

**LEANDRO RIBEIRO ANDRADE BELO**

**MODELO DE HEISENBERG EM UM ESPAÇO COM  
CURVATURA NEGATIVA: EXCITAÇÕES TOPOLÓGICAS  
DE *SPIN* NA PSEUDO-ESFERA**

Dissertação apresentada à Universidade  
Federal de Viçosa, como parte das  
exigências do Programa de Pós-Graduação  
em Física Aplicada, para obtenção do título  
de *Magister Scientiae*

**VIÇOSA  
MINAS GERAIS - BRASIL  
2007**

**LEANDRO RIBEIRO ANDRADE BELO**

**MODELO DE HEISENBERG EM UM ESPAÇO COM CURVATURA  
NEGATIVA: EXCITAÇÕES TOPOLÓGICAS DE *SPIN* NA PSEUDO-ESFERA**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Física Aplicada, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 01 de março de 2007.

Prof. Afrânio Rodrigues Pereira  
(Co-orientador)

Prof. Clifford Neves

Prof. Vitório A. Delorenci

Nemésio Matos de Oliveira Neto

Prof. Winder Alexandre de Moura Melo  
(Orientador)

*Aos meus pais,*

*Wellington José de Andrade Belo e*

*Marlene Silva Andrade Belo*

# AGRADECIMENTOS

- Aos meus pais, Welligton e Marlene, pelo apoio e incentivo incondicionais.
- Aos meus irmãos, Leonardo, Liege e Aninha (que considero uma irmã).
- À Andrezza, por estar ao meu lado nos momentos diversos.
- À Ana Laura, por proporcionar tantos momentos de alegria.
- Ao Prof. Winder Alexander de Moura-Melo, pela excelente orientação.
- Ao Prof. Afrânio e ao recém Doutor Nemésio, pela ajuda.
- Aos amigos de Viçosa e aos, não menos importantes, amigos de Formiga.
- Aos professores e funcionários do DPF.
- À Universidade Federal de Viçosa.
- À CAPES, pelo apoio financeiro.

# **BIOGRAFIA**

Leandro Ribeiro Andrade Belo nasceu em Formiga – MG no dia 12 de dezembro de 1981. É filho de Welligton José de Andrade Belo e Marlene Silva Andrade Belo. Graduou-se em Física Bacharelado na Universidade Federal de Viçosa em janeiro de 2005, e concluiu o Mestrado em Física Aplicada em março de 2007 na mesma instituição.

# SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS</b>	vii
<b>RESUMO</b>	x
<b>ABSTRACT</b>	xi
<b>1 Introdução Geral</b>	1
<b>2 Considerações Gerais</b>	7
2.1 Motivação. . . . .	7
2.2 Modelo de Heisenberg. . . . .	12
2.3 A superfície em questão: a pseudo-esfera. . . . .	17
<b>3 O Problema</b>	20
3.1 O modelo na superfície da pseudo-esfera. . . . .	20
3.2 Soluções tipo-sóliton: modelo isotrópico. . . . .	22
3.3 Soluções tipo-vórtice: modelo XY e Rotor Planar. . . . .	27
<b>4 Conclusões Gerais e Perspectivas</b>	36
<b>A Aproximação contínua do modelo de Heisenberg (caso ferromagnético)</b>	38
A.1 Modelo isotrópico. . . . .	38
A.2 Modelo XY. . . . .	41
<b>B A Pseudo-Esfera</b>	43

<b>C Equações de movimento na pseudo-esfera</b>	48
<b>D Soluções da equação de <i>sine</i>-Gordon</b>	50
D.1 Ondas Solitárias . . . . .	50
D.2 Sólitons do modelo de <i>sine</i> -Gordon . . . . .	55
<b>E Análise da solução tipo-sóliton na pseudo-esfera</b>	58
<b>F Energia de dois vórtices</b>	63
<b>Bibliografia</b>	66

# LISTA DE FIGURAS

1.1	Material diamagnético na presença de campo externo. . . . .	3
1.2	Material paramagnético na ausência de campo externo (à esquerda), e o mesmo material na presença de campo (à direita). . . . .	3
1.3	<b>a–c</b> , os três tipos de topologia, classificados pela natureza de suas torções (mostrada esquematicamente abaixo das imagens). <b>a</b> , Estrutura do anel. <b>b</b> , Fita de Mobius. <b>c</b> , Fita na forma de um “oito”. <b>d</b> , Fibras de NbSe <sub>3</sub> (tiras brancas) dobram-se em anéis em torno de uma gota de selênio com diâmetro de aproximadamente 50 $\mu\text{m}$ . A fita de NbSe <sub>3</sub> é enrolada na gota de selênio pela tensão de superfície até que suas extremidades se juntem. <b>e</b> , Imagem de alta ampliação que mostra uma torção em uma fita de cristal de NbSe <sub>3</sub> ; o enrolar da fita pode produzir uma torção, como na formação de um cristal de Mobius, devido a suas propriedades elásticas e anisotrópicas. A escala das barras é de 10 $\mu\text{m}$ . . . . .	5
2.1	Ilustração de uma parede de domínio de 180 graus. As espessuras da parede e do domínio são representadas por $\xi$ e L respectivamente. . . . .	8
2.2	a) Estrutura celular com algumas organelas demonstrando algumas rotas do tráfico vesicular. b) Estágio final da separação de uma vesícula. Há uma curvatura positiva em torno do corpo da vesícula, negativa na parte inferior, e zero entre as duas e na parte que divide a vesícula da membrana. . . . .	11
2.3	Configurações de mínima energia para o caso ferromagnético (esquerda) e antiferromagnético (direita). . . . .	13
2.4	Ilustração da origem da interação de troca. As direções dos <i>spins</i> dependem da distribuição espacial de carga (função de onda espacial) dos elétrons dos íons vizinhos. . . . .	13
2.5	Esquema de um <i>spin</i> clássico com orientação determinada pelos ângulos esféricos. . . . .	15
2.6	Método do disco de Poincaré para obter a pseudo-esfera (a folha superior do hiperbolóide) através do ponto de projeção $P = -1$ , no eixo $x_3$ : cada ponto do disco,	



( $r, \varphi$ ), é mapeado em outro na folha, ( $\tau, \varphi$ ), de modo que a borda do disco seja levada ao infinito. . . . .	18
3.1 Excitação tipo sóliton com carga topológica $Q=1$ . . . . .	23
3.2 Esboço das configurações de spins para: a) estado fundamental e b) <i>half</i> - sóliton. Uma vez que os $\pi/2$ -sólitons são instáveis, o sistema “escolhe” o estado fundamental. . . . .	23
3.3 Excitação tipo sóliton com carga topológica $Q=1/2$ , estabilizado através da introdução de uma obstrução topológica (furo) de raio $\bar{s} = R\bar{\tau}$ . . . . .	25
3.4 Vórtice com carga topológica igual a +1. O símbolo $\oplus$ indica o centro, ou caroço, da estrutura. . . . .	27
3.5 Energia do vórtice em função de $\tau_L$ (tamanho do vórtice). A curva preta ilustra o caso planar, enquanto a curva vermelha ilustra a geometria atual. . . . .	30
3.6 Potencial efetivo de interação entre dois vórtices em função da distância entre eles, com os tamanhos do caroço e da estrutura fixados em 0.5 e 8 respectivamente. A curva preta representa o caso onde $Q_1=Q_2$ , ao passo que na curva vermelha $Q_1=-Q_2$ . . . . .	32
3.7 Esboço da força de interação entre dois vórtices em função da distância entre eles. $Q_1=Q_2$ (curva preta), $Q_1=-Q_2$ (curva vermelha). . . . .	32
3.8 Variação da “temperatura de transição” em função do tamanho da estrutura para os casos da superfície pseudo-esférica (curva preta) e do plano usual (curva vermelha). . . . .	34
3.9 Rede quadrada de <i>spins</i> indicando os quatro sítios que interagem com o sítio genérico $i$ . . . . .	39
3.10 Esquema de “retas paralelas” em superfícies com curvatura: positiva (esquerda), nula (centro), e negativa (direita). . . . .	45
3.11 Método do disco de Poincaré para obter a pseudo-esfera (a folha superior do hiperbolóide) através do ponto de projeção $P = -1$ , no eixo $z$ : cada ponto do disco, ( $r, \varphi$ ), é mapeado em outro na folha, ( $\tau, \varphi$ ), de modo que a borda do disco seja levada ao infinito. . . . .	46
3.12 Representação de algumas curvas no disco de Poincaré. . . . .	47

3.13 O potencial $[-U(\varphi)]$ da “partícula análoga”, para o caso em que $U(\varphi)$ tem um único mínimo. . . . .	52
3.14 O potencial $[-U(\varphi)]$ da “partícula análoga”, para o caso em que $U(\varphi)$ tem três mínimos degenerados discretos. . . . .	53
3.15 Energia em função de $r_0$ ( $m = n = 1$ ). . . . .	60
3.16 A variável $\Theta$ em função de $r$ , para $r_0 = 0$ (vermelho) e $r_0 = R$ (azul). . . . .	61
3.17 Representação do corte inserido em $\Phi$ , para o caso de um único vórtice. . . . .	63
3.18 Representação dos cortes para os dois vórtices. As superfícies “+” sempre têm suas normais paralelas ao vetor $\mathbf{e}_3$ definido em relação à origem do carço do vórtice associado. . . . .	64

## RESUMO

BELO, Leandro Ribeiro Andrade, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, Março de 2007. **Modelo de Heisenberg em um espaço com curvatura negativa: excitações topológicas de *spin* na pseudo-esfera**. Orientador: Winder Alexander de Moura-Melo; Co-Orientadores: Afrânio Rodrigues Pereira e Marcelo Lobato Martins.

*Spins* de Heisenberg que se encontram na pseudo-esfera (um espaço infinito 2-dimensional com curvatura constante e negativa) não podem gerar soluções solitônicas estáveis. Apenas soluções fracionárias podem ser estabilizadas nessa superfície desde que um furo seja feito. Dirigimo-nos também à introdução de vórtices “no plano” no regime XY. Interessantemente, a energia de um único vórtice não diverge quando o sistema tende ao infinito. Isso leva a um potencial não-confinante entre um vórtice e um anti-vórtice a grandes distâncias, de modo que o par possa dissociar-se a uma baixa e arbitrária temperatura.

# ABSTRACT

BELO, Leandro Ribeiro Andrade, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, March of 2007.  
**Heisenberg model on a space with negative curvature: topological spin textures on the pseudosphere.** Adviser: Winder Alexander de Moura-Melo; Co-Advisers: Afrânio Rodrigues Pereira e Marcelo Lobato Martins.

Heisenberg-like spins lying on the pseudosphere (a 2-dimensional infinite space with constant negative curvature) cannot give rise to stable soliton solutions. Only fractional solutions can be stabilized on this surface provided that at least one hole is incorporated. We also address the issue of ‘in-plane’ vortices, in the  $XY$  regime. Interestingly, the energy of a single vortex no longer blows up as the excitation spreads to infinity. This yields a non-confining potential between a vortex and a antivortex at large distances so that the pair may dissociate at arbitrarily low temperature.

# Capítulo 1

## Introdução Geral

A expressão magnetismo está associada a uma região da Turquia antiga, rica em minério de ferro, a Magnésia. Porém, os primeiros relatos de experiências em magnetismo, são atribuídos aos gregos e datam de 800 a. C.. A primeira utilização prática do magnetismo foi a bússola, por volta do século XIII. No entanto, foi apenas no século XIX, com o “nascimento” do eletromagnetismo e a formulação de leis que o descreviam que seu estudo passou a ser mais detalhado. Como conseqüências surgiram inúmeras aplicações como, por exemplo, os motores e as lâmpadas incandescentes. Tudo isso aconteceu até o final do século XIX, mas somente no século XX a utilização dos conhecimentos em magnetismo atingiu seu ápice, particularmente com o desenvolvimento de novos materiais magnéticos.

Quando se fala em magnetismo, deve-se ter em mente que ele está intimamente associado ao “movimento” de cargas e/ou ao momento angular intrínseco (*spin*) das partículas. Nesse sentido, o desenvolvimento de novos materiais magnéticos, e da área de pesquisa como um todo, depende do desenvolvimento de técnicas que permitam compreender esses fenômenos. Pode-se caracterizar um dado material magnético por sua magnetização. A magnetização tem origem no momento magnético associado ao momento angular do elétron, e é dada por:

$$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{\mu}_i, \quad (1.1)$$

onde o somatório é feito sobre todos os pontos  $i$  no quais há dipolos de momento  $\vec{\mu}_i$ , no interior de um volume  $V$ . A relação entre o momento magnético e o momento angular é dada por:

$$\vec{\mu}_i = -g_l \frac{e}{2m} \vec{L}, \quad (1.2)$$

$$\vec{\mu}_s = -g_s \frac{e}{2m} \vec{S}, \quad (1.3)$$

onde  $e$  é a carga eletrônica e  $m$  é a massa da partícula em questão. Na equação (1.2), tem-se a relação com o momento angular, e  $g_l = 1$  é o fator  $g$  orbital. Enquanto na equação (1.3), tem-se a relação com o “vetor spin”, e  $g_s \approx 2$  é o fator  $g$  de spin; isto é, o momento de dipolo magnético de spin em relação ao momento angular de spin é duas vezes maior do que o momento de dipolo magnético orbital em relação ao momento angular orbital. De fato, os momentos angular e de spin formam o chamado momento angular total, que é dado por:

$$\vec{J}_{op} = \vec{L}_{op} + \vec{S}_{op}, \quad (1.4)$$

os sub-índices “op” denotam grandezas operatoriais. A relação entre tal momento e a componente  $z$  do momento magnético total é dada por:

$$\mu_z = -g\mu_B m_J, \quad (1.5)$$

onde  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}$  é o chamado magnéton de Bohr, e  $g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$  é o fator de Landé.

Dependendo da origem microscópica de sua magnetização e das interações internas, os materiais são comumente classificados em uma das seguintes categorias: diamagnéticos, paramagnéticos, ferromagnéticos, ferrimagnéticos e antiferromagnéticos. Um bom texto a respeito dessas classificações é encontrado na Ref. [1]. Antes de comentar sobre as características de cada uma dessas categorias, é conveniente que seja definida a suscetibilidade magnética:

$$\chi = \frac{M}{B}, \quad (1.6)$$

onde  $M$  é a magnetização e  $B$  é o campo magnético aplicado à amostra em estudo.

Materiais diamagnéticos têm suscetibilidade negativa, e uma resposta magnética muito fraca. Todos os átomos são diamagnéticos, no entanto, tal diamagnetismo é camuflado nos casos em que existem dipolos magnéticos permanentes, ou seja, nos casos em que alguma das “camadas” não esteja completamente preenchida. Alguns exemplos desses materiais são os gases nobres, He, Ne, Ar, Kr, Xe, e alguns sólidos como NaCl, KBr e LiF. Uma explicação clássica para o diamagnetismo pode ser obtida através da lei de

Lenz: uma variação de campo magnético resulta numa corrente elétrica induzida que tende a se opor a esta variação, criando um campo oposto ao aplicado. A ilustração de um material diamagnético pode ser vista na Figura 1.1.

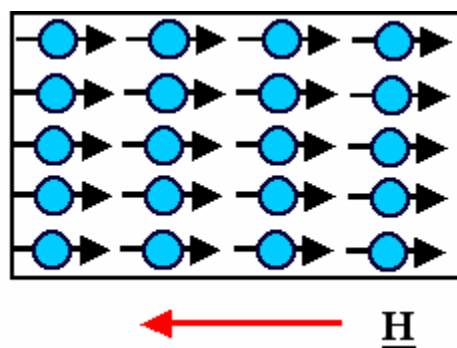


Figura 1.1: Material diamagnético na presença de campo externo.

Já os materiais paramagnéticos, têm momentos magnéticos permanentes, porém isolados uns dos outros, e possuem uma suscetibilidade positiva. Sem a influência de campo externo, o material não possui magnetização resultante (veja figura 1.2). Muitos elementos e alguns compostos são paramagnéticos, por exemplo, os metais.

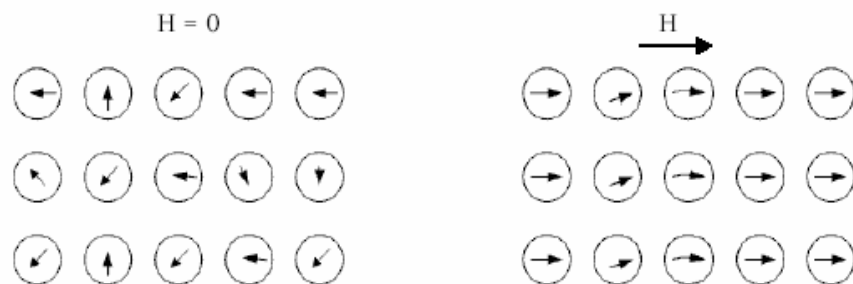


Figura 1.2: Material paramagnético na ausência de campo externo (à esquerda), e o mesmo material na presença de campo (à direita).

O fenômeno paramagnético em metais pode ser entendido como sendo uma consequência do fato da banda de condução separar-se em duas sob a ação de um campo magnético, sendo uma preenchida por elétrons com polarização  $+1/2$  enquanto na outra eles apresentam  $-1/2$ . Como a banda de menor energia fica com um número maior de elétrons, e

possuiu momento magnético na direção do campo, surge uma magnetização nessa direção, como mostrado na Fig. 1.2.

Quando se pensa em aplicações práticas, deve-se preferencialmente dar atenção aos materiais que apresentam alta magnetização quando submetidos a pequenos campos magnéticos, estes são os chamados materiais ferromagnéticos. Acima de uma temperatura crítica (temperatura de Curie), esses materiais assumem magnetização nula, uma vez que a energia de agitação térmica predomina sobre a energia de ordenamento, de modo que esse material passa a ter comportamento paramagnético.

O primeiro modelo para explicar a magnetização foi proposto por Pierre Weiss no início do Século XX, o qual supunha que cada dipolo magnético de uma rede sofre a ação de um campo magnético efetivo criado pelos vizinhos. No entanto, a origem de tal “campo molecular” só foi compreendida anos mais tarde, com o advento da Mecânica Estatística Quântica, e está relacionado com a diferença entre as energias eletrostáticas de dois elétrons nas situações de *spins* paralelos e antiparalelos. Quando o estado de menor energia corresponde aos *spins* paralelos, tem-se o caso do ferromagnetismo, porém, quando esse estado corresponde a *spins* antiparalelos, têm-se então materiais antiferromagnéticos e ferrimagnéticos. Essas idéias serão mais bem discutidas na seção 2.2 quando o modelo de Heisenberg for estudado (maiores detalhes ver Ref. [1]). Esse modelo será uma das principais bases para o entendimento desse trabalho, no sentido de que, dele obtêm-se as soluções a serem analisadas: as denominadas excitações topológicas de *spin*. Essas surgem, por sua vez, como soluções clássicas de determinados modelos que apresentam dinâmica não-linear e possuem carga conservada e estabilidade, advindas de propriedades topológicas do modelo em questão. Por exemplo, configurações de *spins* (no modelo de Heisenberg ou congêneres) que apresentam comportamento assintótico não-trivial (não se anulam no infinito) estão associadas a soluções que descrevem excitações não-lineares do tipo-vórtice e/ou do tipo-sóliton. Particularmente, em sistemas magnéticos, a presença e as propriedades, tanto estruturais quanto dinâmicas de tais objetos, são de fundamental importância para se “caracterizar” o sistema em questão, em especial, quando se pensa em aplicações tecnológicas que pressupõem o “controle” daquelas excitações. Tal “controle”, que subentende um conhecimento completo dessas excitações, ainda não é realidade, principalmente em superfícies com geometrias mais gerais (com curvatura, torção, etc). O



estudo teórico de excitações topológicas em superfícies com tais geometrias poderia ter sido, há alguns anos, um mero estudo acadêmico, porém, com os avanços recentes em nanociência e nanotecnologia, materiais cada vez menores e de formas variadas têm sido fabricados (veja Ref. [2] e alguns “reviews” ali citados). Além de estruturas usuais como cilindros, cones e esferas, a sintetização de formas “exóticas”, como a fita de Möbius (veja Fig. 1.3), têm sido possíveis [3].

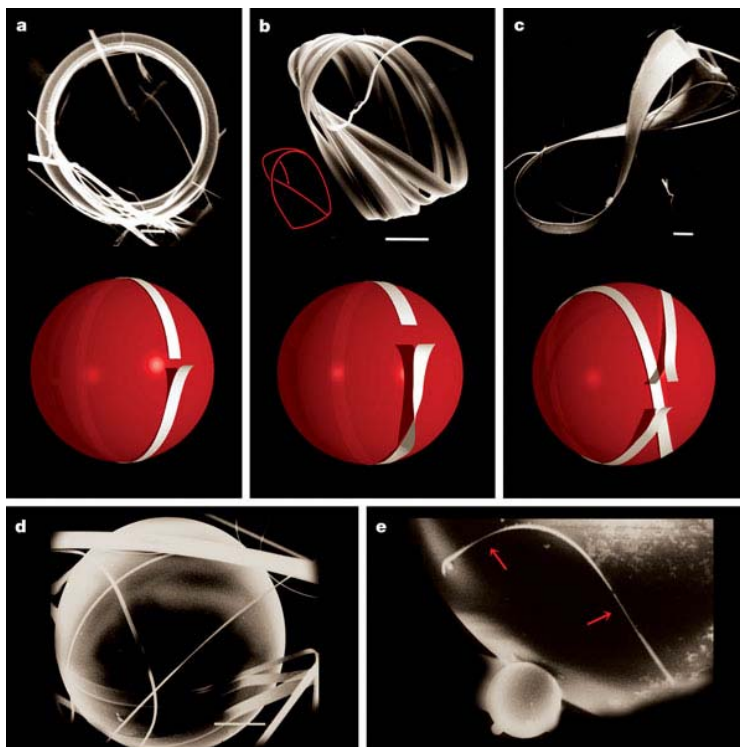


Figura 1.3: **a–c**, os três tipos de topologia, classificados pela natureza de suas torções (mostrada esquematicamente abaixo das imagens). **a**, Estrutura do anel. **b**, Fita de Möbius. **c**, Fita na forma de um “oito”. **d**, Fibras de  $\text{NbSe}_3$  (tiras brancas) dobram-se em anéis em torno de uma gota de selênio com diâmetro de aproximadamente  $50 \mu\text{m}$ . A fita de  $\text{NbSe}_3$  é enrolada na gota de selênio pela tensão de superfície até que suas extremidades se juntem. **e**, Imagem de alta ampliação que mostra uma torção em uma fita de cristal de  $\text{NbSe}_3$ ; o enrolar da fita pode produzir uma torção, como na formação de um cristal de Möbius, devido a suas propriedades elásticas e anisotrópicas. A escala das barras é de  $10 \mu\text{m}$  [3].

Conseqüentemente, podem-se perguntar como certos aspectos geométricos dos espaços físicos nos quais os objetos topológicos fazem-se presentes afetam seus aspectos e comportamentos estruturais e dinâmicos, e conseqüentemente determinadas propriedades físicas dos sistemas onde se apresentam.

Nesse trabalho, considera-se um sistema de *spins* clássicos, descritos por uma versão contínua do modelo de Heisenberg, definido na superfície de uma pseudo-esfera. Mais precisamente, se lida com o regime isotrópico (quando se estuda sólitons) e o Rotor Planar (*spins* confinados ao plano, quando se estuda os vórtices). Tem-se interesse, principalmente, em como a geometria da superfície afeta essas excitações topológicas. Em particular, verifica-se que embora a pseudo-esfera possua uma superfície infinita, o modelo isotrópico não suporta soluções *solitônicas* estáveis. Isto está relacionado à curvatura negativa da superfície que impede o mapeamento completo da esfera de *spins* nessa superfície. Conseqüentemente, a estabilidade de tais excitações demandaria uma característica topológica não-trivial, como um “buraco” na pseudo-esfera, que evitaria o colapso do *sóliton* para o estado fundamental.

Além disso, considera-se também soluções tipo-vórtice (planar), no contexto do modelo do Rotor Planar. Obteve-se que a energia de um único vórtice é naturalmente regularizada a grandes distâncias, ou seja, tendo o vórtice um “caroço” finito, sua energia total será finita. Sendo assim, a curvatura negativa da pseudo-esfera é de certa forma, responsável por “evitar” a divergência infravermelha que, como se sabe assume um comportamento logarítmico no plano (e outras geometrias tipo-planas, como o cone). Noutras palavras, em tais casos, a energia de um vórtice diverge com  $\ln(L)$ , sendo  $L$  o “tamanho” do sistema. Foram propostas também algumas conseqüências de tal resultado para a solução de dois ou mais vórtices como, por exemplo, o desemparelhamento de um par vórtice-antivórtice.

O trabalho exposto nessa dissertação é uma ampliação do artigo aceito para publicação em uma revista científica internacional (Physics Letters A) [4], e está organizado da seguinte maneira: no capítulo 2 encontram-se as considerações gerais, com o mínimo necessário a ser compreendido para o entendimento do trabalho; no capítulo 3 apresenta-se o problema a ser estudado e, em seqüência, encontram-se as soluções e discutem-se suas propriedades. No capítulo 4 apresentam-se as conclusões gerais e perspectivas para trabalhos futuros. Na seqüência, encontram-se alguns apêndices, os quais tratam de diversos temas de natureza e abordagem mais técnicas. Tal inclusão visa facilitar o estudo do presente texto, podendo ser omitida por aqueles (as) leitores (as) que conhecem as técnicas ali descritas.

# Capítulo 2

## Considerações Gerais

Antes de tratar o problema em si, é interessante que seja feita uma breve análise dos temas e ferramentas utilizados, para que posteriormente seja possível discutir o problema de uma maneira mais clara.

### 2.1 Motivação

Como mencionado na Introdução Geral, o trabalho ocupa-se de estudar excitações topológicas de *spins* em uma superfície com curvatura constante e negativa; porém, seria útil descrever possíveis “aplicabilidades” para o trabalho em questão. Nesse sentido, é necessário elucidar a importância do estudo de cada um dos temas utilizados de maneira separada e, se possível for, encontrar alguma possível aplicação dos resultados obtidos; ou seja, alguma potencialidade que surja da junção de todas essas ferramentas.

No contexto do magnetismo, de modo geral, as aplicações de estudos nessa área são as mais diversas possíveis, indo de pequenos ímãs permanentes usados para fechaduras de móveis e utensílios a inúmeros componentes sofisticados utilizados na indústria eletro-eletrônica e de computadores, e representam hoje, em volume de aplicação e importância econômica, a segunda colocação na indústria, perdendo apenas para os semicondutores [1].

A importância econômica citada acima é devida principalmente aos dispositivos de gravação magnética, uma vez que a gravação de um sinal, para seu armazenamento e posterior reprodução, é uma das funções mais importantes no processamento de informações. A existência da possibilidade de gravação magnética está inevitavelmente associada à existência de domínios magnéticos; esses por sua vez, têm suas formas e tamanhos determinados pela minimização da energia total. Conseqüentemente, os domínios magnéticos são “separados” por estruturas topológicas denominadas paredes de domínio.

Assim, para que haja uma boa compreensão acerca de gravação magnética é necessário que se estude o comportamento das paredes de domínio. A visualização de um desses objetos está na Figura 2.1 e ilustra uma parede de 180 graus, separando dois domínios cujas magnetizações têm sentidos opostos. Como a orientação dos momentos pode variar facilmente, as paredes dos domínios têm grande mobilidade. Essas paredes têm espessuras tipicamente da ordem de 1.000 a 10.000  $\text{Å}$ . A largura dos domínios varia desde alguns  $\mu\text{m}$  até vários mm ou cm, dependendo das características do material e do campo externo aplicado.

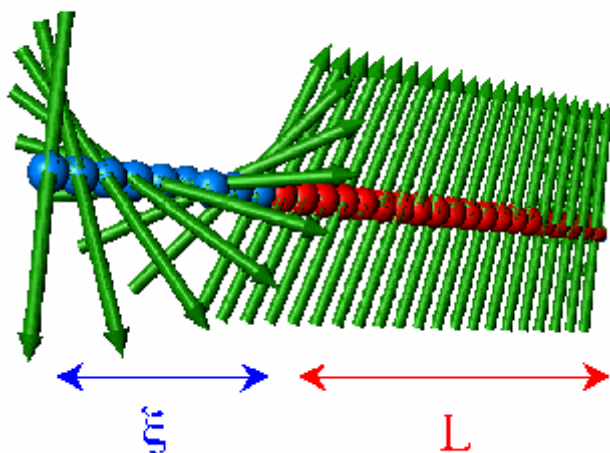


Figura 2.1: Ilustração de uma parede de domínio de 180 graus. As espessuras da parede e do domínio são representadas por  $\xi$  e  $L$  respectivamente.

Ainda em magnetismo, diversos aspectos das soluções tipo *sóliton* associadas ao modelo  $\sigma$  não-linear ( $NL\sigma M$ ; que é o limite contínuo do modelo de Heisenberg isotrópico) foram estudados em algumas geometrias não-planas, como a cilíndrica [5 -10], a cônica [11, 12], etc; enquanto um estudo de excitações tipo-vórtice em um suporte cônico aparece na referência [13]. Em todos esses trabalhos, fica evidente a influência da geometria do espaço físico nas características de tais objetos. Os *sólitons* foram investigados também em superfícies não-simplesmente conexas, como o “plano ponturado” (o plano sem um disco central) e o cone truncado [14]. Nesse trabalho, verificou-se que um

sóliton fracionário ( $\pi/2$  ou “*half* sóliton”) emerge como a solução estática não-trivial mais simples da equação de *sine-Gordon*, cuja energia é exatamente a metade daquela associada a um  $\pi$ -*sóliton* usual. Deve ser reforçado que o estudo de tais excitações, em teorias altamente não-lineares, é também importante para um melhor entendimento de processos biofísicos e biológicos (para detalhes, veja Ref. [15] e outros trabalhos correlatos aí citados).

Além do magnetismo, o estudo de *sólitons* é de grande relevância para várias áreas da física [16]. Por exemplo, em QCD (cromodinâmica quântica), que é a teoria fundamental das interações fortes, G. t’Hooft [17] e E. Witten [18] propuseram uma generalização dessa teoria, cuja análise resulta em uma conceitualização da QCD na qual os *bárions* (*hádrons* compostos de três *quarks*, prótons e nêutron, por exemplo) aparecem como excitações topológicas com energia finita (*sólitons*). Uma outra descoberta recente, mostra que *sólitons*, têm uma “estrutura interna”, ou seja, cada *sóliton* é, na verdade, um elétron circundado por outras partículas, os fônons [19]. Ainda sobre a estrutura dos *sólitons*, pesquisadores da Universidade de Rostok, na Alemanha, construíram as primeiras moléculas de luz do mundo. Elas foram construídas de *sólitons*, mais precisamente por três *sólitons*, um no estado escuro e dois no estado brilhante. Isto dá à molécula a fórmula H-D-H, onde H representa *sólitons* brilhantes e D representa *sólitons* escuros. O *sóliton* escuro age como uma “cola”, mantendo o grupo coeso [20].

Vórtices, que tecnicamente também são *sólitons* (ver apêndice D), por sua vez, também possuem uma extensa lista de estudos [16]; observam-se vórtices em várias situações, mesmo no cotidiano como, por exemplo, no escoamento d’água pelo ralo. O aprimoramento das técnicas, tanto teóricas quanto práticas, para o estudo dos vórtices, podem levar ao surgimento de novas tecnologias; esse é o caso de uma descoberta recente de um transistor que funciona utilizando o fluxo de vórtices magnéticos [21]. Outra descoberta interessante vem da Universidade Rice, nos Estados Unidos; pesquisadores decodificaram a estrutura tridimensional de um vórtice magnético do tamanho de um glóbulo vermelho do sangue. A estrutura, parecida com um tornado, poderá permitir a construção de discos rígidos para computadores com capacidades centenas de vezes maiores do que as atuais [22]. Seguindo nessa linha, pesquisadores alemães [23] descobriram uma nova forma de alterar a polarização do núcleo desses vórtices magnéticos,

criando uma técnica que poderá viabilizar a utilização prática dessas minúsculas estruturas magnéticas como bits para armazenamento de dados. Os vórtices magnéticos são extremamente estáveis, o que é excelente para o armazenamento de dados. Mas isso traz um problema: para gravar neles, ou seja, fazer com que cada vórtice altere seu estado de "0" para "1" e vice-versa, era necessário uma grande quantidade de energia, na forma de um magneto muito poderoso. O que os cientistas alemães descobriram foi como fazer com que as minúsculas "agulhas magnéticas" no interior dos vórtices mudem de estado com uma quantidade de energia mínima e sem perdas. O mecanismo foi batizado de reversão dinâmica do núcleo do vórtice. Um pulso de energia é utilizado para construir um campo magnético a determinados ângulos do vórtice, de forma que toda a estrutura seja forçada a executar um movimento conjunto de alteração de spin. Isso cria uma magnetização oposta na borda do vórtice original, virtualmente sem utilização de energia. O resultado é um par vórtice-antivórtice. O antivórtice cancela o vórtice original, restando apenas um vórtice com a polarização reversa [23].

Vê-se que o estudo de excitações topológicas pode ser encarado como uma área de grande interdisciplinaridade, e é dessa forma que se deve pensar quando se está interessado em possíveis potencialidades do presente trabalho. Sabe-se que elas devem possuir *sólitons* e/ou vórtices como soluções, e envolver geometrias com curvatura constante e negativa; embora haja algumas áreas de estudo onde sistemas parecidos são estudados, não está ainda clara essa conexão, não se tem ainda condições de dizer onde os resultados podem ser úteis de uma maneira clara e precisa. Nesse aspecto, será apenas citada uma área, mas que talvez venha a ser beneficiada com pesquisas de natureza semelhante àquela aqui apresentada, são: os chamados "sistemas macios de matéria condensada" ("*soft condensed matter systems*").

Deve-se enfatizar que parece haver uma relação entre a curvatura e a estabilidade de certas membranas. E mais, o fato da curvatura da membrana já não ser mais vista como uma consequência passiva da atividade celular, mas como um meio ativo de criar domínios da membrana e organizar centros para o tráfico de vesículas [24]. A Fig. 2.2 ilustra um pouco melhor esse cenário. Outro trabalho relevante nesse contexto, e que já foi citado na introdução, trata-se da Ref. [3]; nesse trabalho, os autores reportam a sintetização de uma membrana com a aparência da fita de Möbius.

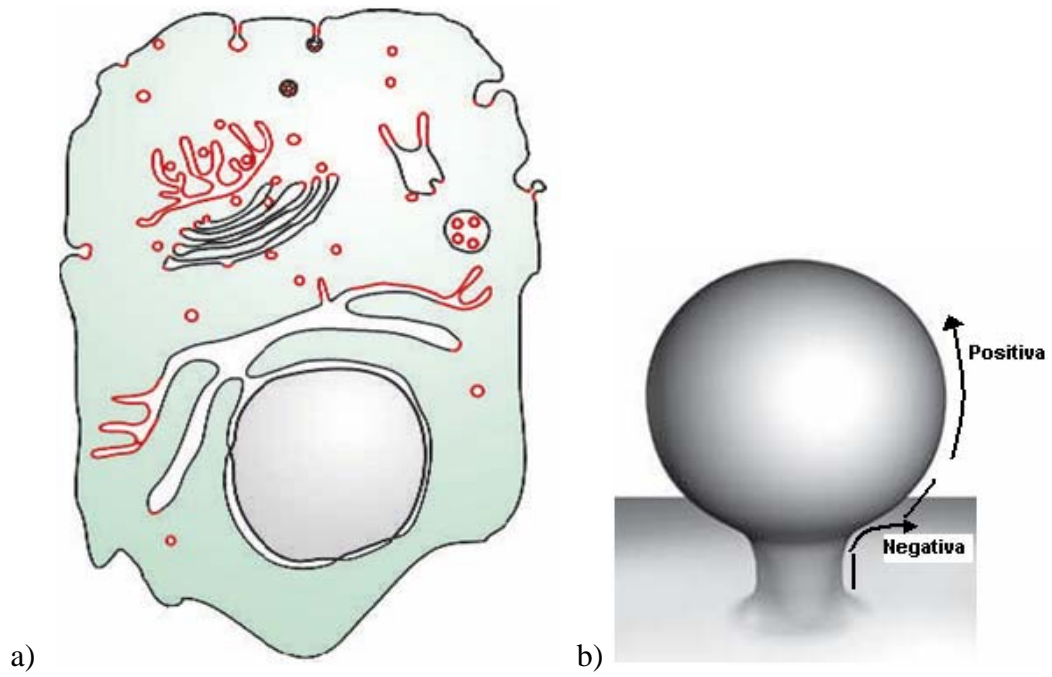


Figura 2.2: a) Estrutura celular com algumas organelas demonstrando algumas rotas do tráfico vesicular. b) Estágio final da separação de uma vesícula. Há uma curvatura positiva em torno do corpo da vesícula, negativa na parte inferior, e zero entre as duas e na parte que divide a vesícula da membrana.

## 2.2 Modelo de Heisenberg

Quando se pensa em um problema físico, objetiva-se, a princípio, entendê-lo em seu nível mais fundamental possível, para isso, seria necessário que se resolvesse exatamente o problema de cada partícula presente, levando-se em consideração cada um dos possíveis campos envolvidos e o fato de que a interação de cada partícula com cada um desses possíveis campos deve acontecer respeitando as “regras” da Mecânica Quântica. Tal entendimento nem sempre é possível, haja visto que os sistemas físicos em questão geralmente comportam um número muito elevado de partículas.

Enquanto a Mecânica evoluía, paralelamente evoluía também outra parte da Física, a Termodinâmica, que mais tarde devido aos trabalhos, principalmente de Boltzmann, seria conectada à Mecânica. Dessa conexão surgiu a Mecânica Estatística, que obtém resultados excelentes utilizando aproximações matemáticas. Nesse sentido, o modelo de Heisenberg (assim como suas versões contínuas, que podem ser consideradas teorias de campo, devido aos infinitos graus de liberdade) não fornece a solução para cada *spin*, mas uma solução média para todos eles.

Há uma ampla literatura sobre o modelo de Heisenberg (para “reviews” veja [25 e 26]). No entanto, o presente trabalho preocupa-se apenas em apresentar tal modelo, e detalhar apenas aquilo que não seja tão facilmente encontrado na literatura.

Considere então, o modelo de Heisenberg com interação entre os primeiros vizinhos de uma rede bidimensional (veja figura 2.3) dado pelo hamiltoniano:

$$H = -\frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} (\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j), \quad (2.1)$$

que mede a energia de uma dada configuração de spins na rede. Aqui,  $J$  é o parâmetro de acoplamento entre os *spins* vizinhos e  $\vec{S}_i = (S_i^x, S_i^y, S_i^z)$  é o operador de *spin* no sitio  $i$ . Pode-se tentar entender um pouco melhor o significado do parâmetro  $J$ . Esta interação não tem analogia clássica, e resulta de um tratamento no âmbito da Mecânica Quântica (uma vez que está associada com a indistinguibilidade de partículas idênticas), da energia eletrostática de Coulomb entre dois férmions.



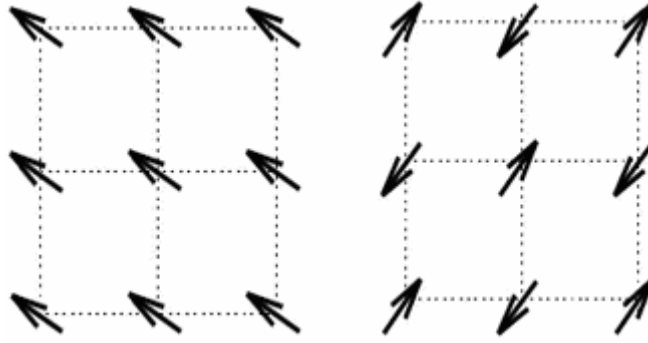


Figura 2.3: Configurações de mínima energia para o caso ferromagnético (esquerda) e antiferromagnético (direita).

Sejam dois elétrons, cujos *spins* são  $\vec{S}_1$  e  $\vec{S}_2$ , em íons 1 e 2. O Princípio de Exclusão de Pauli impõe que a função de onda conjunta  $\Psi$  seja anti-simétrica, uma vez que os elétrons são férmions (veja Figura 2.4).

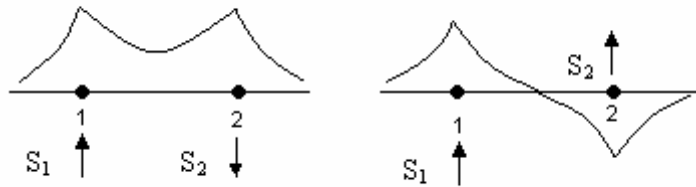


Figura 2.4: Ilustração da origem da interação de troca. As direções dos *spins* dependem da distribuição espacial de carga (função de onda espacial) dos elétrons dos íons vizinhos.

Logo, a parte da função de onda correspondente ao *spin*  $\Psi_s$  deverá ser um estado singlete  $|\vec{S}| = 0$  (*spins* antiparalelos e  $\Psi_s$  anti-simétrica) quando a sua parte espacial é simétrica, ou um estado tripleto  $|\vec{S}| = 1$  (*spins* paralelos e  $\Psi_s$  simétrica) para a parte espacial anti-simétrica. Considerando a equação de Schrödinger completa para duas partículas, obtêm-se energias diferentes para cada um desses estados,  $E_S$  para o estado singlete e  $E_T$  para o estado tripleto. A diferença entre as energias  $E_S - E_T$  pode ser associada ao parâmetro de troca  $J$ , por:

$$J \approx e^2 \int \psi_\alpha^*(\vec{r}_1) \psi_\beta^*(\vec{r}_2) \frac{1}{r_{12}} \psi_\alpha(\vec{r}_2) \psi_\beta(\vec{r}_1) d^3 r_1 d^3 r_2 \approx E_S - E_T, \quad (2.2)$$

onde a integral representa parte da energia média de interação entre dois elétrons nas posições  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$  para os estados quânticos  $\alpha$  e  $\beta$ . Vê-se então, que tal parâmetro mede o custo de energia para que o sistema vá de um estado para outro. Heisenberg propôs, em 1928, apresentar esta interação diretamente em função dos operadores de *spin* correspondentes, cujo hamiltoniano é dado por:

$$H = -J \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2. \quad (2.3)$$

O sinal do parâmetro de troca depende da estrutura das funções de onda correspondentes. Substâncias que contêm apenas um elemento com momento magnético atômico, tipicamente favorece a sua orientação paralela, correspondendo a uma estrutura ferromagnética com  $J > 0$ . Entretanto, quando a substância contém elementos que intermediam a ligação química entre os átomos de momentos magnéticos,  $J$  tende a ser negativo, nesse caso, uma análise de (2.3) é capaz de mostrar que um “alinhamento” antiparalelo é mais favorável energeticamente, esse é o caso das substâncias antiferromagnéticas e ferrimagnéticas. Quando  $J = 0$ , evidentemente, o material é paramagnético.

A interação de troca é especialmente forte para os elétrons do mesmo átomo. Para acoplamento entre os átomos vizinhos, a interação de troca decai exponencialmente para distâncias maiores que o raio das órbitas atômicas (daí o fato da aproximação para primeiros vizinhos). De fato, a interação de troca direta (de um elétron com todos os vizinhos), raramente irá definir a ordem magnética para sistemas com *spins* localizados, o que faz sentido, uma vez que essa interação está associada com a indistinguibilidade de partículas idênticas, que por sua vez, só tem conseqüências apreciáveis quando as funções de onda começam a se superpor.

O modelo anterior não leva em consideração interações que possam forçar os *spins* a orientarem-se em direções preferenciais, como por exemplo, interação *spin*-órbita. Nesses casos, é introduzido um novo parâmetro que leva em consideração essa anisotropia, e o hamiltoniano fica:

$$H = -\frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} (S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y + (1 + \lambda) S_i^z S_j^z), \quad (2.4)$$

sendo  $\lambda$  o parâmetro responsável por essa anisotropia de interação entre os *spins*, ou seja, está associado com algum fator que faça com que os *spins* tendam a orientar-se em alguma direção preferencial no espaço interno. Para  $-1 < \lambda < 0$ , tem-se o regime de plano-fácil, onde os *spins* tendem a se alinhar paralelos ao plano interno XY; para  $\lambda = 0$ , tem-se o caso isotrópico, no qual não há direção preferencial na orientação dos *spins*; para  $0 < \lambda < 1$ , tem-se o caso de eixo-fácil, de forma que os *spins* tendem a alinhar-se na direção do eixo Z; e por último tem-se o caso em que  $\lambda = -1$ , nesse caso, pode-se ter tanto o modelo XY quanto o modelo do Rotor Planar (veja figura 2.5).

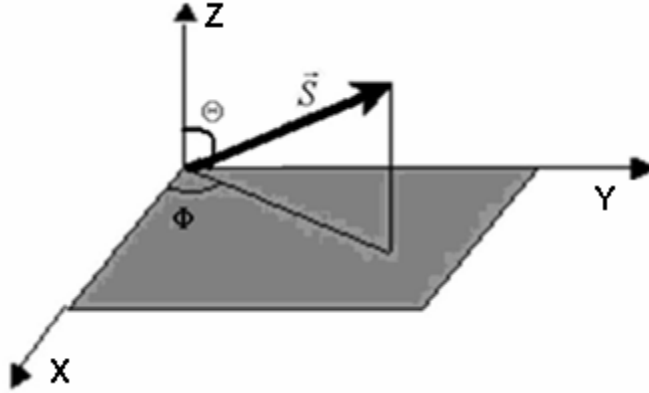


Figura 2.5: Esquema de um *spin* clássico com orientação determinada pelos ângulos esféricos internos.

No caso do modelo do Rotor Planar, tem-se o seguinte vínculo ou restrição com relação ao espaço interno:

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 \equiv 1 \Rightarrow S_z \equiv 0, \quad (2.5)$$

ou seja, não há uma “esfera interna” de *spins*, mas um círculo,  $S^1$ . Já no caso do modelo XY, o vínculo é dado por:

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 \equiv 1, \quad (2.6)$$

aqui se têm as três componentes do *spin*, as quais, pela relação acima, definem uma esfera unitária, mas apenas  $S_x$  e  $S_y$  apareceriam explicitamente no Hamiltoniano (2.1) em virtude da anisotropia.

Numa aproximação contínua do espaço e das variáveis de *spins*, válida para os casos onde o espaçamento de rede seja suficientemente pequeno, e considerando que os sítios da rede são compostos por *spins* com elevados números quânticos ( $s \geq 5/2$ ), e que dessa forma possa-se desconsiderar o princípio da incerteza e assumir que seja possível conhecer as três componentes de *spin* simultaneamente (tais exigências implicam em comprimentos de onda suficientemente grandes e baixas temperaturas); pode-se então reescrever o modelo (no plano) da seguinte forma [para  $\lambda = 0$  (ver apêndice A.1)]:

$$H = -\frac{J}{2} \iint \sum_{\alpha=1}^3 \left[ \left( \frac{\partial S^\alpha}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S^\alpha}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (2.7)$$

esse é o chamado modelo  $\sigma$  não-linear, e será usado aqui na obtenção de excitações tipo-*sóliton*. Outra aproximação contínua pode ser feita (novamente no plano), dessa vez para o modelo  $XY$  onde  $\lambda = -1$ , para obter (ver apêndice A.2):

$$H = -\frac{J}{2} \iint \left\{ \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \left( \frac{\partial S^\alpha}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S^\alpha}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{4}{a^2} (S_z)^2 \right\} dx dy; \quad (2.8)$$

que será utilizado na obtenção de excitações tipo-vórtice ( $a$  é o espaçamento de rede).

## 2.3 A superfície em questão: a pseudo-esfera

Até aqui, discutiu-se um pouco apenas a respeito do modelo de Heisenberg num espaço plano, sem curvatura. Porém, foi visto na seção 2.1 que as estruturas nas quais as justificativas desse trabalho se apóiam, possuem curvatura que, em certos casos pode ser negativa (nesse trabalho, ela é constante e negativa). Nesse sentido, é conveniente que seja feito um estudo, ainda que breve, a respeito da geometria da pseudo-esfera, e encontrar uma maneira de “visualizá-la”, a fim de, posteriormente poder-se estudar alguns modelos magnéticos nela definidos (pseudo-esfera magnética). A discussão que segue, é baseada no trabalho da Ref. [27].

A pseudo-esfera é uma superfície hiperbólica. Superfícies hiperbólicas possuem curvatura gaussiana negativa, e por isso, não podem ser globalmente “embebidas” em um espaço euclidiano 3-dimensional. Mesmo assim, a pseudo-esfera pode ser “embebida” em um “espaço-tempo” tipo-Minkowski 3-dimensional, cujo elemento de linha finito é dado por:

$$x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 = R^2 ; \quad (2.8)$$

no entanto, não deseja-se que tais coordenadas tenham um sentido físico, como por exemplo,  $x_3$  representando o “eixo do tempo” (como acontece na Relatividade Especial). Essa estrutura forma um hiperbolóide de duas folhas, com cada uma delas interceptando o eixo  $x_3$  nos pontos  $\pm R$ , chamados pólos, em analogia com a esfera. Uma dessas folhas deve ser escolhida para representar a pseudo-esfera.

As rotações ordinárias são aqui realizadas pelas “transformações de Lorentz”. Estas transformações não alteram o sinal de  $x_3$ , de onde se pode identificar o grupo de isometrias da pseudo-esfera. O conhecimento desse grupo é fundamental para a descrição da geometria e da dinâmica nessa superfície. Vê-se, então, que existem duas analogias a serem feitas, sendo a primeira delas com relação à esfera, que apresenta algumas dificuldades devido às diferenças entre as métricas. Observe que o elemento de linha finito na esfera é dado por  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$ , enquanto na pseudo-esfera é dado por (2.8); sendo assim, de certa forma a pseudo-esfera pode ser considerada a “esfera do espaço de Minkowski

(2+1)D”. A segunda diz respeito ao “grupo de Lorentz (2+1)D”, onde se faz  $x_4 = 0$  obtendo assim um subgrupo de Lorentz.

Objetivando tornar a leitura menos técnica, essa seção tratará apenas daquilo que é fundamental para o prosseguimento do texto. Aspectos mais técnicos podem ser encontrados no Apêndice B.

A maneira mais simples e usual de se trabalhar nessa superfície, é projetá-la em um disco especial, chamado Disco de Poincaré. Esse Disco é a imagem da projeção estereográfica no plano  $(x, y)$  de um hiperbolóide acima do disco, ou analogamente, a pseudo-esfera é obtida pela projeção do Disco de Poincaré, tomando-se o ponto  $x_3 = -1$  (P) como ponto de projeção (Fig. 2.6).

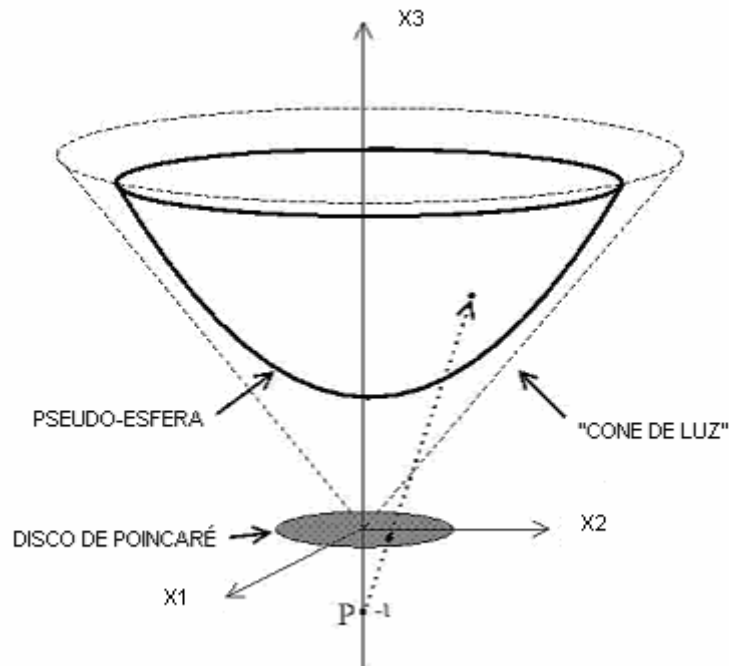


Figura 2.6: Método do disco de Poincaré para obter a pseudo-esfera (a folha superior do hiperbolóide) através do ponto de projeção  $P = -1$ , no eixo  $x_3$ : cada ponto do disco,  $(r, \varphi)$ , é mapeado em outro na folha,  $(\tau, \varphi)$ , de modo que a borda do disco seja levada ao infinito.

Dessa projeção, obtém-se uma nova expressão para o elemento de linha infinitesimal, dada por:

$$ds^2 = (d\tau^2 + \sinh^2 \tau d\varphi^2) = \frac{4(dr^2 + r^2 d\varphi^2)}{(1-r^2)^2} = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{[1-(x^2 + y^2)]^2}, \quad (2.9)$$

onde  $(x, y)$  e  $(r, \varphi)$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$  e  $\varphi = \arctan(y/x)$  são coordenadas cartesianas e polares no Disco (o raio do disco  $R$  foi tomado como sendo 1). De (2.9) é possível obter a métrica desse espaço e, conseqüentemente, o elemento de superfície que será utilizado no cálculo da energia das excitações aqui estudadas. Nota-se que a curvatura da folha e do Disco é negativa (igual a -1), uma vez que uma circunferência de raio  $\tau$  centrado na origem aumenta exponencialmente com  $\tau$ .

# Capítulo 3

## O problema

Até aqui foi visto, de maneira desconexa, os possíveis sistemas aos quais esse trabalho se aplica, os modelos magnéticos usados, e um pouco da geometria da superfície em questão. Será visto agora, como tudo isso se encaixa quando se define o modelo de Heisenberg na superfície da pseudo-esfera. Posteriormente, encontram-se soluções tipo-*sóliton* e tipo-vórtice, bem como, discute-se a respeito de suas estruturas, estabilidades e outros temas correlatos.

### 3.1 O modelo na superfície da pseudo-esfera

Obteve-se, no Capítulo 2, uma aproximação contínua para o modelo de Heisenberg. Tal aproximação, no entanto, foi feita apenas para o caso específico do espaço euclidiano bidimensional. É possível obter uma extensão de tais aproximações para espaços genéricos, ou seja, um limite contínuo dependente da métrica do espaço em questão dado por [9] ( $J$  utilizado aqui, é a metade daquele da expressão 2.1):

$$H = J \iint \sum_{a=1}^3 (1 + \delta_{a3} \lambda) (\bar{D} S^a)^2 \sqrt{|g|} d\eta_1 d\eta_2, \quad (3.1)$$

onde  $\sqrt{|g|} d\eta_1 d\eta_2$  é o elemento de linha invariante em coordenadas curvilíneas  $\eta_1$  e  $\eta_2$   $\bar{D}$  é a diferencial covariante,  $\sqrt{|g|} = \sqrt{|\det[g_{ij}]|}$  e,  $g_{ij}$  e  $\delta_{a3}$  ( $\delta_{ab} = 1$  se  $a = b$  e  $\delta_{ab} = 0$  para  $a \neq b$ ) são as métricas da superfície e do espaço de *spin*, respectivamente. No caso de



sistemas magnéticos  $\vec{D}, \vec{S}^a \equiv \partial_i \vec{S}^{a1}$ , haja visto que  $\vec{S}$  é um vetor no espaço interno e não no espaço físico, aí ele é um campo escalar. Como foi observado há pouco,  $\vec{S} = (S^x, S^y, S^z)$  é, no espaço interno, um campo vetorial clássico, sendo possível parametrizá-lo da seguinte maneira:  $\vec{S} = (\sin \Theta \cos \Phi; \sin \Theta \sin \Phi; \cos \Theta)$ , onde  $\Theta = \Theta(\tau, \varphi)$  e  $\Phi = \Phi(\tau, \varphi)$  são as funções que descrevem os ângulos internos das variáveis de *spin*, de modo que  $|\vec{S}|^2 = S^2 \equiv 1$ . Utilizando tal parametrização juntamente com a métrica, obtida da expressão (2.9), em (3.1) obtém-se:

$$H = J \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty d\tau \left\{ \sinh \tau \left[ (1 + \lambda \sin^2 \Theta) (\partial_\tau \Theta)^2 + \sin^2 \Theta (\partial_\tau \Phi)^2 \right] + \frac{\left[ (1 + \lambda \sin^2 \Theta) (\partial_\varphi \Theta)^2 + \sin^2 \Theta (\partial_\varphi \Phi)^2 \right]}{\sinh \tau} \right\}, \quad (3.2)$$

onde  $\partial_i = \partial/\partial\eta_i$ . Utilizando os resultados do Apêndice C, chega-se às equações de movimento acopladas para  $\Theta$  e  $\Phi$ .

$$2 \sin \Theta \cos \Theta \left\{ \frac{\lambda (\partial_\varphi \Theta)^2 + (\partial_\varphi \Phi)^2}{\sinh \tau} + \sinh \tau \left[ \lambda (\partial_\tau \Theta)^2 + (\partial_\tau \Phi)^2 \right] \right\} = \partial_\tau \left[ (1 + \lambda \sin^2 \Theta) 2 \sinh \tau \partial_\tau \Theta \right] + \partial_\varphi \left[ (1 + \lambda \sin^2 \Theta) \frac{2}{\sinh \tau} \partial_\varphi \Theta \right], \quad (3.3)$$

$$\partial_\tau (\sinh \tau \sin^2 \Theta \partial_\tau \Phi) + \partial_\varphi \left( \frac{\sin^2 \Theta}{\sinh \tau} \partial_\varphi \Phi \right) = 0. \quad (3.4)$$

Tais equações são altamente não-lineares, de forma que a procura por soluções gerais apresenta-se como uma tarefa muito difícil. Desse modo, apenas soluções especiais, parecem passíveis de estudo analítico.

---

<sup>1</sup> Está supondo-se que o suporte geométrico, a pseudo-esfera, é rígido. O tratamento envolvendo possíveis deformações é bastante interessante e muito mais complexo.

## 3.2 Soluções tipo-sóliton: modelo isotrópico

Como foi dito anteriormente, serão obtidas soluções para casos específicos. Aqui, serão encontradas soluções tipo-sóliton; para tal, analisa-se o caso isotrópico, ( $\lambda = 0$ ). Além do mais, supõe-se que  $\Theta$  e  $\Phi$  descrevam uma solução com simetria cilíndrica, ou seja,  $\partial_\varphi \Theta = 0$  e  $\Phi = \Phi(\varphi) = \varphi$  (a menos de uma constante). Com tais exigências, as equações (3.3) e (3.4) reduzem-se a apenas:

$$\partial_\tau (\partial_\tau \Theta \sinh \tau) = \frac{\sin 2\Theta}{2 \sinh \tau}. \quad (3.5)$$

Definindo-se  $u \equiv \ln[\tanh(\tau/2)]$ , de modo que  $u \in (-\infty, 0]$ , vê-se que (3.5) assume a forma:

$$\partial_u^2 \Theta = \frac{\sin 2\Theta}{2}, \quad (3.6)$$

que pode ser simplificada fazendo  $2\Theta = \theta$ , para resultar em:

$$\partial_u^2 \theta = \sin \theta. \quad (3.7)$$

As equações (3.6) e (3.7) são as equações de sine-Gordon, cujas soluções mais simples lêem-se (ver apêndice D):

$$\theta(u) = 4 \arctan(e^{u-u_0}) + \theta_0 \Rightarrow \Theta(u) = 2 \arctan(e^{u-u_0}) + \Theta_0, \quad (3.8)$$

onde  $u_0 \in (-\infty, 0]$ , enquanto  $\theta_0$  e  $\Theta_0$  são constantes de integração. Analisando (3.8), vê-se que para o caso em que  $u_0 = 0$ ,  $\Theta(u) \in [0, \pi/2]$  para  $u$  variando de  $-\infty$  até  $0$ , ou seja, um *half-sóliton* surge como solução de (3.7). Para outros valores de  $u_0$ , ainda se terá um *half-sóliton*, porém,  $\Theta(u)$  não mais pertencerá ao mesmo intervalo (ver apêndice E). Com essa informação, é possível determinar se o sóliton é ou não estável. Foi visto que, ao percorrer todo o espaço físico, apenas meia esfera de *spin* foi mapeada na pseudo-esfera, de forma que o espaço físico não é capaz de cobrir todo o espaço interno. O número de vezes que esse mapeamento pode ser feito é chamado de grau do mapeamento ou carga topológica. Esses mapeamentos formam classes de equivalência com relação à deformação contínua do espaço interno para cobrir o espaço físico, chamadas classes homotópicas. Cada classe é caracterizada por um número inteiro, a carga topológica. O conjunto das classes homotópicas forma um grupo, chamado grupo de homotopia. No caso do presente

problema, corresponde ao segundo grupo de homotopia,  $\pi_2(G)=0$ , sendo  $G$  apenas a metade de  $S^2$ . Mesmo a pseudo-esfera sendo um suporte infinito, sua curvatura negativa identifica-a com o disco de Poincaré que, como todos os discos finitos, não pode suportar excitações do tipo-Belavin-Polyakov [28], ou seja, sólitons com carga inteira caracterizada por um completo mapeamento da esfera de *spins* no espaço físico em questão (veja Fig. 3.1).

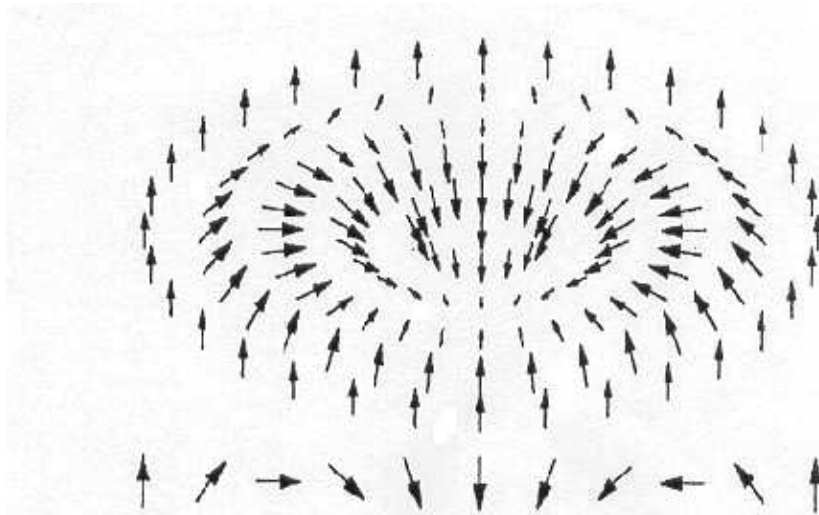


Figura 3.1: Excitação tipo sóliton com carga topológica  $Q=1$ .

Desse modo, os  $\pi/2$ -sólitons descritos acima são instáveis e decaem ao estado fundamental com  $E = 0$ . A Fig. 3.2 ilustra essa discussão.

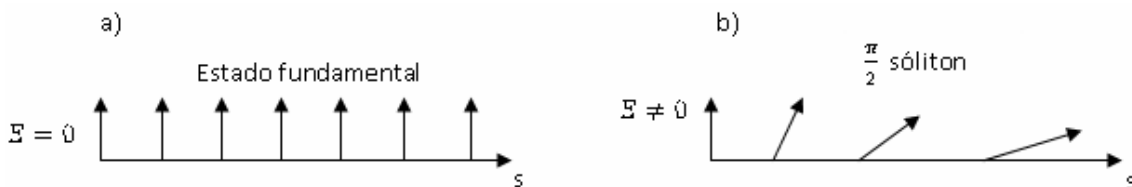


Figura 3.2: Esboço das configurações de spins para: a) estado fundamental e b) *half*-sóliton. Uma vez que os  $\pi/2$ -sólitons são instáveis, o sistema “escolhe” o estado fundamental.

Há outra análise a ser feita, que talvez esclareça um pouco melhor a questão da instabilidade, e envolve um estudo da invariância de escala do modelo, esse estudo está feito em detalhes no Apêndice E.

Pode-se calcular a energia, integrando o hamiltoniano obtido sob as restrições colocadas acima, que é dado por:

$$H = J \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} d\tau \left\{ \sinh \tau (\partial_{\tau} \Theta)^2 + \frac{\sin^2 \Theta}{\sinh \tau} \right\}, \quad (3.9)$$

ou, na variável  $u$ :

$$H = J \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^0 du \left[ (\partial_u \Theta)^2 + \sin^2 \Theta \right], \quad (3.10)$$

substituindo (3.8) em (3.10), e integrando:

$$E_{\Theta} = 8\pi J \frac{1}{1 + e^{2u_0}}, \quad (3.11)$$

que  $\in [4\pi J, 8\pi J]$ .

Se for deixada de lado a exigência de simetria cilíndrica para a solução, ou seja,  $\partial_{\varphi} \Theta \neq 0$ , tem-se a seguinte equação diferencial (com  $\lambda = 0$ ):  $\partial_{\varphi}^2 \theta + \partial_u^2 \theta = \sin \theta$ , com  $u$  definido anteriormente (isto leva a uma equação *sine*-Gordon dependente do tempo se  $\varphi \equiv it$ ). Sua solução mais simples é:

$$\theta_{u\varphi} = 2 \arctan \left\{ \frac{\sinh \left( a\varphi / \sqrt{1-a^2} \right)}{a \cosh \left[ (u - u_0) / \sqrt{1-a^2} \right]} \right\}, \quad (3.12)$$

que é bem-definida contanto que  $a/\sqrt{1-a^2} \equiv m$  seja um inteiro. O parâmetro  $a$  é (para  $\varphi = it$ ) a velocidade da excitação dividida pela velocidade de luz, de modo que  $a \in [0,1]$ , enquanto  $u$  continua sendo dado por  $u = \ln[\tanh(\tau/2)]$ . Além do mais, note que:

$$\theta_{u\varphi} \rightarrow 0; \quad u \rightarrow -\infty \text{ e} \quad (3.13)$$

$$\theta_{u\varphi} \rightarrow 2 \arctan \left[ \frac{\sinh(m\varphi)}{a \cosh(-mau_0)} \right]; u \rightarrow 0^-, \quad (3.14)$$

de modo que nenhum mapeamento completo da esfera de *spin* no suporte físico seja possível: como  $\cosh(x) \geq 1$  então  $\theta_{u\varphi}$  nunca será igual a  $\pi$ . Conseqüentemente, a solução acima é instável e decai ao estado fundamental (ferromagnético).

A estabilidade desse tipo de objeto pode ser conseguida se for introduzida alguma obstrução topológica. Por exemplo, se for considerado um “furo circular” de raio  $\bar{s} = R\bar{\tau}$  centrado na origem (equivalentemente remove-se um disco de raio  $\bar{r} = R \tanh(\bar{\tau}/2) \in (0, R)$  no disco de Poincaré), como mostra a Fig. 3.3, então a equação (3.6) ou (3.7) conduz a soluções estáveis, desde que  $\Theta(u = \bar{u}) = \Theta(\tau = \bar{\tau}) = \text{cte}$ . As condições de contorno nas bordas, tanto do disco quanto do furo, impedem agora que o sóliton decaia, através de deformações contínuas, ao estado fundamental.

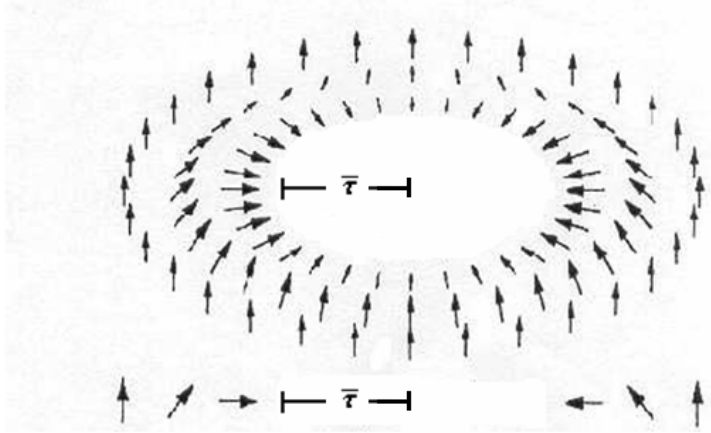


Figura 3.3: Excitação tipo sóliton com carga topológica  $Q=1/2$ , estabilizada através da introdução de uma obstrução topológica (furo) de raio  $\bar{s} = R\bar{\tau}$ .

Neste caso, encontra-se [4,14]:

$$\Theta_{\bar{\tau}} = 2 \arctan \left[ \frac{\tanh(\tau/2)}{\tanh(\bar{\tau}/2)} \right]. \quad (3.15)$$

Caso houvesse invariância de escala, ter-se-ia:

$$\Theta_{\bar{\tau}} = 2 \arctan \left[ \frac{\tanh(\tau/2)}{\tanh(\tau_0/2)} \right]; \bar{\tau} < \tau_0 < \infty, \quad (3.16)$$

porém, como não há mais tal invariância, a constante  $\tau_0$  é fixada em  $\bar{\tau}$ , que é o limite até onde o sistema pode “decair”. Uma outra maneira de introduzir tal obstrução topológica é multiplicar a densidade hamiltoniana em (3.9), por uma função do tipo delta  $[U(\tau - \bar{\tau})]$  que leve em consideração a existência desse “furo”, como consequência, as equações de movimento passam a carregar informação sobre essa função, implicando em soluções que respeitam tal condição de contorno.

A energia associada é:

$$E_{\bar{\tau}} = 2\pi J \int_{\bar{\tau}}^{\infty} d\tau \left[ \sinh \tau (\partial_{\tau} \Theta_{\bar{\tau}})^2 + \frac{\sin^2 \Theta_{\bar{\tau}}}{\sinh \tau} \right] = 4\pi J \operatorname{sech}(\bar{\tau}), \quad (3.17)$$

que pertence ao intervalo  $(0, 4\pi J)$ , uma vez que  $\bar{\tau} \in (0, \infty)$ . O fato de o intervalo ser aberto em zero, está associado com a estabilidade da excitação topológica (não pode contrair-se a um ponto, devido à obstrução na superfície). Como foi dito, deve haver uma obstrução maior que zero, que impeça o sóliton de decair ao estado fundamental. Nesse caso tem-se uma solução fracionária, cuja energia vai de 0 à  $4\pi J$ , dependendo do tamanho da excitação (ou do furo), uma vez que não há mais invariância de escala (para mais detalhes ver apêndice E). Note que, o furo no suporte impede agora o colapso do sóliton, similarmente ao que ocorre no plano punturado ou no cone truncado [14].

Nos apêndices D e E, discute-se um pouco a respeito dos *sólitons*, mas há algo que vale a pena ser dito já. É interessante que uma equação não-linear que contenha termos dispersivos, possua soluções do tipo *sóliton*, ou seja, soluções que se movam sem distorção e retornam, ainda que no infinito, às suas formas e velocidades originais após uma colisão. A questão é que, soluções não dispersivas são esperadas nos casos em que não se têm aqueles termos na equação de movimento, permitindo que todas as componentes (ondas planas) tenham a mesma velocidade de fase. E mais, soluções que obedecem ao princípio de superposição, são esperadas para equações lineares, e não para equações não-lineares. Porém, é possível que para algumas equações onde existam termos dispersivos e não-lineares seus efeitos sejam equilibrados um ao outro de tal maneira que algumas soluções

especiais satisfaçam essas duas características. Esse é o caso de modelos que são descritos por equações do tipo *sine*-Gordon [16].

### 3.3 Soluções tipo-vórtice: modelo XY

Um vórtice magnético é pensado geralmente como sendo um perfil de *spins* com “vorticidade” não-nula (a carga topológica geralmente tem esse nome no caso de vórtices), (veja figura 3.4).

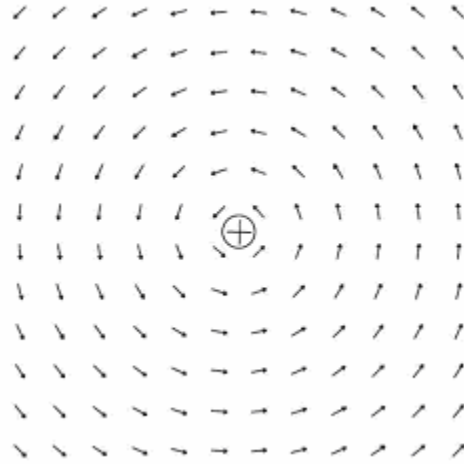


Figura 3.4: Vórtice com carga topológica igual a +1. O símbolo  $\oplus$  indica o centro, ou caroço, da estrutura.

Certamente, seu caroço pode ter componente de *spin* fora da superfície ( $\Theta \neq \pi/2$ ) de modo que a energia possa ser regularizada. Entretanto, a anisotropia XY (com a demanda  $\Theta = \pi/2$ , tem-se o regime do Rotor Planar) é frequentemente considerada de forma que os *spins* encontram-se paralelos à superfície, sem componentes fora dela (“*out-of-surface*”). Isto é garantido no caso planar, uma vez que o eixo Z da esfera de *spin* (espaço interno) está sempre perpendicular à superfície, plano XY. Conseqüentemente, *spins* que se encontram no equador interno (plano XY) encontram-se “deitados” na superfície física. No entanto, isto não é válido em geral, por exemplo, numa superfície com curvatura arbitrária, com torção, e outras características de interesse geométrico. Nestes casos, um novo tipo de anisotropia pode ser necessário. Por exemplo, um termo do tipo  $b(\hat{n} \cdot \vec{S})^2$ , com  $b > 0$  e  $\hat{n}$  um vetor unitário apontando na direção normal à superfície em cada ponto, pode garantir



que os *spins* não tenham componente fora da superfície, uma vez que isso terá um custo energético que aumenta linearmente com  $b$  [13].

Uma pergunta que naturalmente se coloca é: como é o cenário na superfície em estudo? Embora a pseudo-esfera seja curva, compartilha de uma propriedade especial com o plano: suas métricas são conformes (os ângulos para essa métrica coincidem com os ângulos euclidianos), para detalhes veja apêndice B. Isso quer dizer que a diferença entre eles reside na medição de distâncias ao longo das respectivas geodésicas, de modo que enquanto no plano temos linhas retas, na pseudo-esfera dois pontos distintos estão “minimamente ligados” por uma hipérbole. A fim de simplificar a análise, será empregada nesta seção a equivalência entre a pseudo-esfera e o disco de Poincaré, que como está discutido no Apêndice B, é um disco usual de raio  $R$  dotado de uma métrica que “imita” a curvatura negativa e constante da pseudo-esfera. Uma vez que os cálculos forem executados neste disco, onde os centros dos vórtices podem ser bem identificados, usando-se coordenadas cartesianas, volta-se para coordenadas pseudo-esféricas com o objetivo de tratar as soluções e suas propriedades na superfície real.

Para tanto, faz-se  $\lambda = -1$ , o que conduz ao modelo XY, que por sua vez apresenta soluções tipo-vórtice. Nesse caso, os *spins* tendem a alinhar-se no plano “interno” XY. Além do mais, toma-se  $\Theta = \pi/2$  (regime do Rotor Planar) e  $\partial\Phi/\partial\tau = 0$  (simetria cilíndrica), sendo assim, as equações (3.3) e (3.4) são extremamente simplificadas, levando a<sup>2</sup>:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0, \quad (3.18)$$

cujas soluções são:

$$\Phi(\varphi) = Q\varphi + \varphi_0, \quad (3.19)$$

---

<sup>2</sup> Ao tomarmos  $\Theta = \pi/2$  estamos, de fato, introduzindo um *cutoff* em nossa superfície: o caroço do vórtice, onde a densidade de energia  $\sim 1/r^2$  (coordenadas polares no disco de Poincaré), está eliminado de nossa análise. Assim, procuramos soluções de (3.18) para a região externa ao caroço, por isso que (3.19) é uma boa solução neste caso. Observe que se  $r \rightarrow 0$  ( $r \rightarrow \infty$ )  $\varphi$  fica indefinido.

onde  $Q$  é a “carga do vórtice” ou vorticidade, enquanto  $\varphi_0$  é uma constante relacionada com sua “aparência global”<sup>3</sup>. A expressão (3.19) mostra que a orientação dos *spins* é proporcional à  $\varphi$ , como na Figura 3.1. Pode-se calcular a energia utilizando a simplificação da equação (3.2) dada por:

$$H = J \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\tau_a}^{\tau_L} (\partial_\varphi \Phi)^2 \frac{1}{\sinh \tau} d\tau, \quad (3.20)$$

onde  $\tau_a$  e  $\tau_L$  são “escalas de corte” introduzidas para garantir energia finita ao vórtice. Elas estão relacionadas com os tamanhos do “caroço interno” e da região exterior da excitação (tamanho do sistema), respectivamente por,  $a = R\tau_a/2$  e  $L = R\tau_L/2$  (sendo  $a$  e  $L$  medidos por coordenadas retilíneas, como  $r$ ).

Substituindo (3.19) em (3.20), tem-se:

$$E_v = E_c + J \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\tau_a}^{\tau_L} \frac{Q^2}{\sinh \tau} d\tau \Rightarrow E_v = E_c + 2\pi J Q^2 \ln \left[ \frac{\tanh(\tau_L/2)}{\tanh(\tau_a/2)} \right]. \quad (3.21)$$

Aqui,  $E_c$  é a energia do caroço do vórtice que diverge no limite contínuo para soluções no plano. Para vórtices “fora do plano”, ela pode ser estimada analiticamente, para tanto, supõe-se que no interior do caroço,  $\tau \in [0, \tau_a]$ , os *spins* comportam-se como a solução solitônica, isto é, em  $\tau=0$ ,  $\Theta=0$  e vai variando lentamente até  $\tau=\tau_a$ . A partir daí, os *spins* obedecem à restrição do Rotor Planar ( $\lambda = -1$  e  $\Theta = \pi/2$ ). Tal “cutoff” ultravioleta  $\tau_a$  pode ser entendido como uma limitação do tratamento contínuo do sistema. De fato, quando se investiga o sistema com seu caráter discreto (geralmente isto só é factível por análise computacional) tal regulador aparece normalmente de forma que tal divergência é naturalmente “curada”. Noutras palavras, o tratamento contínuo é útil para se obter a energia, bem como outras quantidades e propriedades associadas aos vórtices magnéticos, na região externa ao caroço. Seu interior só pode ser apropriadamente investigado por alguma análise que leve em conta a natureza discreta dos sítios de *spin*. No caso do plano,

---

<sup>3</sup> Observe que, (3.19) satisfaz (3.18) em todo ponto, exceto na origem. Assim, talvez fosse mais conveniente reescrever (3.18) como  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = Q \delta^2(\vec{r})$ . No entanto, o limite contínuo aqui empregado só é válido fora do caroço do vórtice, como foi dito no rodapé da página anterior.

com rede quadrada  $a \approx 0,24a_0$ , sendo  $a$  o raio do caroço e  $a_0$  o espaçamento de rede [29]. Como se sabe pelo menos em geometrias planas e cônicas, a energia do vórtice cresce logaritmicamente com  $L$ , divergindo no limite termodinâmico ( $L \rightarrow \infty \rightarrow$  divergência infravermelha). O que deve ser reforçado é que nesse caso, tal divergência é naturalmente sanada (veja figura 3.5), ao que tudo indica, pela curvatura negativa do suporte geométrico. De fato, à medida que  $\tau_L$  aumenta a energia do vórtice também aumenta, mas vai, assintoticamente ( $\tau_L \rightarrow \infty$ ), à:

$$E_v = 2\pi J Q^2 \ln[\coth(\tau_a/2)], \quad (3.22)$$

que é finita ( $\tau_a > 0$ ).

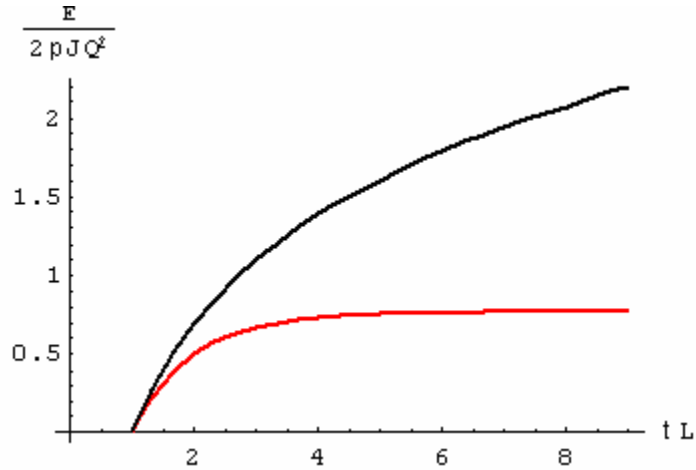


Figura 3.5: Energia do vórtice em função de  $\tau_L$  (tamanho do vórtice). A curva preta ilustra o caso planar, enquanto a curva vermelha ilustra a geometria atual.

No limite  $R \rightarrow \infty$  o plano usual é recoberto (curvatura nula), ou seja:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \ln \left[ \frac{\tanh(\tau_L/2)}{\tanh(\tau_a/2)} \right] = \lim_{R \rightarrow \infty} \ln \left[ \frac{\tanh(L/R)}{\tanh(a/R)} \right] = \ln \left( \frac{L}{a} \right), \quad (3.23)$$

que é exatamente a energia divergente (no limite termodinâmico) para o caso do plano usual. Tal resultado mostra que o que foi obtido anteriormente é um resultado de fato, e não associado a uma simples transformação de coordenadas. Até onde se sabe, esta é a primeira vez que uma divergência infravermelha associada a excitações topológicas é sanada apenas por propriedades geométricas do espaço no qual elas se encontram. Este fato será

relacionado a outro resultado interessante quando a solução de dois vórtices for considerada nessa geometria.

Para proceder a tal análise, é mais conveniente trabalhar em coordenadas cartesianas  $xy$  [25], (mantendo-se  $\lambda = -1$  e  $\Theta = \pi/2$ ). Para um hamiltoniano geral como o da expressão (3.1), as equações de movimento são dadas por  $\nabla^2\Phi = 0$ , que no caso cartesiano levam a (mais detalhes sobre a forma do Laplaciano em coordenadas generalizadas podem ser encontrados na Ref. [30]<sup>4</sup>):

$$\frac{1}{4} [1 - (x^2 + y^2)]^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (3.24)$$

a qual possui as seguintes soluções:

$$\Phi_{2v} = Q_1 \arctan\left(\frac{y - y_1}{x - x_1}\right) + Q_2 \arctan\left(\frac{y - y_2}{x - x_2}\right), \quad (3.25)$$

onde  $Q_1$  e  $Q_2$  são as cargas dos vórtices centrados em  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  respectivamente. Pode-se calcular a energia de tal configuração e obter-se (para detalhes ver apêndice F):

$$E_{2v} = E_{v1} + E_{v2} + 2\pi J Q_1 Q_2 \ln\left(\frac{\tanh(\tau_L/2)}{\tanh(\tau_d/2)}\right), \quad (3.26)$$

com  $E_{v1}$  e  $E_{v2}$  representando as energias dos vórtices isolados, equação (3.21), enquanto o termo seguinte representa o potencial efetivo entre eles (veja Fig. 3.6), separados por  $d = R\tau_d/2$  (medido ao longo da geodésica hiperbólica que os une), e  $\tau_d \geq 2\tau_a$ .

---

<sup>4</sup>  $\nabla^2\psi(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3} \right) \right]$ ; onde  $h_i = \sqrt{|g_{ii}|}$

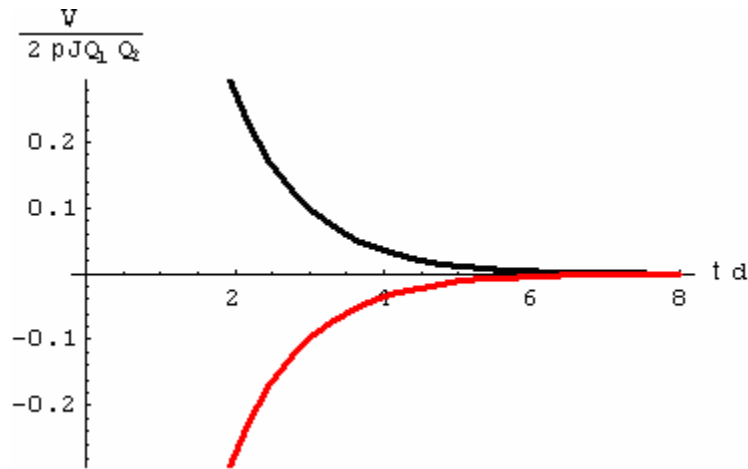


Figura 3.6: Potencial efetivo de interação entre dois vórtices em função da distância entre eles, com os tamanhos do caroço e da estrutura fixados em 0.5 e 8 respectivamente. A curva preta representa o caso onde  $Q_1=Q_2$ , ao passo que na curva vermelha  $Q_1=-Q_2$ .

A força entre os vórtices associada a esse potencial efetivo é dada por (veja Fig. 3.7):

$$F = 2\pi J Q_1 Q_2 \operatorname{csch}(\tau_d/2). \quad (3.27)$$

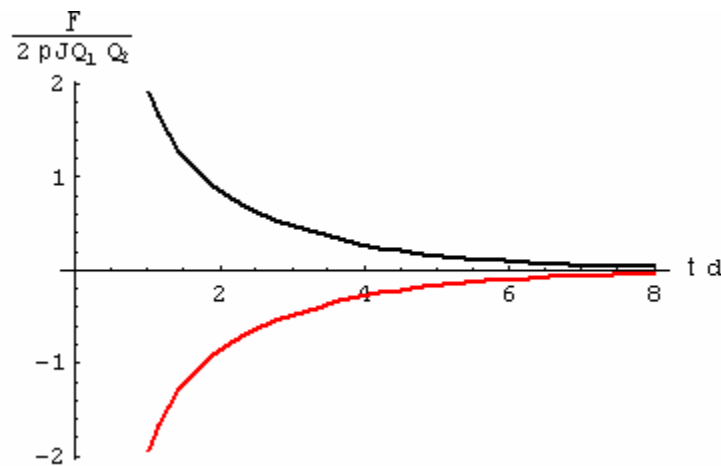


Figura 3.7: Esboço da força de interação entre dois vórtices em função da distância entre eles.  $Q_1=Q_2$  (curva preta),  $Q_1=-Q_2$  (curva vermelha).

É possível notar algumas propriedades interessantes desse potencial. Quando  $\tau_d \rightarrow \infty$   $V_{eff} \rightarrow 2\pi J Q_1 Q_2 \ln(\tanh(\tau_L/2))$ , que depende apenas do tamanho do sistema, conseqüentemente  $F \rightarrow 0$ , implicando que os vórtices movem-se sem interação apreciável

sempre que estão suficientemente separados um do outro. [Isso deve ser contrastado com o potencial logarítmico do caso planar usual]. Por outro lado, quando eles estão mais próximos, a interação torna-se apreciável. Uma segunda análise diz respeito ao sinal da interação entre os vórtices, e pode facilmente ser feita, verificando-se a equação (3.26): a interação na superfície da pseudo-esfera será atrativa(repulsiva) de acordo com  $Q_1 Q_2 < 0 (> 0)$ , como ocorre geralmente. Das características anteriores, nota-se que para um par vórtice-antivórtice o potencial é atrativo, mas tem valor apreciável apenas para pequenas distâncias. Conseqüentemente, mesmo que o par se mantenha ligado à temperatura zero, uma pequena (e arbitrária) excitação térmica pode ser suficiente para dissociá-lo. Isso conduz à idéia de que uma transição de fase topológica [31] ocorrerá em qualquer temperatura perto de zero.

A transição de fase citada acima é caracterizada pela separação dos pares vórtice-antivórtice, gerando vórtices livres, uma vez que os modelos XY e Rotor Planar não exibem uma transição de fase do tipo ordem-desordem, ou seja, não existe uma temperatura crítica que separa uma fase magnetizada de uma desmagnetizada. Isso é garantido pelo teorema de Mermin-Wagner [32], o qual diz que modelos bidimensionais com interações de curto alcance, cujos Hamiltonianos apresentam alguma simetria global contínua, só apresentam ordem de longo alcance no zero absoluto. Além da análise feita acima, acerca do potencial de interação entre os vórtices, outro indicador da transição de fase é o comportamento da função correlação *spin-spin*, que parece indicar que os spins estão mais correlacionados à baixas temperaturas. Para argumentar acerca dessa transição, é necessário analisar a expressão para a energia livre do sistema, dada por:

$$F = E - Ts, \quad (3.28)$$

onde  $s$  é a entropia do vórtice livre. Como um vórtice é completamente especificado pela localização do seu centro, a entropia é dada pelo logaritmo do número de sítios da rede,

$$\begin{aligned} s &= k_B \ln(A / dA), \\ &= k_B \ln \left[ \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sinh(\tau) d\varphi d\tau}{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sinh(\tau) d\varphi d\tau} \right], \\ &= k_B \ln \left[ \frac{\cosh(\tau_1) - 1}{\cosh(\tau_2) - 1} \right]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Foi visto que a energia de um vórtice livre é dada por:

$$E = 2\pi J Q^2 \ln \left[ \frac{\tanh(\tau_L/2)}{\tanh(\tau_a/2)} \right]. \quad (3.30)$$

De onde é possível ver que há uma temperatura na qual a energia livre muda de sinal. Esta temperatura caracteriza a transição de fase do sistema. A baixa temperatura a probabilidade de um vórtice livre aparecer é pequena, uma vez que o termo de energia, ou ordem do sistema, domina a energia livre. No entanto, a partir de uma determinada temperatura, o termo de entropia, ou desordem, passa a dominar, possibilitando assim a existência de vórtices livres. A temperatura na qual ocorre essa mudança de comportamento pode ser estimada como sendo:

$$T_{KT} = \frac{2\pi J Q^2 \ln \left[ \frac{\tanh(\tau_L/2)}{\tanh(\tau_a/2)} \right]}{k_B \ln \left[ \frac{\cosh(\tau_L) - 1}{\cosh(\tau_a) - 1} \right]}. \quad (3.31)$$

Um esboço da variação dessa temperatura em função do tamanho da estrutura pode ser visto na Figura 3.8, cuja análise deixa claro que quanto menor for a estrutura, mais energia térmica será necessária para dissociar o par. A Figura mostra também (em vermelho) o comportamento da temperatura de transição para o caso do plano usual, onde é constante.  $T_{KT} = \frac{\pi J Q^2}{2k_B}$

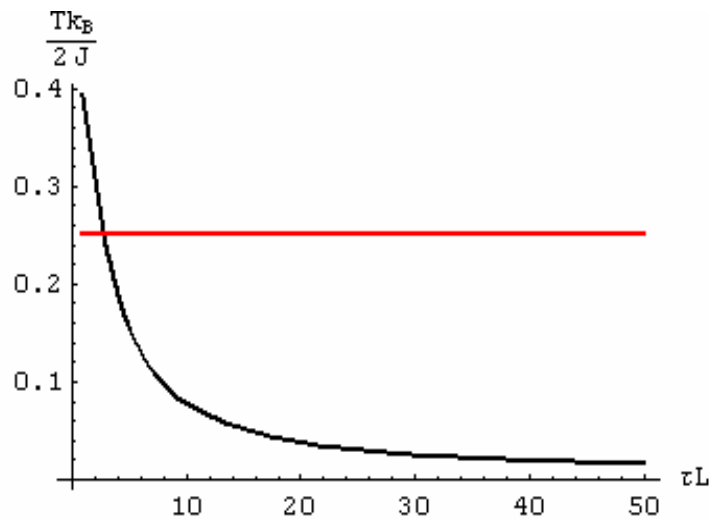


Figura 3.8: Variação da “temperatura de transição” em função do tamanho da estrutura para os casos da superfície pseudo-esférica (curva preta) e do plano usual (curva vermelha).

A confirmação dessa predição poderia ter alguma relevância para outras áreas, em que tais tipos de excitação e de geometria são importantes.



# Capítulo 4

## Conclusões Gerais e Perspectivas

Viu-se, então, que o modelo de Heisenberg isotrópico de *spins* clássicos não suporta *sólitons* estáveis numa superfície pseudo-esférica. Certamente, a estabilidade é verificada se for considerada, por exemplo, uma superfície furada (a pseudo-esfera com um furo, agora não-simplesmente conexa), neste caso, a excitação obtida é fracionária, interpolando entre zero e um  $\pi/2$ -*sóliton*, analogamente ao que ocorre num ânulo ou num cone finito truncado.

Já soluções magnéticas tipo-vórtice, no regime do Rotor Planar, apresentam uma propriedade interessante quando comparadas às suas correspondentes usuais (superfícies planas e cônicas): sua energia não diverge quando se toma o limite termodinâmico do sistema magnético. Foram indicadas também algumas possíveis conseqüências desse fato para soluções de dois vórtices, como por exemplo, a transição da fase topológica. [Espera-se um cenário similar para o caso dos chamados vórtices “fora-do-plano”, com algumas modificações apropriadas que levem em conta a energia do seu caroço].

De fato, viu-se que a “cura” da divergência infravermelha, associada à energia do vórtice na pseudo-esfera implica, por exemplo, que um par de vórtices já não interage com um potencial confinante a grandes distâncias, como nos casos usuais. Esse fato indica que o desemparelhamento dos vórtices pode ocorrer acima de uma dada temperatura, a chamada temperatura de Kosterlitz-Thouless. Além de verificar essa conjectura por meio de técnicas numéricas, outros prospectos para investigação futura incluem como a estrutura e dinâmica dos sólitons e vórtices são afetadas por defeitos como furos e/ou impurezas nesta superfície. Em um contexto mais geral tem-se o problema de como a transição de fase topológica é sensível a parâmetros geométricos, como curvatura, torção etc. Alguma luz adicional para esse problema pode ser conseguida estudando-se a dissociação de pares de vórtices magnéticos na esfera [33].

Finalmente, pode-se dizer que os resultados aqui apresentados podem ser relevantes em determinadas estruturas ferromagnéticas, nas quais os componentes do material possuam *spins* suficientemente grandes, para que as aproximações de *spins* clássicos sejam válidas, e a estrutura física do material possua uma curvatura negativa. Esse pode ser o caso de materiais magnéticos que venham a ser sintetizados futuramente.

# Apêndice A

## Aproximação contínua do modelo de Heisenberg (caso ferromagnético)

Um hamiltoniano em teorias contínuas é composto por termos que geralmente estão associados às energias, potencial e cinética de determinados campos. Um campo pode ser visualizado como sendo uma região com infinitos pontos, e conseqüentemente, com infinitos graus de liberdade, onde se associa a cada ponto um conjunto de coordenadas. Uma teoria de campo, nada mais é do que uma teoria que descreve tal região, permitindo-se compreender a dinâmica desse campo e a forma com que ele interage com outros “entes”, por exemplo, a matéria no caso de um campo eletromagnético. Quando se estuda a dinâmica de tais estruturas, nota-se que associado a elas existem propriedades características de ondas, por exemplo, ondas eletromagnéticas ou gravitacionais. Nesse sentido, a obtenção de uma teoria de campo pode ser interessante quando se tem em mente estudar alguma das características associadas às propriedades desta.

Aqui, será obtida uma aproximação contínua para o modelo de Heisenberg, que levará a uma “teoria de campo de spins”. Como se viu, a obtenção dessa aproximação contínua foi fundamental no prosseguimento do trabalho, uma vez que, através desta, pode-se fazer um tratamento analítico do problema. Apresenta-se aqui, de maneira detalhada, como é feita tal aproximação.

### A.1 Modelo Isotrópico

O modelo de Heisenberg isotrópico é dado por:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} (S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y + S_i^z S_j^z), \quad (\text{A.1})$$

como foi dito no texto, do trabalho,  $\vec{S}_i$  é um operador que atua no sítio  $i$  da rede. Pode-se escrever (veja figura A.1):

$$S_{i+1}^\alpha = S_i^\alpha + a \frac{\partial S_i^\alpha}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial x^2} + \dots, \quad (\text{A.2})$$

$$S_{i-1}^\alpha = S_i^\alpha - a \frac{\partial S_i^\alpha}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial x^2} - \dots, \quad (\text{A.3})$$

$$S_{i+2}^\alpha = S_i^\alpha + a \frac{\partial S_i^\alpha}{\partial y} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial y^2} + \dots, \quad (\text{A.4})$$

$$S_{i-2}^\alpha = S_i^\alpha - a \frac{\partial S_i^\alpha}{\partial y} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 S_i^\alpha}{\partial y^2} - \dots, \quad (\text{A.5})$$

com  $\alpha = x, y, z$ , e  $a$  sendo o espaçamento de rede. O truncamento da expansão depende do quão pequeno for  $a$ , para “pequenos” espaçamentos de rede, pode-se fazer o truncamento em segunda ordem.

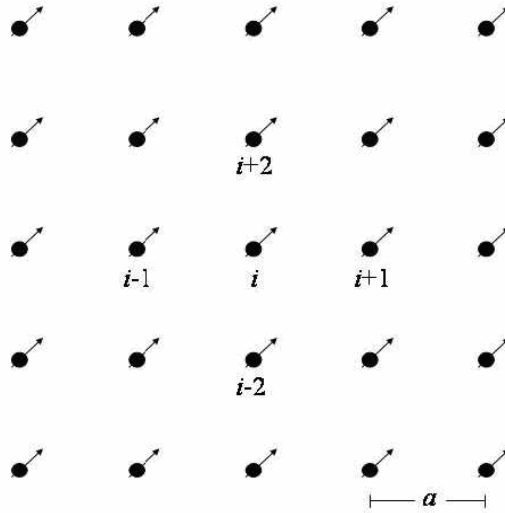


Figura A.1: Rede quadrada de *spins* indicando os quatro sítios que interagem com o sítio genérico  $i$ .

Substituindo a soma em (A.1) por  $\iint \frac{dx dy}{a^2} = \int \frac{d^2 r}{a^2}$  (o termo  $\frac{1}{a^2}$  aparece para manter

a dimensão), e as componentes de spin pelas expansões (A.2 - A.5), obtém-se:

$$H = -\frac{J}{2} \iint \frac{dx dy}{a^2} \left[ 4(S_x^2 + S_y^2 + S_z^2) + a^2(\nabla^2 S_x) S_x + a^2(\nabla^2 S_y) S_y + a^2(\nabla^2 S_z) S_z \right] \quad (\text{A.6})$$

onde  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ . O fator  $\frac{1}{2}$  aparece por não especificarmos a partir de qual sítio

estamos integrando, sendo assim, cada termo é contado duas vezes. O termo  $-2J \int \frac{\bar{S}^2}{a^2} d^2r$  que representa a energia do estado fundamental diverge para uma rede infinita, logo, para obter-se resultados satisfatórios, deve-se renormalizar (A.6), o que implica em escolher o zero de energia de forma a omitir tal termo. Assim:

$$H = -\frac{J}{2} \left[ \iint \left( \frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_x}{\partial y^2} \right) S_x dx dy + \iint \left( \frac{\partial^2 S_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_y}{\partial y^2} \right) S_y dx dy + \right. \\ \left. + \iint \left( \frac{\partial^2 S_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_z}{\partial y^2} \right) S_z dx dy \right], \quad (\text{A.7})$$

onde agora, cada uma das integrações pode ser feita por partes:

$$H = -\frac{J}{2} \int dy \left[ S_x \frac{\partial S_x}{\partial x} - \int \left( \frac{\partial S_x}{\partial x} \right)^2 dx \right] \pm \frac{J}{2} \int dx \left[ S_x \frac{\partial S_x}{\partial y} - \int \left( \frac{\partial S_x}{\partial y} \right)^2 dy \right] \pm \\ -\frac{J}{2} \int dx \left[ S_y \frac{\partial S_y}{\partial y} - \int \left( \frac{\partial S_y}{\partial y} \right)^2 dy \right] \pm \frac{J}{2} \int dy \left[ S_y \frac{\partial S_y}{\partial x} - \int \left( \frac{\partial S_y}{\partial x} \right)^2 dx \right] \pm \\ -\frac{J}{2} \int dy \left[ S_z \frac{\partial S_z}{\partial x} - \int \left( \frac{\partial S_z}{\partial x} \right)^2 dx \right] \pm \frac{J}{2} \int dx \left[ S_z \frac{\partial S_z}{\partial y} - \int \left( \frac{\partial S_z}{\partial y} \right)^2 dy \right], \quad (\text{A.8})$$

que pode ser reescrita, convenientemente como:

$$H = -\frac{J}{2} \left\{ -\iint \left[ (\vec{\nabla} S)^2 dx dy \right] + \int dx \left( \bar{S} \cdot \frac{\partial \bar{S}}{\partial y} \right) + \int dy \left( \bar{S} \cdot \frac{\partial \bar{S}}{\partial x} \right) \right\}. \quad (\text{A.9})$$

Pode-se usar o vínculo não linear  $|\bar{S}|^2 = S^2 \equiv 1$ , para mostrar que as duas últimas integrais são iguais a zero. Fica-se então com:

$$H = \frac{J}{2} \iint \left[ (\vec{\nabla} S)^2 dx dy \right]. \quad (\text{A.10})$$

que é o chamado modelo  $\sigma$  não linear (M $\sigma$ NL), estritamente válido para o plano.

Modelos com anisotropia podem ser aproximados de forma semelhante. A seguir estuda-se aquele que apresenta anisotropia XY.

Tal aproximação contínua poderia ter sido feita para o caso antiferromagnético,  $J < 0$ . Nesse caso,  $\vec{S}$  deve ser substituído pelo vetor de Néel  $\vec{\eta} \equiv \frac{1}{2}(\vec{S}_1 - \vec{S}_2)$ , onde os sub-índices referem-se a sub-redes diferentes. Este vetor representa a magnetização de sub-rede, que no limite de baixas temperaturas e fracos campos externos, representa o campo de *spins* [29].

## A.2 Modelo XY

Como foi dito anteriormente, é inviável resolver problemas “reais” que envolvam algo em torno de  $10^{23}$  partículas, nesse sentido, é conveniente que seja obtida uma aproximação contínua também para o modelo XY, dado por:

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} (S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y), \quad (\text{A.11})$$

que difere de (A.1) por não conter a componente  $S^z$ , explicitamente.

Pode-se seguir de maneira idêntica até a equação (A.6), porém obviamente, retirando  $S^z$ . Tem-se então:

$$H = -\frac{J}{2} \iint \frac{dx dy}{a^2} \left[ 4(S_x^2 + S_y^2) + a^2 (\nabla^2 S_x) S_x + a^2 (\nabla^2 S_y) S_y \right], \quad (\text{A.12})$$

onde a primeira integral pode ser reescrita como:

$$\iint \frac{dx dy}{a^2} (1 - S_z^2) = \iint \frac{dx dy}{a^2} + \iint \frac{dx dy}{a^2} (-S_z^2), \quad (\text{A.13})$$

usando o vínculo não linear  $|\vec{S}|^2 = S^2 = 1$ . A primeira dessas duas últimas integrais deve ser zero, uma vez que, como anteriormente corresponde à energia do estado fundamental. Fica-se apenas com:

$$H = -\frac{J}{2} \iint \frac{dx dy}{a^2} \left[ -4S_z^2 + a^2 (\nabla^2 S_x) S_x + a^2 (\nabla^2 S_y) S_y \right]. \quad (\text{A.14})$$

A segunda parte pode ser resolvida de maneira semelhante ao caso isotrópico levando a:

$$H = -\frac{J}{2} \iint \left\{ \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \left( \frac{\partial S^\alpha}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S^\alpha}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{4}{a^2} (S_z)^2 \right\} dx dy \quad (\text{A.15})$$

Essas aproximações (estáticas, tempo-independente) foram feitas tratando-se  $\bar{S}$  como um legítimo vetor de spin. Isto quer dizer que, estritamente, seus limites só valem para o caso ferromagnético,  $J > 0$ .

# Apêndice B

## A Pseudo-Esfera

Como foi dito, a pseudo-esfera possui curvatura constante e negativa, e não pode ser visualizada em um espaço euclidiano; no entanto, pode ser “embebida” em um espaço tipo-Minkowski (2+1)D, cujo elemento de linha finito é dado por:

$$x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 = R^2; \quad (\text{B.1})$$

Todo o texto que segue, é consequência dessa característica.

Uma isometria (transformação geométrica) arbitrária da pseudo-esfera pode ser representada por uma “transformação de Lorentz” atuando em  $(x_1, x_2, x_3)$ . Sendo assim, todas as isometrias da pseudo-esfera podem ser geradas por produtos de três tipos:

- (a) rotações euclidianas por um ângulo  $\varphi_0$  no plano  $(x_1, x_2)$ ,
- (b) “transformações de Lorentz” ou “*boosts*” de  $\tau_0$  ao longo de alguma direção no plano  $(x_1, x_2)$ . O parâmetro  $\tau_0$  tem, por analogia, o papel do ângulo para uma rotação. Na Relatividade Especial,  $\tanh \tau_0 = v/c$ , onde  $v$  é a velocidade relativa entre os referenciais.

Essas são as duas isometrias que preservam a orientação, ou “grupo restrito de Lorentz”. Por último, tem-se também:

- (c) simetrias através dos planos que contêm o eixo central  $x_3$ , que invertem a orientação no plano  $(x_1, x_2)$ . As matrizes de transformação para esses três tipos são, respectivamente:

$$R_{\varphi_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_0 & -\text{sen} \varphi_0 \\ 0 & \text{sen} \varphi_0 & \cos \varphi_0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$



$$T_{\tau_0} = \begin{pmatrix} \cosh \tau_0 & \sinh \tau_0 & 0 \\ \sinh \tau_0 & \cosh \tau_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ (boost na direção } x_1), \quad (\text{B.3})$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

Uma re-parametrização de (B.1) usando coordenadas pseudo-esféricas polares  $(\tau, \varphi)$  é:

$$\begin{aligned} x_1 &= R \sinh \tau \cos \varphi, \\ x_2 &= R \sinh \tau \sin \varphi, \\ x_3 &= R \cosh \tau, \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

onde  $\tau \in [0, \infty)$  e  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ;  $(x_1; x_2; x_3)$  são as coordenadas de um vetor  $x$  num espaço de “Minkowski (2+1)D”, e conseqüentemente satisfazem a relação:  $x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 = R^2$ . O elemento de linha infinitesimal:

$$ds^2 = dx_3^2 - dx_1^2 - dx_2^2, \quad (\text{B.6})$$

transforma-se em:

$$ds^2 = R^2 [d\tau^2 + \sinh^2(\tau) d\varphi^2], \quad (\text{B.7})$$

de onde vê-se que  $R\tau$  mede também a distância geodésica radial.

Observa-se que fazendo  $x_3 = \eta_3$ ,  $x_1 = i\eta_1$ ,  $x_2 = i\eta_2$  e  $\tau = i\theta$  obtém-se formalmente  $\eta_3^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 = R^2$  e  $ds^2 = (i d\sigma)^2$  onde  $d\sigma^2$  é o elemento de linha na esfera;

$$d\sigma^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (\text{B.8})$$

Assim, é possível a qualquer momento comparar essa formulação com sua análoga esférica. Para uma superfície plana, o elemento de linha é em coordenadas polares  $(r, \phi)$ :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (\text{B.9})$$

A comparação das equações (B.7), (B.8), (B.9) exhibe claramente a curvatura negativa da pseudo-esfera. Se a curvatura é zero, uma circunferência de raio  $r$  ou  $\tau$  centrado na origem aumenta linearmente com  $r$  ou  $\tau$ ; menos do que linearmente se a curvatura for positiva (no caso da esfera); e aumenta exponencialmente no caso da pseudo-esfera, que possui uma

curvatura negativa (a Figura B.1 ilustra o caso de retas paralelas em cada uma dessas superfícies). Isso implica em curvatura negativa na origem; e em toda parte, desde que a superfície seja homogênea. De fato, se o elemento de linha é dado pela forma padrão  $ds^2 = d\tau^2 + f(\tau)^2 d\varphi^2$ , a curvatura gaussiana  $K$  nesse ponto,  $(\tau, \varphi)$ , é dada por  $K = -(1/f)(\partial^2 f / \partial \tau^2)$ . Assim, a curvatura gaussiana da superfície  $-x_3^2 + x_1^2 + x_2^2 = -R^2$  é  $-1/R^2$ . Fazendo  $R = 1$  tem-se  $K = -1$ . Esta convenção coloca as distâncias em unidades de  $R$ , fazendo desse modo todas as coordenadas adimensionais. Daqui por diante, assume-se  $R = 1$ .

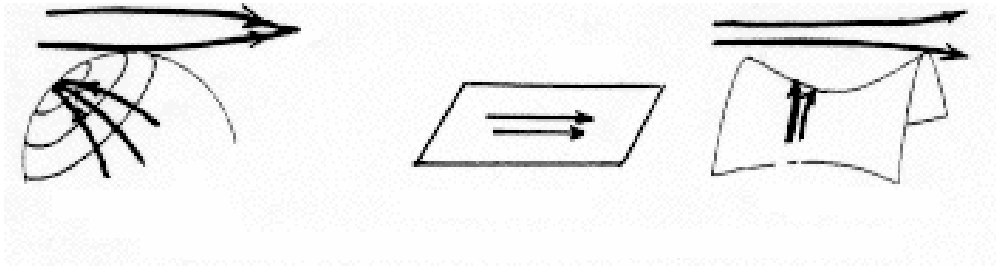


Figura B.1: Esquema de “retas paralelas” em superfícies com curvatura: positiva (esquerda), nula (centro), e negativa (direita).

Das coordenadas pseudo-esféricas  $(\tau, \varphi)$  é possível deduzir uma nova descrição para a pseudo-esfera que é mais conveniente para cálculos; o Disco de Poincaré. Tal Disco, como dito na seção 2.3, é a imagem da projeção estereográfica no plano  $(x, y)$  de um hiperbolóide acima do disco, (veja figura B.2). A imagem do ponto cujas coordenadas são:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sinh \tau \cos \varphi, \\ x_2 &= \sinh \tau \sin \varphi, \\ x_3 &= \cosh \tau \end{aligned} \tag{B.10}$$

terá, as coordenadas polares  $(r, \varphi)$  neste disco, sendo;

$$r = \frac{\sinh(\tau)}{1 + x_3} = \frac{\sinh(\tau)}{1 + \cosh(\tau)} = \tanh\left(\frac{\tau}{2}\right),$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \varphi. \quad (\text{B.11})$$

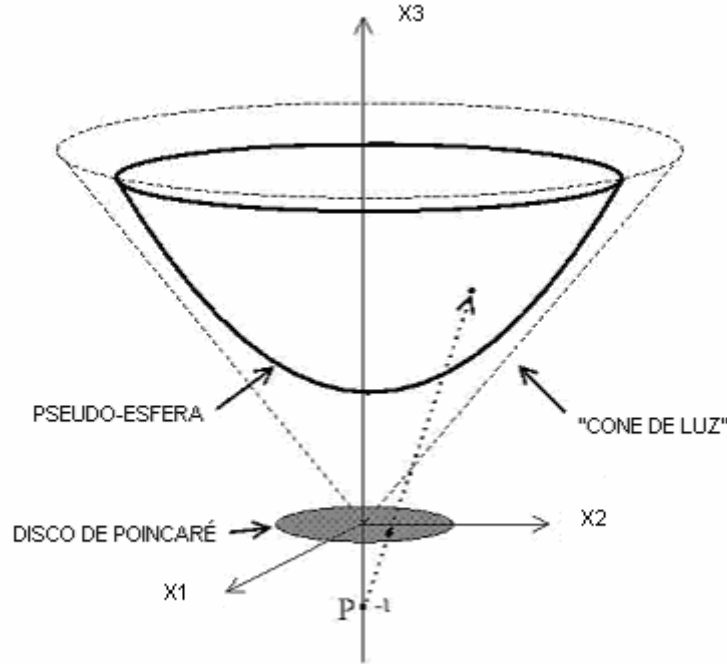


Figura B.2: Método do disco de Poincaré para obter a pseudo-esfera (a folha superior do hiperbolóide) através do ponto de projeção  $P = -1$ , no eixo  $z$ : cada ponto do disco,  $(r, \varphi)$ , é mapeado em outro na folha,  $(\tau, \varphi)$ , de modo que a borda do disco seja levada ao infinito.

O contorno do disco ( $r = 1$ ), corresponde a pontos do hiperbolóide que estão no infinito ( $\tau = +\infty$ ); ou no contorno do cone de luz. A própria pseudo-esfera é representada pelo interior do disco unitário, onde o elemento de linha fica, por substituição de variáveis,

$$ds^2 = (d\tau^2 + \sinh^2 \tau d\varphi^2) = \frac{4(dr^2 + r^2 d\varphi^2)}{(1-r^2)^2} = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{[1-(x^2 + y^2)]^2}, \quad (\text{B.12})$$

onde  $(x, y)$  são coordenadas cartesianas no disco e  $r^2 = x^2 + y^2$ . De (B.12), como também já foi dito, pode-se obter a métrica e o elemento de superfície desse espaço.

Essa métrica é conformal (proporcional à métrica euclidiana do plano em cada ponto), os ângulos para essa métrica coincidem com os ângulos euclidianos; as distâncias, entretanto, são distorcidas. Tudo se passa como se esse disco fosse um disco usual, porém, levando em conta “efeitos relativísticos”, no sentido de que a cada valor de  $r$ , deve ser

associada uma “velocidade”, e à medida que  $\gamma$  (e conseqüentemente a “velocidade” associada) varia, o modulo de um segmento de reta também varia, e varia exatamente com um “*boost*” de Lorentz dado por (B.3). A Fig. (B.3) ilustra o texto que segue.

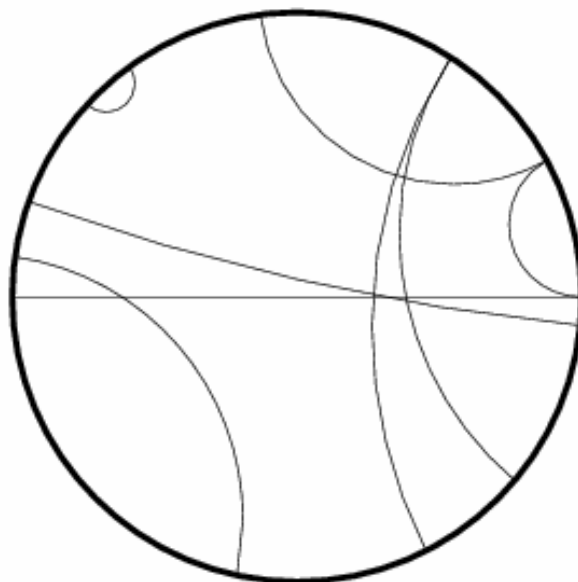


Figura B.3: Representação de algumas curvas no disco de Poincaré.

As linhas são representadas como arcos de círculos cujas extremidades são perpendiculares ao contorno do disco (linhas diametrais também são permitidas). Dois arcos que não se encontram, correspondem a retas paralelas, arcos que se encontram ortogonalmente correspondem a linhas perpendiculares, e arcos que se encontram apenas no contorno do disco são um par de “retas limites”.

# Apêndice C

## Equações de Movimento na Pseudo-Esfera

Aqui são encontradas as equações de movimento para as variáveis de *spin* (ângulos internos, da esfera de spin  $\Theta$  e  $\Phi$ ), em função das coordenadas do espaço físico em questão, a pseudo-esfera. Essas equações permitirão que sejam encontradas as excitações topológicas procuradas.

Para encontrar tais equações, faz-se uso do cálculo de variações, que envolve problemas nos quais a quantidade a ser minimizada ou maximizada aparece na forma de uma integral estacionária;  $K = \int f(u, \partial_{x_i} u, x_i) dx_i$ , aqui K é a quantidade que assume um valor estacionário [30]. As equações de movimento associadas a essa quantidade são dadas por:

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\partial f}{\partial (\partial_{x_i} u)} \right] = 0. \quad (C.1)$$

Uma vez que a aproximação contínua do modelo de Heisenberg em coordenadas pseudo-esféricas aparece na forma de uma integral estacionária (a energia é conservada,  $dH/dt = 0$ ), pode-se utilizar a expressão (C.1) para encontrar as equações de movimento. O hamiltoniano é dado por:

$$H = J \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty d\tau \left\{ \sinh \tau \left[ (1 + \lambda \sin^2 \Theta) (\partial_\tau \Theta)^2 + \sin^2 \Theta (\partial_\tau \Phi)^2 \right] + \frac{\left[ (1 + \lambda \sin^2 \Theta) (\partial_\varphi \Theta)^2 + \sin^2 \Theta (\partial_\varphi \Phi)^2 \right]}{\sinh \tau} \right\}, \quad (C.2)$$

de onde se obtém:

$$\frac{\partial h}{\partial \Theta} = 2 \sin \Theta \cos \Theta \left\{ \frac{\lambda (\partial_\varphi \Theta)^2 + (\partial_\varphi \Phi)^2}{\sinh \tau} + \sinh \tau [\lambda (\partial_\tau \Theta)^2 + (\partial_\tau \Phi)^2] \right\}, \quad (\text{C.3})$$

onde  $h$  é o integrando em (C.2).

Tem-se também:

$$\frac{\partial h}{\partial (\partial_\tau \Theta)} = (1 + \lambda \sin^2 \Theta) 2 \sinh \tau \partial_\tau \Theta, \quad (\text{C.4})$$

$$\frac{\partial h}{\partial (\partial_\varphi \Theta)} = (1 + \lambda \sin^2 \Theta) \frac{2}{\sinh \tau} \partial_\varphi \Theta, \quad (\text{C.5})$$

que são as derivadas necessárias para que se possa utilizar (C.1) e encontrar a primeira equação referente às derivadas em  $\Theta$ ; substituindo (C.3), (C.4) e (C.5) em (C.1) encontra-se:

$$2 \sin \Theta \cos \Theta \left\{ \frac{\lambda (\partial_\varphi \Theta)^2 + (\partial_\varphi \Phi)^2}{\sinh \tau} + \sinh \tau [\lambda (\partial_\tau \Theta)^2 + (\partial_\tau \Phi)^2] \right\} = \\ \partial_\tau \left[ (1 + \lambda \sin^2 \Theta) 2 \sinh \tau \partial_\tau \Theta \right] + \partial_\varphi \left[ (1 + \lambda \sin^2 \Theta) \frac{2}{\sinh \tau} \partial_\varphi \Theta \right]. \quad (\text{C.6})$$

De maneira análoga, é possível encontrar as derivadas referentes à  $\Phi$ :

$$\frac{\partial h}{\partial \Phi} = 0, \quad (\text{C.7})$$

$$\frac{\partial h}{\partial (\partial_\tau \Phi)} = 2 \sinh \tau \sin^2 \Theta \partial_\tau \Phi, \quad (\text{C.8})$$

$$\frac{\partial h}{\partial (\partial_\varphi \Phi)} = \frac{2 \sin^2 \Theta}{\sinh \tau} \partial_\varphi \Phi, \quad (\text{C.9})$$

que ao serem substituídas em (C.1), levam a:

$$\partial_\tau \left( \sinh \tau \sin^2 \Theta \partial_\tau \Phi \right) + \partial_\varphi \left( \frac{\sin^2 \Theta}{\sinh \tau} \partial_\varphi \Phi \right) = 0. \quad (\text{C.10})$$

As equações (C.6) e (C.10) são as equações de movimento em coordenadas pseudo-esféricas associadas ao hamiltoniano (C.2).

# Apêndice D

## Soluções da equação de *sine*-Gordon

Antes de falar-se dos *sólitons*, é conveniente e didático, que se tenha em mente o significado de outro objeto, as ondas solitárias. Embora não haja uma definição geral para ondas solitárias, elas apresentam uma característica marcante; (i) a densidade de energia (função do campo, cuja integral no espaço é a energia total conservada) deve mover-se sem distorção e com velocidade constante. *Sóliton* é um tipo específico de onda solitária, que além de apresentar a característica anterior, também apresenta: (ii) os perfis de densidade de energia são assintoticamente ( $t \rightarrow \infty$ ) restabelecidos às suas forma e velocidade originais, após uma colisão [16].

O texto da Ref. [34] é clássico, e será a base para a discussão a seguir.

### D.1 Ondas Solitárias

Seja a seguinte densidade lagrangeana em (1+1)D para um campo escalar  $\phi(x, t)$ :

$$L(x, t) = \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 - \frac{1}{2}(\phi')^2 - U(\phi), \quad (\text{D.1})$$

de onde pode-se obter:

$$\ddot{\phi} - \phi'' = -\frac{\partial U}{\partial \phi}(\phi(x, t)). \quad (\text{D.2})$$

A energia total é dada por:

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2}(\phi')^2 + U(\phi) \right]. \quad (\text{D.3})$$

Assumindo que os mínimos absolutos de  $U(\phi)$ , ocorram para os seguintes casos:

$$U(\varphi) = 0 \text{ para } \varphi = g^{(i)}; \\ i = 1, \dots, M. \quad (\text{D.4})$$

Nota-se então, que a energia também é minimizada para  $\varphi(x, t)$  constante no espaço-tempo, assumindo algum dos valores  $g^{(i)}$ . Além do mais, no caso estático, (D.2) toma a forma:

$$\varphi''(x) \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial \varphi}(\varphi(x)). \quad (\text{D.5})$$

Como foi dito, uma onda solitária deve ter energia finita e uma densidade de energia localizada. De (D.4), vê-se que  $\varphi$  deve aproximar-se de um dos valores de  $g^{(i)}$ , quando  $x \rightarrow \pm\infty$ . Se  $U(\varphi)$  tem um único mínimo em  $\varphi = g$ , então a solução estática deve ter  $\varphi(x) \rightarrow g$ , quando  $x \rightarrow \pm\infty$ . Se houver diversos mínimos degenerados ( $M > 1$  em (D.4)), então  $\varphi(x)$  deve tender a algum dos  $g^{(i)}$  quando  $x \rightarrow -\infty$ , e a este ou outro qualquer quando  $x \rightarrow +\infty$ . Sujeito a essas condições de contorno pode-se resolver (D.5) para  $\varphi(x)$ . Desde que esta seja uma EDO de segunda ordem, ela pode ser resolvida para todo  $U(\varphi)$ .

Se  $x$  for pensado como sendo o “tempo”, e em  $\varphi$  como sendo a coordenada de uma partícula massiva, então (D.5) torna-se a segunda lei de Newton para o movimento dessa partícula em um potencial dado por  $-U(\varphi)$ . A solução  $\varphi(x)$  representa o movimento dessa “partícula análoga”. A energia total do movimento, que é conservada no “tempo”,  $x$ , é dada por:

$$W \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 - U(\varphi). \quad (\text{D.6})$$

As condições de contorno discutidas anteriormente demandam que para  $x \rightarrow \pm\infty$ ,  $U(\varphi) \rightarrow 0$  e  $\partial\varphi/\partial x \rightarrow 0$ , o que dá  $W = 0$ . A energia  $W$  da partícula análoga não deve ser confundida com a energia  $E$ , dada por (D.3), do sistema original do campo. Para uma solução estática  $\varphi(x)$ ,  $E$  é dado por:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + U(\varphi) \right] dx, \quad (\text{D.7})$$



e representa a ação total do movimento da “partícula análoga”. A solução estática corresponde assim, à trajetória de uma partícula cuja ação é finita e a energia é nula. Finalmente, multiplicando (D.5) por  $\varphi'$  e integrando uma vez, tem-se:

$$\int \varphi' \varphi'' dx = \int \frac{dU}{d\varphi} \varphi' dx, \quad (\text{D.8})$$

ou

$$\frac{1}{2}(\varphi')^2 = U(\varphi). \quad (\text{D.9})$$

Já que  $\varphi'$  e  $U(\varphi)$  anulam-se em  $x \rightarrow -\infty$ , a constante de integração é zero.

De posse dessa “mecânica”, considera-se primeiramente  $U(\varphi)$  apresentando um único mínimo,  $\varphi_{\min} \equiv \varphi_1$  onde  $U(\varphi_1) = 0$ . A “partícula análoga” vê um potencial  $-U(\varphi)$ , com um máximo em  $\varphi = \varphi_1$  e um valor negativo para todos os outros valores de  $\varphi$ . As condições de contorno especificadas exigem uma trajetória começando e terminando em  $\varphi = \varphi_1$  com energia nula, tanto no “futuro” quanto no “passado” distantes ( $x \rightarrow \pm\infty$ ). Se se olha o potencial  $-U(\varphi)$  (veja figura D.1) vê-se que tal movimento é impossível.

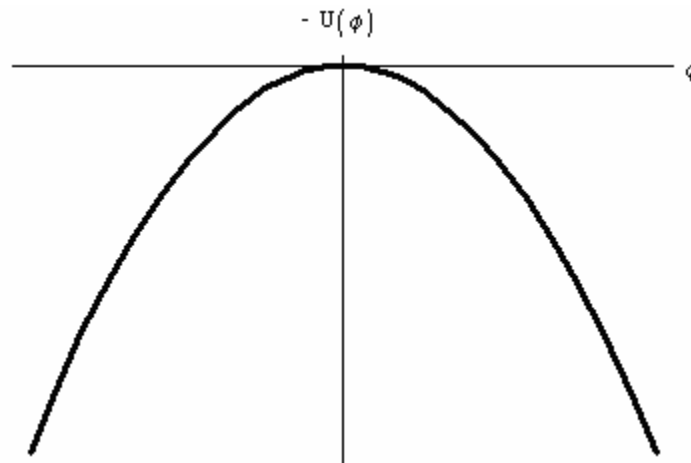


Figura D.1: O potencial  $[-U(\varphi)]$  da “partícula análoga”, para o caso em que  $U(\varphi)$  tem um único mínimo.

Uma vez que a partícula “toca”  $\varphi = \varphi_1$  em qualquer dos sentidos, ela não retornará, ou seja, sua energia cinética nunca será zero novamente, desde que sua energia total  $W = 0$  seja sempre maior que a energia potencial  $-U(\varphi)$ . Conseqüentemente, a partícula nunca poderá

retornar à  $\varphi_1$ . Em termos da solução de campo estática  $\varphi(x)$ , isso significa que uma vez fixadas as condições de contorno, como  $\varphi = \varphi_1$  e  $d\varphi/dx = 0$  em  $x = -\infty$ , a mesma condição não será satisfeita em  $x = +\infty$  por uma solução não-singular e não-trivial. Conseqüentemente, sem explicitamente resolver-se (D.5) e independente dos detalhes de  $U(\varphi)$ , foi visto que se  $U(\varphi)$  tiver um único mínimo absoluto, não pode haver nenhuma onda solitária estática. Naturalmente, a solução trivial  $\varphi(x) = \varphi_1$  para todo  $x$ , é permitida.

Em seguida, deixa-se  $U(\varphi)$  ter dois ou mais mínimos degenerados (veja figura D.2).

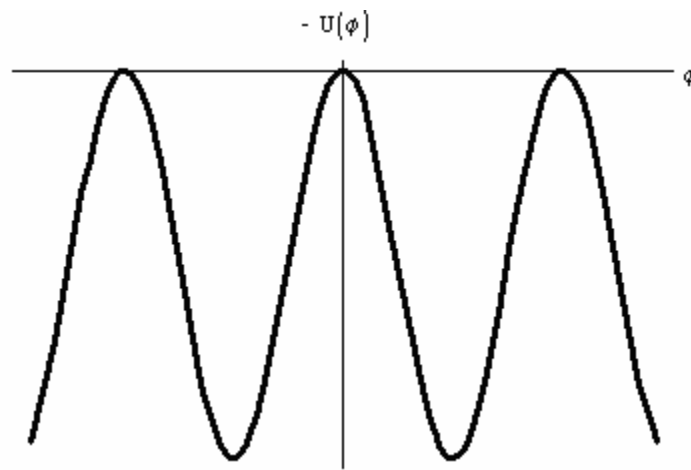


Figura D.2: O potencial  $[-U(\varphi)]$  da “partícula análoga”, para o caso em que  $U(\varphi)$  tem três mínimos degenerados discretos.

Novamente o potencial da “partícula análoga” é plotado, correspondendo a um exemplo onde  $U(\varphi)$  tem três mínimos,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ . As condições de contorno indicam agora que a partícula deve deixar qualquer um desses pontos em  $x = -\infty$  e terminar em  $x = +\infty$  em qualquer deles. Isso agora é possível. Ela pode começar em  $\varphi_1$  para  $x = -\infty$ , e chegar a  $\varphi_2$  assintoticamente  $x \rightarrow +\infty$ . Alternativamente, pode começar em  $\varphi_2$  e terminar em  $\varphi_3$  (que corresponderiam aos *sólitons*), ou fazer o caminho inverso dos dois movimentos (que corresponderiam aos *anti-sólitons*). Essas são as quatro únicas possibilidades para esse exemplo. Ela não pode, por exemplo, sair de  $\varphi_1$  ir até  $\varphi_2$  e retornar até  $\varphi_1$  ou ir até  $\varphi_3$ . Para isso, note que ambas a “velocidade” ( $\psi'$ ) e a “aceleração” ( $\psi''$ ) desaparecem. Mais,

$$\begin{aligned}\varphi''' &= \frac{d}{dx} \left( \frac{dU(\varphi)}{d\varphi} \right) = \frac{d^2U}{d\varphi^2} \varphi' = 0, \\ \varphi'''' &= \frac{d^2U}{d\varphi^2} \varphi'' + \frac{d^3U}{d\varphi^3} (\varphi')^2 = 0,\end{aligned}\tag{D.10}$$

etc. Assim, todas as derivadas  $d^n\varphi/dx^n$  anulam-se em  $\varphi_2$ . A partícula tendo  $\varphi_1$  à esquerda, nunca poderá ter  $\varphi_2$  também à sua esquerda em  $x \rightarrow \infty$ , onde todas as derivadas do seu movimento desaparecem. Ela não pode retornar a  $\varphi_1$  ou prosseguir até  $\varphi_3$ .

Assim, a analogia mecânica ajuda a concluir que: (i) quando  $U(\varphi)$  tem um único mínimo absoluto, não pode haver nenhuma onda solitária estática, e (ii) quando  $U(\varphi)$  tem  $n$  mínimos degenerados discretos, podemos ter  $2(n-1)$  tipos de soluções, conectando quaisquer dois mínimos vizinhos, com  $x$  variando de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Naturalmente compreende-se que a solução trivial espaço-tempo independente, pode existir adicionalmente.

À parte dessas considerações gerais pode-se resolver (D.5) explicitamente. Tem-se, de (D.9),

$$d\varphi/dx = \pm [2U(\varphi)]^{1/2}.\tag{D.11}$$

De onde se tem,

$$x - x_0 = \pm \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} \frac{d\bar{\varphi}}{[2U(\bar{\varphi})]^{1/2}},\tag{D.12}$$

$x_0$ , é algum ponto arbitrário no espaço, onde o campo tem o valor  $\varphi(x_0)$ . No discurso anterior foi dito que para  $x \rightarrow \pm\infty$ ,  $\varphi(x)$  deveria aproximar-se de quaisquer dois mínimos vizinhos de  $U(\varphi)$ , e para valores de  $x$  entre esses extremos,  $\varphi(x)$  deve se encontrar entre esses dois mínimos. Conseqüentemente,  $U(\varphi)$  anular-se-á apenas em  $x \rightarrow \pm\infty$ , e será positivo para valores finitos de  $x$ . O integrando em (D.12) conseqüentemente, será não-singular exceto em  $x \rightarrow \infty$  ou  $x \rightarrow -\infty$ . A solução  $\varphi(x)$  pode ser obtida, a principio, explicitamente, dado um  $x_0$  e um  $\varphi(x_0)$ , por integração de (D.12) e invertendo-a. Na prática, isso só é possível para determinados  $U(\varphi)$ . Note que variando  $x_0$ , mantendo

$\varphi(x_0)$  fixo, meramente “desloca-se” a mesma solução no espaço  $x$ . Isso é uma consequência da invariância translacional de (D.12).

## D.2 Sólitons do modelo de *sine*-Gordon

Discute-se agora, acerca de sistemas, os quais apresentam soluções solitônicas, no sentido de satisfazerem as condições (i) e (ii) colocadas anteriormente. Considere um único campo escalar  $\varphi(x, t)$  em  $(1+1)$  dimensões, governado pela densidade de lagrangeana de *sine*-Gordon:

$$L(x, t) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi) + (m^4/\lambda) \{ \cos[(\sqrt{\lambda}/m)\varphi] - 1 \}. \quad (D.13)$$

Esse modelo tem sido usado no estudo de uma gama de fenômenos, incluindo cristais, membranas, magnetismo e partículas. Pode-se expandir essa densidade lagrangeana em potências de  $\lambda$ ,

$$L(x, t) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 - \frac{\lambda^2}{m^2} \frac{\varphi^6}{6!} + \dots \quad (D.14)$$

Com  $\lambda \rightarrow 0$ , essa é exatamente a lagrangeana (livre) de Klein-Gordon. No entanto, o trabalho será feito diretamente com a lagrangeana total (D.13) e procurará por soluções clássicas que são “não-perturbativas em  $\lambda$ ”. A equação de campo para (D.13) é a equação de *sine*-Gordon:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \nabla \varphi + \left( \frac{m^2}{\sqrt{\lambda}} \right) \sin \left[ \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \right) \varphi \right] = 0. \quad (D.15)$$

[O nome do modelo é inspirado pela presença do termo *sine* comparado com a equação de Klein-Gordon]. Para simplificar, faz-se:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= mx, \quad \bar{t} = mt \text{ e} \\ \bar{\varphi} &= (\sqrt{\lambda}/m)\varphi. \end{aligned} \quad (D.16)$$

Assim, (D.13) fica:

$$\bar{L}(\bar{x}, \bar{t}) = \left( \frac{m^4}{\lambda} \right) \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}^\mu} \right) \left( \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}_\mu} \right) + (\cos \bar{\varphi} - 1) \right]. \quad (D.17)$$

Enquanto (D.15) toma a forma:

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \bar{t}^2} - \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}^2} + \sin \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{t}) = 0, \quad (D.18)$$

Com energia total conservada dada por:

$$E = \frac{m^3}{\lambda} \int d\bar{x} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{t}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + (1 - \cos \bar{\varphi}) \right]. \quad (D.19)$$

A lagrangeana e a equação de campo são invariantes sob:

$$\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{t}) \rightarrow -\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{t}) \quad (D.20)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{t}) &\rightarrow \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{t}) + 2N\pi; \\ N &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (D.21)$$

Consistente com essas simetrias, a energia  $E$  anula-se nos mínimos absolutos de

$$U(\bar{\varphi}) = 1 - \cos \bar{\varphi}, \quad (D.22)$$

que são:

$$\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{t}) = 2N\pi. \quad (D.23)$$

Como foi visto na seção anterior, todas as configurações de energia finita, estática ou dependente do tempo, podem ser divididas em um número infinito de setores topológicos, cada um, caracterizado por um par conservado de índices internos  $(N_1, N_2)$  correspondendo aos valores assintóticos  $2N_1\pi$  e  $2N_2\pi$  que o campo aproxima-se quando  $x \rightarrow -\infty$  e  $x \rightarrow +\infty$  respectivamente (veja figura D.2). Na seção anterior, esses valores assintóticos eram dados pelos  $g^{(i)}$ . Se, por motivos físicos, for decidido que somente o módulo de  $\bar{\varphi}$ ,  $2\pi$  é significativo, como acontece em aplicações onde  $\bar{\varphi}$  é uma variável de ângulo, então somente a carga topológica,

$$Q \equiv N_1 - N_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}} \quad (D.24)$$

importa; no caso da partícula análoga da seção anterior, essa carga estaria associada ao “sentido” do movimento.

Começando com soluções estáticas localizadas. As considerações gerais dizem que para um único campo escalar em um espaço unidimensional, soluções estáticas devem conectar apenas mínimos vizinhos de  $U(\bar{\varphi})$ . Isto é, elas devem possuir  $Q = \pm 1$ , se for pensado em 1 como sendo a diferença entre os N. Observa-se que N pode ter qualquer valor inteiro, porém Q, deve possuir apenas os valores  $\pm Q$  os quais sejam mais favoráveis energeticamente. Soluções explícitas são obtidas usando (D.12):

$$\bar{x} - \bar{x}_0 = \pm \int_{\bar{\varphi}(\bar{x}_0)}^{\bar{\varphi}(\bar{x})} \frac{d\varphi}{\sqrt{2U(\varphi)}} = \pm \int_{\bar{\varphi}(\bar{x}_0)}^{\bar{\varphi}(\bar{x})} \frac{d\varphi}{2 \sin(\varphi/2)}. \quad (\text{D.25})$$

Integrando:

$$\bar{\varphi}(x) = 4 \tan^{-1}[\exp(\bar{x} - \bar{x}_0)] \equiv \bar{\varphi}_{\text{sol}}(\bar{x} - \bar{x}_0) \quad (\text{D.26})$$

ou

$$\bar{\varphi}(x) = -4 \tan^{-1}[\exp(\bar{x} - \bar{x}_0)] \equiv \bar{\varphi}_{\text{antisol}}(\bar{x} - \bar{x}_0) = -\bar{\varphi}_{\text{sol}}. \quad (\text{D.27})$$

A solução (D.26) vai de  $\bar{\varphi} = 0$  até  $\bar{\varphi} = 2\pi$  ou equivalentemente de  $2\pi$  até  $4\pi$ ,  $4\pi$  até  $6\pi$ , etc. Ela corresponde a  $Q = 1$ , e é chamada *sóliton* do sistema. A solução (D.27) tem  $Q = -1$  e é chamada de *anti-sóliton*. Cada uma delas tem energia  $M_s = 8m^3/\lambda$  que pode ser calculada substituindo (D.26) ou (D.27) em (D.19).

# Apêndice E

## Análise da solução tipo *sóliton* na pseudo-esfera

No capítulo 3 foi dito que os *sólitons* eram instáveis apenas por motivos de mapeamento, e não por uma análise energética ou de invariância de escala. É feita agora uma análise do caso isotrópico, no qual  $\lambda = 0$ , com um pouco mais de cuidado. Tem-se, de (3.2):

$$H = J \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} d\tau \left\{ \sinh \tau \left[ (\partial_{\tau} \Theta)^2 + \sin^2 \Theta (\partial_{\tau} \Phi)^2 \right] + \frac{\left[ (\partial_{\varphi} \Theta)^2 + \sin^2 \Theta (\partial_{\varphi} \Phi)^2 \right]}{\sinh \tau} \right\}. \quad (\text{E.1})$$

Assumindo que  $\Phi(\tau, \varphi) = m\phi$ , de maneira que a simetria cilíndrica seja garantida, e definindo, por conveniência,  $u = \ln[\tanh(\tau/2)]$ , tem-se:

$$H = J \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^0 du \left[ \left( \frac{\partial \Theta}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} \right)^2 + m^2 \sin^2 \Theta \right]. \quad (\text{E.2})$$

A fim de analisar a invariância de escala do modelo, introduz-se a seguintes mudanças nas variáveis:  $r' = nr \Rightarrow u' = u + \ln n$ . Essa mudança é equivalente a multiplicar cada eixo cartesiano por um número real e positivo. Note que  $\varphi$  permanece invariante, uma vez que  $\varphi = \arctan(y/x)$ . É feito também, novamente por conveniência a seguinte mudança:  $\theta = 2\Theta$ . Assume-se também  $\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} = 0$  (simetria cilíndrica). Sendo assim, tem-se:

$$H = \frac{J}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\ln n} du' \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial u'} \right)^2 + m^2 (1 - \cos \theta) \right]. \quad (\text{E.3})$$

Cuja equação de movimento associada é:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u'^2} = m^2 \sin \theta, \quad (\text{E.4})$$

essa é a equação de *sine-Gordon* e, como foi visto (ver apêndice C), possui as seguintes soluções:

$$\theta_S = 4 \arctan(e^{\mu' - mc}) = 4 \arctan(e^{\mu + m \ln n - mc}) \Rightarrow \Theta_S = 2 \arctan(e^{\mu - mc + m \ln n}), \quad (\text{E.5})$$

$$\theta_{AS} = \pi - 4 \arctan(e^{\mu' - mc}), \quad (\text{E.6})$$

onde os sub-índices S e AS, referem-se respectivamente à solução tipo *sóliton* e anti-*sóliton*. Antes de retornar às variáveis originais, onde as análises devem ser feitas, pode-se integrar (E.3) utilizando (E.5) para obter:

$$H = \frac{8\pi J m n^{2m}}{e^{4mc} + n^{2m}}, \quad (\text{E.7})$$

que é uma expressão geral para a energia. Voltando agora às variáveis originais, lembrando que  $c = u_0 + \ln n \Rightarrow c = \ln(r_0/R) + \ln n \Rightarrow c = \ln(nr_0/R)$ , o que leva a:

$$\Theta = 2 \arctan \left[ \left( \frac{r}{r_0} \right)^m \right], \quad (\text{E.8})$$

e à sua correspondente energia:

$$H = \frac{8\pi J m n^{2m}}{(nr_0/R)^{4m} + n^{2m}}. \quad (\text{E.9})$$

Ao analisar (E.9), nota-se que existem duas análises a serem feitas, a primeira delas diz respeito à dependência em  $m$  e  $n$ , enquanto a segunda é relativa à dependência em  $r_0$ . Para fazer uma análise da dependência em  $m$  e  $n$ , existem mais duas possibilidades,  $r_0 \neq 0$  e  $r_0 = 0$ . Quando  $r_0 \neq 0$ , permanece uma dependência tanto em  $m$  quanto em  $n$ ; com relação a  $m$ , a dependência é como se esperava, quão maior/menor for  $m$ , maior/menor será a energia. (a energia aumenta/diminui à medida que  $\Phi$  “gira” mais/menos com a variação de  $\varphi$ ). A dependência em  $n$  mostra que nesse caso não há invariância de escala, ou seja, há uma escala “preferencial” na qual o sistema tende a permanecer (a energia aumenta/diminui à medida que  $n$  diminui/aumenta). No entanto, se  $r_0 = 0$ , a energia independe de  $n$ , sendo assim, o sistema torna-se invariante de escala, dependendo apenas da variação de  $m$ , com comportamento semelhante ao descrito anteriormente.

Analisando agora a dependência em  $r_0$  (veja Figura E.1), que corresponde ao local onde  $\Theta = \pi/2$ , tem-se o seguinte comportamento:



$$H = \begin{cases} 8\pi J; & r_0 = 0 \\ 4\pi J; & r_0 = R \end{cases}, \quad (\text{E.10})$$

onde adotou-se  $m = n = 1$ .

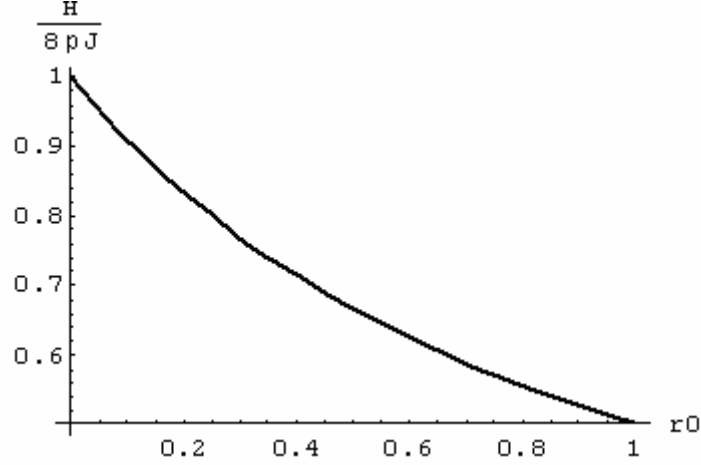


Figura E.1: Energia em função de  $r_0$  ( $m = n = 1$ ).

Nota-se, portanto, que os valores mais favoráveis energeticamente são  $r_0 = R$ ,  $n \rightarrow \infty$  e  $m \rightarrow 0$ . Ou seja, há uma escala preferencial na qual  $n \rightarrow \infty$ ; de onde se pode concluir que o *sóliton* não é estável, porém agora por outro motivo que não aquele da seção 3.2. A maneira de garantir tal estabilidade foi discutida na seção 3.2, e consiste basicamente em introduzir uma obstrução topológica no suporte físico, impedindo assim que o *sóliton* decaia ao estado fundamental.

Uma interpretação possível para  $r_0$  e que talvez seja condizente com os resultados acima, é imaginá-lo como sendo a “posição de formação” do *sóliton* (local onde  $\Theta = \pi/2$ ). Pode-se ver de (E.8), que para esses mesmos valores de  $r_0$  (veja figura E.2), obtém-se como resultado quando  $r$  varia de 0 a  $R$ , um *half- $\pi$*  *sóliton* que no primeiro caso, vai de  $\pi/2$  à  $\pi$ , e no segundo, de 0 à  $\pi/2$ . Esses resultados são extremamente curiosos, pois se tem a princípio o mesmo objeto, porém, com energias diferentes! A interpretação que segue é a seguinte: ao integrar a energia de maneira explícita, tem-se:

$$E_s = J \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\tau_0} d\tau \left[ \sinh(\tau) (\partial_\tau \Theta_s)^2 + \frac{\sin^2(\Theta_s)}{\sinh(\tau)} \right] +$$

$$\int_{\tau_0}^{\infty} d\tau \left[ \sinh(\tau) (\partial_{\tau} \Theta_s)^2 + \frac{\sin^2(\Theta_s)}{\sinh(\tau)} \right], \quad (\text{E.11})$$

que resulta em:

$$E_s = 2\pi J [2 + 2 \operatorname{sech}(\tau_0)], \quad (\text{E.12})$$

que por sua vez, pode ser convertida em:

$$E_s = 2\pi J \{2 + 2 \operatorname{sech}[2 \operatorname{arctanh}(r_0/R)]\}, \quad (\text{E.13})$$

observa-se que a parte “interna”  $[0 < r < r_0(\tau_0)]$  resulta sempre em 2, independente do valor de  $r_0$ , assim, quanto mais próximo de 0 estiver  $r_0$ , mais suporte físico o sóliton terá até chegar em  $R$ , e conseqüentemente, maior será sua energia.

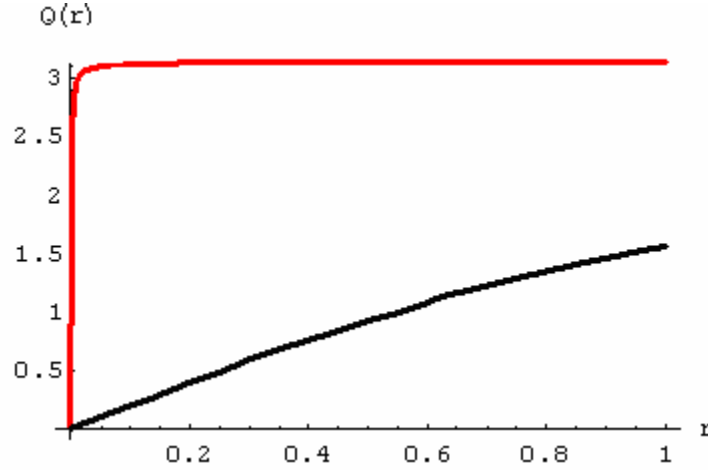


Figura E.2: A variável  $\Theta$  em função de  $r$ , para  $r_0 = 0$  (vermelho) e  $r_0 = R$  (preto).

Uma observação válida a ser feita, diz respeito ao intervalo de integração em (E.11). Quando se considera  $\tau$  começando em 0, deve-se lembrar que esse valor corresponde ao  $\bar{\tau}$ , exigido na seção 3.2 para garantir a estabilidade do *sóliton*.

Toda a análise foi feita em  $r$ , a variação radial no disco de Poincaré, porém, poderia também ter sido feita na própria superfície da pseudo-esfera, onde se teria:

$$\Theta = 2 \operatorname{arctan} \left[ \left( \frac{\tanh(\tau/2)n}{\tanh(\tau_0/2)} \right)^m \right], \quad (\text{E.14})$$

$$H = \frac{8\pi Jm}{1 + n^{2m} \tanh^{4m}(\tau_0/2)}. \quad (\text{E.15})$$

# Apêndice F

## Energia de dois vórtices

A base para a discussão a seguir, será o texto da Ref. [25].

Um cálculo alternativo para a energia dos vórtices, e que é mais facilmente generalizado para o caso de dois vórtices, utiliza o fato de  $v_s \equiv \vec{\nabla}\Phi$  ser uma variável contínua com a variação de  $\Phi$ . Um corte ao longo de  $\Phi$  leva a uma descontinuidade de  $2Q\pi$  como mostrado na Figura F.1. Este corte gera duas superfícies  $\Sigma^-$  e  $\Sigma^+$ ,  $\Phi$  é zero em  $\Sigma^-$  e  $2Q\pi$  em  $\Sigma^+$ . As normais à  $\Sigma^-$  e à  $\Sigma^+$  estão nas direções  $-\hat{e}_\phi$  e  $\hat{e}_\phi$  respectivamente. A energia do vórtice é obtida de uma integração por partes usando o fato de que  $\nabla^2\Phi = 0$  e  $\nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) = (\nabla \Phi)^2 + \Phi \nabla^2 \Phi$ . Tem-se:

$$\begin{aligned} E &= \int (\nabla \Phi)^2 d^2x = \int \nabla \cdot (\Phi \nabla \Phi) d^2x - \int \Phi \nabla^2 \Phi d^2x \\ &= \int \Phi h_s \cdot d\Sigma - \int \Phi \nabla^2 \Phi d^2x, \end{aligned} \quad (F.1)$$

onde se introduziu o campo,

$$h_s = Jv_s, \quad (F.2)$$

conjugado a  $v_s$ , e utilizou-se o teorema de Green na passagem da integral de superfície para integral de linha.

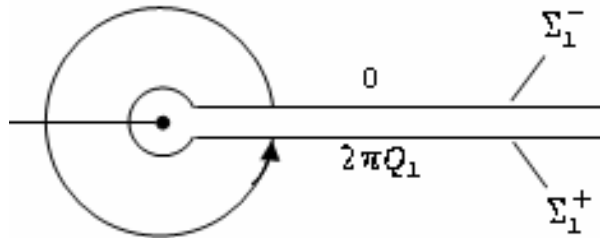


Fig. F.1: Representação do corte inserido em  $\Phi$ , para o caso de um único vórtice.

A integral de superfície é feita sobre os dois lados do corte, e como  $\nabla^2\Phi = 0$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
E &= \int \Phi^+ \mathbf{h}_s \cdot d\Sigma^+ + \int \Phi^- \mathbf{h}_s \cdot d\Sigma^- \\
&= (\Phi^+ - \Phi^-) \int_a^L J |v_s| dr \\
&= 2\pi Q^2 J \ln(L/a),
\end{aligned} \tag{F.3}$$

que reproduz o resultado encontrado na seção 3.3, sendo  $a$  (tamanho do caroço) e  $L$  (tamanho do sistema), “escalas de corte” introduzidas para garantir energia finita ao vórtice.

A energia de interação entre dois vórtices pode ser calculada de maneira semelhante pela introdução de um corte para cada vórtice, como mostrado na Fig. F.2. A solução da equação de Laplace com dois vórtices, nas posições  $x_1$  e  $x_2$ , é  $\Phi(x) = \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)}$ , onde  $\Phi^{(i)} = \arctan[(y - y_i)/(x - x_i)]$ . Assumindo  $v_s^{(1)} = \nabla\Phi^{(1)}$  e  $v_s^{(2)} = \nabla\Phi^{(2)}$ , a energia de dois vórtices com respectivas cargas  $Q_1$  e  $Q_2$  é:

$$\begin{aligned}
E &= J \int (v_s^{(1)} + v_s^{(2)})^2 d^2x \\
&= E_1 + E_2 + \int (\mathbf{h}_s^{(1)} \cdot v_s^{(2)} + \mathbf{h}_s^{(2)} \cdot v_s^{(1)}) d^2x \\
&= E_1 + E_2 + (\Phi_2^+ - \Phi_2^-) J Q_1 \int_r^L \frac{dr}{r} + (\Phi_1^+ - \Phi_1^-) J Q_2 \int_r^L \frac{dr}{r} \\
&= E_1 + E_2 + 4\pi J Q_1 Q_2 \ln(L/r),
\end{aligned} \tag{F.4}$$

onde  $E_1$  e  $E_2$  são as energias dos vórtices isolados, que estão separados por uma distância  $r$ .

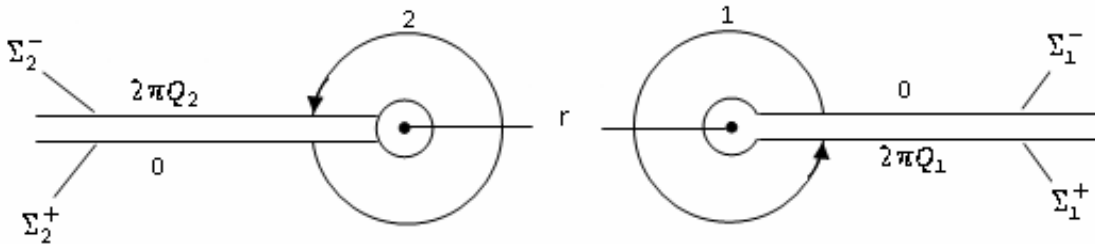


Fig. F.2: Representação dos cortes para os dois vórtices. As superfícies “+” sempre têm suas normais paralelas ao vetor  $\mathbf{e}_s$  definido em relação à origem do caroço do vórtice associado.

A parte que contém  $L$  no termo de interação pode ser combinada com a parte  $L$ -dependente de  $E_1$  e  $E_2$  para dar:

$$E = 2\pi J(Q_1 + Q_2)^2 \ln(R/r) + 4\pi J Q_1 Q_2 \ln(a/r). \quad (\text{F.5})$$

Há dois pontos a serem notados nessa equação. Primeiro, a divergência do  $\ln L$  é eliminada se  $Q_1 = -Q_2$ . Generalizando, não haverá nenhum termo de  $\ln L$  em um sistema com muitos vórtices se a soma das cargas de todos os vórtices  $\sum_{\alpha} Q_{\alpha}$ , for zero  $\sum_{\alpha} Q_{\alpha} = 0$ .

Assim, os estados que contém os vórtices cujas cargas satisfazem  $\sum_{\alpha} Q_{\alpha} = 0$  têm energias que não divergem com o tamanho da amostra. Esses estados serão termicamente excitados para  $T > 0$ . Segundo, o sinal da energia de interação depende da relação entre os sinais de  $Q_1$  e de  $Q_2$ . Desde que  $\ln(a/r)$  seja uma função monotonicamente decrescente com o aumento de  $r$ , a interação é claramente repulsiva se  $Q_1$  e  $Q_2$  tiverem o mesmo sinal, e atrativa se tiverem sinais opostos. A força  $F_{21}$  exercida pelo vórtice 1 no vórtice 2 é:

$$F_{21} = -\nabla E_{ef} = -4\pi J Q_1 Q_2 \frac{(x_2 - x_1)}{|x_2 - x_1|^2}, \quad (\text{F.6})$$

onde  $E_{ef}$  é a energia de interação entre os vórtices.

# Bibliografia

- [1] S. M. Rezende, “Materiais e Dispositivos Eletrônicos”, Editora Livraria da Física; 2<sup>a</sup> edição (2004).
- [2] S. Guchhait, “Magnetism in Nanostructure”, Department of Physics, The University of Texas at Austin.
- [3] S. Tanda, T. Tsuneta, H. Okajima, K. Inagaki, K. Yamaya, and N. Hatakenaka, *Nature* **417**, 397 (2002).
- [4] L.R.A. Belo, N.M. Oliveira-Neto, W.A. Moura-Melo, A.R. Pereira, and E. Ercolessi. “Heisenberg modes on a space with negative curvature: topological spin textures on the pseudosphere”, cond-mat/0612582, aceito para publicação *Phys. Lett. A* (2007).
- [5] S. Villain-Guillot, R. Dandoloff, and A. Saxena, *Phys. Lett. A* **188** 343 (1994).
- [6] R. Dandoloff, S. Villain-Guillot, A. Saxena, and A. R. Bishop, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 813 (1995).
- [7] A. Saxena and R. Dandoloff, *Phys. Rev. B* **58**, R563 (1998).
- [8] R. Dandoloff and A. Saxena, *Eur. Phys. J. B* **29**, 265 (2002).
- [9] A. Saxena, R. Dandoloff, and T. Lookman, *Physica A* **264**, 13 (1998).
- [10] S. Guillot, R. Dandoloff, A. Saxena, and A. R. Bishop, *Phys. Rev. B* **52**, 6712 (1995).
- [11] A. R. Pereira, *J. Mag. Magn. Mat.* **285**, 60 (2005).
- [12] W. A. Freitas, W. A. Moura-Melo and A. R. Pereira, *Phys. Lett. A* **336**, 412 (2005).
- [13] W.A. Moura-Melo, A.R. Pereira, L.A.S. Mól, and A.S.T. Pires, *Phys. Lett. A* **360** 472 (2007).
- [14] A. Saxena and R. Dandoloff, *Phys. Rev. B* **66**, 104414 (2002).
- [15] O-Y. Zhong-can, *Phys. Rev. A* **41**, 4517 (1990).
- [16] J. A. E. Carrillo, Tese de Doutorado, UNICAMP (1999) [disponível em <http://libdigi.unicamp.br/document/?code=vtls000188548>].
- [17] G.’t Hooft, *Nucl. Phys. B* **72**, 461 (1974).

- [18] E. Witten, *Nucl. Phys. B* **223**, 422 (1983).
- [19] X. Lin, J. Li, C.J. Först, S. Yip, *PNAS*, **103/24**, 8943 (2006).
- [20] M. Stratmann, T. Pagel, e F. Mitschke, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 143902 (2005).
- [21] F. Raissi, *Appl. Phys. Lett.* **86**, 263503 (2005).
- [22] J. Li, C. Rau, *Phys. Rev. Lett.*, **97**, 107201 (2006).
- [23] B. Van Waeyenberge, A. Puzic, H. Stoll, K. W. Chou, T. Tyliczszak, R. Hertel, M. Fähnle, H. Brückl, K. Rott, G. Reiss, I. Neudecker, D. Weiss, C. H. Back, G. Schütz, *Nature* **444** 461 (2006).
- [24] H. T. McMahon and J. L. Gallop, *Nature* **438** 590 (2005).
- [25] P. M. Chaikin and T. C. Lubenski “Principles of Condensed Matter Physics”, Cambridge Univ. Press; 1<sup>st</sup> edition (1995).
- [26] K. Yosida “Theory of Magnetism”, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [27] N. L. Balazs and A. Voros, *Phys. Rep.* **143**, 109 (1986).
- [28] A.A. Belavin and A.M. Polyakov, *JETP Lett.* **22**, 245 (1975), veja também R. Shankar, *J. Phys. (Paris)* **38**, 1405 (1977).
- [29] L.A.S. Mól, Tese de Mestrado, UFV (2004) [disponível em <http://www.ufv.br/>].
- [30] G. B. Arfken and H. J. Weber, “*Mathematical Methods For Physicists*”, 4<sup>th</sup> ed., Academic Press, Londres, (1996).
- [31] V.L. Berezinskii, *Sov. Phys. JETP* **32** 493 (1970); *ibid* **34**, 610 (1972); J.M. Kosterlitz and D.J. Thouless, *J. Phys.* **C6**, 1181 (1973).
- [32] N.D. Mermin and H. Wagner, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 1133 (1966).
- [33] G.S. Milagre and W.A. Moura-Melo, trabalho em progresso.
- [34] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*, North Holland, Amsterdam, (1982).