$ ) efeito do tamanho do subgrupo racional ( $n$ ) sobre o  $\alpha$ , juntamente com as suas interações com  $k^*$ ,  $h^*$  e  $i$ . Ou seja, trabalhar com subgrupos racionais de tamanhos 1 ou 16 produzirão os mesmos efeitos no alarme falso. Nesse caso, recomenda-se trabalhar com subgrupos racionais com observações individuais ( $n = 1$ ) por uma questão de custo de amostragem. No anexo E são apresentados todos os gráficos de probabilidade de alarme falso em função da ordem  $i$  do subgrupo racional para as diferentes combinações de  $k^*$  e  $h^*$  e para os valores de  $n$  no intervalo de 1 a 16.

Dado que a probabilidade do alarme falso não se manifesta linearmente em função dos valores de  $k^*$  e  $h^*$ , e nem da ordem do subgrupo racional (Figura 5.1), a equação de regressão estimada não foi utilizada para a obtenção das estimativas dessas probabilidades. Para tanto, seria necessário estimar equações em função de  $i$  para cada combinação entre  $k^*$  e  $h^*$ .

### 5.1.2 Probabilidade Teórica

Na Figura 5.2 são apresentados os p-valores obtidos pelo teste de Kolmogorov-Smirnov quando aplicadas ao ajuste da variável aleatória  $Z(i) + S_H(i-1)^*$

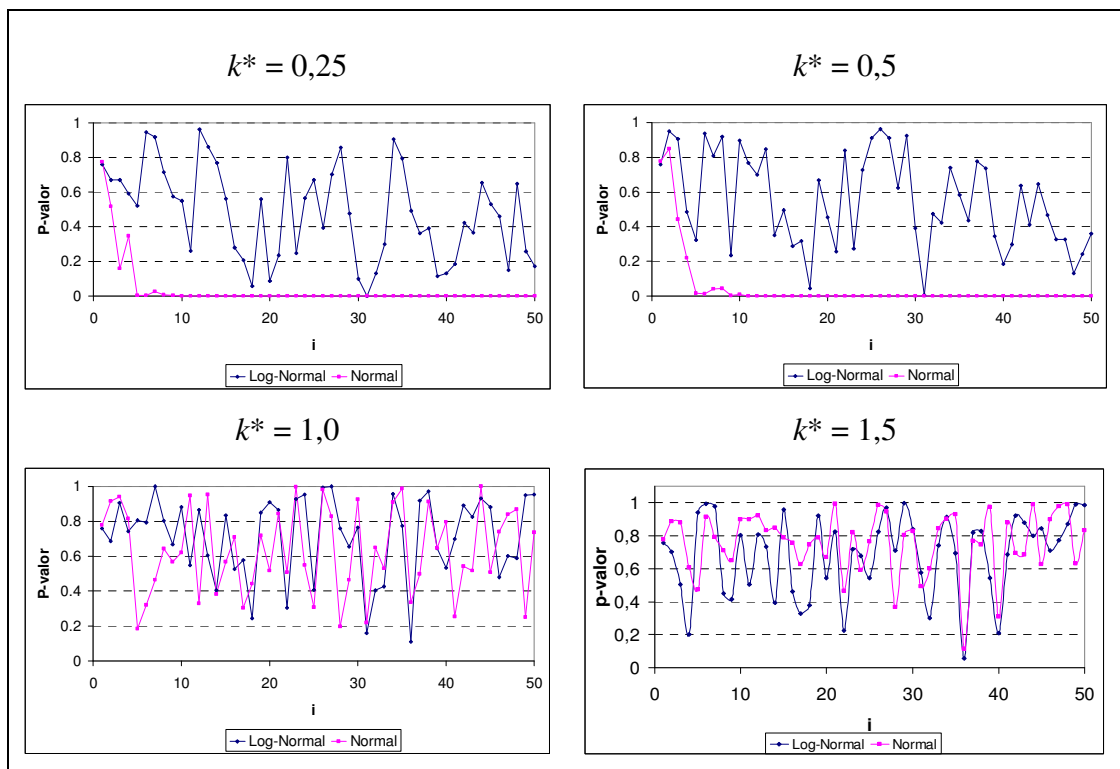


Figura 5.2 – P-valores do teste de Kolmogorov-Smirnov referentes aos ajustes da variável aleatória  $Z(i) + S_H(i-1)^*$  às distribuições de probabilidades normal e lognormal 3P

( $\delta = 0$ ), às distribuições de probabilidades normal e lognormal com três parâmetros (3P). Para valores de  $k^*$  iguais a 0,25 e 0,5 observa-se que  $Z(i) + S_H(i-1)^*$  segue distribuição normal até o quarto subgrupo racional ( $1 \leq i \leq 4$ ). Entretanto, a variável aleatória é melhor explicada pela distribuição lognormal 3P para todo  $i$ . Para valores de  $k^*$  iguais a 1,0 e 1,5, o p-valor indica que pode-se aceitar a hipótese de que  $Z(i) + S_H(i-1)^*$  segue as distribuições normal e lognormal 3P ao longo dos cinquenta subgrupos racionais, para  $\alpha = 0,05$ .

Portanto, para modelar valores aleatórios de  $Z(i) + S_H(i-1)^*$  ( $i = 1, 2, \dots, 50$ ) oriundos dos valores de  $k^*$  iguais a 0,25 e 0,5 e dos valores 1,0 e 1,5, foram adotadas as distribuições de probabilidade lognormal 3P e normal respectivamente.

Na Figura 5.3, são mostrados os ajustes da variável aleatória  $Z(i) + S_H(i-1)^*$  nos subgrupos racionais de ordens 1, 25 e 50. Os parâmetros  $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $\gamma$  da distribuição lognormal 3P, são conhecidos como parâmetros de escala, forma e locação respectivamente. Uma variação no parâmetro  $\mu$  indica um deslocamento da distribuição, enquanto que uma variação no parâmetro  $\sigma$  indica mudança na forma (achatamento). O parâmetro  $\gamma$  é menor que o menor valor da distribuição, e é útil por possibilitar o ajuste de valores negativos à distribuição. Nota-se que  $Z(i) + S_H(i-1)^*$  possui comportamento simétrico para valores altos de  $k^*$  (1,0 e 1,5), podendo ser modelada pela distribuição normal em todos os cinquenta subgrupos racionais. Os p-valores obtidos pela Figura 5.2 comprovam esse ajuste pela distribuição normal. Para os valores baixos de  $k^*$  (0,25 e 0,5), ela possui comportamento simétrico somente para os primeiros subgrupos racionais ( $1 \leq i \leq 4$ ) de modo que sua assimetria ocorre à medida que se aumenta  $i$  e, conseqüentemente, torna-se necessário ajustá-la pela distribuição lognormal 3P.

No Anexo C, são apresentadas as estimativas dos parâmetros das distribuições lognormal 3P ( $k^*$  iguais a 0,25 e 0,5) e normal ( $k^*$  iguais a 1,0 e 1,5) em cada um dos cinquenta subgrupos racionais. A partir dessas estimativas, realizou-se uma análise de regressão a fim de obter uma equação ajustada para cada um dos parâmetros em função da ordem do subgrupo racional (Equações 5.2 a 5.7).

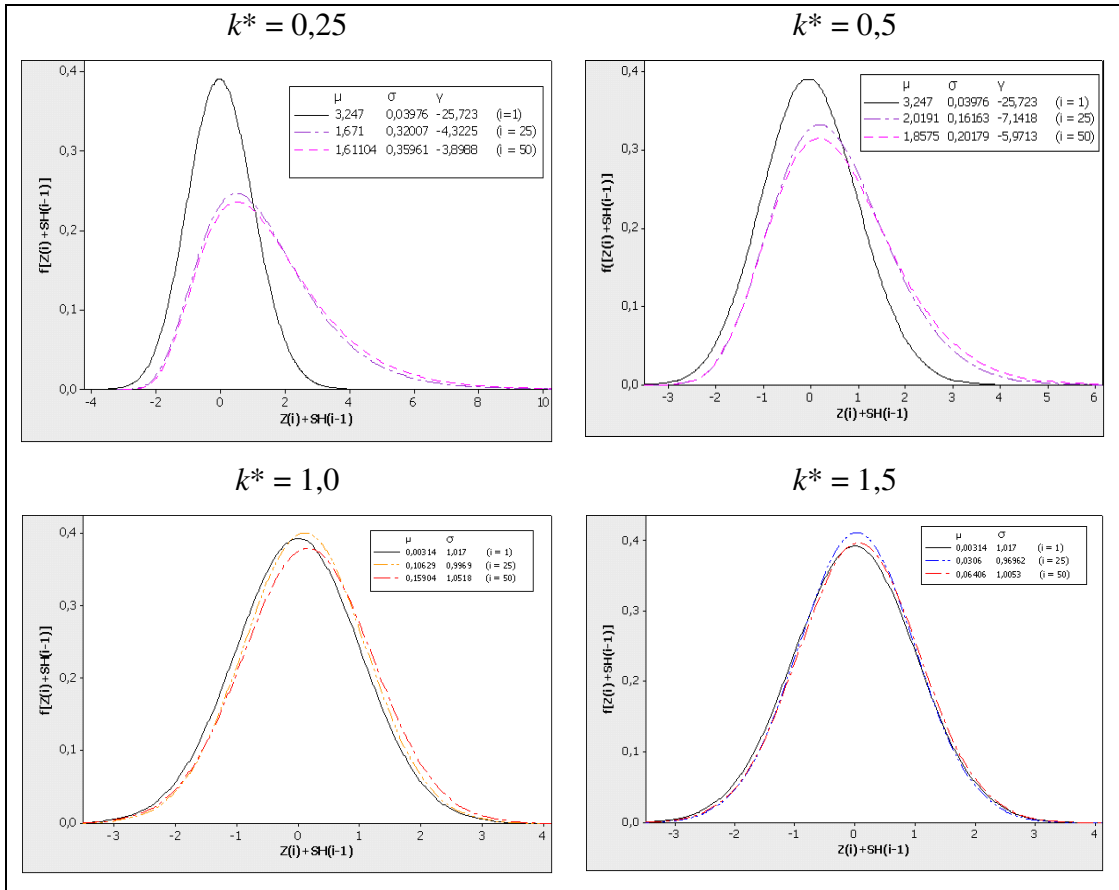


Figura 5.3 – Ajuste de  $Z(i)+S_H(i-1)$  nos subgrupos racionais de ordens 1, 25 e 50 pelas distribuições lognormal 3P ( $k^* = 0,25$  e  $0,5$ ) e normal ( $k^* = 1,0$  e  $1,5$ ).

Para  $k^* = 0,25$  (Figura 5.4), os três parâmetros da distribuição de probabilidade lognormal 3P são estimados por:

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= 3,612 - 0,244i, \text{ para } 1 \leq i \leq 7,15 \\ \hat{\mu} &= 1,90346 - 0,005106i, \text{ para } 7,15 \leq i \leq 50 \end{aligned} \quad (R^2 = 0,81) \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= 0,018 + 0,0242i, \text{ para } 1 \leq i \leq 10,60 \\ \hat{\sigma} &= 0,25411 + 0,0019342i, \text{ para } 10,60 \leq i \leq 50 \end{aligned} \quad (R^2 = 0,79) \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \hat{\gamma} &= -32,899 + 4,892i, \text{ para } 1 \leq i \leq 5,54 \\ \hat{\gamma} &= -5,9976 + 0,039237i, \text{ para } 5,54 \leq i \leq 50 \end{aligned} \quad (R^2 = 0,90) \quad (5.4)$$

Já para  $k^* = 0,5$  (Figura 5.4), têm-se para a distribuição lognormal 3P:

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= 3,515 - 0,1516i, \text{ para } 1 \leq i \leq 10,02 \\ \bar{\hat{\mu}} &= 1,9957, \text{ para } 10,02 \leq i \leq 50 \end{aligned} \quad (R^2 = 0,49) \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= 0,023 + 0,0104i, \text{ para } 1 \leq i \leq 14,62 \\ \bar{\hat{\sigma}} &= 0,1750, \text{ para } 14,62 \leq i \leq 50 \end{aligned} \quad (R^2 = 0,50) \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \hat{\gamma} &= -31,681 + 3,3636i, \text{ para } 1 \leq i \leq 7,21 \\ \bar{\hat{\gamma}} &= -7,4169, \text{ para } 7,21 \leq i \leq 50 \end{aligned} \quad (R^2 = 0,41) \quad (5.7)$$

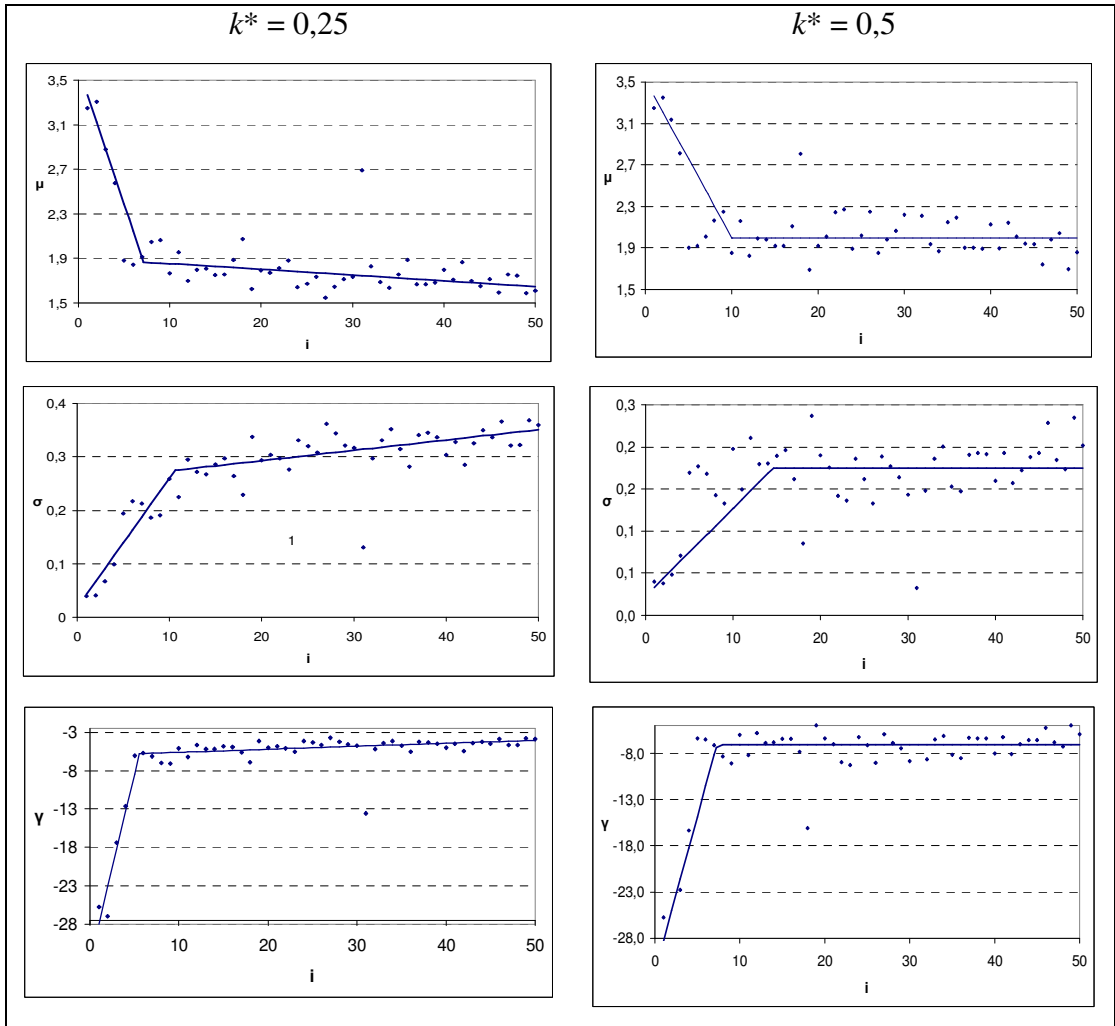


Figura 5.4 – Estimativas dos parâmetros da distribuição de probabilidade lognormal 3P ajustada aos valores aleatórios de  $Z(i)+S_H(i-1)^*$  obtidas por  $k^*$  igual a 0,25 e 0,5 em 50 subgrupos racionais.



Pelas Equações 5.8 a 5.9 tem-se os seguintes ajustes dos parâmetros da distribuição normal:

Para  $k^* = 1,0$  e  $1 \leq i \leq 50$ , têm-se:

$$\begin{aligned}\bar{\hat{\mu}} &= 0,1163 \\ \bar{\hat{\sigma}} &= 1,0625\end{aligned}\tag{5.8}$$

Para  $k^* = 1,5$  e  $1 \leq i \leq 50$ , têm-se:

$$\begin{aligned}\bar{\hat{\mu}} &= 0,0289 \\ \bar{\hat{\sigma}} &= 1,0175\end{aligned}\tag{5.9}$$

Na Figura 5.5 é mostrado o ajuste das equações 5.8 e 5.9 aos parâmetros da distribuição normal.

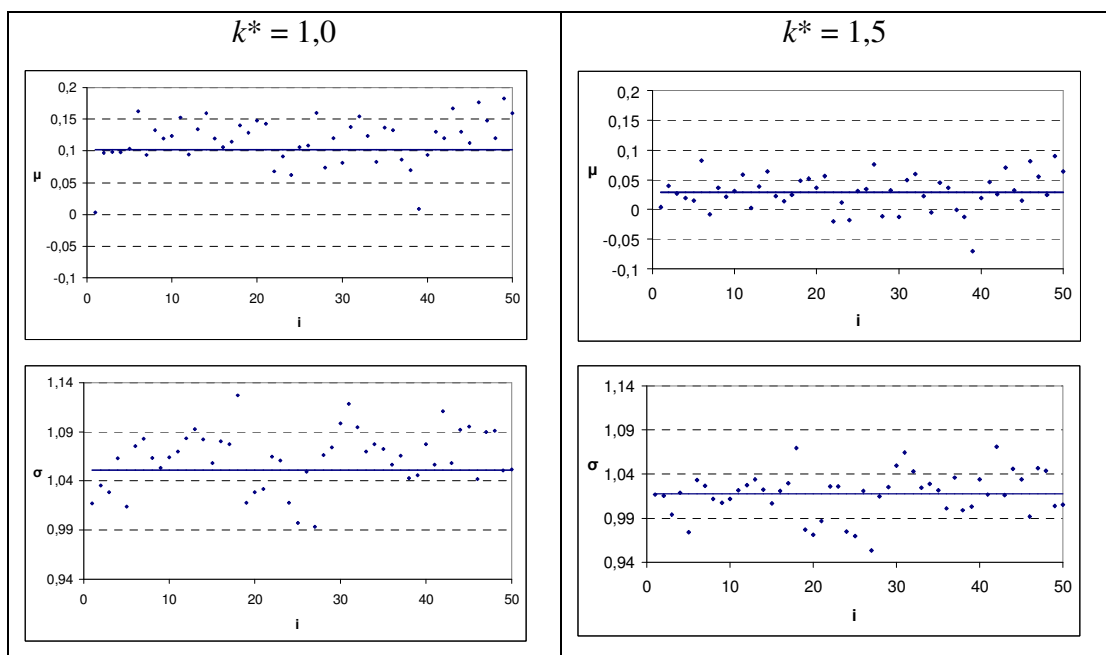


Figura 5.5 – Estimativas dos dois parâmetros da distribuição de probabilidade normal, ajustada aos valores aleatórios de  $Z(i)+S_H(i-1)^*$  obtidas por  $k^*$  igual a 1,0 e 1,5 em 50 subgrupos racionais.

Na Figura 5.6 são apresentadas, para determinados valores de  $k^*$  e  $h^*$ , a probabilidade do alarme falso teórica obtida pela distribuição lognormal ( $k^*$  iguais a

0,25 e 0,5) e normal ( $k^*$  iguais a 1,0 e 1,5); e a probabilidade obtida por meio da simulação de dados (Anexo A).

As probabilidades teóricas foram calculadas de acordo com as respectivas estimativas dos parâmetros das distribuições de probabilidades adotadas.

Para os valores de  $k^*$  iguais a 0,25 e 0,5, tem-se as estimativas apresentadas para a distribuição lognormal (Equações 5.2 a 5.6) e para  $k^*$  iguais a 1,0 e 1,5 tem-se as estimativas para a distribuição normal (Equações 5.8 e 5.9).

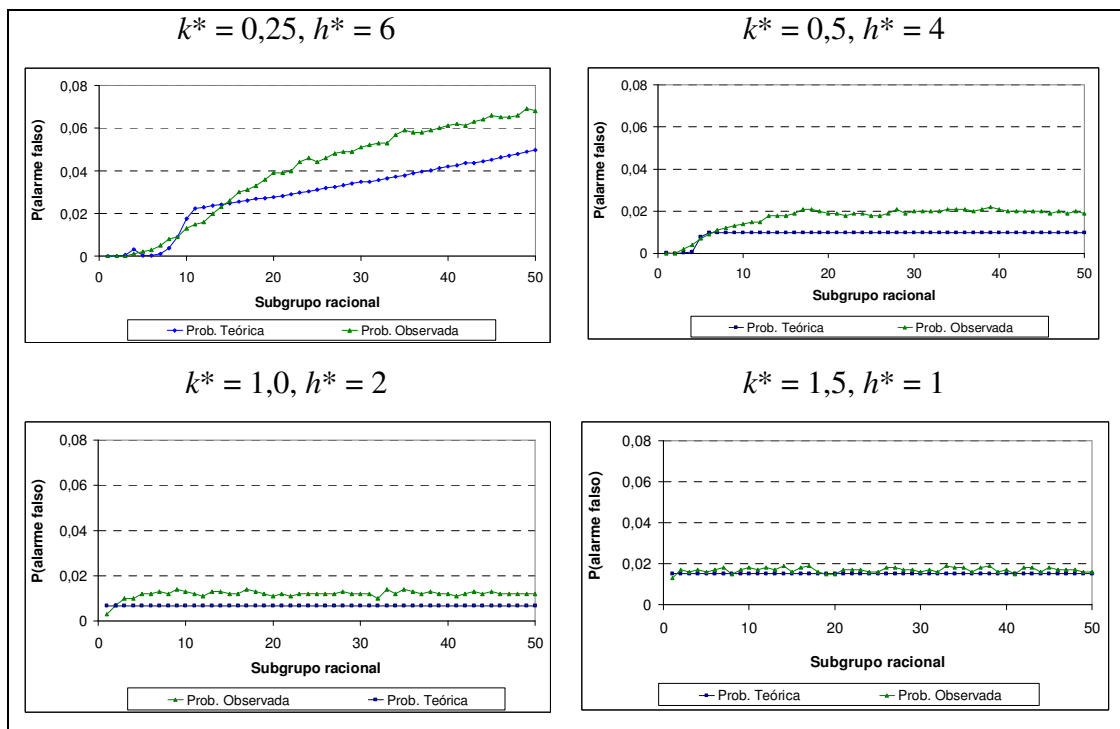


Figura 5.6 – Probabilidade do alarme falso calculada em função do subgrupo racional para diferentes combinações entre  $k^*$  e  $h^*$ .

Para as combinações apresentadas na Figura 5.6, as diferenças entre as probabilidades observada e teórica foram desprezíveis, indicando assim um ajuste satisfatório das probabilidades teóricas e, conseqüentemente, as recomendações das mesmas para os cálculos de probabilidades.

Na Tabela 5.1 são comparadas as probabilidades teórica e estimada do alarme falso no primeiro subgrupo racional, para diferentes combinações de  $k^*$  e  $h^*$ .

Tabela 5.1: Probabilidade teórica e observada do alarme falso no primeiro subgrupo racional

$h^*$	$k^* = 0,25$		$k^* = 0,5$		$k^* = 1,0$		$k^* = 1,5$	
	Teórico	Observado	Teórico	Observado	Teórico	Observado	Teórico	Observado
1	0,229	0,214	0,151	0,137	0,076	0,048	0,018	0,013
2	0,034	0,027	0,019	0,013	0,006	0,003	0	0,001
3	0,003	0,001	0,001	0,001	0	0	0	0
$\geq 4$	0	0	0	0	0	0	0	0

Para ambas as formas de cálculo, nota-se que a probabilidade do alarme falso diminui à medida que se aumentam os valores de  $k^*$  e  $h^*$ . Portanto, pode-se concluir que a probabilidade teórica é eficiente, uma vez que não houve discrepância da probabilidade observada pela simulação dos dados.

### 5.1.3 Recomendações

Como pretende-se recomendar a construção de um gráfico de controle CUSUM tabular que proporcione uma probabilidade de alarme falso baixa, ou seja,  $\alpha \leq 0,05$  ou ainda  $\alpha \leq 0,01$ , na Figura 5.7 são mostradas as combinações mais apropriadas entre os valores de  $k^*$ ,  $h^*$  e  $i$ , para  $\alpha \leq 0,05$ .

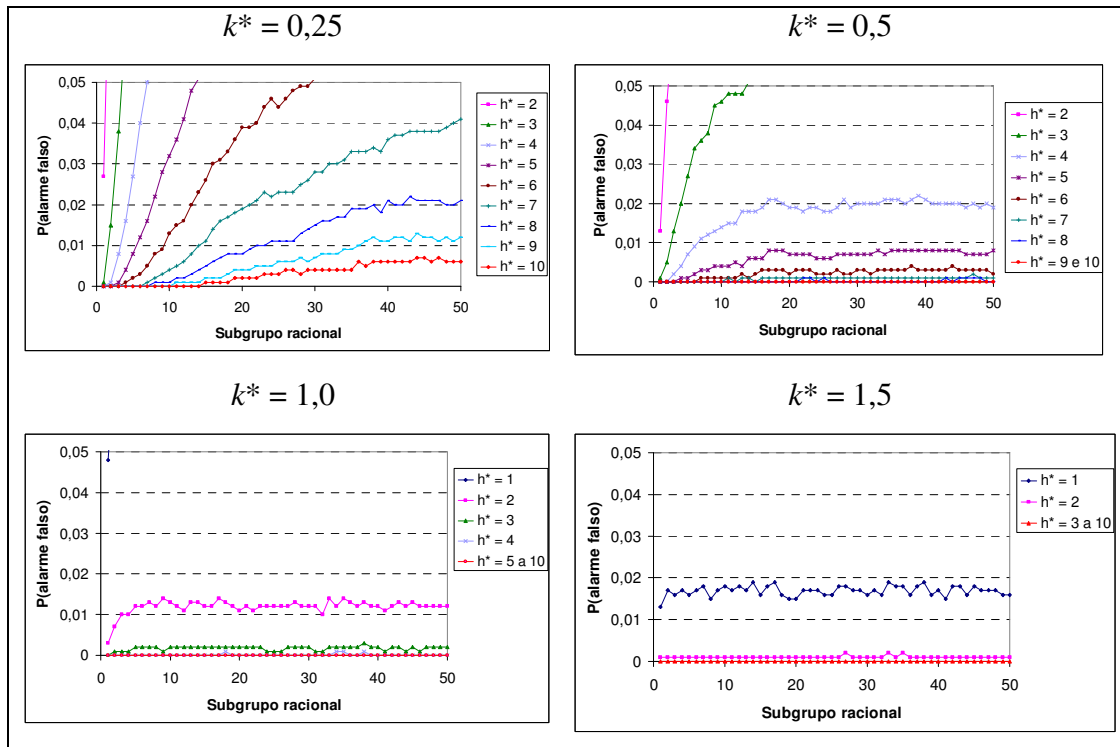


Figura 5.7 – Probabilidade do alarme falso ( $\alpha \leq 0,05$ ) observada em função da ordem  $i$  do subgrupo racional, para diferentes combinações entre  $k^*$  e  $h^*$  e independente do  $n$ .

Por exemplo, se  $k^* = 0,25$  e caso o processo seja monitorado por 20 subgrupos racionais, todas as opções com  $h^* \geq 6$  proporcionarão  $\alpha \leq 0,05$ . Entretanto, deve-se escolher  $h^* = 6$  pois o aumento desse valor diminuirá o poder do gráfico em detectar descontrolo, caso o processo esteja fora de controlo. Para  $k^* = 0,5$  e um processo monitorado por 50 subgrupos racionais, todas as opções com  $h^* \geq 4$  proporcionarão  $\alpha \leq 0,05$ . Consequentemente, deve-se escolher  $h^* = 4$  a fim de não diminuir a sensibilidade do CUSUM em detectar o descontrolo, caso ele ocorra.

Na Figura 5.8 são apresentadas as combinações entre  $k^*$ ,  $h^*$  e  $i$  que proporcionam estimativas de  $\alpha \leq 0,01$ .

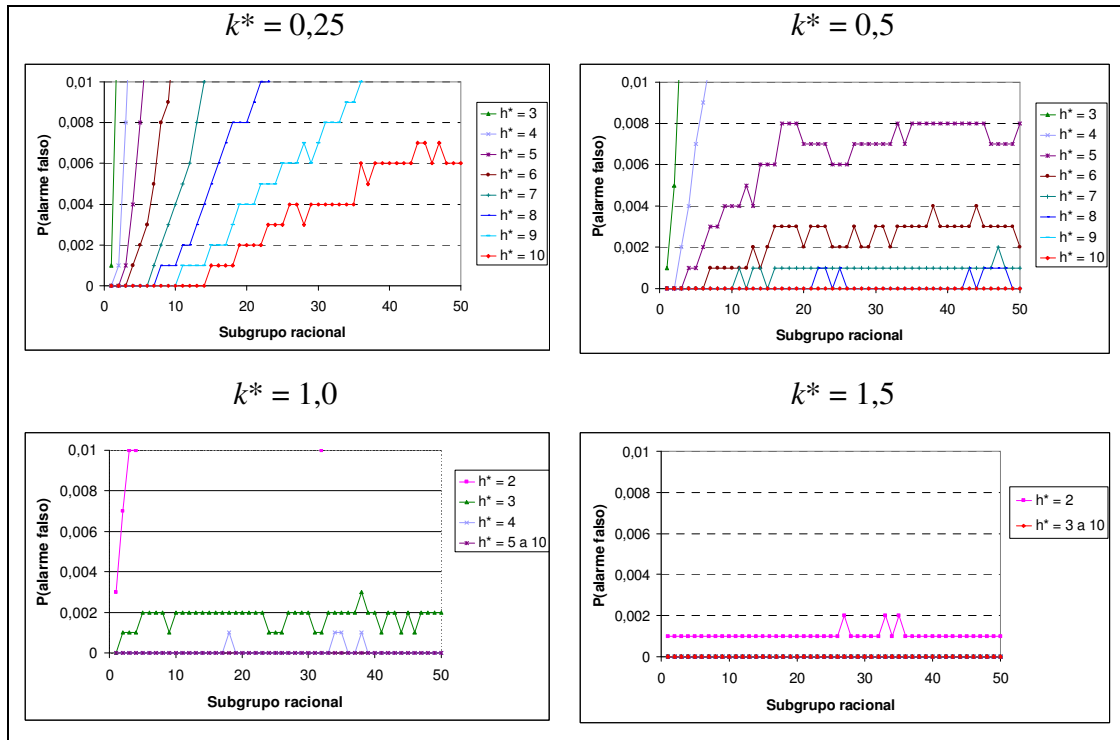


Figura 5.8 – Probabilidade do alarme falso ( $\alpha \leq 0,01$ ) observada em função da ordem  $i$  do subgrupo racional, para diferentes combinações entre  $k^*$  e  $h^*$  e independente do  $n$ .

Para  $k^* = 0,25$  em um processo monitorado por 20 subgrupos racionais, escolhe-se o menor valor de  $h^*$  que proporcione  $\alpha \leq 0,01$ , ou seja,  $h^* = 8$ . E para  $k^* = 0,5$  e 50 subgrupos racionais, recomenda-se  $h^* = 5$ .

Para  $\alpha \leq 0,01$  e  $k^* < 0,5$ , o aumento do alarme falso atinge patamares estáveis somente para mais de 50 subgrupos racionais. Logo, quando se adotar  $k^* = 0,25$ , deve-se combiná-lo com  $7 \leq h^* \leq 10$  para minimizar o aumento do  $\alpha$  em processos com até 50 subgrupos racionais e utilizar  $h^* \geq 10$  para  $i > 50$ . Portanto, o gráfico de controle CUSUM tabular não é eficiente em processos para  $i \leq 50$  quando se deseja detectar variações da média na ordem de 0,5 desvios-padrão.

Resumindo, para se obter  $\alpha \leq 0,05$  e  $\alpha \leq 0,01$  recomendam-se as combinações apresentadas nas Tabelas 5.2 e 5.3.

Tabela 5.2: Valores recomendados para  $k^*$  e  $h^*$  para processos com  $i$  subgrupos racionais visando  $\alpha \leq 0,05$

$k^*$	$h^*$	$i$
1,5	1	$i \geq 2$
1	2	$i \geq 2$
0,5	3	$3 \leq i \leq 13$
	4	$i \geq 14$
0,25	5	$8 \leq i \leq 13$
	6	$14 \leq i \leq 29$
	7	$i \geq 30$

Tabela 5.3: Valores recomendados para  $k^*$  e  $h^*$  para processos com  $i$  subgrupos racionais visando  $\alpha \leq 0,01$

$k^*$	$h^*$	$i$
1,5	2	$i \geq 2$
1	3	$i \geq 3$
0,5	5	$i \geq 7$
0,25	7	$10 \leq i \leq 13$
	8	$14 \leq i \leq 23$
	9	$24 \leq i \leq 36$
	10	$37 \leq i \leq 50$

Note que os valores altos de  $k^*$  nas Tabelas 5.2 e 5.3 estão relacionados com os valores baixos de  $h^*$ , o que corresponde ao monitoramento em estágios iniciais de um processo.

## 5.2 Alarme Verdadeiro

### 5.2.1 Probabilidade Estimada

A probabilidade do alarme verdadeiro ( $Pd$ ) para o monitoramento da média pelo gráfico de controle CUSUM tabular, depende ( $P < 0,05$ ) do intervalo de decisão padronizado  $h^*$ , do número de repetições  $n$  por subgrupo racional e da ordem  $i$  do subgrupo racional. Depende também de todas as interações duplas entre estes termos ( $h^*n$ ,  $h^*i$ ,  $ni$ ). Apesar do  $Pd$  também ser influenciado pelo  $k^*$  (SOUZA *et al.*, 2008), tal dependência não foi estudada no presente trabalho, dada à estratégia de utilizar  $k^* = \delta/2$  para detectar o descontrole de, no mínimo,  $\delta$  desvios-padrão da média de controle.

As equações de regressão estimadas para a probabilidade do alarme verdadeiro, com todos os termos significativos ( $P < 0,05$ ) pelo teste t de Student foram:

Para  $\delta = 0,5$  ( $k^* = 0,25$ ):

$$\hat{Pd} = 0,772 - 0,0838 h^* + 0,0220 n + 0,00805i + 0,00245 h^*n + 0,00160 h^*i - 0,000767 ni \quad (R^2 = 0,53) \quad (5.10)$$

Para  $\delta = 1,0$  ( $k^* = 0,5$ ):

$$\hat{Pd} = 0,854 - 0,0513h^* + 0,0185n + 0,0073i + 0,00142h^*n + 0,00109h^*i - 0,000701ni \quad (R^2 = 0,34) \quad (5.11)$$

Para  $\delta = 2,0$  ( $k^* = 1,0$ ):

$$\hat{Pd} = 0,955 - 0,0288h^* + 0,00867n + 0,00205i + 0,000574h^*n + 0,000689h^*i - 0,000335ni \quad (R^2 = 0,18) \quad (5.12)$$

Para  $\delta = 3,0$  ( $k^* = 1,5$ ):

$$\hat{Pd} = 0,994 - 0,0220h^* + 0,00425n + 0,000531i + 0,000275h^*n + 0,000572 h^*i - 0,000165 ni \quad (R^2 = 0,13) \quad (5.13)$$

Pela análise das Equações 5.10 a 5.13, pode-se observar que os coeficientes de  $n$  e  $i$  são positivos, ou seja, o aumento dos seus valores acarreta aumento do poder do gráfico em detectar descontrole no processo. Por outro lado, o coeficiente do termo  $h^*$  é negativo, ou seja, quanto maior o seu valor, menor será a probabilidade de obter um alarme verdadeiro.

A interação  $ni$  possui efeito negativo, ao contrário dos efeitos dos fatores individuais que compõem as equações. Os aumentos de  $n$  e  $i$  separadamente aumentam a probabilidade do alarme verdadeiro. Entretanto, esse aumento não será indefinido, ou seja, a partir de certas combinações o poder será constante e igual a um.

Analisando as interações  $h^*n$  e  $h^*i$  tem-se o seguinte raciocínio: nota-se que ambas possuem efeito positivo, ao contrário do termo  $h^*$  que as compõem. Portanto, o efeito da interação é mais evidente para valores baixos de  $h^*$ . Para  $h^*i$ , por exemplo, o crescimento do poder quando se aumenta a ordem  $i$  do subgrupo racional é mais acentuado para os valores baixos de  $h^*$  do que para os altos.

Na Figura 5.9 é exibida a probabilidade do alarme verdadeiro observada de acordo com os dados simulados, para os valores de  $n$  iguais a 1, 5 e 10, de acordo com os valores de  $k^*$  iguais a 0,25, 0,5, 1,0 e 1,5,  $1 \leq h^* \leq 10$  e  $1 \leq i \leq 15$ . Nela é possível visualizar os efeitos individuais e das interações descritas anteriormente.

As estimativas do  $Pd$  obtidas no presente trabalho respondem coerentemente de acordo com os efeitos dos termos  $k^* = \delta/2$ ,  $h^*$ ,  $n$  e  $i$ , apresentados na equação teórica 4.17. O efeito de  $i$  é positivo porque o seu aumento incorpora um aumento na média da distribuição de  $S_H(i)^*$ , dado  $\delta > 0$  (Equação 4.13). Do mesmo modo o de  $n$ , porque o seu aumento diminui a dispersão dessa distribuição e, conseqüentemente, a sua sobreposição com a distribuição da média de controle. Já a diminuição de  $h^*$  aumenta o poder, simplesmente porque diminuiu o intervalo de controle.

Porém, de todos os termos, o valor de  $k^*$  é o mais importante em proporcionar probabilidades baixas ou altas do alarme verdadeiro. Como ele está diretamente relacionado com o valor de  $S_H(i)^*$  (Equação 3.13) que é plotado no gráfico, seu aumento dificulta a ocorrência de  $S_H(i)^* > 0$  e, conseqüentemente, o acúmulo dos anteriores e futura detecção do descontrole. Portanto, se o objetivo é de



detectar grandes diferenças na média de controle, adotam-se altos valores de  $k^*$ . Caso contrário, os valores recomendados de  $k^* = \delta/2$  devem ser menores.

A probabilidade observada do alarme verdadeiro, que gerou os gráficos da Figura 5.9, está tabelada no Anexo B. E no Anexo F é mostrado todos os gráficos obtidos para a probabilidade do alarme verdadeiro observada para os valores de  $k^*$  iguais a 0,25, 0,5, 1,0 e 1,5;  $1 \leq h^* \leq 10$ ,  $1 \leq i \leq 50$  e  $1 \leq n \leq 16$  ( $h^*, i, n \in \mathbb{N}$ ).

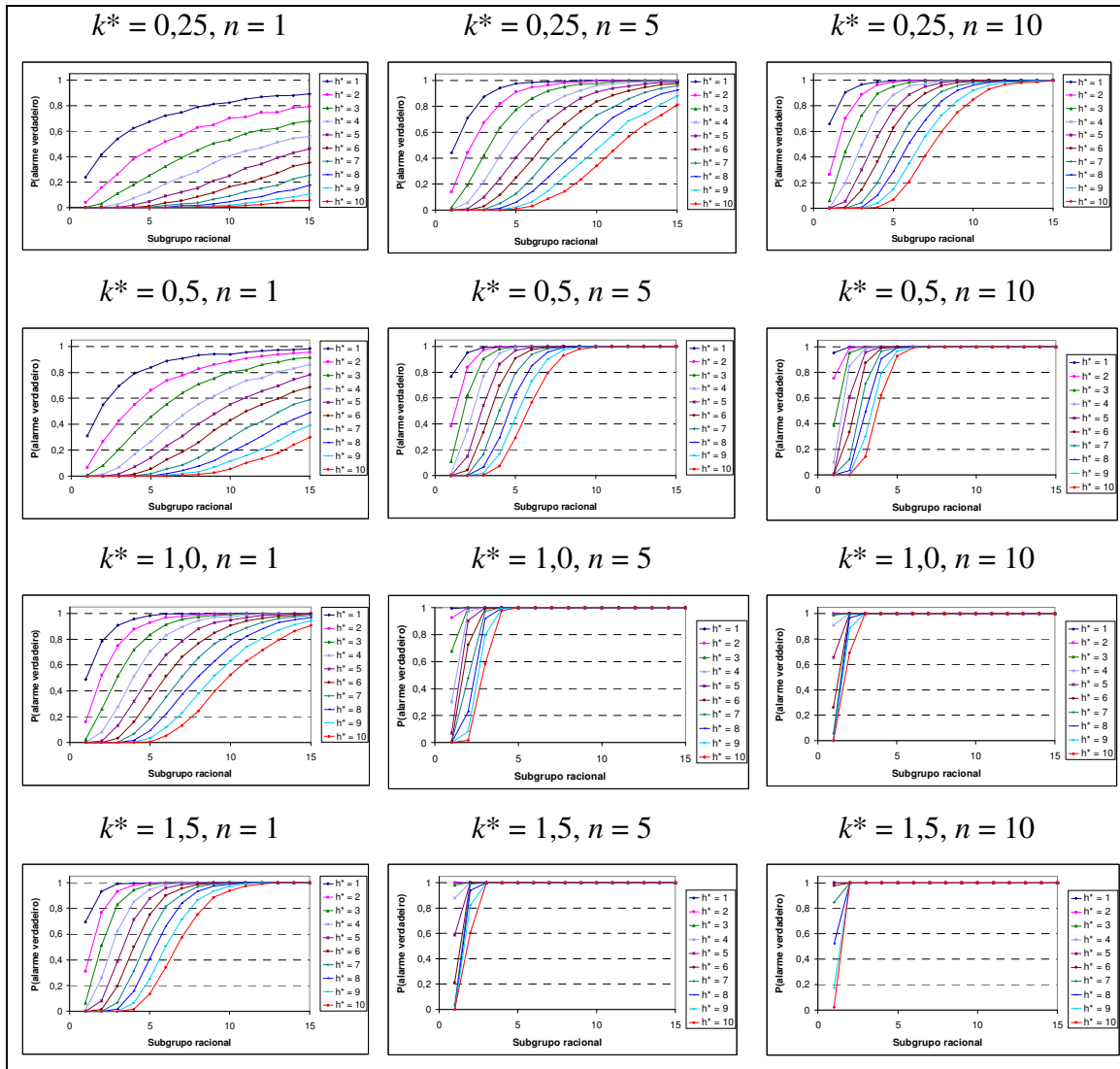


Figura 5.9 – Probabilidade do alarme verdadeiro observado em função do subgrupo racional, para diferentes combinações entre  $k^*$ ,  $h^*$  e  $n$ .

## 5.2.2 Probabilidade Teórica

Na Figura 5.10 são apresentados os p-valores obtidos pelo teste de Kolmogorov-Smirnov para o ajuste da variável aleatória  $Z(i) + S_H(i-1)^*$ ,  $\delta = 2k^*$ , à distribuição normal.

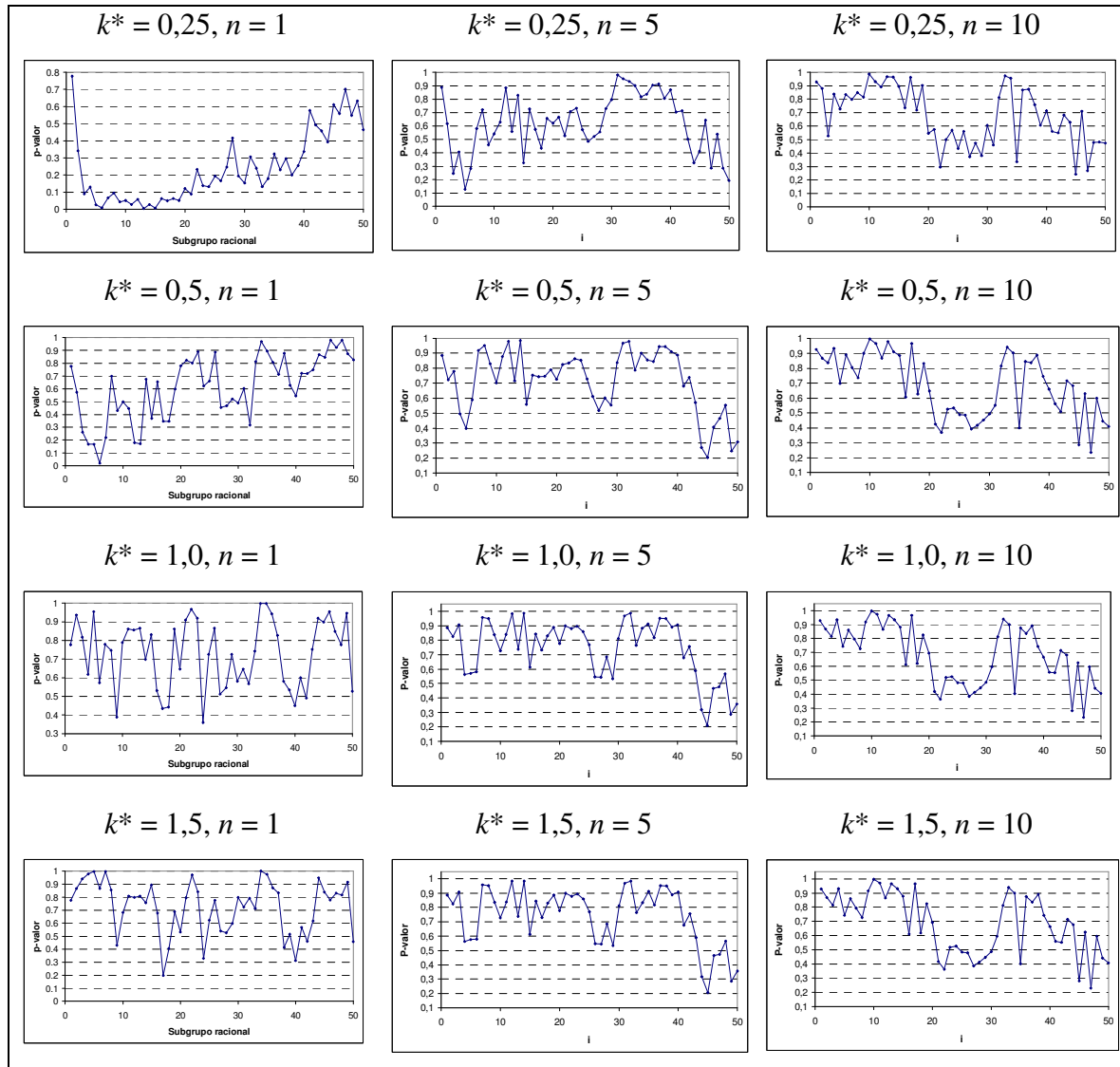


Figura 5.10 – P-valores do teste de Kolmogorov-Smirnov referentes aos ajustes da variável aleatória  $Z(i) + S_H(i-1)^*$  à distribuição de probabilidade normal

Quando a média de controle do processo se desloca em  $\delta$  desvios-padrão, o aumento da assimetria da distribuição de  $Z(i) + S_H(i-1)^*$  é menor do que quando não há esse deslocamento. O que acontece principalmente é o deslocamento da média dessa distribuição em função do aumento da ordem do subgrupo racional.

Portanto, a grande maioria das distribuições normais ajustadas nos subgrupos racionais de 1 a 50 foi adequada para modelar os valores aleatórios de  $Z(i) + S_H(i-1)^*$ . Embora alguns deles não tenha ajustado satisfatoriamente, tais exceções foram desconsideradas e, mesmo assim, estudadas sob a distribuição normal. Conseqüentemente, dada a sua maior simplicidade e frequência de uso, não foram realizados os ajustes pela distribuição normal 3P.

Na Figura 5.11 são mostrados os ajustes da variável aleatória  $Z(i) + S_H(i-1)^*$

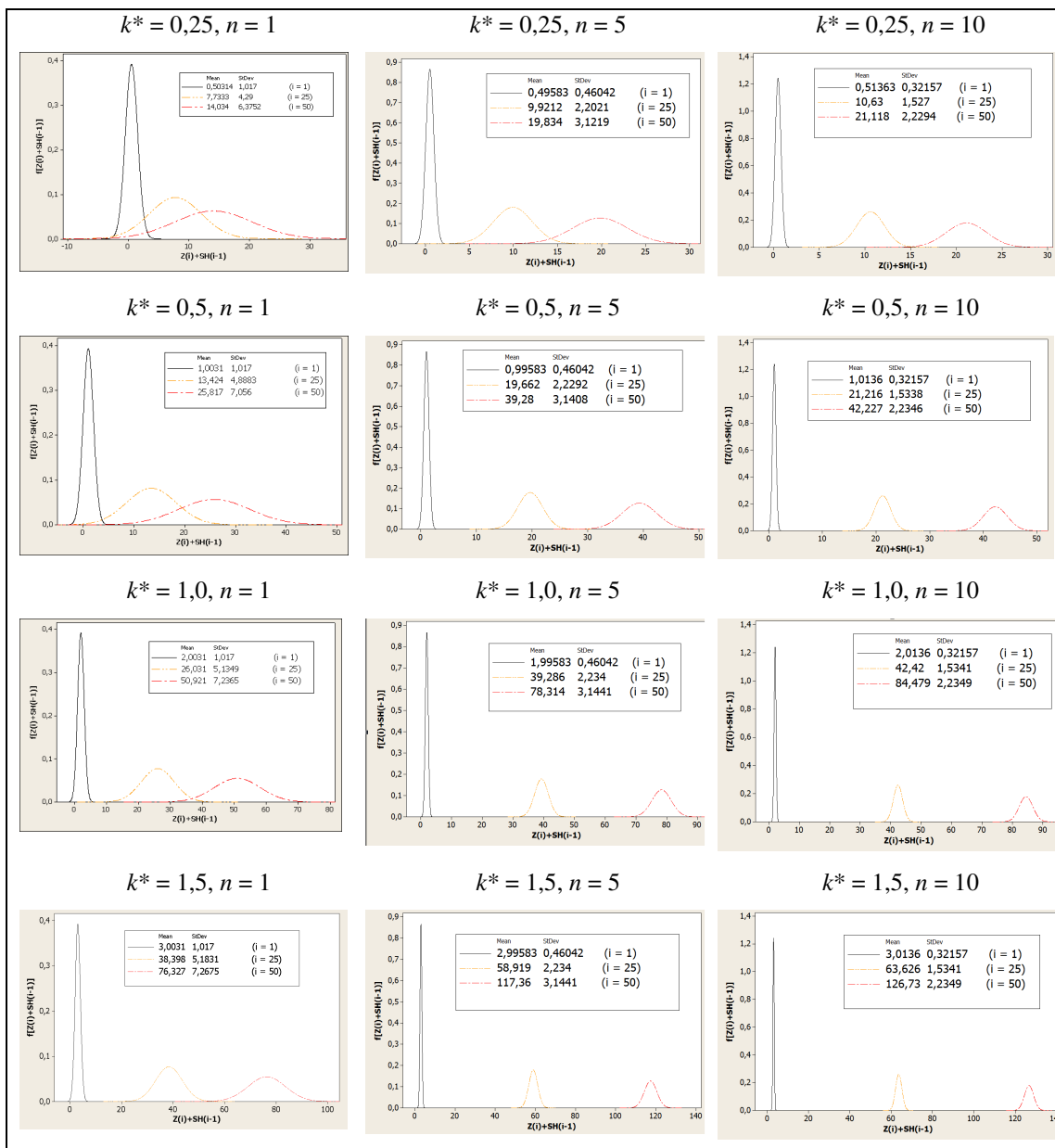


Figura 5.11 – Ajuste de  $Z(i) + S_H(i-1)^*$  nos subgrupos racionais de ordens 1, 25 e 50 pela distribuição normal (Mean = média  $\mu$ , StDev = desvio-padrão  $\sigma$ ).

para os subgrupos racionais de ordens 1, 25 e 50. Em concordância com os p-valores obtidos e apresentados na Figura 5.10, a variável aleatória  $Z(i) + S_H(i-1)^*$  segue distribuição normal para todos os valores de  $k^*$ , sendo assim ajustada por essa distribuição em todos os cinquenta subgrupos racionais. Nota-se ainda que, à medida que se aumenta  $n$ ,  $k^*$  e  $i$ , a distribuição se afasta da distribuição inicial  $Z(1) + S_H(0)^* = Z(1)$ .

No Anexo D é mostrado cada um dos parâmetros estimados da distribuição normal para os valores de  $k^*$  iguais a 0,25, 0,5, 1,0 e 1,5 em cada um dos cinquenta subgrupos racionais. A partir desses dados, realizou-se uma análise de variância da regressão a fim de obter uma equação de estimação para cada um dos parâmetros.

A seguir, são apresentadas as equações que fornecem as estimativas dos parâmetros da distribuição normal, para  $n = 1$  (Figura 5.12).

Para  $n = 1$ :

➤  $k^* = 0,25$ :

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= 1,0106 + 0,26281i, \text{ para } 1 \leq i \leq 50 & (R^2 = 0,99) \\ \hat{\sigma} &= 0,9363 + 0,1534i, \text{ para } 1 \leq i \leq 17,7 & \\ \hat{\sigma} &= 2,1335 + 0,0859i, \text{ para } 17,7 \leq i \leq 50 & (R^2 = 0,99) \end{aligned} \quad (5.14)$$

➤  $k^* = 0,5$ :

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= 0,9596 + 0,4966i, \text{ para } 1 \leq i \leq 50 & (R^2 = 0,99) \\ \hat{\sigma} &= 0,928 + 0,1861i, \text{ para } 1 \leq i \leq 16,8 & \\ \hat{\sigma} &= 2,447 + 0,0958i, \text{ para } 16,8 \leq i \leq 50 & (R^2 = 0,99) \end{aligned} \quad (5.15)$$

➤  $k^* = 1,0$ :

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= 1,1849 + 0,9932i, \text{ para } 1 \leq i \leq 50 & (R^2 = 0,99) \\ \hat{\sigma} &= 1,0352 + 0,1979i, \text{ para } 1 \leq i \leq 17,0 & \\ \hat{\sigma} &= 2,8930 + 0,0885i, \text{ para } 17,0 \leq i \leq 50 & (R^2 = 0,99) \end{aligned} \quad (5.16)$$

➤  $k^* = 1,5$  :

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= 1,6039 + 1,4928i, \text{ para } 1 \leq i \leq 50 & (R^2 = 0,99) \\ \hat{\sigma} &= 1,079 + 0,2014i, \text{ para } 1 \leq i \leq 16,6 & \\ \hat{\sigma} &= 2,9606 + 0,0877i, \text{ para } 16,6 \leq i \leq 50 & (R^2 = 0,99)\end{aligned}\tag{5.17}$$

Para  $n = 5$ :

➤  $k^* = 0,25$  :

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= 0,1814 + 0,3907i, \text{ para } 1 \leq i \leq 50 & (R^2 = 0,99) \\ \hat{\sigma} &= 0,469 + 0,0842i, \text{ para } 1 \leq i \leq 15,3 & \\ \hat{\sigma} &= 1,094 + 0,0433i, \text{ para } 15,3 \leq i \leq 50 & (R^2 = 0,99)\end{aligned}\tag{5.18}$$

➤  $k^* = 0,5$  :

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= 0,2298 + 0,7784i, \text{ para } 1 \leq i \leq 50 & (R^2 = 0,99) \\ \hat{\sigma} &= 0,513 + 0,0844i, \text{ para } 1 \leq i \leq 15,0 & \\ \hat{\sigma} &= 1,135 + 0,0428i, \text{ para } 15,0 \leq i \leq 50 & (R^2 = 0,99)\end{aligned}\tag{5.19}$$

➤  $k^* = 1,0$  :

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= 0,4455 + 1,5548i, \text{ para } 1 \leq i \leq 50 & (R^2 = 0,99) \\ \hat{\sigma} &= 0,520 + 0,0845i, \text{ para } 1 \leq i \leq 14,9 & \\ \hat{\sigma} &= 1,143 + 0,0427i, \text{ para } 14,9 \leq i \leq 50 & (R^2 = 0,99)\end{aligned}\tag{5.20}$$

➤  $k^* = 1,5$  :

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= 0,6686 + 2,3312i, \text{ para } 1 \leq i \leq 50 & (R^2 = 0,99) \\ \hat{\sigma} &= 0,520 + 0,0845i, \text{ para } 1 \leq i \leq 14,9 & \\ \hat{\sigma} &= 1,143 + 0,0427i, \text{ para } 14,9 \leq i \leq 50 & (R^2 = 0,99)\end{aligned}\tag{5.21}$$

E, finalmente, para  $n = 10$ :

➤  $k^* = 0,25$ :

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= 0,1002 + 0,4209i, \text{ para } 1 \leq i \leq 50 & (R^2 = 0,99) \\ \hat{\sigma} &= 0,343 + 0,0633i, \text{ para } 1 \leq i \leq 12,8 & (R^2 = 0,99) \\ \hat{\sigma} &= 0,759 + 0,0308i, \text{ para } 12,8 \leq i \leq 50 & (R^2 = 0,99)\end{aligned}\tag{5.22}$$

➤  $k^* = 0,5$ :

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= 0,1644 + 0,8418i, \text{ para } 1 \leq i \leq 50 & (R^2 = 0,99) \\ \hat{\sigma} &= 0,358 + 0,0630i, \text{ para } 1 \leq i \leq 12,8 & (R^2 = 0,99) \\ \hat{\sigma} &= 0,770 + 0,0307i, \text{ para } 12,8 \leq i \leq 50 & (R^2 = 0,99)\end{aligned}\tag{5.23}$$

➤  $k^* = 1,0$ :

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= 0,3221 + 1,6837i, \text{ para } 1 \leq i \leq 50 & (R^2 = 0,99) \\ \hat{\sigma} &= 0,358 + 0,0630i, \text{ para } 1 \leq i \leq 12,7 & (R^2 = 0,99) \\ \hat{\sigma} &= 0,769 + 0,0307i, \text{ para } 12,7 \leq i \leq 50 & (R^2 = 0,99)\end{aligned}\tag{5.24}$$

➤  $k^* = 1,5$ :

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= 0,4802 + 2,5256i, \text{ para } 1 \leq i \leq 50 & (R^2 = 0,99) \\ \hat{\sigma} &= 0,358 + 0,0630i, \text{ para } 1 \leq i \leq 12,7 & (R^2 = 0,99) \\ \hat{\sigma} &= 0,769 + 0,0307i, \text{ para } 12,7 \leq i \leq 50 & (R^2 = 0,99)\end{aligned}\tag{5.25}$$

Na Figura 5.12 é ilustrado os pontos estimados juntamente com as equações ajustadas para os parâmetros de distribuição Normal ( $\mu, \sigma$ ) para  $n = 1, 5$  e  $10$ . Pode-se verificar que os termos  $\delta = k^*/2$  e  $n$  influenciam positivamente no parâmetro  $\mu$  enquanto que o termo  $n$  influencia negativamente no parâmetro  $\sigma$ . O aumento do  $k^*$  aumenta o  $\mu$ , porque os maiores valores de  $k^*$  estavam associados aos maiores descontroles ( $\delta$ ) do processo. Caso o descontrole fosse o mesmo, o efeito de  $k^*$  seria contrário ao observado no presente trabalho.

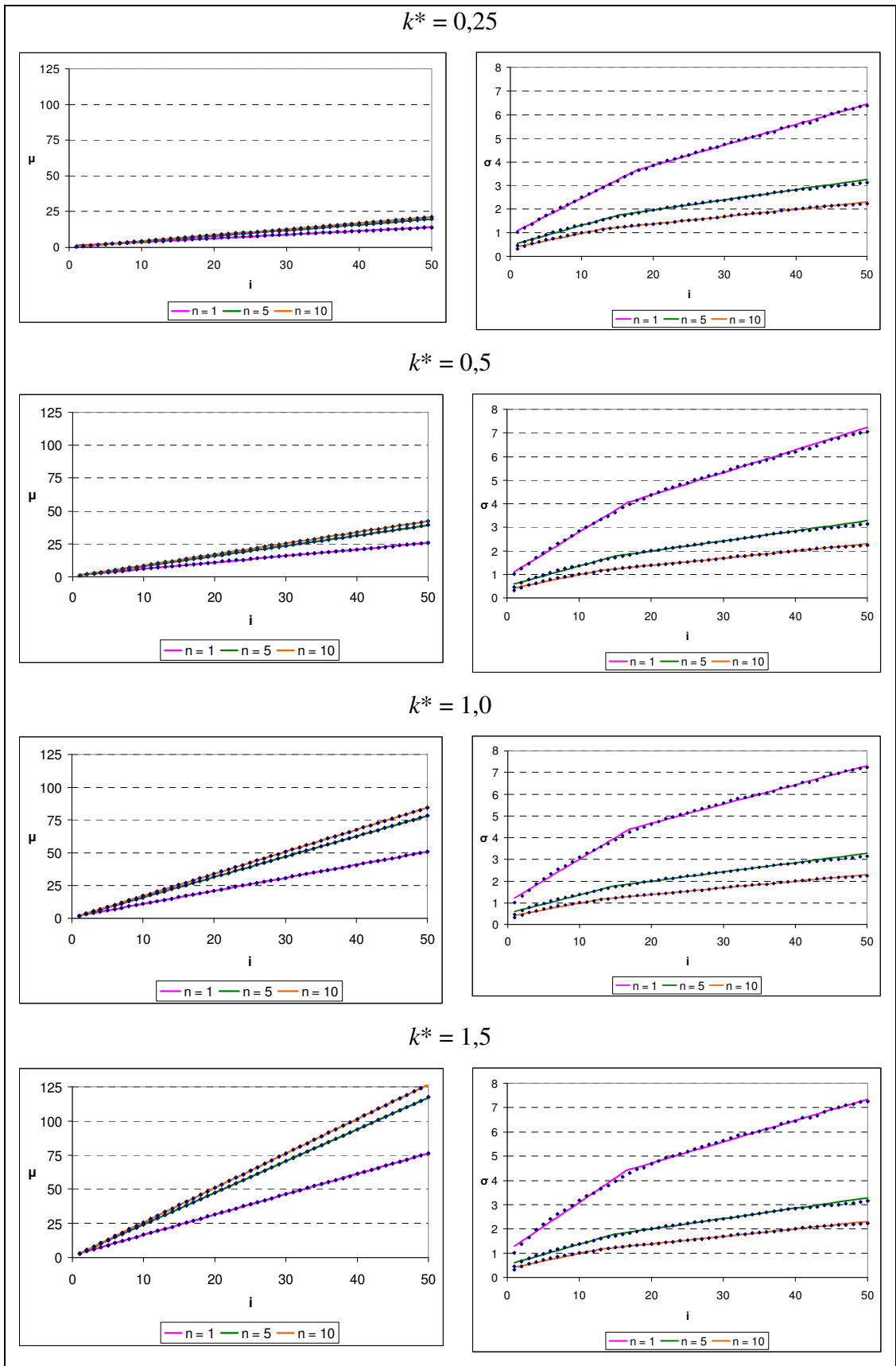


Figura 5.12 – Estimativas dos parâmetros da distribuição de probabilidade normal para  $n$  igual a 1, 5 e 10.

Na Figura 5.13 são apresentadas as probabilidades teórica obtida pela distribuição normal e a observada de acordo com os dados (Anexo B), para  $k^* = 0,25$ ,  $h^* = 8$  e  $n = 1, 5$  e  $10$ .

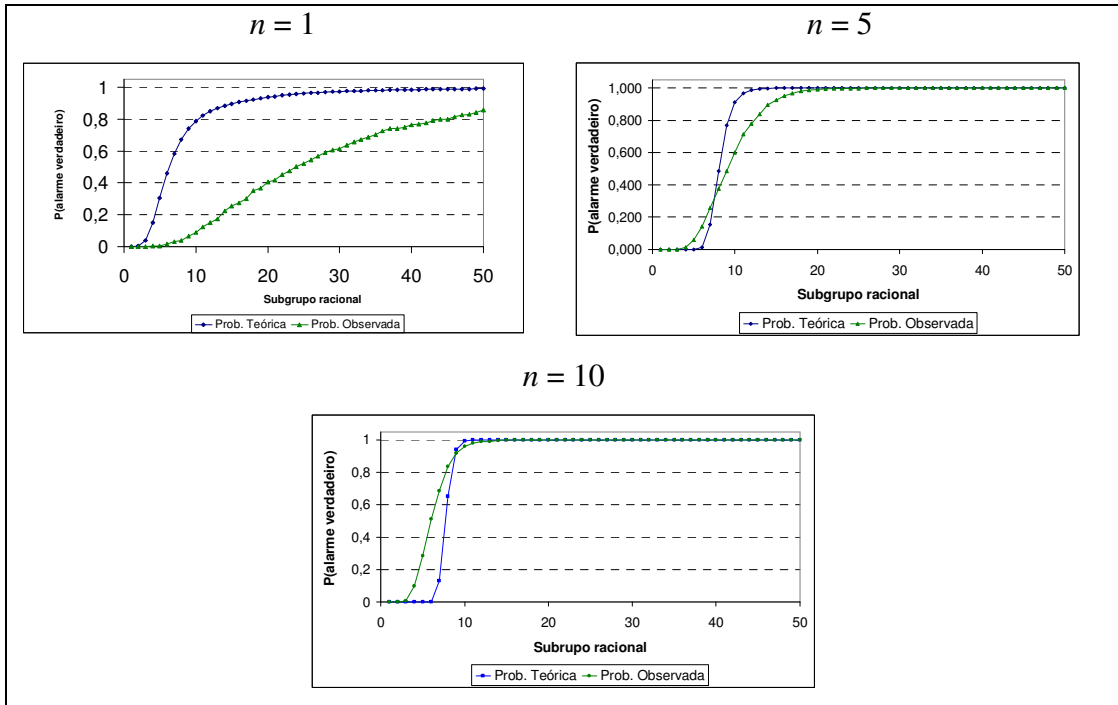


Figura 5.13 – Probabilidade teórica e observada do alarme verdadeiro calculadas em função do subgrupo racional para  $k^* = 0,25$ ,  $h^* = 8$  e  $n = 1, 5$  e  $10$

Pela Figura 5.13, pode-se observar que à medida que o  $n$  aumenta, aumenta-se o ajuste da probabilidade teórica à observada. Somente para  $n = 1$  é que o ajuste não foi satisfatório. Provavelmente isso irá acontecer somente para  $k^* = 0,25$ , pois nesse caso não houve um bom ajuste pela distribuição normal (Figura 5.10).

Nas Figuras 5.14, 5.15 e 5.16 são também mostrados, para  $k^* = 0,5$ ,  $1,0$  e  $1,5$  respectivamente, os ajustes pela distribuição normal (probabilidade teórica) em diferentes valores de  $n$  (1, 5 e 10). Nota-se que o modelo teórico proposto adequou-se ainda mais, inclusive para os baixos valores de  $n$ .

É intuitivo supor que quanto maior o valor da variação  $\delta$  na média do processo, mais rápida será a detecção do descontrole. E isso de fato ocorre, podendo ser visualizado nas Figuras 5.15 e 5.16 no qual a variação  $\delta$  foi grande e foi utilizado  $k^*$  iguais a  $1,0$  e  $1,5$  que também são considerados grandes. De modo geral, as estimativas obtidas por meio da distribuição normal foram adequadas, exceto nos casos  $n = 1$  ( $k^* = 1,0$  e  $1,5$ ) e  $n = 5$  ( $k^* = 1,0$ ), em que a probabilidade



de detecção do descontrole no processo foi baixa nos primeiros subgrupos racionais ( $1 \leq m \leq 10$ ).

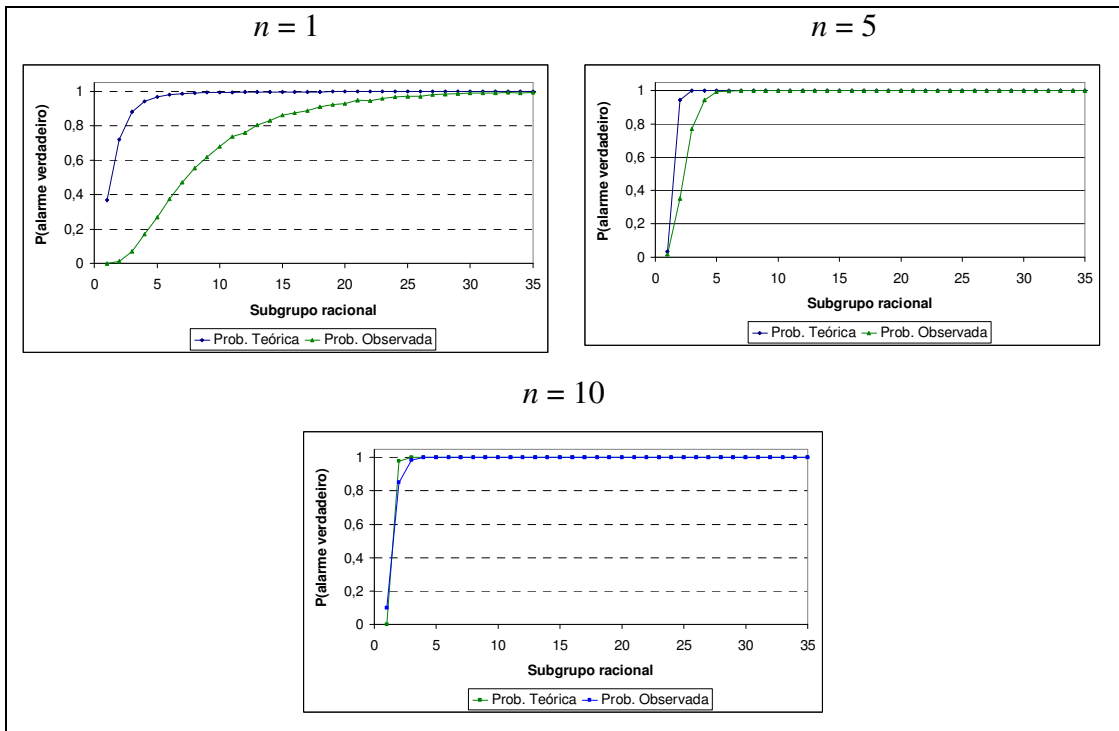


Figura 5.14 – Probabilidade teórica e observada do alarme verdadeiro calculadas em função do subgrupo racional para  $k^* = 0,5$ ,  $h^* = 4$  e  $n = 1, 5$  e  $10$

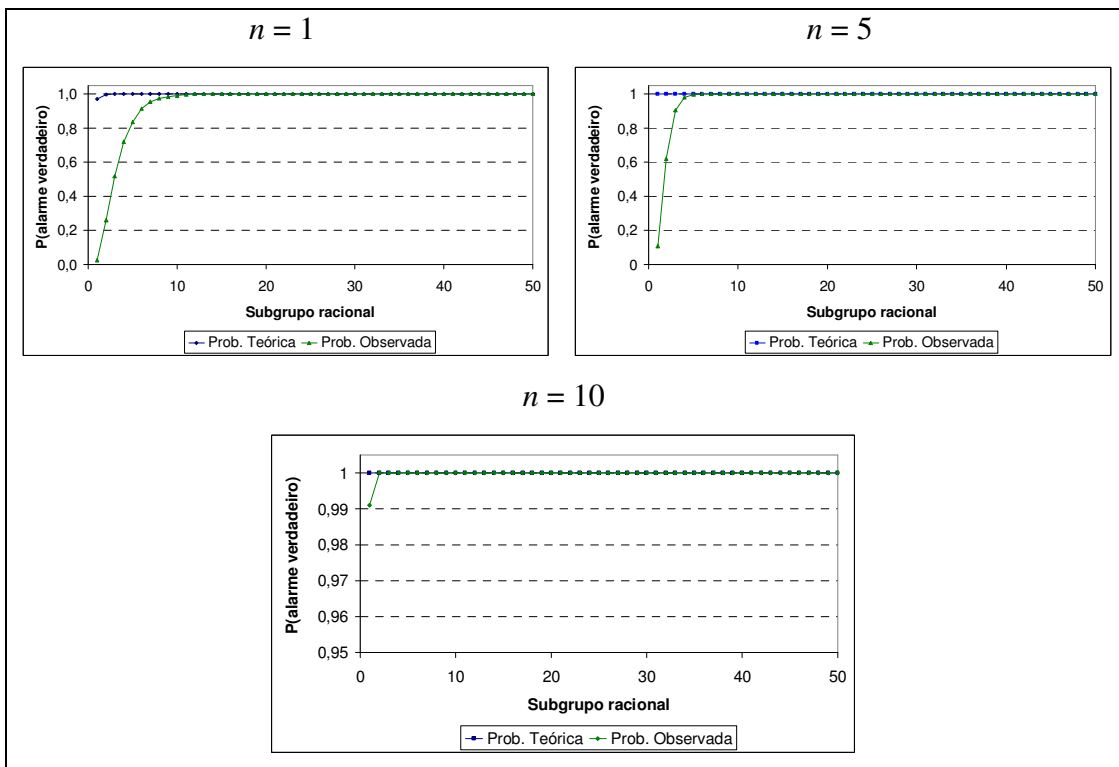


Figura 5.15 – Probabilidade teórica e observada do alarme verdadeiro calculadas em função do subgrupo racional para  $k^* = 1,0$ ,  $h^* = 3$  e  $n = 1, 5$  e  $10$

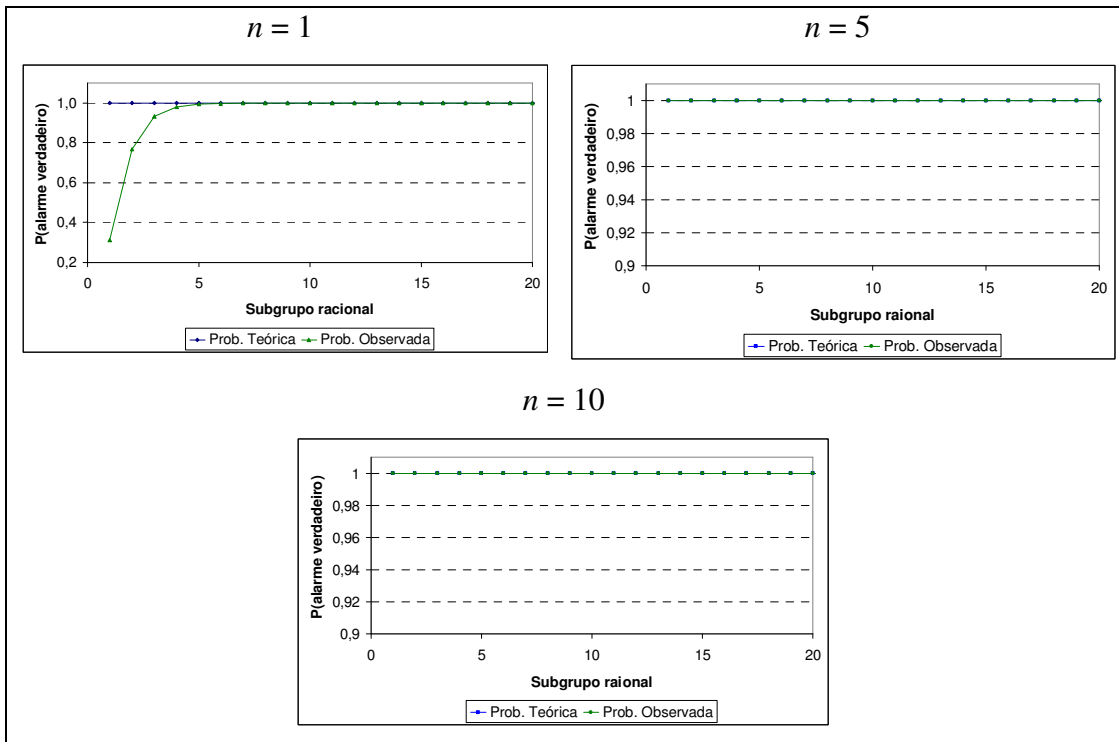


Figura 5.16 – Probabilidade teórica e observada do alarme verdadeiro calculadas em função do subgrupo racional para  $k^* = 1,5$ ,  $h^* = 2$  e  $n = 1, 5$  e  $10$

### 5.2.3 Recomendações

De modo a recomendar a construção de um gráfico de controle CUSUM tabular que proporcione probabilidade de alarme verdadeiro alta, ou seja, acima de 0,90, pode-se utilizar todas as combinações entre os valores  $k^*$ ,  $h^*$ ,  $i$  e  $n$ , apresentadas na Figura 5.17.

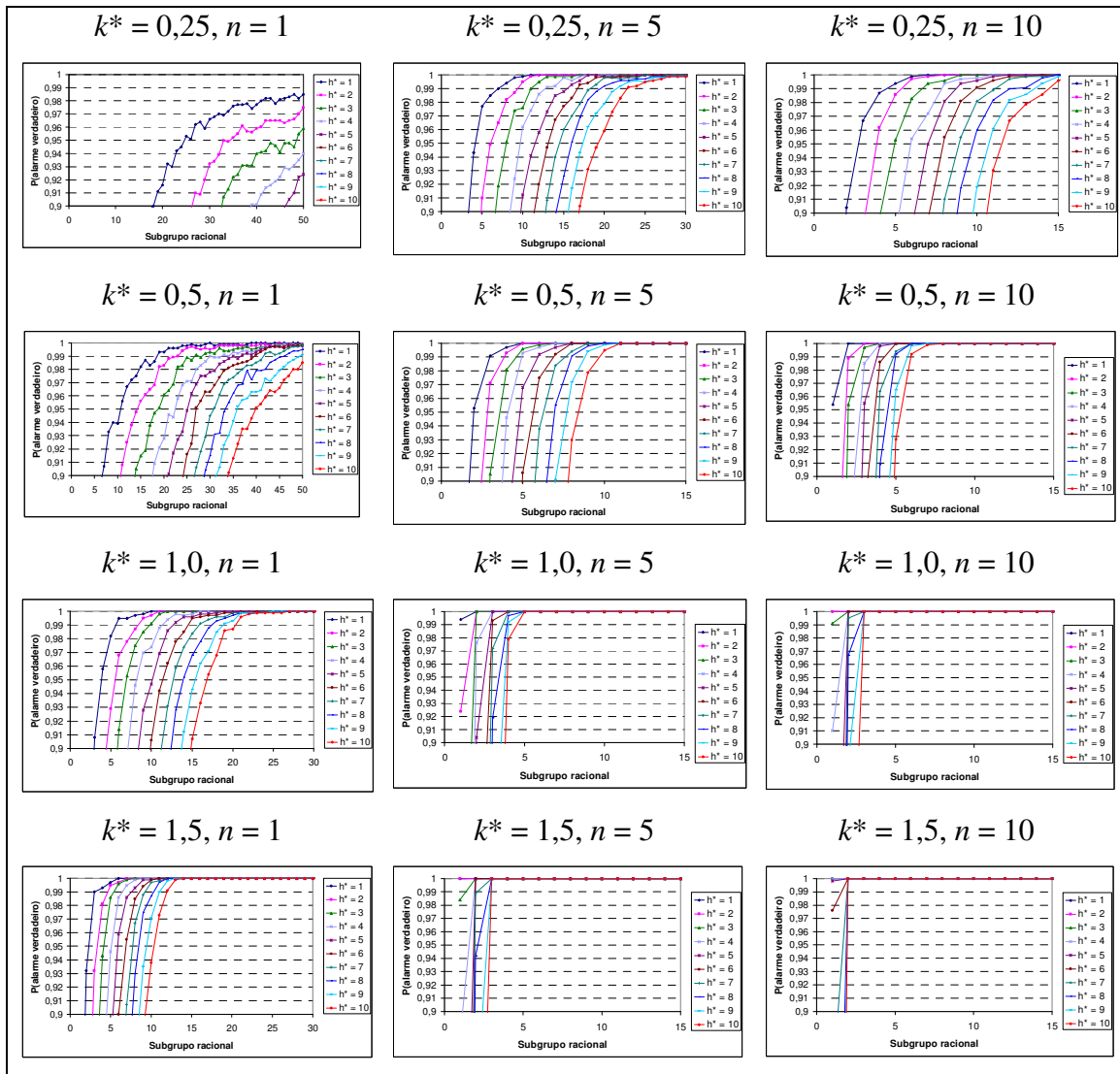


Figura 5.17 – Probabilidade observada do alarme verdadeiro em função do subgrupo racional para diferentes combinações entre  $k^*$ ,  $h^*$  e  $n$ .

Como pode-se observar pelos gráficos da Figura 5.17, dado que o processo saia e mantenha-se fora de controle estatístico para a média, o gráfico CUSUM tabular irá, com certeza, sinalizar tal mudança. Para maior rapidez, deve-se aumentar o  $n$  e diminuir o  $h^*$ , para um mesmo deslocamento  $\delta$  ( $k^* = \delta/2$ ). Nessa

direção, é necessário um menor número de subgrupos racionais após o descontrolo, para que o gráfico o detecte.

A partir dos valores de  $i$ ,  $h^*$  e  $k^*$  ( $\delta = 0$ ) previamente obtidos nas Tabelas 5.2 e 5.3, verificou-se para os mesmos  $i$ ,  $h^*$  e  $k^*$  ( $\delta = 2k^*$ ) a ordem do subgrupo racional que detecta o descontrolo no processo com  $Pd \geq 0,90$  para diferentes valores de  $n$ . Nas Tabelas 5.4 e 5.5, obtidas a partir dos valores que também geraram os gráficos do Anexo F, estão informados os valores encontrados de  $i$ .

Pelas Tabelas 5.4 e 5.5 tem-se a impressão que aumentar o tamanho do subgrupo racional aumenta indefinidamente a rapidez do processo em detectar descontrolo. Tal afirmativa não é verdadeira pois o aumento do tamanho  $n$  do subgrupo racional acarreta em excesso de tempo e custo da produção por subgrupo racional. Além disso, a quantidade de possíveis itens defeituosos ( $i \times n$ ) aumenta à medida que se aumenta o tamanho de  $n$ . Na Figura 5.18 são mostrados a quantidade estimada de itens defeituosos para cada tamanho  $n$  do subgrupo racional.

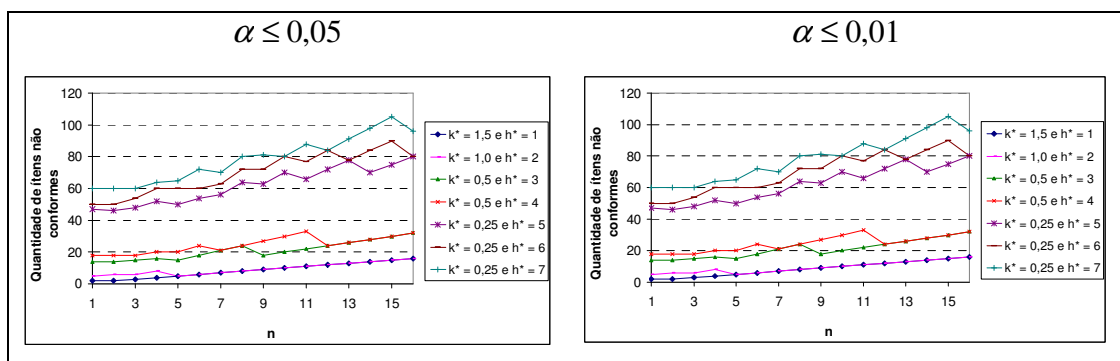


Figura 5.18 – Quantidade de itens não conformes produzidos em função do tamanho  $n$  do subgrupo racional para um processo de  $Pd \geq 0,90$ , nas diversas combinações de  $k^*$  e  $h^*$  que proporcionam  $\alpha \leq 0,05$  e  $\alpha \leq 0,01$ .

Portanto, pode-se observar que o gráfico de controle CUSUM tabular trabalha melhor para valores baixos de  $n$ . O aumento de  $n$  é recomendado somente quando houver uma razão válida em função de alguma particularidade do processo, como por exemplo a detecção de baixas variações  $\delta$  na média, onde o gráfico excede 50 subgrupos racionais de tamanho unitário.

Tabela 5.4: Ordem  $i$  do subgrupo racional que detecta o descontrole com  $\alpha \leq 0,05$  e  $P_d \geq 0,90$  para diferentes valores de  $n$ ,  $\delta$  e  $h^*$

$\delta$	$k^*$	$h^*$	$n$															
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3	1,5	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		2	5	3	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0,5	3	14	7	5	4	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2
		4	18	9	6	5	4	4	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2
		5	47	23	16	13	10	9	8	8	7	7	6	6	6	5	5	5
0,5	0,25	6	50	25	18	15	12	10	9	9	8	8	7	7	6	6	6	5
		7	> 50	30	20	16	13	12	10	10	9	8	8	7	7	7	7	7

Tabela 5.5: Ordem  $i$  do subgrupo racional que detecta o descontrole com  $\alpha \leq 0,01$  e  $P_d \geq 0,90$  para diferentes valores de  $n$ ,  $\delta$  e  $h^*$

$\delta$	$k^*$	$h^*$	$n$															
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3	1,5	2	3	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		3	6	3	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0,5	5	21	10	7	6	5	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3	2
		7	> 50	30	20	16	13	12	10	10	9	8	8	7	7	7	7	7
0,5	0,25	8	> 50	32	22	18	15	13	11	11	10	9	9	8	8	7	7	7
		9	> 50	35	24	20	16	14	13	12	11	10	10	9	9	8	8	7
		10	> 50	38	26	21	17	16	14	13	12	11	11	10	9	9	9	9

### 5.3 Recomendação Conjunta

As recomendações propostas no presente trabalho consistem em conciliar as combinações de  $k^*$ ,  $h^*$  e  $i$  obtidas na seção 5.1.3 juntamente com os valores de  $n$  e  $i$  obtidos na sessão 5.2.3.

A escolha de  $k^*$  se deu por metade da variação em número de desvios-padrão da média que se deseja detectar. Daí, para cada possível valor de  $k^*$ , obteve-se os valores de  $h^*$  suficientemente baixos para maximizarem o  $Pd$ , mas também suficientemente altos para minimizarem o  $\alpha$ . Os melhores valores de  $h^*$  a serem recomendados variam em função da quantidade  $i$  de subgrupos racionais no processo e, para cada  $i$ , está associada o tamanho  $n$  do subgrupo racional mais adequado para o processo.

Desse modo, as recomendações de  $k^*$ ,  $h^*$ ,  $i$  e  $n$  visando  $Pd \geq 0,90$  juntamente com  $\alpha \leq 0,05$  ou  $\alpha \leq 0,01$  são fornecidas pelas Tabelas 5.6 e 5.7.

Tabela 5.6: Valores recomendados para  $k^*$ ,  $h^*$ ,  $i$  e  $n$  visando  $Pd \geq 0,90$  e  $\alpha \leq 0,05$ .

$k^*$	$h^*$	$i$	$n$
1,5	1	$i \geq 2$	1
1	2	$i \geq 2$	1
0,5	3	$3 \leq i \leq 13$	2
0,5	4	$i \geq 14$	2
0,25	5	$8 \leq i \leq 13$	3
0,25	6	$14 \leq i \leq 29$	3
0,25	7	$i \geq 30$	3

É importante ressaltar que nas fases iniciais de um processo, o interesse é detectar grandes variações na média, portanto deve-se utilizar os valores recomendados altos para  $k^*$  e baixos para  $h^*$ . E, para um processo em estágio mais avançado, visando detectar pequenas variações na média, deve-se utilizar as recomendações para valores baixos de  $k^*$  e altos de  $h^*$ .

Tabela 5.7: Valores recomendados para  $k^*$ ,  $h^*$ ,  $i$  e  $n$  visando  $Pd \geq 0,90$  e  $\alpha \leq 0,01$ .

$k^*$	$h^*$	$i$	$n$
1,5	2	$i \geq 2$	1
1	3	$i \geq 3$	1
0,5	5	$i \geq 7$	2
0,25	7	$10 \leq i \leq 13$	3
0,25	8	$14 \leq i \leq 23$	3
0,25	9	$24 \leq i \leq 36$	3
0,25	10	$i \geq 37$	3

Hawkins (1993a, apud ALVES, 2003) fez recomendações de  $h^*$  para  $\alpha \leq 0,0027$  (Tabela 3.2). No entanto, fixar valores relativamente baixos de  $\alpha$  acarreta na diminuição da capacidade do gráfico CUSUM tabular em detectar descontrole no processo caso exista. Assim, faz-se necessário recomendar para  $\alpha$ 's maiores ( $\alpha \leq 0,01$  e  $\alpha \leq 0,05$ ) para os casos onde a ocorrência do alarme falso é preferível em relação à produção de itens não conformes.

A quantidade de subgrupos racionais produzidos no processo também é importante na escolha do planejamento. Para valores baixos de  $\delta$  e  $i$  ( $\delta < 1$ ,  $i < 50$ ) a soma acumulada das CUSUMs unilaterais ocorre vagarosamente, estando propensas a detectarem um descontrole que só seria observado num subgrupo racional de ordem superior às disponíveis para as recomendações feitas até então.

Alguns trabalhos já utilizaram as recomendações semelhantes às apresentadas no presente estudo. Osanaiye e Talabi (1989) utilizaram  $k^* = 3$  e  $h^* = 2$  em seu trabalho visando detectar surtos de diabetes na cidade de Ibadan, Nigéria. Os resultados obtidos confirmaram a eficiência do gráfico em detectar grandes variações na média de controle.

Alves (2003), em sua dissertação de mestrado, utiliza o planejamento  $k^* = 0,75$  e  $h^* = 3,75$  para o monitoramento de 1,5 desvios padrão da média de tensão de ruptura de cabos. O autor também aplica o planejamento  $k^* = 0,5$  e  $h^* = 4,77$  em um processo de produção de anéis para a vedação de tubulações realizado na Indústria de Borrachas NSO Ltda., Joinville. O uso de tal planejamento proporcionou uma

rápida detecção no descontrole do processo, comprovando assim a eficiência da recomendação.

Alves (2004), em seu estudo comparativo entre os gráficos de controle de Shewhart e CUSUM tabular, tornou a comprovar a eficiência deste segundo na detecção de pequenas variações de um processo, sob o planejamento  $k^* = 0,5$  e  $h^* = 4$ . O autor ressalta ainda o impacto que a aplicação do gráfico é capaz de produzir nos custos de amostragem e redução de perdas ocasionadas pela produção de itens não conformes.



## 6. CONCLUSÕES

A probabilidade do alarme falso diminui em função dos aumentos dos valores de referência ( $k^*$ ) e do intervalo de decisão ( $h^*$ ) padronizados, além da diminuição do número de subgrupos racionais.

A probabilidade do alarme verdadeiro para detectar um deslocamento mínimo pré-definido na média de controle, aumenta em função da diminuição do valor de  $h^*$  e dos aumentos do número de repetições por subgrupo racional ( $n$ ) e do número de subgrupos racionais, para um mesmo valor de  $k^*$  escolhidos como a metade do deslocamento em número de desvios-padrão.

As distribuições das variáveis aleatórias utilizadas para os cálculos das probabilidades dos alarmes falsos e verdadeiros do gráfico CUSUM tabular são a lognormal com três parâmetros e a normal respectivamente.

Para que sejam alcançadas probabilidades dos alarmes falsos menores que 0,05 e 0,01 e probabilidades dos alarmes verdadeiros maiores que 0,90, foram recomendados diferentes combinações entre os termos intervalo de decisão padronizado  $h^*$ , valor de referência  $k^*$ , ordem  $i$  do subgrupo racional e tamanho  $n$  do subgrupo racional.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUIAR, S. *Integração das Ferramentas da Qualidade ao PDCA e ao Programa Seis Sigma*. Editora de Desenvolvimento Gerencial. Belo Horizonte, 2002.

ALVES, C.C. *Gráficos de Controle Cusum: um enfoque dinâmico para a análise estatística de processos*. Florianópolis, 2003. 119 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção – PPGEPP, Universidade Federal de Santa Catarina, 2003.

ALVES, C.C.; SAMOBYL, R.W. A Utilização dos Gráficos de Controle CUSUM para o Monitoramento de Processos Industriais. In: ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, 24., Florianópolis, p. 1635-1642, 2004.

BARNARD, G.A. *Control Charts and Stochastic Processes*. Journal of the Royal Statistical Society, (B), vol. 21, p. 239-271, 1959.

BROOK, D.; EVANS, D.A. *An approach to the probability distribution of CUSUM run length*. Biometrika, vol 59, p. 539-549, 1972.

CARVALHO, J.L.A. *Reengenharia de Processos na Indústria Farmacêutica*. Lisboa, 2010. 231 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia e Gestão Industrial) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia e Gestão Industrial, Universidade Nova de Lisboa, 2010.

COLQUHOUN, P.H.D. *Cusum Analysis of J-pouch Surgery Reflects no Learning Curve After Board Certification*. London Health Sciences Centre, University Hospital. London, 2008.

COSTA, A.F.B.; EPPRECHT, E.K.; CARPINETTI, L.C.R. *Controle Estatístico de Qualidade*. Atlas. São Paulo, 2004.

CRAWLEY, M.J. *Statistical Computing. An Introduction to Data Analysis Using S-Plus.* Wiley. Chichester, England, 2002.

EWAN, W.D. *When and How to Use CUSUM Charts.* *Tecnometrics.* vol. 5, p. 1-22, 1963.

GOLDSMITH, P.L.; WHITFIELD, H. *Average Run Lengths in Cumulative Charts Quality Control Schemes.* *Technometrics,* vol. 13, p. 11-20, 1961.

HAWKINS, D.M. *Self-starting CUSUM Charts for Location and Scale.* *The Statistician,* vol. 36, p. 299-315, 1987.

HINES, W.W. et al. *Probabilidade e Estatística na Engenharia.* 4 ed. Tradução Vera Regina Lima de Farias e Flores. LTC. Rio de Janeiro, 2006.

JALALI, S.M.J.; SHAFIEEZADEH, M.; NAIINI, A.S. Using Knowledge Management in DMAIC Methodology of Six Sigma Projects of the 2008. *Proceedings of the 2008 1<sup>st</sup> International Conference on Information Technology, IT.* Gdask, Polônia, 2008.

JOHNSON, N.L. *A Simple Theoretical Approach to Cumulative Sum Control Charts.* *Journal of the American Statistical Association.* vol. 54, 1961.

KING, D.W. *Statistical Quality Control Using the SAS<sup>®</sup> System.* SAS Institute Inc., Cary, North Carolina, 1995. 383 p.

LUCAS, J.M.; CROSIER, R.B. *Fast Initial Response for Cusum Quality-Control Schemes: Give your Cusum a head start.* *Technometrics.* vol. 24, p. 199-205, 1982a.

LUCAS, J.M.; CROSIER, R.B. *Robust CUSUM: A Robustness Study for CUSUM Quality Control Schemes.* *Communications in Statistics – Theory and Methods.* vol. 11, n. 23, p. 2669-2687, 1982b.

MATHWAVE. TECHNOLOGIES *Data Analysis & Simulations* Disponível em <<http://www.mathwave.com/articles/extreme-value-distributions.html>>. Acesso em 15 set. 2011.

MONTGOMERY, D.C. *Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade*. 4 ed. Tradução Ana Maria Lima de Farias e Vera Regina Lima de Farias e Flores. Rio de Janeiro: LTC, 2004.

MONTGOMERY, D.C.; RUNGER, G.C. *Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros*. 4 ed. Tradução Verônica Calado. LTC. Rio de Janeiro, 2009.

MUNIZ, J.A.; OLIVEIRA, M.S. *Controle Estatístico e Gestão da Qualidade*. UFLA/FAEPE. Lavras, 2000.

OSANAYE, P.A.; TALABI, C.O. On Some Non-Manufacturing Applications of Counted data Cumulative Sum (CUSUM) Control Chart Schemes. *Journal of the Royal Statistical Society*, v. 38, n. 4, p. 251-257, 1989.

PAGE, E.S. Continuous Inspection Schemes. *Biometrika*. Cambridge, v. 41, p. 100-114, jun. 1954.

RIBEIRO JÚNIOR, J.I.; GONÇALVES, T.C. Métodos Alternativos de Controle Estatístico de Processos Univariados. *Revista Eletrônica Produção & Engenharia*, v. 2, n. 1, p. 85-95, jan./jul. 2009.

SCHLIEPER, A. *Aplicação da Metodologia Six Sigma na Área de TI em Empresas de Serviços*. São Paulo, 2007. 78p. Monografia – Programa de pós graduação MBIS, Pontifca Universidade Católica de São Paulo, 2007.

SOUZA, L.M.; RIBEIRO JÚNIOR, J.I.; REIS, G.M.; IDE, M.S. Eficiência dos Gráficos de Controle XBARRA, EWMA e CUSUM. *Revista Eletrônica Produção & Engenharia*, v. 1, n. 1, p. 81-94, set./dez. 2008.

WERKEMA, M.C.C. *Ferramentas Estatísticas Básicas para o Gerenciamento de Processos*. Fundação Christiano Ottoni, UFMG. Belo Horizonte, 1995.

WILLIAMS, S.M.; PARRY, B.R.; SCHLUP, M.M.T. *Quality Control: an Application of the Cusum*. University of Otago Medical School, Dunedin 1992.

## ANEXOS

ANEXO A.1: Probabilidade observadas do alarme falso ( $\alpha$ ) em cada subgrupo racional  $i$  para cada valor de  $h^*$  entre 1 e 10 e  $k^* = 0,25$ , de acordo com a simulação de dados

$i$	$h^*$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,214	0,027	0,001	0	0	0	0	0	0	0
2	0,384	0,094	0,015	0,001	0	0	0	0	0	0
3	0,491	0,157	0,038	0,008	0,001	0	0	0	0	0
4	0,564	0,207	0,064	0,016	0,004	0,001	0	0	0	0
5	0,61	0,254	0,09	0,027	0,008	0,002	0	0	0	0
6	0,656	0,289	0,114	0,04	0,012	0,003	0	0	0	0
7	0,692	0,32	0,135	0,05	0,016	0,005	0,001	0	0	0
8	0,716	0,337	0,147	0,06	0,022	0,008	0,002	0,001	0	0
9	0,743	0,363	0,164	0,072	0,028	0,009	0,003	0,001	0	0
10	0,76	0,385	0,183	0,082	0,032	0,013	0,004	0,001	0	0
11	0,771	0,398	0,195	0,089	0,036	0,015	0,005	0,002	0,001	0
12	0,783	0,418	0,206	0,098	0,041	0,016	0,006	0,002	0,001	0
13	0,798	0,43	0,218	0,105	0,048	0,02	0,008	0,003	0,001	0
14	0,808	0,439	0,232	0,114	0,051	0,023	0,01	0,004	0,001	0
15	0,818	0,45	0,233	0,119	0,056	0,026	0,011	0,005	0,002	0,001
16	0,824	0,456	0,239	0,125	0,061	0,03	0,014	0,006	0,002	0,001
17	0,827	0,465	0,246	0,131	0,067	0,031	0,016	0,007	0,002	0,001
18	0,833	0,466	0,249	0,132	0,069	0,033	0,017	0,008	0,003	0,001
19	0,837	0,473	0,256	0,135	0,071	0,036	0,018	0,008	0,004	0,002
20	0,841	0,474	0,262	0,14	0,074	0,039	0,019	0,008	0,004	0,002
21	0,846	0,48	0,266	0,144	0,075	0,039	0,02	0,009	0,004	0,002
22	0,847	0,486	0,272	0,153	0,08	0,04	0,021	0,01	0,005	0,002
23	0,857	0,495	0,278	0,154	0,083	0,044	0,023	0,01	0,005	0,003
24	0,859	0,498	0,285	0,16	0,086	0,046	0,022	0,011	0,005	0,003
25	0,866	0,507	0,29	0,16	0,087	0,044	0,023	0,011	0,006	0,003
26	0,869	0,505	0,288	0,163	0,088	0,046	0,023	0,011	0,006	0,004
27	0,873	0,51	0,288	0,164	0,089	0,048	0,023	0,011	0,006	0,004
28	0,872	0,511	0,295	0,168	0,092	0,049	0,025	0,013	0,007	0,003
29	0,877	0,514	0,295	0,166	0,09	0,049	0,026	0,014	0,006	0,004
30	0,882	0,518	0,299	0,169	0,091	0,051	0,028	0,015	0,007	0,004
31	0,88	0,514	0,3	0,17	0,094	0,052	0,028	0,016	0,008	0,004
32	0,882	0,521	0,303	0,174	0,096	0,053	0,03	0,016	0,008	0,004
33	0,886	0,525	0,306	0,173	0,097	0,053	0,03	0,017	0,008	0,004
34	0,885	0,527	0,305	0,178	0,103	0,057	0,031	0,017	0,009	0,004
35	0,887	0,523	0,307	0,18	0,104	0,059	0,033	0,019	0,009	0,004
36	0,892	0,529	0,311	0,18	0,103	0,058	0,033	0,019	0,01	0,006
37	0,887	0,532	0,31	0,182	0,105	0,058	0,033	0,019	0,011	0,005
38	0,89	0,532	0,308	0,181	0,104	0,059	0,034	0,02	0,012	0,006
39	0,894	0,532	0,313	0,183	0,106	0,06	0,033	0,018	0,011	0,006
40	0,894	0,531	0,316	0,186	0,103	0,061	0,036	0,021	0,011	0,006
41	0,892	0,536	0,314	0,182	0,106	0,062	0,037	0,02	0,012	0,006
42	0,899	0,536	0,317	0,181	0,106	0,061	0,037	0,02	0,012	0,006
43	0,897	0,534	0,318	0,185	0,107	0,063	0,038	0,022	0,011	0,006
44	0,897	0,541	0,321	0,19	0,112	0,064	0,038	0,021	0,013	0,007
45	0,898	0,541	0,321	0,191	0,111	0,066	0,038	0,021	0,012	0,007
46	0,9	0,541	0,323	0,19	0,11	0,065	0,038	0,021	0,012	0,006
47	0,9	0,542	0,325	0,191	0,112	0,065	0,038	0,021	0,011	0,007
48	0,895	0,545	0,321	0,191	0,111	0,066	0,039	0,02	0,012	0,006
49	0,891	0,539	0,323	0,19	0,112	0,069	0,04	0,02	0,011	0,006
50	0,901	0,542	0,324	0,193	0,114	0,068	0,041	0,021	0,012	0,006

ANEXO A.2: Probabilidade observadas do alarme falso ( $\alpha$ ) em cada subgrupo racional  $i$  para cada valor de  $h^*$  entre 1 e 10 e  $k^* = 0,5$ , de acordo com a simulação de dados

$i$	$h^*$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,137	0,013	0,001	0	0	0	0	0	0	0
2	0,235	0,046	0,005	0	0	0	0	0	0	0
3	0,286	0,067	0,013	0,002	0	0	0	0	0	0
4	0,319	0,09	0,02	0,004	0,001	0	0	0	0	0
5	0,342	0,103	0,027	0,007	0,001	0	0	0	0	0
6	0,36	0,113	0,034	0,009	0,002	0	0	0	0	0
7	0,374	0,123	0,036	0,011	0,003	0,001	0	0	0	0
8	0,375	0,127	0,038	0,012	0,003	0,001	0	0	0	0
9	0,387	0,133	0,045	0,013	0,004	0,001	0	0	0	0
10	0,391	0,139	0,046	0,014	0,004	0,001	0	0	0	0
11	0,392	0,139	0,048	0,015	0,004	0,001	0,001	0	0	0
12	0,397	0,141	0,048	0,015	0,005	0,001	0	0	0	0
13	0,403	0,145	0,048	0,018	0,004	0,002	0,001	0	0	0
14	0,408	0,148	0,051	0,018	0,006	0,001	0,001	0	0	0
15	0,405	0,149	0,052	0,018	0,006	0,002	0	0	0	0
16	0,402	0,147	0,053	0,019	0,006	0,003	0,001	0	0	0
17	0,403	0,147	0,055	0,021	0,008	0,003	0,001	0	0	0
18	0,401	0,145	0,054	0,021	0,008	0,003	0,001	0	0	0
19	0,4	0,146	0,053	0,02	0,008	0,003	0,001	0	0	0
20	0,402	0,145	0,053	0,019	0,007	0,002	0,001	0	0	0
21	0,401	0,143	0,052	0,019	0,007	0,003	0,001	0	0	0
22	0,404	0,149	0,053	0,018	0,007	0,003	0,001	0,001	0	0
23	0,407	0,155	0,054	0,019	0,007	0,003	0,001	0,001	0	0
24	0,414	0,154	0,055	0,019	0,006	0,002	0,001	0	0	0
25	0,409	0,151	0,054	0,018	0,006	0,002	0,001	0,001	0	0
26	0,405	0,151	0,055	0,018	0,006	0,002	0,001	0	0	0
27	0,41	0,149	0,052	0,019	0,007	0,003	0,001	0	0	0
28	0,408	0,15	0,054	0,021	0,007	0,002	0,001	0	0	0
29	0,405	0,148	0,055	0,019	0,007	0,002	0,001	0	0	0
30	0,406	0,149	0,055	0,02	0,007	0,003	0,001	0	0	0
31	0,404	0,153	0,056	0,02	0,007	0,003	0,001	0	0	0
32	0,409	0,154	0,055	0,02	0,007	0,002	0,001	0	0	0
33	0,413	0,155	0,056	0,02	0,008	0,003	0,001	0	0	0
34	0,414	0,154	0,056	0,021	0,007	0,003	0,001	0	0	0
35	0,413	0,156	0,059	0,021	0,008	0,003	0,001	0	0	0
36	0,415	0,155	0,056	0,021	0,008	0,003	0,001	0	0	0
37	0,411	0,154	0,059	0,02	0,008	0,003	0,001	0	0	0
38	0,409	0,154	0,056	0,021	0,008	0,004	0,001	0	0	0
39	0,41	0,153	0,056	0,022	0,008	0,003	0,001	0	0	0
40	0,408	0,153	0,058	0,021	0,008	0,003	0,001	0	0	0
41	0,408	0,151	0,054	0,02	0,008	0,003	0,001	0	0	0
42	0,414	0,153	0,054	0,02	0,008	0,003	0,001	0	0	0
43	0,414	0,154	0,055	0,02	0,008	0,003	0,001	0,001	0	0
44	0,418	0,157	0,054	0,02	0,008	0,004	0,001	0	0	0
45	0,412	0,158	0,057	0,02	0,008	0,003	0,001	0,001	0	0
46	0,411	0,155	0,057	0,019	0,007	0,003	0,001	0,001	0	0
47	0,41	0,152	0,054	0,02	0,007	0,003	0,002	0,001	0	0
48	0,409	0,15	0,055	0,019	0,007	0,003	0,001	0,001	0	0
49	0,406	0,15	0,053	0,02	0,007	0,003	0,001	0	0	0
50	0,408	0,152	0,054	0,019	0,008	0,002	0,001	0	0	0

ANEXO A.3: Probabilidade observadas do alarme falso ( $\alpha$ ) em cada subgrupo racional  $i$  para cada valor de  $h^*$  entre 1 e 10 e  $k^*$  iguais a 1,0 e 1,5, de acordo com a simulação de dados

$k^* = 1,0$						$k^* = 1,5$			
$i$	$h^*$					$i$	$h^*$		
	1	2	3	4	5 a 10		1	2	3 a 10
1	0,048	0,003	0	0	0	1	0,013	0,001	0
2	0,072	0,007	0,001	0	0	2	0,017	0,001	0
3	0,077	0,01	0,001	0	0	3	0,016	0,001	0
4	0,084	0,01	0,001	0	0	4	0,017	0,001	0
5	0,08	0,012	0,002	0	0	5	0,016	0,001	0
6	0,081	0,012	0,002	0	0	6	0,017	0,001	0
7	0,084	0,013	0,002	0	0	7	0,018	0,001	0
8	0,08	0,012	0,002	0	0	8	0,015	0,001	0
9	0,082	0,014	0,001	0	0	9	0,017	0,001	0
10	0,083	0,013	0,002	0	0	10	0,018	0,001	0
11	0,082	0,012	0,002	0	0	11	0,017	0,001	0
12	0,08	0,011	0,002	0	0	12	0,018	0,001	0
13	0,087	0,013	0,002	0	0	13	0,017	0,001	0
14	0,087	0,013	0,002	0	0	14	0,019	0,001	0
15	0,088	0,012	0,002	0	0	15	0,016	0,001	0
16	0,084	0,012	0,002	0	0	16	0,018	0,001	0
17	0,083	0,014	0,002	0	0	17	0,019	0,001	0
18	0,08	0,013	0,002	0,001	0	18	0,016	0,001	0
19	0,08	0,012	0,002	0	0	19	0,015	0,001	0
20	0,078	0,011	0,002	0	0	20	0,015	0,001	0
21	0,081	0,012	0,002	0	0	21	0,017	0,001	0
22	0,084	0,011	0,002	0	0	22	0,017	0,001	0
23	0,086	0,012	0,002	0	0	23	0,017	0,001	0
24	0,085	0,012	0,001	0	0	24	0,016	0,001	0
25	0,082	0,012	0,001	0	0	25	0,016	0,001	0
26	0,084	0,012	0,001	0	0	26	0,018	0,001	0
27	0,081	0,012	0,002	0	0	27	0,018	0,002	0
28	0,083	0,013	0,002	0	0	28	0,017	0,001	0
29	0,083	0,012	0,002	0	0	29	0,017	0,001	0
30	0,083	0,012	0,002	0	0	30	0,016	0,001	0
31	0,083	0,012	0,001	0	0	31	0,017	0,001	0
32	0,084	0,01	0,001	0	0	32	0,016	0,001	0
33	0,086	0,014	0,002	0	0	33	0,019	0,002	0
34	0,084	0,012	0,002	0,001	0	34	0,018	0,001	0
35	0,085	0,014	0,002	0,001	0	35	0,018	0,002	0
36	0,084	0,013	0,002	0	0	36	0,016	0,001	0
37	0,085	0,012	0,002	0	0	37	0,018	0,001	0
38	0,085	0,013	0,003	0,001	0	38	0,019	0,001	0
39	0,084	0,012	0,002	0	0	39	0,016	0,001	0
40	0,085	0,012	0,002	0	0	40	0,017	0,001	0
41	0,085	0,011	0,001	0	0	41	0,015	0,001	0
42	0,088	0,012	0,002	0	0	42	0,018	0,001	0
43	0,084	0,013	0,002	0	0	43	0,018	0,001	0
44	0,087	0,012	0,001	0	0	44	0,016	0,001	0
45	0,086	0,013	0,002	0	0	45	0,018	0,001	0
46	0,083	0,012	0,001	0	0	46	0,017	0,001	0
47	0,083	0,012	0,002	0	0	47	0,017	0,001	0
48	0,081	0,012	0,002	0	0	48	0,017	0,001	0
49	0,085	0,012	0,002	0	0	49	0,016	0,001	0
50	0,086	0,012	0,002	0	0	50	0,016	0,001	0



ANEXO B.1: Probabilidade observadas do alarme verdadeiro (Pd) em cada subgrupo racional  $i$  para cada valor de  $h^*$  entre 1 e 10,  $k^* = 0,25$  e  $n = 1$  de acordo com a simulação dos dados.

$i$	$h^*$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,237	0,039	0,003	0	0	0	0	0	0	0
2	0,417	0,157	0,031	0,005	0,001	0	0	0	0	0
3	0,537	0,259	0,111	0,026	0,003	0,001	0	0	0	0
4	0,623	0,38	0,179	0,074	0,019	0,004	0,003	0	0	0
5	0,673	0,45	0,251	0,121	0,049	0,011	0,003	0,002	0,001	0,001
6	0,723	0,518	0,323	0,188	0,09	0,037	0,016	0,004	0,001	0,001
7	0,747	0,567	0,391	0,237	0,121	0,053	0,029	0,013	0,004	0,002
8	0,791	0,627	0,45	0,282	0,153	0,085	0,037	0,018	0,009	0,005
9	0,812	0,649	0,504	0,35	0,209	0,117	0,065	0,027	0,013	0,006
10	0,825	0,701	0,532	0,406	0,248	0,163	0,09	0,046	0,02	0,008
11	0,851	0,711	0,58	0,443	0,308	0,191	0,124	0,069	0,033	0,017
12	0,868	0,746	0,609	0,469	0,342	0,23	0,149	0,086	0,049	0,025
13	0,877	0,747	0,624	0,512	0,39	0,271	0,175	0,121	0,068	0,037
14	0,881	0,784	0,661	0,543	0,43	0,326	0,224	0,138	0,083	0,053
15	0,891	0,792	0,678	0,557	0,46	0,352	0,254	0,175	0,107	0,058
16	0,891	0,796	0,7	0,602	0,497	0,384	0,276	0,197	0,134	0,087
17	0,897	0,813	0,713	0,625	0,518	0,416	0,302	0,23	0,161	0,107
18	0,9	0,835	0,735	0,646	0,542	0,458	0,351	0,251	0,175	0,126
19	0,911	0,846	0,768	0,667	0,575	0,467	0,367	0,286	0,204	0,143
20	0,916	0,845	0,776	0,7	0,596	0,495	0,405	0,313	0,232	0,173
21	0,932	0,856	0,799	0,719	0,623	0,523	0,418	0,327	0,258	0,199
22	0,93	0,868	0,798	0,734	0,65	0,547	0,451	0,359	0,273	0,211
23	0,942	0,886	0,812	0,75	0,676	0,571	0,473	0,386	0,293	0,224
24	0,945	0,888	0,818	0,761	0,687	0,59	0,5	0,397	0,315	0,256
25	0,953	0,891	0,832	0,77	0,703	0,62	0,521	0,432	0,341	0,277
26	0,951	0,897	0,847	0,78	0,709	0,63	0,543	0,453	0,376	0,306
27	0,962	0,91	0,856	0,788	0,726	0,649	0,566	0,489	0,404	0,324
28	0,964	0,909	0,857	0,805	0,737	0,671	0,589	0,512	0,42	0,344
29	0,959	0,92	0,877	0,812	0,744	0,689	0,605	0,526	0,453	0,364
30	0,966	0,932	0,883	0,834	0,766	0,683	0,614	0,537	0,467	0,377
31	0,968	0,934	0,896	0,841	0,776	0,71	0,638	0,561	0,48	0,409
32	0,97	0,939	0,89	0,845	0,778	0,721	0,656	0,586	0,504	0,435
33	0,969	0,95	0,907	0,856	0,808	0,74	0,671	0,601	0,52	0,441
34	0,972	0,949	0,913	0,872	0,817	0,752	0,688	0,607	0,53	0,461
35	0,976	0,952	0,922	0,882	0,826	0,774	0,703	0,63	0,553	0,476
36	0,977	0,955	0,924	0,885	0,832	0,786	0,726	0,644	0,571	0,502
37	0,977	0,961	0,931	0,891	0,841	0,802	0,741	0,665	0,588	0,517
38	0,978	0,957	0,931	0,896	0,843	0,8	0,743	0,683	0,6	0,532
39	0,974	0,956	0,931	0,901	0,852	0,801	0,75	0,69	0,624	0,541
40	0,977	0,959	0,94	0,901	0,862	0,817	0,763	0,707	0,641	0,576
41	0,98	0,96	0,941	0,909	0,864	0,825	0,769	0,709	0,652	0,585
42	0,982	0,965	0,942	0,914	0,882	0,843	0,777	0,716	0,661	0,602
43	0,982	0,965	0,948	0,916	0,879	0,841	0,793	0,737	0,667	0,611
44	0,978	0,965	0,946	0,919	0,887	0,846	0,799	0,747	0,684	0,617
45	0,981	0,965	0,941	0,922	0,892	0,855	0,801	0,755	0,699	0,635
46	0,982	0,963	0,948	0,929	0,899	0,869	0,813	0,758	0,717	0,661
47	0,983	0,965	0,948	0,928	0,905	0,872	0,828	0,771	0,724	0,67
48	0,985	0,966	0,945	0,931	0,91	0,87	0,83	0,783	0,727	0,683
49	0,982	0,97	0,955	0,935	0,922	0,887	0,841	0,791	0,741	0,694
50	0,985	0,975	0,959	0,94	0,924	0,895	0,857	0,804	0,76	0,701

ANEXO B.2: Probabilidade observadas do alarme verdadeiro (Pd) em cada subgrupo racional  $i$  para cada valor de  $h^*$  entre 1 e 10,  $k^* = 0,5$  e  $n = 1$  de acordo com a simulação dos dados.

$i$	$h^*$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,311	0,066	0,009	0	0	0	0	0	0	0
2	0,55	0,269	0,084	0,014	0,001	0,001	0	0	0	0
3	0,694	0,426	0,208	0,069	0,018	0,001	0,001	0	0	0
4	0,792	0,553	0,339	0,169	0,072	0,018	0,004	0,003	0	0
5	0,837	0,661	0,458	0,268	0,143	0,057	0,019	0,003	0,003	0,001
6	0,888	0,736	0,555	0,375	0,235	0,129	0,056	0,019	0,009	0,003
7	0,907	0,776	0,642	0,47	0,309	0,188	0,086	0,046	0,023	0,009
8	0,933	0,826	0,709	0,555	0,403	0,259	0,143	0,079	0,034	0,015
9	0,94	0,861	0,753	0,618	0,479	0,356	0,214	0,119	0,069	0,029
10	0,939	0,886	0,804	0,68	0,552	0,43	0,294	0,185	0,115	0,057
11	0,956	0,908	0,818	0,736	0,607	0,499	0,371	0,246	0,158	0,102
12	0,967	0,925	0,86	0,758	0,656	0,554	0,423	0,312	0,209	0,138
13	0,972	0,938	0,881	0,804	0,695	0,597	0,491	0,382	0,271	0,178
14	0,975	0,948	0,905	0,829	0,745	0,652	0,554	0,439	0,34	0,243
15	0,982	0,956	0,915	0,86	0,782	0,683	0,589	0,49	0,391	0,3
16	0,987	0,961	0,919	0,873	0,796	0,728	0,638	0,547	0,448	0,351
17	0,983	0,965	0,938	0,888	0,824	0,751	0,668	0,592	0,493	0,411
18	0,986	0,968	0,947	0,909	0,849	0,792	0,713	0,616	0,541	0,465
19	0,993	0,982	0,951	0,921	0,877	0,819	0,762	0,664	0,577	0,495
20	0,993	0,983	0,961	0,928	0,895	0,84	0,778	0,705	0,629	0,534
21	0,996	0,988	0,964	0,946	0,901	0,855	0,806	0,743	0,673	0,597
22	0,996	0,989	0,969	0,944	0,917	0,875	0,82	0,767	0,703	0,625
23	0,996	0,99	0,982	0,958	0,927	0,893	0,85	0,786	0,724	0,669
24	0,998	0,994	0,983	0,968	0,933	0,896	0,859	0,803	0,75	0,678
25	0,998	0,996	0,989	0,971	0,949	0,916	0,877	0,825	0,777	0,713
26	0,999	0,997	0,987	0,971	0,962	0,924	0,89	0,852	0,803	0,748
27	0,998	0,996	0,991	0,98	0,969	0,951	0,906	0,87	0,821	0,761
28	0,998	0,995	0,989	0,983	0,975	0,956	0,918	0,884	0,843	0,786
29	0,999	0,996	0,992	0,986	0,975	0,963	0,929	0,904	0,867	0,811
30	1	0,995	0,993	0,99	0,978	0,963	0,945	0,915	0,884	0,838
31	0,998	0,996	0,992	0,989	0,979	0,968	0,951	0,931	0,897	0,853
32	0,999	0,998	0,996	0,989	0,984	0,974	0,961	0,932	0,906	0,872
33	0,999	0,998	0,994	0,991	0,986	0,979	0,969	0,948	0,923	0,886
34	0,999	0,998	0,994	0,99	0,988	0,981	0,972	0,955	0,93	0,902
35	0,999	0,998	0,995	0,993	0,99	0,983	0,974	0,962	0,941	0,913
36	0,999	0,998	0,996	0,992	0,988	0,984	0,977	0,968	0,952	0,924
37	0,998	0,998	0,996	0,994	0,991	0,985	0,98	0,969	0,957	0,935
38	0,999	0,997	0,997	0,994	0,992	0,986	0,983	0,979	0,958	0,935
39	1	0,998	0,995	0,993	0,991	0,988	0,983	0,972	0,963	0,943
40	1	0,998	0,996	0,994	0,993	0,991	0,985	0,979	0,963	0,951
41	1	0,999	0,997	0,996	0,995	0,993	0,987	0,979	0,964	0,954
42	1	0,999	0,997	0,997	0,996	0,995	0,992	0,98	0,973	0,959
43	0,999	0,998	0,997	0,997	0,997	0,997	0,993	0,985	0,971	0,964
44	1	0,998	0,998	0,997	0,997	0,997	0,991	0,987	0,975	0,963
45	1	1	0,999	0,998	0,997	0,997	0,992	0,989	0,979	0,966
46	1	0,999	0,999	0,999	0,997	0,996	0,994	0,99	0,982	0,972
47	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,997	0,996	0,992	0,985	0,975
48	1	0,999	0,999	0,999	0,998	0,998	0,997	0,994	0,987	0,98
49	1	0,999	0,999	0,998	0,998	0,998	0,997	0,994	0,989	0,98
50	0,999	0,999	0,999	0,999	0,998	0,998	0,998	0,995	0,991	0,985

ANEXO B.3: Probabilidade observadas do alarme verdadeiro (Pd) em cada subgrupo racional  $i$  para cada valor de  $h^*$  entre 1 e 10,  $k^* = 1,0$  e  $n = 1$  de acordo com a simulação dos dados.

$i$	$h^*$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,488	0,161	0,025	0	0	0	0	0	0	0
2	0,785	0,522	0,26	0,082	0,014	0,001	0,001	0	0	0
3	0,908	0,75	0,517	0,278	0,132	0,035	0,004	0,001	0	0
4	0,958	0,879	0,72	0,514	0,319	0,16	0,067	0,016	0,004	0,003
5	0,982	0,929	0,836	0,705	0,518	0,338	0,188	0,092	0,033	0,006
6	0,995	0,968	0,914	0,83	0,679	0,514	0,354	0,224	0,119	0,053
7	0,995	0,978	0,953	0,894	0,786	0,663	0,512	0,373	0,23	0,133
8	0,997	0,987	0,975	0,946	0,88	0,767	0,658	0,514	0,381	0,245
9	0,998	0,995	0,985	0,97	0,928	0,85	0,764	0,631	0,518	0,399
10	1	0,997	0,991	0,974	0,947	0,906	0,836	0,741	0,632	0,526
11	1	1	0,998	0,988	0,969	0,942	0,89	0,823	0,741	0,633
12	1	1	1	0,994	0,986	0,962	0,931	0,88	0,811	0,718
13	1	1	1	0,998	0,992	0,978	0,959	0,928	0,871	0,797
14	1	1	1	0,997	0,996	0,985	0,974	0,952	0,912	0,864
15	1	1	1	0,998	0,996	0,995	0,984	0,968	0,943	0,907
16	1	1	1	1	0,998	0,996	0,991	0,978	0,962	0,933
17	1	1	1	1	0,998	0,997	0,994	0,988	0,971	0,954
18	1	1	1	0,999	0,999	0,997	0,996	0,993	0,985	0,968
19	1	1	1	1	1	0,999	0,996	0,995	0,991	0,986
20	1	1	1	1	1	0,999	0,999	0,997	0,993	0,987
21	1	1	1	1	1	1	0,999	0,999	0,999	0,996
22	1	1	1	1	1	0,999	0,999	0,999	0,999	0,998
23	1	1	1	1	1	1	0,999	0,999	0,999	0,999
24	1	1	1	1	1	1	1	0,999	0,999	0,999
25	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,999
26	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,999
27	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
28	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
29	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
30 a 50	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

ANEXO B.4: Probabilidade observadas do alarme verdadeiro (Pd) em cada subgrupo racional  $i$  para cada valor de  $h^*$  entre 1 e 10,  $k^* = 1,5$  e  $n = 1$  de acordo com a simulação dos dados.

$i$	$h^*$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,694	0,311	0,066	0,009	0	0	0	0	0	0
2	0,932	0,767	0,511	0,259	0,082	0,014	0,001	0,001	0	0
3	0,99	0,932	0,828	0,623	0,389	0,194	0,067	0,017	0,001	0,001
4	0,993	0,981	0,943	0,852	0,713	0,502	0,315	0,159	0,066	0,016
5	0,997	0,995	0,986	0,946	0,876	0,749	0,596	0,408	0,251	0,135
6	1	0,997	0,996	0,986	0,959	0,9	0,814	0,661	0,506	0,342
7	1	1	0,999	0,995	0,986	0,955	0,907	0,84	0,713	0,575
8	1	1	1	0,999	0,993	0,985	0,967	0,93	0,864	0,754
9	1	1	1	1	0,999	0,994	0,988	0,975	0,935	0,887
10	1	1	1	1	0,999	0,999	0,997	0,987	0,971	0,938
11	1	1	1	1	1	1	0,998	0,997	0,99	0,973
12	1	1	1	1	1	1	1	1	0,998	0,991
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,999
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
15 a 50	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

ANEXO B.5: Probabilidade observadas do alarme verdadeiro (Pd) em cada subgrupo racional  $i$  para cada valor de  $h^*$  entre 1 e 10,  $k^* = 0,25$  e  $n = 5$  de acordo com a simulação dos dados.

$i$	$h^*$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,442	0,138	0,02	0,002	0	0	0	0	0	0
2	0,709	0,443	0,192	0,056	0,009	0	0	0	0	0
3	0,875	0,673	0,422	0,222	0,098	0,029	0,002	0,001	0,001	0
4	0,943	0,82	0,636	0,419	0,244	0,116	0,05	0,014	0,003	0
5	0,977	0,91	0,775	0,599	0,406	0,25	0,125	0,059	0,019	0,009
6	0,985	0,949	0,863	0,731	0,552	0,389	0,247	0,141	0,066	0,031
7	0,99	0,965	0,919	0,811	0,687	0,547	0,392	0,256	0,146	0,088
8	0,994	0,982	0,951	0,881	0,784	0,663	0,517	0,375	0,257	0,143
9	0,998	0,987	0,974	0,924	0,862	0,76	0,635	0,486	0,363	0,235
10	0,999	0,995	0,976	0,962	0,912	0,839	0,734	0,602	0,469	0,343
11	1	0,999	0,99	0,974	0,941	0,885	0,792	0,712	0,576	0,456
12	1	1	0,995	0,986	0,958	0,92	0,857	0,78	0,687	0,569
13	1	1	0,999	0,991	0,973	0,947	0,908	0,84	0,744	0,662
14	1	1	0,999	0,992	0,985	0,967	0,94	0,896	0,822	0,733
15	1	1	0,999	0,998	0,988	0,977	0,96	0,926	0,879	0,811
16	1	1	0,999	0,996	0,993	0,983	0,97	0,951	0,917	0,863
17	1	1	1	0,999	0,996	0,993	0,979	0,969	0,943	0,904
18	1	1	1	1	1	0,994	0,989	0,982	0,962	0,931
19	1	1	1	1	1	0,998	0,993	0,988	0,972	0,947
20	1	1	1	1	0,999	0,999	0,998	0,992	0,979	0,959
21	1	1	1	1	0,999	0,998	0,998	0,994	0,988	0,973
22	1	1	1	0,999	0,999	0,999	0,997	0,996	0,992	0,983
23	1	1	1	0,999	0,999	0,999	0,998	0,996	0,995	0,991
24	1	1	1	1	1	0,999	0,998	0,997	0,996	0,992
25	1	1	1	1	1	1	1	0,997	0,995	0,995
26	1	1	1	1	1	1	0,999	0,999	0,998	0,996
27	1	1	1	1	1	1	0,999	0,999	0,998	0,997
28	1	1	1	1	1	1	1	0,999	0,999	0,999
29	1	1	1	1	1	1	1	0,999	0,999	0,999
30	1	1	1	1	1	1	1	0,999	0,999	0,999
31	1	1	1	1	1	1	1	1	0,999	0,999
32	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,999
33	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
34	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
35 a 50	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

ANEXO B.6: Probabilidade observadas do alarme verdadeiro (Pd) em cada subgrupo racional  $i$  para cada valor de  $h^*$  entre 1 e 10,  $k^* = 0,5$  e  $n = 5$  de acordo com a simulação dos dados.

$i$	$h^*$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,766	0,382	0,11	0,015	0,001	0	0	0	0	0
2	0,953	0,839	0,62	0,351	0,149	0,043	0,005	0	0	0
3	0,991	0,971	0,905	0,769	0,542	0,334	0,164	0,064	0,016	0,002
4	0,997	0,993	0,981	0,946	0,862	0,696	0,503	0,293	0,165	0,072
5	1	1	0,996	0,993	0,968	0,906	0,792	0,625	0,445	0,293
6	1	1	0,999	0,997	0,992	0,975	0,938	0,852	0,733	0,567
7	1	1	1	1	0,997	0,992	0,984	0,955	0,901	0,794
8	1	1	1	1	1	1	0,994	0,991	0,972	0,93
9	1	1	1	1	1	1	1	0,998	0,994	0,979
10	1	1	1	1	1	1	1	1	0,999	0,995
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12 a 50	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

ANEXO B.7: Probabilidade observadas do alarme verdadeiro (Pd) em cada subgrupo racional  $i$  para cada valor de  $h^*$  entre 1 e 10,  $k^* = 1,0$  e  $n = 5$  de acordo com a simulação dos dados.

$i$	$h^*$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,994	0,924	0,679	0,301	0,07	0,005	0,001	0	0	0
2	1	1	1	0,976	0,904	0,724	0,478	0,228	0,081	0,017
3	1	1	1	1	1	0,993	0,972	0,919	0,794	0,584
4	1	1	1	1	1	1	1	0,997	0,992	0,979
5 a 50	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

ANEXO B.8: Probabilidade observadas do alarme verdadeiro (Pd) em cada subgrupo racional  $i$  para cada valor de  $h^*$  entre 1 e 10,  $k^* = 1,5$  e  $n = 5$  de acordo com a simulação dos dados.

$i$	$h^*$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	0,984	0,88	0,587	0,213	0,037	0,003	0	0
2	1	1	1	1	1	1	0,989	0,942	0,824	0,604
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5 a 50	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

ANEXO B.9: Probabilidade observadas do alarme verdadeiro (Pd) em cada subgrupo racional  $i$  para cada valor de  $h^*$  entre 1 e 10,  $k^* = 0,25$  e  $n = 10$  de acordo com a simulação dos dados.

$i$	$h^*$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,657	0,264	0,059	0,003	0	0	0	0	0	0
2	0,904	0,703	0,442	0,193	0,052	0,006	0,001	0	0	0
3	0,967	0,889	0,726	0,497	0,299	0,144	0,043	0,007	0,002	0
4	0,987	0,962	0,896	0,751	0,561	0,365	0,198	0,1	0,038	0,007
5	0,994	0,986	0,953	0,885	0,771	0,627	0,439	0,285	0,148	0,067
6	0,999	0,997	0,983	0,954	0,889	0,797	0,664	0,511	0,349	0,206
7	1	0,999	0,994	0,972	0,95	0,895	0,807	0,686	0,559	0,41
8	1	1	0,996	0,994	0,981	0,955	0,91	0,836	0,726	0,596
9	1	1	1	0,997	0,994	0,981	0,955	0,918	0,841	0,747
10	1	1	1	0,998	0,996	0,991	0,981	0,96	0,919	0,849
11	1	1	1	1	0,999	0,996	0,989	0,982	0,961	0,931
12	1	1	1	1	1	0,999	0,997	0,99	0,982	0,967
13	1	1	1	1	1	0,999	0,999	0,991	0,986	0,979
14	1	1	1	1	1	1	0,999	0,998	0,994	0,986
15	1	1	1	1	1	1	1	1	0,999	0,996
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
17 a 50	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

ANEXO B.10: Probabilidade observadas do alarme verdadeiro (Pd) em cada subgrupo racional  $i$  para cada valor de  $h^*$  entre 1 e 10,  $k^* = 0,5$  e  $n = 10$  de acordo com a simulação dos dados.

$i$	$h^*$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,954	0,753	0,387	0,098	0,008	0,002	0	0	0	0
2	1	0,989	0,954	0,85	0,608	0,334	0,122	0,033	0,003	0
3	1	1	0,997	0,985	0,955	0,875	0,712	0,492	0,299	0,141
4	1	1	1	1	0,998	0,986	0,964	0,909	0,795	0,623
5	1	1	1	1	1	1	0,994	0,992	0,965	0,928
6	1	1	1	1	1	1	1	1	0,998	0,992
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,999
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
9 a 50	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

ANEXO B.11: Probabilidade observadas do alarme verdadeiro (Pd) em cada subgrupo racional  $i$  para cada valor de  $h^*$  entre 1 e 10,  $k^* = 1,0$  e  $n = 10$  de acordo com a simulação dos dados.

$i$	$h^*$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	0,991	0,91	0,654	0,262	0,057	0,003	0	0
2	1	1	1	1	1	1	0,995	0,967	0,887	0,69
3 a 50	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

ANEXO B.12: Probabilidade observadas do alarme verdadeiro (Pd) em cada subgrupo racional  $i$  para cada valor de  $h^*$  entre 1 e 10,  $k^* = 1,5$  e  $n = 10$  de acordo com a simulação dos dados.

$i$	$h^*$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	0,998	0,976	0,844	0,521	0,173	0,023
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3 a 50	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

ANEXO C.1: Estimativa dos três parâmetros da distribuição lognormal ajustada à variável aleatória  $Z(i)+S_H(i-1)^*$  dado  $\delta = 0$ .

$i$	$k^* = 0,25$			$k^* = 0,5$		
	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\gamma}$
1	3,247	0,03976	-25,723	3,247	0,03976	-25,723
2	3,3063	0,04087	-26,99	3,3486	0,03811	-28,266
3	2,8763	0,06641	-17,326	3,1361	0,04811	-22,746
4	2,5756	0,09872	-12,637	2,8124	0,07119	-16,351
5	1,8811	0,19444	-6,0149	1,9003	0,16962	-6,4075
6	1,8421	0,21686	-5,6796	1,9208	0,1772	-6,4864
7	1,9105	0,21293	-6,125	2,0073	0,16812	-7,1413
8	2,048	0,18668	-7,0187	2,1668	0,1425	-8,364
9	2,0616	0,19057	-7,0895	2,2472	0,13321	-9,0807
10	1,768	0,25859	-5,0966	1,8511	0,1978	-6,0145
11	1,9529	0,22437	-6,2099	2,1572	0,14978	-8,2263
12	1,6976	0,29531	-4,687	1,8234	0,2106	-5,8444
13	1,7996	0,27197	-5,1975	1,9891	0,17995	-6,91
14	1,81	0,26785	-5,1825	1,9819	0,18018	-6,8131
15	1,7526	0,28554	-4,8553	1,9202	0,18914	-6,4185
16	1,7559	0,29709	-4,9014	1,9207	0,19617	-6,455
17	1,8861	0,26391	-5,6522	2,1083	0,16189	-7,8224
18	2,0735	0,22876	-6,9453	2,8061	0,08568	-16,062
19	1,6265	0,33807	-4,1149	1,6926	0,23672	-5,0144
20	1,7913	0,29359	-4,9865	1,917	0,19027	-6,3734
21	1,7732	0,30359	-4,8486	2,0103	0,1758	-7,0138
22	1,8121	0,29696	-5,1231	2,2405	0,14163	-8,9952
23	1,8826	0,2763	-5,5276	2,2702	0,13607	-9,2569
24	1,6414	0,33119	-4,179	1,8936	0,18603	-6,2841
25	1,671	0,32007	-4,3225	2,0191	0,16163	-7,1418
26	1,7339	0,3079	-4,6605	2,2468	0,13261	-9,0527
27	1,5481	0,36123	-3,6889	1,8534	0,18844	-5,9586
28	1,6471	0,34449	-4,2384	1,9786	0,17727	-6,8851
29	1,7135	0,32107	-4,5447	2,0633	0,16382	-7,4871
30	1,736	0,31718	-4,7067	2,222	0,14304	-8,859
31	2,691	0,13027	-13,571	3,7451	0,03254	-41,814
32	1,8294	0,29654	-5,1759	2,2091	0,14834	-8,6644
33	1,686	0,33048	-4,3605	1,9352	0,18593	-6,5109
34	1,638	0,35167	-4,1748	1,8667	0,2005	-6,1144
35	1,7558	0,31467	-4,7393	2,1467	0,15309	-8,133
36	1,8858	0,28171	-5,496	2,1935	0,14704	-8,533
37	1,6665	0,34121	-4,2563	1,9044	0,19105	-6,3395
38	1,6663	0,34569	-4,3088	1,9036	0,19254	-6,375
39	1,6812	0,33667	-4,4495	1,8937	0,19153	-6,372
40	1,7963	0,30362	-5,0438	2,1265	0,15999	-8,0418
41	1,7088	0,32751	-4,5122	1,8944	0,19255	-6,2794
42	1,8653	0,28532	-5,4112	2,1399	0,15677	-8,1117
43	1,7006	0,32538	-4,4089	2,007	0,17202	-7,0026
44	1,6531	0,34973	-4,2014	1,9392	0,18769	-6,5574
45	1,7134	0,33633	-4,5242	1,9372	0,19282	-6,564
46	1,595	0,36551	-3,8493	1,7386	0,2286	-5,2598
47	1,7544	0,3214	-4,6634	1,9797	0,18452	-6,8052
48	1,7452	0,32236	-4,6286	2,0395	0,17358	-7,2701
49	1,5869	0,36809	-3,7752	1,6975	0,23451	-5,0242
50	1,61104	0,35961	-3,8988	1,8575	0,20179	-5,9713

ANEXO C.2: Estimativa dos dois parâmetros da distribuição lognormal ajustada à variável aleatória  $Z(i)+S_H(i-1)^*$  dado  $\delta = 0$ .

$i$	$k^* = 1,0$		$k^* = 1,5$	
	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
1	0,00314	1,017	0,00314	1,017
2	0,0969	1,0353	0,03926	1,0155
3	0,09896	1,0283	0,02674	0,99424
4	0,09742	1,0627	0,01932	1,0191
5	0,10327	1,0136	0,01462	0,97392
6	0,16225	1,0754	0,08192	1,0329
7	0,09323	1,0826	-0,00867	1,0265
8	0,13304	1,0636	0,03627	1,0122
9	0,11926	1,0531	0,02134	1,0074
10	0,12339	1,0642	0,03132	1,0116
11	0,15287	1,07	0,05819	1,0216
12	0,09466	1,0833	0,00242	1,0277
13	0,13441	1,0926	0,03822	1,0339
14	0,15947	1,0822	0,06327	1,0224
15	0,11898	1,0581	0,02237	1,0072
16	0,10572	1,0803	0,01321	1,0213
17	0,11412	1,0774	0,02464	1,0294
18	0,14052	1,1268	0,04836	1,0692
19	0,12829	1,0176	0,05188	0,97717
20	0,14804	1,0284	0,03587	0,97135
21	0,14263	1,0314	0,05576	0,98731
22	0,06788	1,0643	-0,02048	1,0258
23	0,09142	1,0606	0,0115	1,0258
24	0,06238	1,0177	-0,01872	0,97493
25	0,10629	0,9969	0,0306	0,96962
26	0,10827	1,0494	0,03368	1,0209
27	0,15996	0,99333	0,07609	0,95378
28	0,07382	1,0662	-0,01166	1,0147
29	0,11988	1,0743	0,03171	1,0255
30	0,08082	1,0983	-0,01251	1,0496
31	0,13782	1,1187	0,04958	1,0648
32	0,15462	1,0949	0,05923	1,043
33	0,12323	1,07	0,02251	1,0248
34	0,08274	1,0774	-0,00471	1,0287
35	0,13645	1,0724	0,04529	1,0217
36	0,13234	1,0565	0,03586	1,0011
37	0,08628	1,0658	-0,00115	1,0361
38	0,06988	1,0431	-0,01269	0,99934
39	0,00849	1,0459	-0,07101	1,0037
40	0,09373	1,0775	0,01935	1,0342
41	0,13051	1,0566	0,04671	1,0166
42	0,12022	1,1111	0,0251	1,0711
43	0,16695	1,0581	0,07026	1,0164
44	0,13002	1,0921	0,03179	1,0462
45	0,11281	1,0954	0,01469	1,0342
46	0,17638	1,0421	0,08146	0,99208
47	0,14761	1,09	0,0552	1,0471
48	0,12005	1,0907	0,02478	1,0436
49	0,18248	1,0503	0,08998	1,0038
50	0,15904	1,0518	0,06406	1,0053



ANEXO D.1: Estimativa dos parâmetros de distribuição normal ajustados à  $Z(i)+S_H(i-1)^*$   
 dado  $\bar{\delta} > 0$  e  $n = 1$

$i$	$k^* = 0,25$		$k^* = 0,5$		$k^* = 1,0$		$k^* = 1,5$	
	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
1	0,5031	1,017	1,0031	1,017	2,0031	1,017	3,0031	1,017
2	1,0508	1,2031	1,7119	1,246	3,0993	1,3217	4,5428	1,379
3	1,4612	1,3597	2,3015	1,4451	4,1173	1,578	6,0404	1,6538
4	1,8231	1,581	2,8523	1,7022	5,1191	1,8745	7,5342	1,9539
5	2,1698	1,7296	3,3885	1,8995	6,1128	2,109	9,0215	2,1943
6	2,5493	1,9012	3,9675	2,1036	7,1667	2,3346	10,573	2,4202
7	2,7994	2,0782	4,4327	2,3037	8,1168	2,5433	12,023	2,622
8	3,1125	2,1834	4,9497	2,45	9,1187	2,6974	13,525	2,7686
9	3,4056	2,3336	5,4545	2,6278	10,112	2,8871	15,018	2,9562
10	3,7035	2,5023	5,963	2,8442	11,113	3,1067	16,519	3,1746
11	4,023	2,6446	6,4942	3,0145	12,135	3,281	18,041	3,3475
12	4,2711	2,7754	6,9645	3,1575	13,1	3,4114	19,506	3,4736
13	4,5559	2,9165	7,4708	3,3248	14,102	3,5837	21,008	3,6444
14	4,8574	3,0544	8,0032	3,4753	15,13	3,7309	22,536	3,788
15	5,1232	3,1909	8,494	3,6389	16,117	3,902	24,023	3,9584
16	5,3729	3,3742	8,9771	3,8366	17,097	4,0997	25,503	4,1541
17	5,6372	3,5063	9,4701	3,9832	18,086	4,251	26,992	4,3041
18	5,9256	3,6494	9,9852	4,1412	19,099	4,4036	28,505	4,4573
19	6,2122	3,7097	10,501	4,219	20,112	4,482	30,018	4,5342
20	6,4778	3,8505	11,003	4,3708	21,114	4,6304	31,52	4,6817
21	6,7759	3,9455	11,536	4,4826	22,145	4,7461	33,051	4,7986
22	6,9919	4,0677	11,986	4,6203	23,095	4,8849	34,501	4,9389
23	7,2523	4,1174	12,473	4,6913	24,081	4,9483	35,998	5,0001
24	7,4673	4,2079	12,922	4,7999	25,03	5,0542	37,436	5,1034
25	7,7333	4,29	13,424	4,8883	26,031	5,1349	38,938	5,1831
26	7,9978	4,4077	13,931	5,0059	27,037	5,249	40,443	5,2948
27	8,2977	4,4908	14,474	5,094	28,08	5,3368	41,986	5,3827
28	8,5146	4,5723	14,934	5,1795	29,039	5,4243	43,445	5,4709
29	8,7679	4,6347	15,428	5,2473	30,033	5,4918	44,939	5,5387
30	8,9708	4,7314	15,876	5,3397	30,981	5,584	46,387	5,6312
31	9,2534	4,8296	16,395	5,4602	32	5,7082	47,906	5,754
32	9,5355	4,9297	16,916	5,5702	33,021	5,8085	49,427	5,8522
33	9,7729	4,9905	17,401	5,6219	34,006	5,8541	50,912	5,8958
34	9,9871	5,0519	17,858	5,6877	34,962	5,9118	52,369	5,9527
35	10,261	5,1147	18,371	5,7583	35,975	5,9781	53,882	6,017
36	10,52	5,2144	18,874	5,8538	36,979	6,0636	55,385	6,1005
37	10,759	5,2732	19,35	5,9294	37,954	6,1361	56,86	6,1746
38	10,967	5,4176	19,803	6,0735	38,906	6,2857	58,313	6,3253
39	11,121	5,495	20,202	6,1611	39,805	6,6385	59,711	6,4078
40	11,373	5,5179	20,695	6,2001	40,798	6,4098	61,205	6,4489
41	11,643	5,6518	21,211	6,3288	41,815	6,5349	62,721	6,5735
42	11,888	5,6624	21,701	6,3365	42,805	6,5386	64,211	6,5751
43	12,167	5,7724	22,227	6,4488	43,834	6,6397	65,737	6,6736
44	12,416	5,9365	22,72	6,6097	44,823	6,7961	67,23	6,8286
45	12,65	6,0488	23,199	6,7179	45,803	6,9058	68,709	6,9386
46	12,946	6,11	23,743	6,781	46,846	6,9705	70,252	7,0035
47	13,219	6,212	24,263	6,8818	47,866	7,0686	71,773	7,1002
48	13,458	6,2544	24,746	6,9307	48,849	7,1154	73,255	7,1465
49	13,762	6,3443	25,299	7,0163	49,903	7,196	74,809	7,2251
50	14,034	6,3752	25,817	7,056	50,921	7,2365	76,327	7,2675

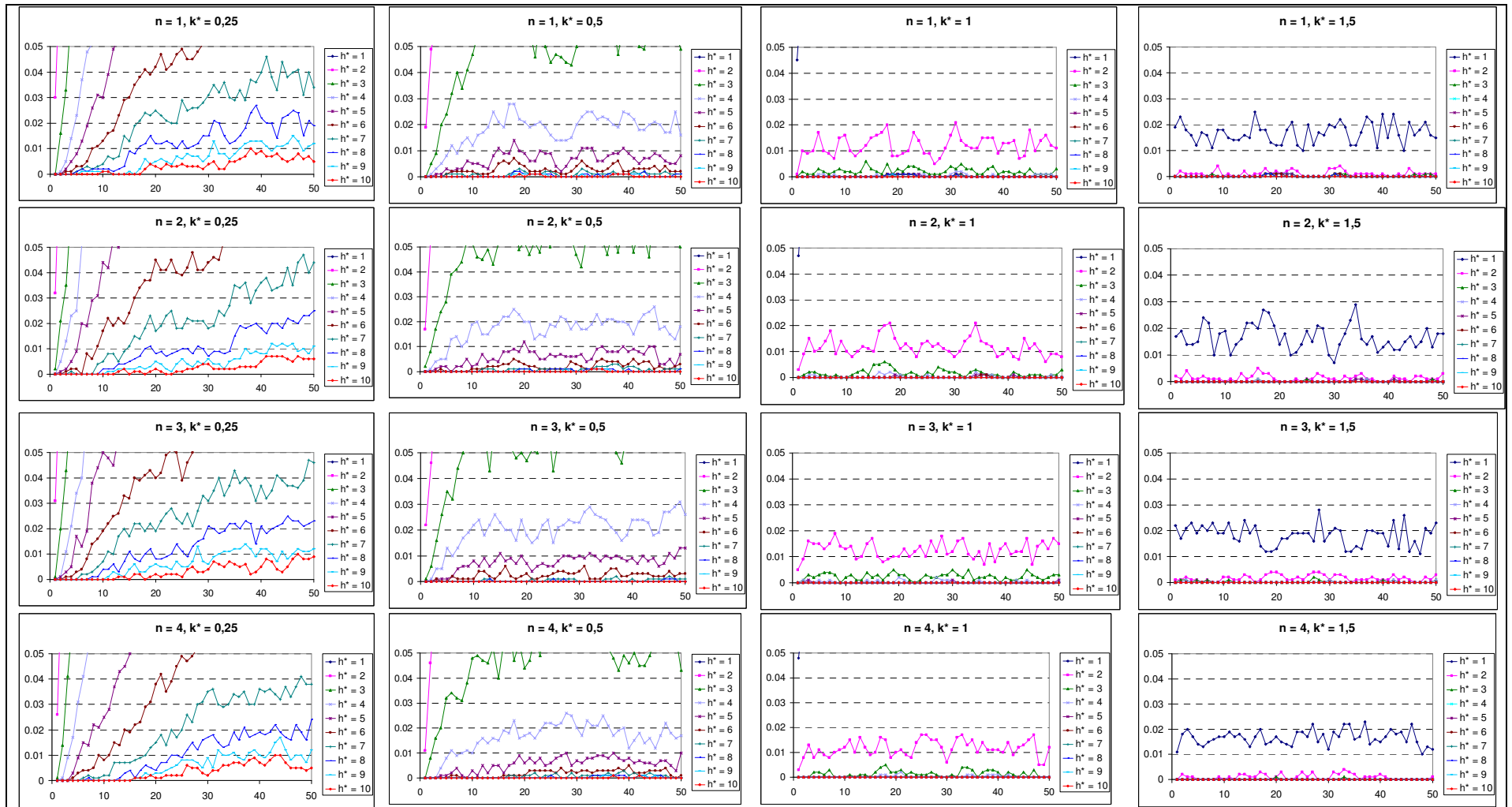
ANEXO D.2: Estimativa dos parâmetros de distribuição normal ajustados à  $Z(i)+S_H(i-1)^*$   
 dado  $\bar{d} > 0$  e  $n = 5$

$i$	$k^* = 0,25$		$k^* = 0,5$		$k^* = 1,0$		$k^* = 1,5$	
	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
1	0,4958	0,46042	0,99583	0,46042	1,9958	0,46042	2,9958	0,46042
2	0,9238	0,60504	1,7688	0,64376	3,5362	0,65561	5,3126	0,65561
3	1,3608	0,71609	2,5735	0,77759	5,117	0,78736	7,6698	0,78736
4	1,7781	0,82228	3,3725	0,88424	6,6924	0,89201	10,022	0,89201
5	2,1828	0,90774	4,1609	0,96806	8,2572	0,97557	12,363	0,97557
6	2,5568	1,0146	4,9228	1,0706	9,7955	1,0784	14,677	1,0784
7	2,9544	1,1212	5,708	1,1699	11,357	1,1774	17,015	1,1774
8	3,338	1,1955	6,4793	1,2415	12,905	1,2484	19,339	1,2484
9	3,7155	1,2696	7,2449	1,3143	14,447	1,3211	21,658	1,3211
10	4,0965	1,3257	8,0141	1,3714	15,992	1,3775	23,98	1,3775
11	4,4609	1,3902	8,7667	1,4366	17,521	1,4437	26,285	1,4437
12	4,8538	1,466	9,5479	1,5116	19,079	1,5186	28,619	1,5186
13	5,2421	1,5532	10,324	1,5973	20,632	1,6053	30,948	1,6053
14	5,6472	1,6195	11,118	1,6618	22,201	1,6678	33,295	1,6698
15	6,0435	1,6756	11,902	1,7144	23,762	1,7226	35,632	1,7226
16	6,424	1,7401	12,671	1,7774	25,307	1,7851	37,953	1,7851
17	6,817	1,7909	13,452	1,8273	26,865	1,835	40,287	1,835
18	7,2238	1,8561	14,247	1,8897	28,436	1,8965	42,635	1,8965
19	7,617	1,9248	15,028	1,9576	29,994	1,964	44,969	1,964
20	7,998	1,9705	15,798	2,0003	31,54	2,006	47,291	2,006
21	8,3852	2,015	16,573	2,0447	33,092	2,0501	49,619	2,0501
22	8,8024	2,0805	17,378	2,1115	34,673	2,1176	51,978	2,1176
23	9,1866	2,0994	18,151	2,1295	36,222	2,1352	54,303	2,1352
24	9,5415	2,1526	18,894	2,1827	37,742	2,188	56,599	2,188
25	9,9212	2,2021	19,662	2,2292	39,286	2,234	58,919	2,234
26	10,326	2,2431	20,455	2,2684	40,855	2,2732	61,265	2,2732
27	10,708	2,2727	21,225	2,2962	42,402	2,3006	63,588	2,3006
28	11,076	2,3226	21,981	2,348	43,934	2,353	65,897	2,353
29	11,472	2,3406	22,765	2,3665	45,495	2,3716	68,234	2,3716
30	11,862	2,377	23,543	2,4043	47,049	2,4096	70,565	2,4096
31	12,279	2,4195	24,349	2,4471	48,632	2,4523	72,923	2,4523
32	12,697	2,4691	25,155	2,4965	50,214	2,5018	75,282	2,5018
33	13,084	2,5072	25,93	2,535	51,766	2,5404	77,61	2,5404
34	13,477	2,5589	26,711	2,5863	53,323	2,5914	79,944	2,5914
35	13,861	2,5979	27,483	2,6236	54,871	2,6287	82,269	2,6287
36	14,254	2,6546	28,265	2,68	56,429	2,6846	84,603	2,6846
37	14,648	2,7089	29,047	2,7327	57,988	2,737	86,938	2,737
38	15,029	2,7396	29,816	2,7631	59,533	2,7676	89,26	2,7676
39	15,457	2,7808	30,632	2,803	61,126	2,8071	91,629	2,8071
40	15,827	2,8021	31,391	2,8249	62,661	2,8288	93,94	2,8288
41	16,222	2,8393	32,174	2,8614	64,22	2,865	96,276	2,865
42	16,61	2,8573	32,95	2,878	65,773	2,8814	98,605	2,8814
43	17,026	2,8939	33,754	2,9124	67,353	2,9156	100,96	2,9156
44	17,428	2,943	34,544	2,9628	68,92	2,9661	103,3	2,9661
45	17,844	2,9625	35,348	2,9817	70,5	2,9849	105,66	2,9849
46	18,25	2,9857	36,143	3,0043	72,071	3,0076	108,01	3,0076
47	18,639	3,0314	36,92	3,0499	73,625	3,0528	110,34	3,0528
48	19,029	3,0521	37,698	3,07	75,18	3,0732	112,67	3,0732
49	19,419	3,0924	38,477	3,1116	76,734	3,1149	115	3,1149
50	19,834	3,1219	39,28	3,1408	78,314	3,1441	117,36	3,1441

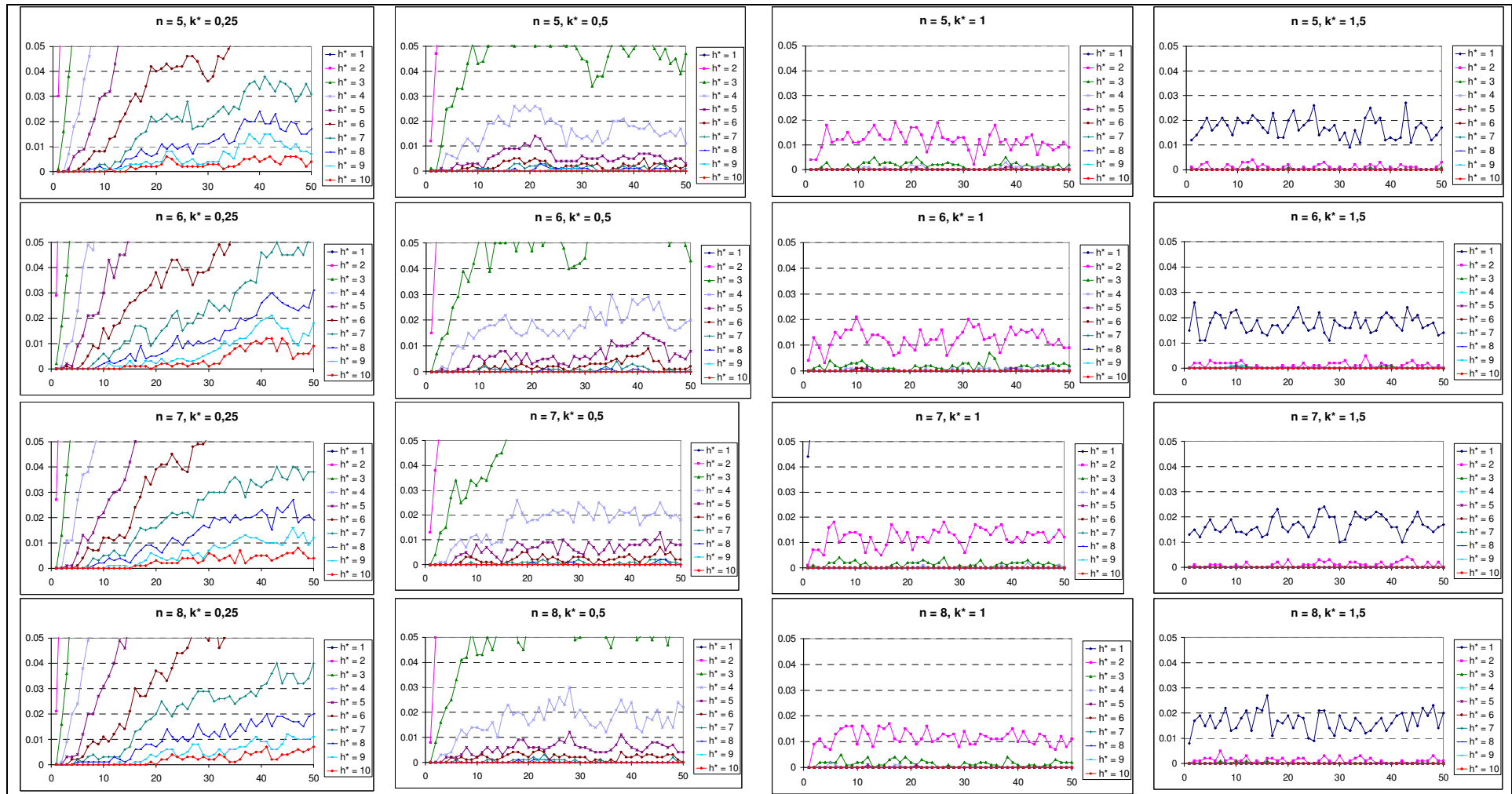
ANEXO D.3: Estimativa dos parâmetros de distribuição normal ajustados à  $Z(i)+S_H(i-1)^*$   
 dado  $\bar{\delta} > 0$  e  $n = 10$

<i>i</i>	$k^* = 0,25$		$k^* = 0,5$		$k^* = 1,0$		$k^* = 1,5$	
	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$
1	0,5136	0,3216	1,0136	0,32157	2,0136	0,32157	3,0136	0,32157
2	0,9571	0,4288	1,8646	0,44666	3,706	0,44741	5,5479	0,44741
3	1,3636	0,5383	2,6894	0,55827	5,3727	0,55889	8,0565	0,55889
4	1,7768	0,6151	3,5227	0,63364	7,0479	0,63406	10,574	0,63406
5	2,1889	0,6979	4,3558	0,71513	8,7228	0,71542	13,09	0,71542
6	2,6217	0,7626	5,2094	0,77827	10,418	0,77846	15,628	0,77846
7	3,0322	0,8315	6,0409	0,8457	12,092	0,84598	18,143	0,84598
8	3,4693	0,8795	6,8989	0,89274	13,792	0,893	20,685	0,893
9	3,8893	0,9442	7,7399	0,95611	15,474	0,95632	23,21	0,95633
10	4,2914	0,9950	8,563	1,0079	17,139	1,0081	25,716	1,0081
11	4,7116	1,0326	9,4041	1,0448	18,822	1,045	28,241	1,045
12	5,1328	1,0787	10,246	1,0893	20,506	1,0894	30,767	1,0894
13	5,5699	1,1356	11,104	1,1461	22,206	1,1462	33,309	1,1462
14	5,9899	1,1786	11,945	1,1881	23,889	1,1881	35,834	1,1881
15	6,4105	1,2237	12,787	1,2331	25,573	1,2331	38,359	1,2331
16	6,8323	1,2531	13,629	1,2622	27,257	1,2621	40,886	1,2621
17	7,257	1,2957	14,475	1,3041	28,945	1,304	43,415	1,304
18	7,6822	1,3252	15,321	1,3344	30,633	1,3344	45,945	1,3344
19	8,1214	1,3458	16,181	1,3541	32,335	1,354	48,489	1,354
20	8,5506	1,3767	17,032	1,3846	34,027	1,3845	51,023	1,3845
21	8,9689	1,3955	17,871	1,4031	35,708	1,4031	53,546	1,4031
22	9,3886	1,4236	18,711	1,4316	37,391	1,4318	56,07	1,4318
23	9,8015	1,4586	19,545	1,4662	39,066	1,4664	58,588	1,4664
24	10,208	1,502	20,373	1,5095	40,736	1,5098	61,099	1,5098
25	10,63	1,527	21,216	1,5338	42,42	1,5341	63,626	1,5341
26	11,047	1,5576	22,054	1,5638	44,1	1,564	66,148	1,564
27	11,467	1,5771	22,894	1,5835	45,783	1,5838	68,672	1,5838
28	11,891	1,6172	23,74	1,6239	47,47	1,6241	71,201	1,6241
29	12,309	1,6463	24,579	1,6531	49,151	1,6533	73,724	1,6533
30	12,738	1,691	25,428	1,6977	50,842	1,6978	76,257	1,6978
31	13,158	1,7294	26,269	1,7361	52,526	1,7364	78,782	1,7364
32	13,562	1,7735	27,094	1,7798	54,192	1,78	81,29	1,78
33	13,99	1,7838	27,944	1,7902	55,883	1,7904	83,824	1,7904
34	14,4	1,8185	28,774	1,824	57,556	1,8241	86,338	1,8241
35	14,81	1,8321	29,605	1,8382	59,229	1,8383	88,853	1,8383
36	15,242	1,8547	30,458	1,8611	60,923	1,8612	91,389	1,8612
37	15,658	1,8801	31,295	1,8867	62,603	1,8869	93,911	1,8869
38	16,084	1,9314	32,142	1,9377	64,291	1,9378	96,441	1,9378
39	16,508	1,963	32,987	1,9693	65,978	1,9694	98,97	1,9694
40	16,932	2,0037	33,831	2,0097	67,664	2,0098	101,5	2,0098
41	17,344	2,0387	34,665	2,0439	69,34	2,044	104,02	2,044
42	17,755	2,0639	35,497	2,0686	71,014	2,0687	106,53	2,0687
43	18,173	2,0886	36,336	2,0931	72,695	2,0932	109,05	2,0932
44	18,597	2,1193	37,181	2,1246	74,381	2,1248	111,58	2,1248
45	18,997	2,1365	38,002	2,1415	76,044	2,1418	114,09	2,1418
46	19,421	2,1599	38,846	2,1645	77,73	2,1648	116,62	2,1648
47	19,851	2,1691	39,697	2,1737	79,423	2,174	119,15	2,174
48	20,263	2,1863	40,531	2,1911	81,099	2,1913	121,67	2,1913
49	20,69	2,2144	41,378	2,2195	82,788	2,2197	124,2	2,2197
50	21,118	2,2294	42,227	2,2346	84,479	2,2349	126,73	2,2349

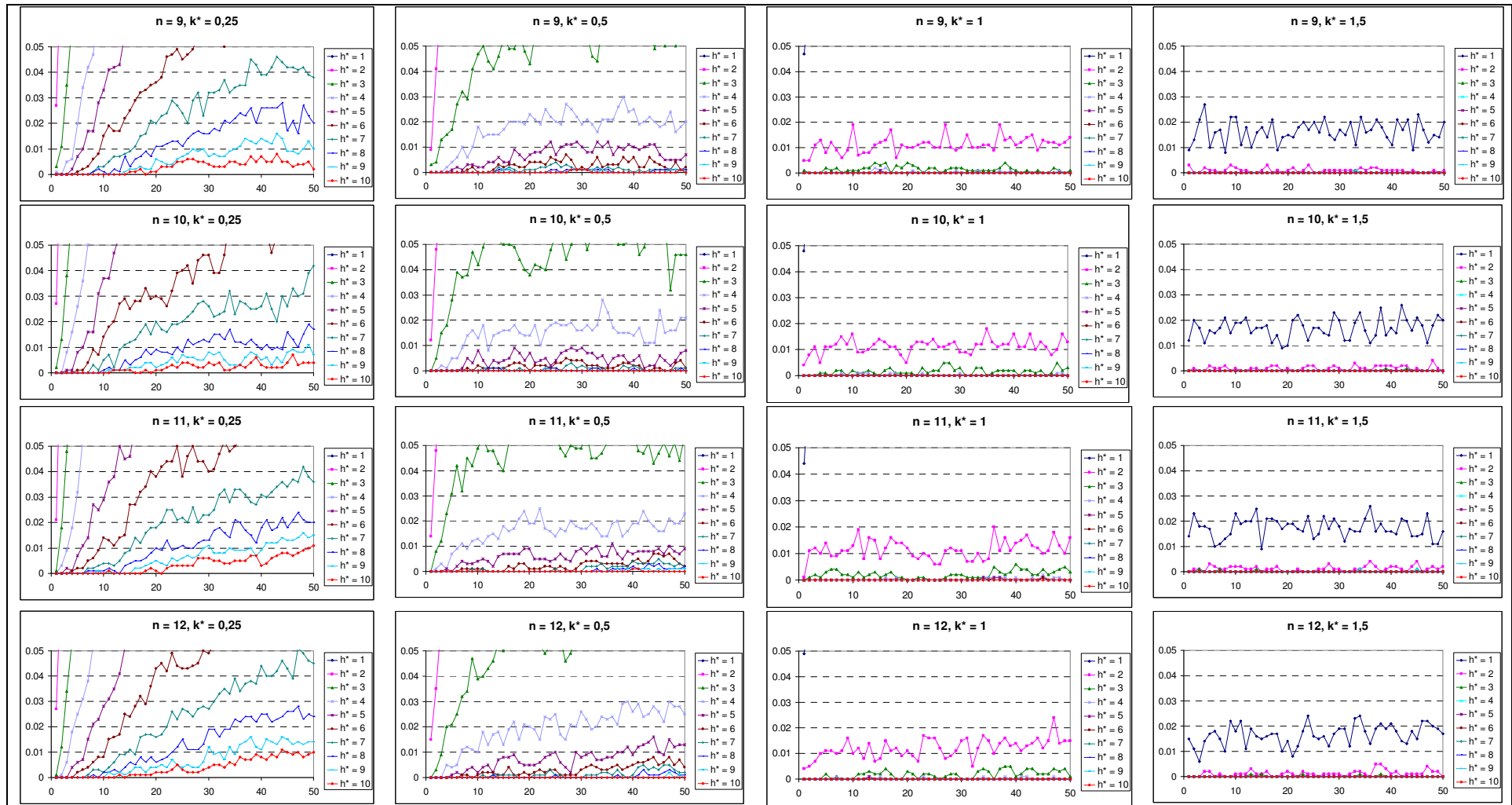
ANEXO E.1: Probabilidades observadas dos alarmes falsos ( $0 \leq \alpha \leq 0,05$ ) em função do subgrupo racional para diferentes combinações de  $k^*$ ,  $h^*$  e  $1 \leq n \leq 4$ , de acordo com a simulação dos dados.



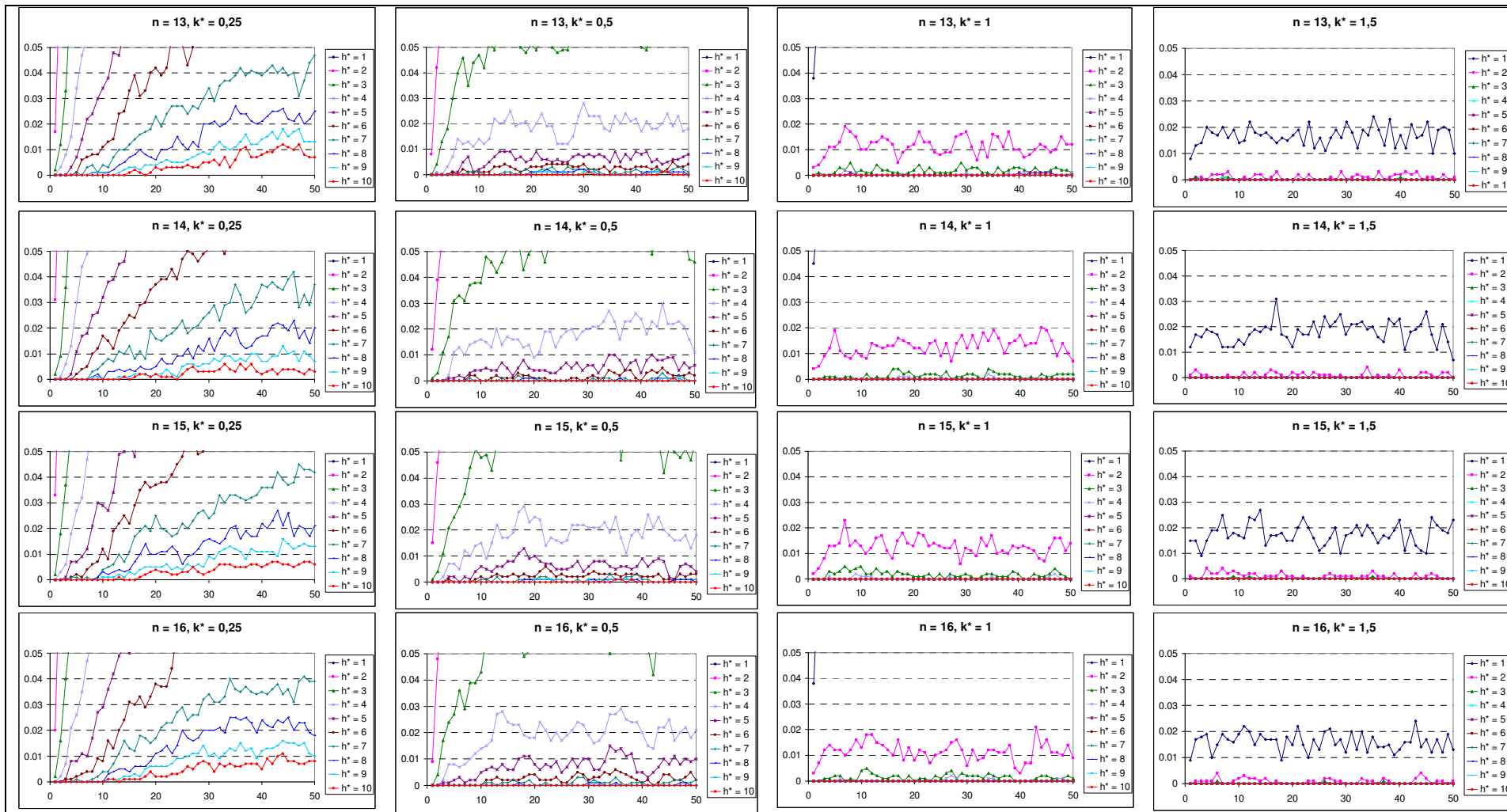
ANEXO E.2: Probabilidades observadas dos alarmes falsos ( $0 \leq \alpha \leq 0,05$ ) em função do subgrupo racional para diferentes combinações de  $k^*$ ,  $h^*$  e  $5 \leq n \leq 8$ , de acordo com a simulação dos dados.



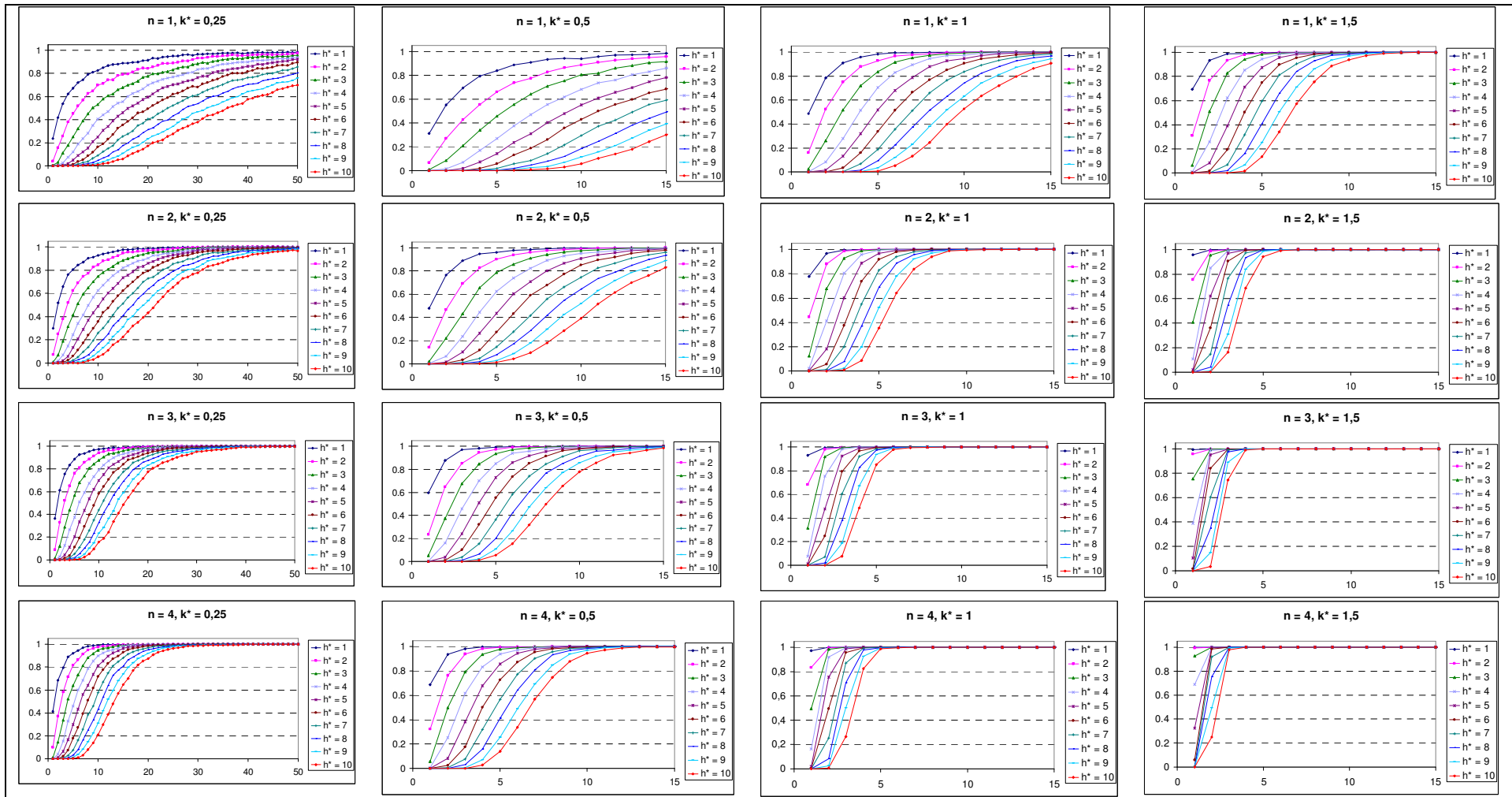
ANEXO E.3: Probabilidades observadas dos alarmes falsos ( $0 \leq \alpha \leq 0,05$ ) em função do subgrupo racional para diferentes combinações de  $k^*$ ,  $h^*$  e  $9 \leq n \leq 12$ , de acordo com a simulação dos dados.



ANEXO E.4: Probabilidades observadas dos alarmes falsos ( $0 \leq \alpha \leq 0,05$ ) em função do subgrupo racional para diferentes combinações de  $k^*$ ,  $h^*$  e  $13 \leq n \leq 16$ , de acordo com a simulação dos dados.

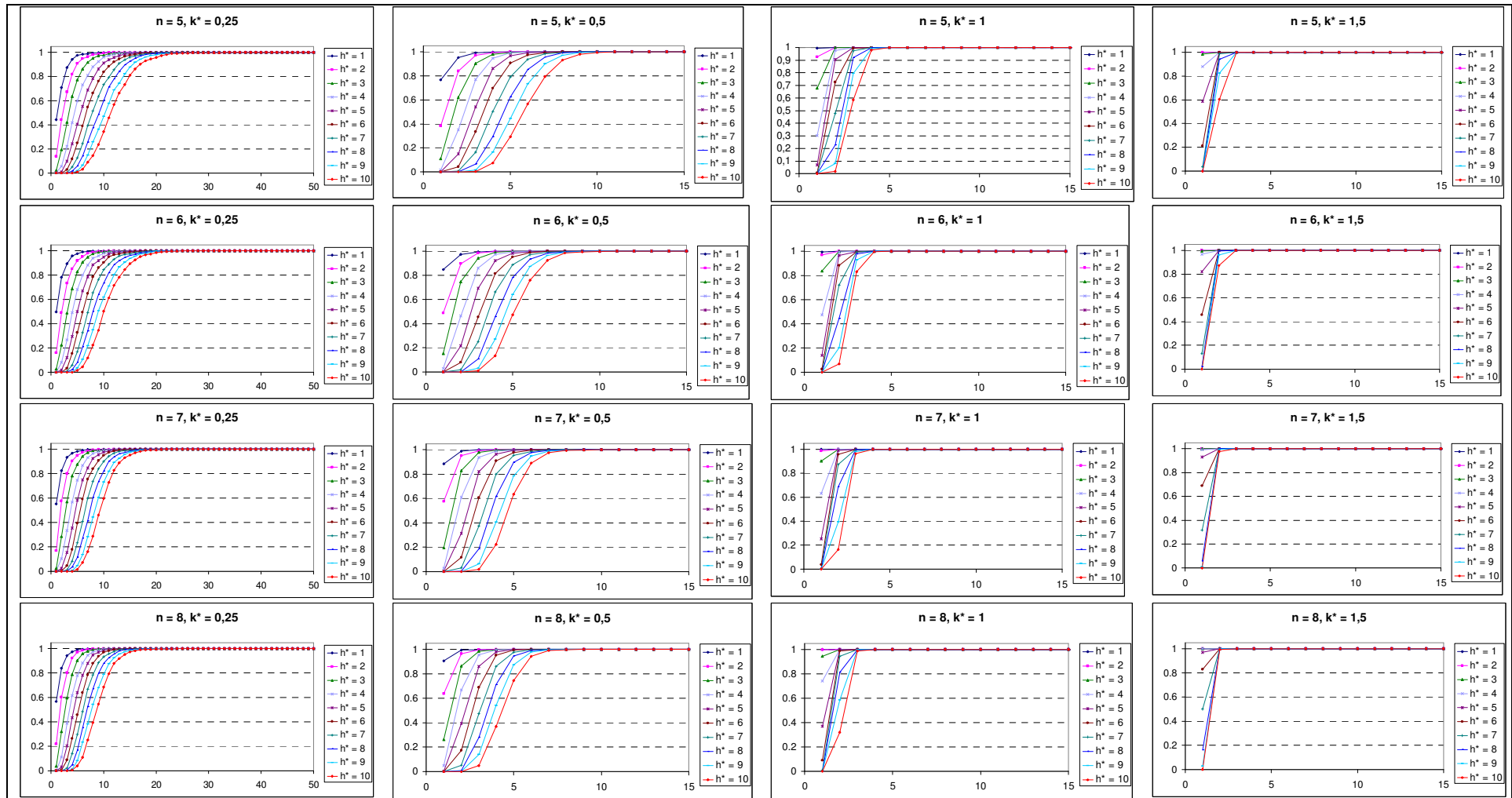


ANEXO F.1: Probabilidades observadas dos alarmes verdadeiros em função do subgrupo racional para diferentes combinações entre  $k^*$  e  $h^*$ , e  $1 \leq n \leq 4$ , de acordo com a simulação dos dados.

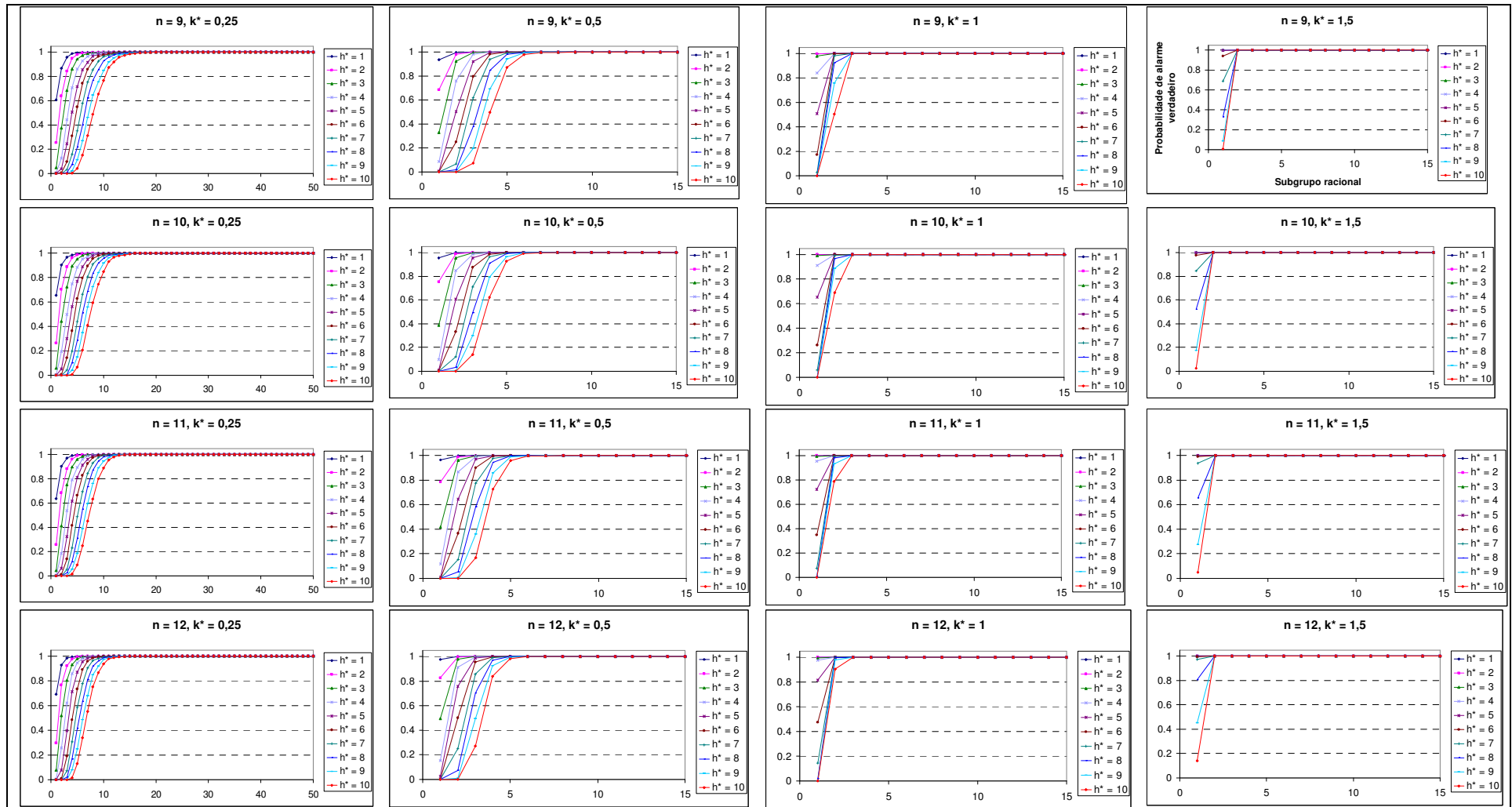




ANEXO F.2: Probabilidades observadas dos alarmes verdadeiros em função do subgrupo racional para diferentes combinações entre  $k^*$  e  $h^*$ , e  $5 \leq n \leq 8$ , de acordo com a simulação dos dados.



ANEXO F.3: Probabilidades observadas dos alarmes verdadeiros em função do subgrupo racional para diferentes combinações entre  $k^*$  e  $h^*$ , e  $9 \leq n \leq 12$ , de acordo com a simulação dos dados.



ANEXO F.4: Probabilidades observadas dos alarmes verdadeiros em função do subgrupo racional para diferentes combinações entre  $k^*$  e  $h^*$ , e  $13 \leq n \leq 16$ , de acordo com a simulação dos dados.

