

VINÍCIUS VIVALDINO PIRES DE ALMEIDA

CONTROLE ÓTIMO APLICADO A PROBLEMAS BIOLÓGICOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2010

VINÍCIUS VIVALDINO PIRES DE ALMEIDA

CONTROLE ÓTIMO APLICADO A PROBLEMAS BIOLÓGICOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 25 de fevereiro de 2010.

Prof. Sandro Vieira Romero
(Co-Orientador)

Prof^a Valéria Mattos da Rosa
(Co-Orientadora)

Prof. Paulo Régis Caron Ruffino

Prof. Sidney Martins Caetano

Prof^a Lucy Tiemi Takahashi
(Orientadora)

À minha família, dedico.

Agradecimentos

A Deus, pela vida e por todas oportunidades.

Aos meus pais, que sempre foram minha fonte de inspiração.

À Jeliane pela força, companherismo e carinho em todos os momentos.

Aos meus irmãos Vantuir e Valtair que sempre acreditaram em mim.

À minha orientadora Prof^a. Lucy Tiemi Takahashi, que me dedicou parte de seu precioso tempo além de dizer as coisas certas, em momentos oportunos.

Aos meus amigos do mestrado João de Deus, Lílian, Luciano, Marcos R., Poliana e Tatiana com quem sempre pude contar.

Aos meus tios Israel, Maria das Graças, Ismael e meu avô Joaquim, por acreditarem em mim.

Ao meu querido avô, Idalino, que não está mais aqui para presenciar essa conquista.

Aos professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Viçosa, pela paciência, incentivo e dedicação.

Aos co-orientadores Prof. Sandro Vieira Romero e Prof^a Valéria Mattos da Rosa, e a todos os outros professores do Programa pela paciência, incentivo e dedicação.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais - **FAPEMIG**, pelo suporte financeiro.

Sumário

Resumo	v
Abstract	vi
Introdução	1
1 Teoria do Controle Ótimo	3
1.1 Problema com um Controle e um Estado	5
1.1.1 O Problema básico e as condições necessárias:	5
1.1.2 Condições suficientes	11
2 Extensão da Teoria do Controle Ótimo	13
2.1 Termos de Retorno	13
2.2 Estado Fixado no Tempo Final	16
2.3 Estado Fixado no Tempo Inicial e Final	17
2.4 Problema de Controle Ótimo com Variável de Controle Limitada	22
3 Controle Ótimo de Várias Variáveis	28
3.1 Condições Necessárias	28
4 Aplicações da Teoria do Controle Ótimo	34
4.1 Controle Ótimo de Invasões Biológicas em uma Rede de Lagos	34
4.1.1 Modelo macroscópico de invasão e prevenção	36
4.1.2 Controle ótimo da invasão	40
4.1.3 Propriedades da solução ótima	48
4.1.4 Provas dos resultados utilizados	57
4.2 Tratamento de Câncer	68
Conclusões Gerais	72
Referências Bibliográficas	73

Resumo

ALMEIDA, Vinícius Vivaldino Pires de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2010. **Controle ótimo aplicado a problemas biológicos.** Orientadora: Lucy Tiemi Takahashi. Co-orientadores: Sandro Vieira Romero e Valéria Mattos da Rosa.

Este trabalho tem como objetivo o estudo da Teoria do Controle Ótimo e sua aplicação a problemas biológicos. Estudamos dois modelos de controle ótimo: o primeiro aplicado a invasões biológicas em uma rede de lagos e o segundo aplicado ao tratamento de câncer através do uso de drogas. Os modelos que descrevem a dinâmica dos problemas considerados são baseados em equações diferenciais ordinárias. Os problemas são colocados no formato de um problema de controle ótimo, onde no primeiro minimizamos o custo, que é composto do custo de prevenção adicionado aos prejuízos causados pela invasão, e no segundo minimizamos a densidade do tumor de câncer no tempo final do tratamento e os efeitos (males) causados pela droga durante o tempo de tratamento.

Abstract

ALMEIDA, Vinícius Vivaldino Pires de, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February 2010. **Optimal control applied to biological problems.** Advisor: Lucy Tiemi Takahashi, Co-advisors: Sandro Vieira Romero and Valéria Mattos da Rosa.

This work aims to study the Theory of Optimal Control its application to biological problems. We studied two models of optimal control: the first applied to biological invasions in a network of lakes and the second applied to the treatment of cancer through the use of drugs. The models that describe the dynamics of the problems considered are based on ordinary differential equations. The problems are placed in the form of an optimal control problem, where in the first we minimize the cost, which is composed of the added cost of preventing in the damage caused by invasion, and in the second we minimize the density of tumor cancer in end time of treatment and the effects (ills) caused by the drug during the treatment period.

Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar de uma forma introdutória a Teoria do Controle Ótimo com aplicações na área biológica. Esta teoria foi desenvolvida pelo matemático russo Lev Semenovich Pontryagin que, por volta de 1962 publicou *The Mathematical Theory of Optimal Processes* [11] com outros autores, e seu trabalho é até hoje o mais significativo desenvolvido na Teoria do Controle Ótimo. Sua aplicação é bastante ampla, permitindo abordagens de problemas atuais e de diferentes áreas, tais como matemática, biologia, física, economia e outras ciências aplicadas.

A formulação de um problema pela Teoria do Controle Ótimo considera alguns elementos fundamentais. São eles: um funcional objetivo que deve ser maximizado (ou minimizado), as equações algébricas ou diferenciais (modelos que representam a dinâmica do problema), que restringem as ações que podem ser tomadas sobre o sistema que representam, e condições de contorno, que explicitam os estados inicial e, ou, final.

O comportamento do sistema que modela a dinâmica do problema é descrito por variáveis de estado, que são quantidades que desejamos controlar. Elas representam as condições em que se encontra o problema que está sendo modelado, em um instante de tempo. Já as variáveis de controle entram no sistema de equações e afetam a sua dinâmica.

O objetivo em um problema de controle ótimo é encontrar controles que maximizem (ou minimizem) um determinado funcional objetivo, sujeito a um determinado modelo que retrata a situação considerada. Assim, de forma geral, o funcional objetivo depende de uma ou mais variáveis de estado e de controle.

Em alguns problemas podem haver limitações às variáveis de controle e também pode ser que, além de maximizar (ou minimizar) o funcional objetivo, podemos estar interessados em maximizar (ou minimizar) uma função no estado final ou no estado inicial (função chamada termo de retorno).

Para solucionar os tipos de problemas citados acima, serão apresentadas aqui condições necessárias para encontrar as soluções ótimas. Junto à teoria, são apresentados exemplos matemáticos e biológicos que visam um melhor entendimento dela e também uma maior motivação ao seu estudo.

Introduzimos o problema de controle ótimo com uma variável de controle e uma variável de estado no Capítulo 1, onde o estado será fixado no tempo inicial e o termo de retorno será identicamente nulo. Na Seção 1.1 serão apresentadas condições necessárias, por meio do Princípio do Máximo de Pontryagin, para que uma solução (controle e estado) para tal tipo de problema, seja ótima. Neste caso, são apresentadas condições

suficientes sobre controle e estado para que estes sejam soluções ótimas para o problema em consideração.

No Capítulo 2 será apresentada uma extensão do problema do Capítulo 1. Na Seção 2.1 será considerado o mesmo problema da Seção 1.1 com um fator adicional, o termo de retorno e as condições necessárias são adequadamente alteradas. O mesmo problema da Seção 2.1 é apresentado na Seção 2.2, porém com a variável de estado fixada no tempo final e na Seção 2.4 é inserido um fator adicional ao problema da Seção 2.1, que é a variável de controle limitada inferiormente e, ou, superiormente, e serão desenvolvidas condições necessárias alternativas para este tipo de problema.

Já no Capítulo 3, o que foi apresentado nos Capítulos 1 e 2 é estendido para o problema que possui várias variáveis de controle e múltiplas variáveis de estado.

E por último, apresentamos no Capítulo 4 duas aplicações da Teoria do Controle Ótimo a problemas biológicos. A primeira delas, apresentada na Seção 4.1, é o artigo *Optimal Control of Biological Invasions in Lake Networks* de Alexei B. Potapov, Mark A. Lewis e David C. Finnoff [10] e a segunda, na Seção 4.2, é baseada no artigo *Optimal Control Applied to Competing Chemotherapeutic Cell-Kill Strategies* de K. Renee Fister e John Carl Panetta [3].

A primeira aplicação trata de um problema em que espécies exóticas invadem um ecossistema de lagos causando mudanças econômicas e biológicas na Região dos Grandes Lagos na América do Norte [10]. Um exemplo de uma espécie exótica invasora, neste caso, é o *mexilhão zebra* [10].

Apresentaremos o problema de controle ótimo com as partes biológica e econômica envolvidas, e utilizaremos a Teoria do Controle Ótimo, apresentada na Seção 3.1 para solucioná-lo. Para uma melhor compreensão, será apresentada simulações numéricas, onde conclui-se que a política de prevenção ótima depende de vários fatores chaves, incluindo o prejuízo econômico médio por lago, a eficiência da prevenção, o planejamento horizontal, a magnitude inicial da invasão, e a taxa de desconto.

Fister e Panetta consideram três abordagens diferentes para a modelagem de quimioterápicos para matar células de tumores de câncer que são apresentados em [3], mas aqui será estudado apenas um deles, usando a teoria apresentada. O problema consiste em minimizar o funcional objetivo, que leva em consideração a quantidade de droga administrada e a densidade do tumor no tempo final de tratamento. Buscaremos, neste problema, o comportamento da densidade do tumor em função da quantidade de droga administrada no tratamento.

Para realizar as simulações numéricas deste trabalho utilizamos o software *Matlab*, Versão 6.5 [8].

Capítulo 1

Teoria do Controle Ótimo

Nosso foco neste trabalho é a Teoria do Controle Ótimo, que considera alguns elementos fundamentais tais como, um funcional objetivo que deve ser maximizado (ou minimizado), as equações algébricas ou diferenciais, que restringem as ações que podem ser tomadas sobre o sistema que representam, e algumas condições de contorno, que explicitam os estados inicial e, ou final do estado.

A Teoria do Controle Ótimo é uma poderosa ferramenta matemática que pode ser usada para tomar decisões que envolvam diversos fenômenos, entre eles biológicos. Por exemplo, quando dado um modelo de epidemia queremos saber qual o percentual da população que deve ser vacinado, quando o tempo varia, de forma a minimizar o número de infectados e os custos da implementação da estratégia de vacinação. O resultado desejado, ou objetivo, depende da situação particular e do modelo considerado. Como outro exemplo, podemos estar interessados em minimizar uma população de um determinado vírus que é prejudicial, mas ao mesmo tempo manter baixo o nível da droga tóxica administrada. Nesse caso, os modelos dos níveis de vírus e de drogas são funções do tempo, que aparecem juntas em um sistema de equações diferenciais ordinárias.

O comportamento do sistema dinâmico fundamental é descrito por uma variável de estado, que são quantidades que desejamos controlar. Essas variáveis representam as condições em que se encontra o problema (físico ou biológico, por exemplo) que está sendo modelado, no instante de tempo t . Assumimos que há uma maneira de orientar a variável de estado, agindo sobre ela com uma função de controle adequado. O controle entra no sistema de equações diferenciais ordinárias e afeta a dinâmica do sistema do estado. O objetivo é encontrar um controle que maximiza (ou minimiza) um determinado funcional objetivo, sujeito a um determinado modelo que retrata a situação considerada e às restrições do problema considerado. Um funcional, neste texto, se refere a uma aplicação f de um determinado conjunto F de funções, para os números reais, ou seja,

$f : F \rightarrow \mathbb{R}$ (aqui será representado por uma integral [12]). Muitas vezes, este funcional objetivo será o balanço entre o objetivo desejado e o custo necessário para alcançá-lo. Nem sempre custo representará dinheiro, pode representar também efeitos colaterais ou danos causados pelo controle, uma droga no tratamento de uma doença, por exemplo.

Em geral, o funcional objetivo depende de uma ou mais variáveis de estado e de controle, pois muitas aplicações podem ter diversas variáveis de estado e múltiplas variáveis de controle. Por exemplo, se consideramos um modelo utilizando antibióticos (variável de controle) para combater uma infecção viral, além de querer acompanhar o número de partículas virais no sangue, podemos também acompanhar o número de anticorpos e glóbulos brancos e assim eles seriam representados como variáveis de estado adicional. Poderíamos também querer administrar mais de um tipo de antibiótico ao paciente, e assim teríamos variáveis adicionais ao nosso problema. Em outros problemas podemos ter que exigir limites sobre a variável de controle para obtermos uma solução realista. Por exemplo, se nossa variável de controle representar a quantidade de um produto químico utilizado em um sistema, devemos exigir que essa quantidade seja não negativa. Pode acontecer, além de ser limitada inferiormente, ser limitada superiormente, pois pode acontecer de haver algumas limitações físicas na quantidade de produto químico ou leis ambientais que proibem certos níveis de utilização acima do permitido por lei.

Primeiro, vamos concentrar-nos sobre o caso de um controle e um estado, no qual o controle não possui qualquer restrição sobre ele. Depois, no Capítulo 3, estenderemos a teoria para vários controles e vários estados e também estudaremos outros problemas com outros tipos de restrições. Para isso apresentaremos agora alguns conceitos que serão usados no desenvolvimento das condições necessárias para o controle ótimo.

Definição 1.1 Dizemos que $h : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável por partes, se ela é contínua em I e diferenciável em todos os pontos de I , exceto em um número finito de pontos de I e além disso, h' for contínua onde ela estiver definida.

Definição 1.2 Dizemos que $g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável se g' existir e for contínua em I .

Definição 1.3 Uma função $f : V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é dita côncava se

$$\alpha f(x_1, y_1) + (1 - \alpha)f(x_2, y_2) \leq f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, \alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2)$$

para todo $0 \leq \alpha \leq 1$ e todos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V$.

Uma função é dita convexa sobre V se a desigualdade contrária acima for satisfeita.

Observação 1.1 Assim, se f é côncava e possui derivadas parciais em toda parte, então vale:

$$f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) \geq (x_1 - x_2) \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1) + (y_1 - y_2) \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1),$$

para todos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in V$.

Proposição 1.1 O domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times E$ do fluxo $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ de um campo $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k , com $1 \leq k \leq +\infty$, é um aberto e o fluxo ϕ é uma aplicação de mesma classe C^k em Ω .

A prova deste resultado pode ser encontrada em [2].

Na seção a seguir apresentaremos o problema de controle ótimo no caso em que temos uma variável de estado e uma variável de controle.

1.1 Problema com um Controle e um Estado

1.1.1 O Problema básico e as condições necessárias:

No nosso problema de controle ótimo para equações diferenciais ordinárias, usaremos $u(t)$ para denotar a variável de controle e $z(t)$ para denotar a variável de estado, no instante de tempo t . A variável de estado satisfaz a equação diferencial, com dependência sobre a variável de controle:

$$\frac{dz}{dt}(t) = g(t, z(t), u(t)). \quad (1.1)$$

A equação (1.1) acima é chamada *Equação de Estado*.

À medida que a função de controle é alterada, a solução da equação diferencial também será alterada. Assim, podemos ver a relação controle-estado como uma aplicação

$$u(t) \mapsto z = z(u)$$

(z é na verdade uma função da variável independente t , escrevemos $z(u)$ simplesmente para nos lembrar de sua dependência da u). Nosso problema básico de controle ótimo consiste em encontrar um controle, contínuo por partes, e a variável de estado associada $z(t)$ para maximizar (ou minimizar) o funcional objetivo dado, que no nosso caso é dado por J . Logo, o problema é:

$$\max J(u) = \max_u \int_{t_0}^{t_1} f(t, z(t), u(t)) dt, \quad (1.2)$$

sujeito a

$$\frac{dz}{dt}(t) = g(t, z(t), u(t)), \quad z(t_0) = z_0 \text{ e } z(t_1) \text{ livre}.$$

Tal controle, se existe, será chamado **controle ótimo** e será denotado por u^* e o estado correspondente será denotado por z^* . Onde as funções f e g são funções continuamente diferenciáveis nas três variáveis. Assim, como o controle é sempre contínuo por partes, o estado associado sempre será diferenciável por partes.

A técnica usada para resolver tais problemas de controle ótimo, é desenvolver condições necessárias (na verdade um conjunto de condições necessárias) que um controle ótimo e o estado correspondente a ele, devem satisfazer para solucionar tal problema, ou seja, assumamos que o controle ótimo (contínuo por partes) exista e que u^* seja tal controle, com estado correspondente z^* . Daí sabemos que

$$J(u) \leq J(u^*) < \infty$$

para todo controle u .

Buscaremos desenvolver as condições necessárias. Para isso, seja $h(t)$ uma função real, no tempo t , com variação contínua por partes e $\epsilon \in \mathbb{R}$ uma constante. Então

$$u^\epsilon(t) = u^*(t) + \epsilon h(t)$$

é outro controle contínuo por partes. Seja z^ϵ o estado correspondente ao controle u^ϵ , no instante t , logo z^ϵ satisfaz

$$\frac{dz^\epsilon}{dt}(t) = g(t, z^\epsilon(t), u^\epsilon(t)), \quad (1.3)$$

onde u^ϵ é contínua. Uma vez que as trajetórias começam na mesma posição, tomamos $z^\epsilon(t_0) = z_0$. Vemos que $u^\epsilon(t) \rightarrow u^*(t)$ para todo t , quando $\epsilon \rightarrow 0$. Além disso, para todo t

$$\left. \frac{\partial u^\epsilon}{\partial \epsilon}(t) \right|_{\epsilon=0} = h(t).$$

Devido aos pressupostos feitos sobre g , segue que

$$z^\epsilon(t) \rightarrow z^*(t),$$

para cada t fixado, quando $\epsilon \rightarrow 0$. Além disso, a derivada

$$\left. \frac{\partial z^\epsilon}{\partial \epsilon}(t) \right|_{\epsilon=0}$$

existe para cada t . O valor dela não será importante aqui, pois precisamos apenas saber que ela existe.

O funcional objetivo para u^ϵ é:

$$J[u^\epsilon(t)] = \int_{t_0}^{t_1} f(t, z^\epsilon(t), u^\epsilon(t)) dt.$$

Estamos agora prontos para introduzir uma nova variável no problema, chamada de função adjunta ou variável adjunta λ . Seja $\lambda(t)$ uma função diferenciável por partes em $t \in [t_0, t_1]$, a ser determinada. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}(\lambda(t)z^\epsilon(t))dt = \lambda(t_1)z^\epsilon(t_1) - \lambda(t_0)z^\epsilon(t_0),$$

que implica

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}(\lambda(t)z^\epsilon(t))dt + \lambda(t_0)z^\epsilon(t_0) - \lambda(t_1)z^\epsilon(t_1) = 0.$$

Assim, adicionando este valor à expressão de $J(u^\epsilon)$ e usando (1.3), temos

$$\begin{aligned} J(u^\epsilon) &= \int_{t_0}^{t_1} \left[f(t, z^\epsilon(t), u^\epsilon(t)) + \frac{d}{dt}(\lambda(t)z^\epsilon(t)) \right] dt + \lambda(t_0)z^\epsilon(t_0) - \lambda(t_1)z^\epsilon(t_1) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[f(t, z^\epsilon(t), u^\epsilon(t)) + \lambda'(t)z^\epsilon(t) + \lambda(t)\frac{d}{dt}z^\epsilon(t) \right] dt + \lambda(t_0)z^\epsilon(t_0) - \lambda(t_1)z^\epsilon(t_1) \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [f(t, z^\epsilon(t), u^\epsilon(t)) + \lambda'(t)z^\epsilon(t) + \lambda(t)g(t, z^\epsilon(t), u^\epsilon(t))] dt + \lambda(t_0)z_0 - \lambda(t_1)z^\epsilon(t_1). \end{aligned}$$

Assim, desde que o máximo de J com respeito ao controle u ocorra em u^* , a derivada de $J(u^\epsilon)$ com respeito a ϵ (na direção h) é zero, ou seja,

$$0 = \frac{d}{d\epsilon} J(u^\epsilon) \Big|_{\epsilon=0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J(u^\epsilon) - J(u^*)}{\epsilon}. \quad (1.4)$$

Isto nos dá um limite de uma expressão integral. Uma versão do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue [12] (página 26), permite-nos passar o limite para dentro da integral. Isto deve-se ao fato do intervalo de integração ser compacto e da diferenciabilidade por partes do integrando. Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\epsilon} J(u^\epsilon) \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \epsilon} [f(t, z^\epsilon(t), u^\epsilon(t)) + \lambda'(t)z^\epsilon(t) + \lambda(t)g(t, z^\epsilon(t), u^\epsilon(t))] dt \Big|_{\epsilon=0} - \frac{\partial}{\partial \epsilon} \lambda(t_1)z^\epsilon(t_1) \Big|_{\epsilon=0}. \end{aligned}$$

Aplicando a regra da cadeia para f e g , segue

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} f_z \frac{\partial z^\epsilon}{\partial \epsilon} + f_u \frac{\partial u^\epsilon}{\partial \epsilon} + \lambda'(t) \frac{\partial z^\epsilon}{\partial \epsilon} + \lambda(t) \left(g_z \frac{\partial z^\epsilon}{\partial \epsilon} + g_u \frac{\partial u^\epsilon}{\partial \epsilon} \right) dt - \lambda(t_1) \frac{\partial z^\epsilon}{\partial \epsilon}(t_1) \Big|_{\epsilon=0}, \quad (1.5)$$

onde f_z , f_u , g_z , e g_u denotam as derivadas parciais de f e g em relação a u e z , calculadas em $(t, z^*(t), u^*(t))$. Reordenando os termos de (1.5) temos

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \left[(f_z + \lambda(t)g_z + \lambda'(t)) \frac{\partial z^\epsilon}{\partial \epsilon}(t) \Big|_{\epsilon=0} + (f_u + \lambda(t)g_u)h(t) \right] dt - \lambda(t_1) \frac{\partial z^\epsilon}{\partial \epsilon}(t_1) \Big|_{\epsilon=0}. \quad (1.6)$$

Queremos escolher uma função adjunta que simplifica (1.6) e que faça o coeficiente de

$$\left. \frac{\partial z^\epsilon}{\partial \epsilon}(t) \right|_{\epsilon=0}$$

desaparecer. Deste modo, escolhemos a função adjunta $\lambda(t)$ satisfazendo

$$\lambda'(t) = -[f_z(t, z^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)g_z(t, z^*(t), u^*(t))] \quad (\text{Equação Adjunta}),$$

e a condição de fronteira

$$\lambda(t_1) = 0 \quad (\text{Condição de transversalidade}).$$

Agora (1.6) reduz a

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} (f_u(t, z^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)g_u(t, z^*(t), u^*(t))) h(t) dt. \quad (1.7)$$

Uma vez que a expressão (1.7) acima é válida para qualquer função variação $h(t)$ contínua por partes, vale em particular para

$$h(t) = f_u(t, z^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)g_u(t, z^*(t), u^*(t)).$$

Neste caso, temos que (1.7) torna-se

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} [f_u(t, z^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)g_u(t, z^*(t), u^*(t))]^2 dt.$$

O que nos dá a *condição de otimalidade*

$$f_u(t, z^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)g_u(t, z^*(t), u^*(t)) = 0, \quad \text{para todo } t_0 \leq t \leq t_1.$$

Assim,

$$\begin{cases} f_u(t, z^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)g_u(t, z^*(t), u^*(t)) = 0 & (\text{condição de otimalidade}), \\ \lambda'(t) = -[f_z(t, z^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)g_z(t, z^*(t), u^*(t))] & (\text{equação adjunta}), \\ \lambda(t_1) = 0 & (\text{condição de transversalidade}), \end{cases}$$

formam um conjunto de condições necessárias que um controle ótimo u^* , com estado z^* associado, deve satisfazer. Na prática, geramos as condições necessárias acima em termos do *Hamiltoniano* H , que é definido por

$$H(t, z(t), u(t), \lambda(t)) = f(t, z(t), u(t)) + \lambda(t)g(t, z(t), u(t)). \quad (1.8)$$

Pois, assim as condições anteriores podem ser reescritas em termos do Hamiltoniano:

$$0 = f_u + \lambda g_u = \frac{\partial H}{\partial u} \quad \text{para } u^* \quad (\text{condição de otimalidade}),$$

$$\lambda' = -(f_z + \lambda g_z) = -\frac{\partial H}{\partial z} \quad (\text{equação adjunta}),$$

$$\lambda(t_1) = 0 \quad (\text{condição de transversalidade}).$$

A dinâmica da equação de estado é dada por

$$\frac{dz}{dt}(t) = g(t, z(t), u(t)) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}, \quad z(t_0) = z_0.$$

Estas condições estão agora em uma versão do *Princípio do Máximo de Pontryagin* [11], enunciado a seguir

Teorema 1.1 (Princípio do Máximo de Pontryagin) *Se $u^*(t)$ e $z^*(t)$ são soluções ótimas para o problema*

$$J[u(t)] = \int_{t_0}^{t_1} f(t, z(t), u(t)) dt, \quad (1.9)$$

sujeito a

$$\frac{dz}{dt}(t) = g(t, z(t), u(t)), \quad z(t_0) = z_0,$$

então existe $\lambda(t)$, diferenciável por partes, tal que

$$H(t, z^*(t), u^*(t), \lambda(t)) \equiv \max_{u \in U} H(t, z(t), u(t), \lambda(t)) \quad (1.10)$$

para todo controle u em cada $t \in [t_0, t_1]$, $\lambda(t_1) = 0$ e

$$\begin{aligned} \lambda'(t) &= -\frac{\partial H}{\partial z}(t, z^*(t), u^*(t)) \\ &= -\frac{\partial f}{\partial z}(t, z^*(t), u^*(t)) - \lambda(t) \frac{\partial g}{\partial z}(t, z^*(t), u^*(t)), \end{aligned} \quad (1.11)$$

onde $H(t, z(t), u(t), \lambda(t)) = f(t, z(t), u(t)) + \lambda(t)g(t, z(t), u(t))$ é o Hamiltoniano, $\lambda(t)$ é a variável adjunta e U é o conjunto de controles admissíveis, isto é, conjunto dos controles que satisfazem a todas as restrições do problema (explícitas e implícitas).

Esta versão do Princípio do Máximo de Pontryagin está de acordo com [7]. Para outras versões veja [5] e [11].

Observação 1.2 *No caso em que o funcional objetivo (1.9) representa lucros ou custos, é comum o uso do termo “preço sombra” para a variável adjunta $\lambda(t)$. O termo preço sombra refere-se ao fato de que o valor de posse (o que tenho de dinheiro agora) não é o valor da quantidade vendida (ou gasta), mas o valor atribuído a sua produtividade futura [1]. Posso querer saber, por exemplo, quanto de dinheiro adicional vou ter (ou precisar), com um incremento adicional na variável de estado.*

Observação 1.3 *O Princípio do Máximo de Pontryagin pode ser interpretado como um teorema de multiplicadores de Lagrange em espaços de dimensão infinita, por exemplo, quando as soluções ótimas ocorrem no interior do conjunto admissíveis [6].*

Ilustraremos a aplicação deste teorema com o seguinte exemplo:

Exemplo 1.1 ([7]) *Encontre o controle ótimo que maximiza*

$$J[u(t)] = \int_1^2 [-t u^2(t) - t^2 z(t)] dt$$

sujeito a

$$\frac{dz}{dt}(t) = -u(t), \quad z(1) = 1.$$

Resolução: Formemos primeiramente o Hamiltoniano (1.8) que, neste caso, é dado por

$$H(t, z(t), u(t), \lambda(t)) = -t u^2(t) - t^2 z(t) + \lambda(t)(-u(t)).$$

Daí temos a equação adjunta

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial z} = t^2.$$

O que implica em $\lambda(t) = \frac{t^3}{3} + C$. Como temos que $\lambda(2) = 0$ (pois $\lambda(t_1) = 0$), segue $\lambda(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{8}{3}$. Agora da condição de otimalidade temos

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = -2tu^* - \frac{t^3}{3} + \frac{8}{3}.$$

Logo

$$u^* = \frac{1}{2t} \left(\frac{8}{3} - \frac{t^3}{3} \right).$$

Substituindo u^* na equação de estado obtemos

$$\frac{dz}{dt}(t) = -\frac{1}{2t} \left(\frac{8}{3} - \frac{t^3}{3} \right) = -\frac{4}{3t} + \frac{t^2}{6}.$$

Logo $z(t) = -\frac{4}{3} \ln t + \frac{t^3}{18} + C_1$. Como $z(1) = 1$, segue

$$z^*(t) = \frac{t^3}{18} - \frac{4}{3} \ln t + \frac{17}{18}.$$

Na Figura 1 abaixo, plotamos a evolução do controle ótimo u^* e estado ótimo z^* obtidos no Exemplo 1.1. Podemos ver que u^* e z^* são decrescentes no intervalo de tempo $t \in [1, 2]$.

Além disso, observe que $z^*(1) = 1$, satisfaz a restrição da variável de estado.

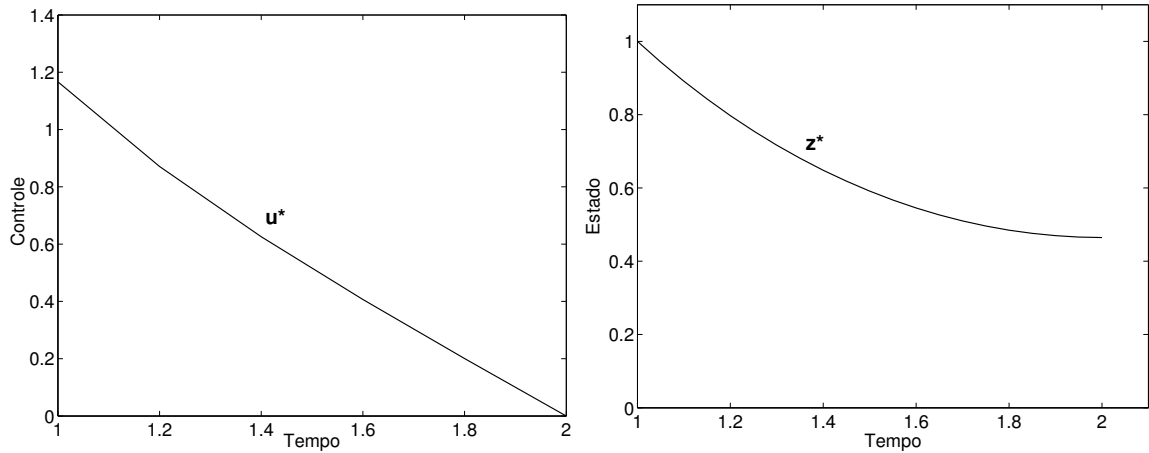


Figura 1: São ilustradas a evolução do controle ótimo u^* e estado ótimo z^* , obtidos para o Exemplo 1.1. Note que, u^* e z^* são decrescentes em $t \in [1, 2]$ e que z^* satisfaz a restrição exigida, $z^*(1) = 1$.

1.1.2 Condições suficientes

Apresentaremos nesta subseção um resultado, possível neste caso, que nos dão condições suficientes que $u^*(t)$ e $z^*(t)$ devem satisfazer para que elas sejam soluções ótimas para o problema (1.2).

Teorema 1.2 *Considere o problema*

$$\max_u J[u(t)] = \max_u \int_{t_0}^{t_1} f(t, z(t), u(t)) dt, \quad (1.12)$$

sujeito a

$$\frac{dz}{dt}(t) = g(t, z(t), u(t)), \quad z(t_0) = z_0.$$

Sejam f e g funções continuamente diferenciáveis nos três argumentos e côncava em z e u . Suponha que u^* seja um controle, com estado associado z^* , e λ uma função diferenciável por partes, tal que u^* , z^* e λ satisfaçam para $t_0 \leq t \leq t_1$,

- 1) $\frac{\partial f}{\partial u} + \lambda \frac{\partial g}{\partial u} = 0$,
- 2) $\frac{d\lambda}{dt} = - \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial g}{\partial z} \right)$,
- 3) $\lambda(t_1) = 0$,
- 4) $\lambda(t) \geq 0$.

Então, $J(u^*) \geq J(u)$ para todo controle u .

Prova: Seja u um controle qualquer e z o estado associado. Como f é côncava em z e u , segue

$$f(t, z^*, u^*) - f(t, z, u) \geq (z^* - z) \frac{df}{dz}(t, z^*, u^*) + (u^* - u) \frac{df}{du}(t, z^*, u^*).$$

Daí

$$\begin{aligned} J(u^*) - J(u) &= \int_{t_0}^{t_1} f(t, z^*, u^*) - f(t, z, u) dt \\ &\geq \int_{t_0}^{t_1} \left[(z^* - z) \frac{df}{dz}(t, z^*, u^*) + (u^* - u) \frac{df}{du}(t, z^*, u^*) \right] dt. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Substituindo

$$\frac{df}{dz}(t, z^*, u^*) = -\lambda'(t) - \lambda(t) \frac{dg}{dz}(t, z^*, u^*)$$

e

$$\frac{df}{du}(t, z^*, u^*) = -\lambda(t) \frac{dg}{du}(t, z^*, u^*)$$

em (1.13), obtemos

$$J(u^*) - J(u) \geq \int_{t_0}^{t_1} \left[(z^* - z) \left(-\lambda' - \lambda \frac{dg}{dz}(t, z^*, u^*) \right) + (u^* - u) \left(-\lambda \frac{dg}{du}(t, z^*, u^*) \right) \right] dt.$$

Usando integração por partes e recordando que $\lambda(t_1) = 0$ e $z(t_0) = z^*(t_0)$, vem

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} -\lambda'(z^* - z) dt &= \int_{t_0}^{t_1} -\lambda(z^* - z)' dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} -\lambda(g(t, z^*, u^*) - g(t, z, u)) dt. \end{aligned}$$

Daí

$$J(u^*) - J(u) \geq \int_{t_0}^{t_1} \lambda \left[g(t, z^*, u^*) - g(t, z, u) - (z^* - z) \frac{dg}{dz}(t, z^*, u^*) - (u^* - u) \frac{dg}{du}(t, z^*, u^*) \right] dt.$$

Como por hipótese $\lambda(t) \geq 0$ e g é côncava em z e u , tem-se

$$J(u^*) - J(u) \geq 0.$$

No próximo capítulo apresentaremos extensões do problema apresentado até agora, onde será inserido uma função ao funcional objetivo (termo de retorno) e será considerado outros tipos de restrições.

Capítulo 2

Extensão da Teoria do Controle Ótimo

Neste capítulo, consideramos o mesmo problema de controle ótimo do capítulo anterior com algumas mudanças no funcional objetivo e, ou, nas restrições da variável de estado.

Na próxima seção, a mudança no problema ocorre no funcional objetivo, onde é considerada uma função (chamada termo de retorno) que representa um objetivo desejado em relação à posição final (pode também ser inicial) da variável de estado.

2.1 Termos de Retorno

Muitas vezes, além de maximizar (ou minimizar) os termos sobre todo intervalo de tempo, queremos também maximizar (ou minimizar) o valor de uma função em um determinado tempo, especificamente no final do intervalo de tempo. Por exemplo, suponha que queremos minimizar as células de um tumor no tempo final em um modelo de câncer, ou o número de indivíduos infectados no momento final de um modelo de epidemia. Sendo assim, as condições necessárias da Seção 1.1 devem ser adequadamente alteradas. Em geral, temos o seguinte problema:

$$\max J(u) = \max_u \left[\phi(z(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, z(t), u(t)) dt \right], \quad (2.1)$$

sujeito a

$$\frac{dz}{dt}(t) = g(t, z(t), u(t)), \quad z(t_0) = z_0 \text{ e } z(t_1) \text{ livre},$$

onde $\phi(z(t_1))$ é um objetivo desejado em relação à posição final ou nível da população $z(t_1)$, por exemplo. Chamamos $\phi(z(t_1))$ *termo de retorno* e algumas vezes esse termo

também é chamado de *prazo de resgate*. A partir de agora, iremos encontrar as mudanças nas condições necessárias. Agora o nosso funcional objetivo é dado por

$$J(u) = \phi(z(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, z(t), u(t)) dt.$$

Procedendo como fizemos na Seção 1.1, no cálculo de

$$0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J(u^\epsilon) - J(u^*)}{\epsilon},$$

a mudança ocorre apenas no momento final

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(f_z + \lambda g_z + \lambda' \right) \frac{dz^\epsilon}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} + (f_u + \lambda g_u) h \right] dt - \left(\lambda(t_1) - \phi'(z(t_1)) \right) \frac{\partial z^\epsilon}{\partial \epsilon}(t_1) \Big|_{\epsilon=0}. \quad (2.2)$$

Assim, se escolhermos a variável adjunta satisfazendo a equação adjunta de antes e também $\lambda(t_1) = \phi'(z^*(t_1))$, temos

$$\lambda'(t) = -f_z(t, z^*, u^*) - \lambda(t)g_z(t, z^*, u^*),$$

$$\lambda(t_1) = \phi'(z^*(t_1));$$

assim (2.2) reduz a

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \left(f_u(t, z^*, u^*) + \lambda(t)g_u(t, z^*, u^*) \right) h(t) dt,$$

e a condição de otimalidade

$$f_u(t, z^*, u^*) + \lambda(t)g_u(t, z^*, u^*) = 0,$$

segue como antes. Assim, mudamos as condições necessárias apenas para a condição de transversalidade

$$\lambda(t_1) = \phi'(z^*(t_1)).$$

Para esclarecer como se calcula esta condição e esclarecer mais sobre o assunto, consideremos os seguintes exemplos:

Exemplo 2.1 ([7]) *Maximizar*

$$J(u) = 5(z(T))^3 + \int_0^T f(t, z(t), u(t)) dt$$

sujeito a

$$\frac{dz}{dt}(t) = g(t, z(t), u(t)), \quad z(0) = z_0.$$

Resolução: Neste problema, temos que

$$\phi(s) = 5s^3.$$

Daí segue $\phi'(s) = 15s^2$. O que implica que a condição de transversalidade é

$$\lambda(T) = 15(z^*(T))^2.$$

Exemplo 2.2 ([7]) *Seja $z(t)$ o número de células de um tumor no tempo t (com fator de crescimento exponencial α) e $u(t)$ a concentração de droga administrada ao paciente para combater este tumor no tempo t . Nosso objetivo é minimizar simultaneamente o número de células do tumor ao fim do período de tratamento e acumular pequenos efeitos da droga no corpo do paciente. Assim, matematicamente o problema é:*

$$\min J(u) = \min_u \left[z(T) + \int_0^T u^2(t) dt \right], \quad (2.3)$$

sujeito a

$$\frac{dz}{dt}(t) = \alpha z(t) - u(t), \quad z(0) = z_0 > 0.$$

Este modelo é não realístico, usamos ele apenas para ilustrar a aplicação dos novos conceitos apresentados na teoria. Um modelo mais realista será apresentado na Seção 4.2 do Capítulo 4.

Resolução: Para transformar o problema de minimizar J em um problema de maximizar J , lembremos que $\min J = -\max\{-J\}$. Assim, o nosso problema passa ser de maximizar

$$-J(u) = \left[-z(T) - \int_0^T u^2(t) dt \right], \quad (2.4)$$

sujeito a

$$\frac{dz}{dt}(t) = \alpha z(t) - u(t), \quad z(0) = z_0 > 0.$$

Note que $\phi(s) = -s$, o que nos dá $\phi'(s) = -1$. Construindo o Hamiltoniano,

$$H(t, z(t), u(t), \lambda(t)) = -u^2(t) + \lambda(t)(\alpha z(t) - u(t)),$$

calculemos as condições necessárias:

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = -2u - \lambda \quad \text{para } u^*,$$

o que nos dá $u^*(t) = -\lambda(t)/2$. Agora

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\alpha\lambda,$$

nos dá

$$\lambda(t) = Ce^{-\alpha t}.$$

Como $\lambda(T) = \phi'(z^*(T)) = -1$, segue que a variável adjunta é

$$\lambda(t) = -e^{\alpha(T-t)}.$$

Portanto, obtemos o controle ótimo

$$u^*(t) = \frac{e^{\alpha(T-t)}}{2},$$

e podemos então encontrar o estado ótimo resolvendo

$$\frac{dz}{dt} = \alpha z(t) - u(t) = \alpha z(t) - \frac{e^{\alpha(T-t)}}{2}, \quad z(0) = z_0,$$

que nos dá

$$z^*(t) = z_0 e^{\alpha t} + e^{\alpha T} \left(\frac{e^{-\alpha t} - e^{\alpha t}}{4\alpha} \right).$$

Na seção a seguir, o problema é praticamente o mesmo dessa seção, porém agora a variável de estado é fixada no momento final.

2.2 Estado Fixado no Tempo Final

Existem várias possibilidades de fixar a posição do estado, ou no início (como na Seção 2.1), ou no final do intervalo de tempo, ou ambos. Logo o funcional objetivo pode depender da posição final ou inicial.

Considere o problema de

$$\max J(u) = \max_u \left[\phi(z(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, z(t), u(t)) dt \right], \quad (2.5)$$

sujeito a

$$\frac{dz}{dt}(t) = g(t, z(t), u(t)), \quad z(t_0) \text{ livre}, z(t_1) = z_1.$$

Este problema é diferente dos já vistos até agora, pois o estado é fixado no tempo final, não no início. No entanto, o mesmo argumento que foi utilizado na Seção 1.1, com a variável adjunta escolhida apropriadamente, mostra que as condições necessárias para um par u^* , z^* ser ótimo, será como antes, apenas mudará a condição de transversalidade. Mais especificamente,

$$\lambda(t_0) = \phi'(z(t_0)).$$

Na próxima seção estudaremos o mesmo problema dessa seção, mas com a variável de estado fixa tanto no tempo inicial como no final.

2.3 Estado Fixado no Tempo Inicial e Final

Considere o problema abaixo, onde o estado é fixado tanto no tempo inicial como no tempo final,

$$\max J(u) = \max_u \left[\phi(z(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, z(t), u(t)) dt \right],$$

sujeito a

$$\frac{dz}{dt}(t) = g(t, z(t), u(t)), \quad z(t_0) = z_0, \quad z(t_1) = z_1. \quad (2.6)$$

As restrições $z(t_0) = z_0$, $z(t_1) = z_1$, significam que todos os controles devem levar os estados da condição inicial fixada para o estado final também fixo.

Para resolvermos este tipo de problema é preciso algumas modificações nas condições necessárias, que apresentaremos a seguir, sem demonstrá-las.

Teorema 2.1 *Se $u^*(t)$ e $z^*(t)$ são ótimas para o problema*

$$\max J(u) = \max_u \left[\phi(z(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, z(t), u(t)) dt \right],$$

sujeito a

$$\frac{dz}{dt}(t) = g(t, z(t), u(t)), \quad z(t_0) = z_0, \quad z(t_1) = z_1 \text{ ambos fixados}, \quad (2.7)$$

então existe uma variável adjunta $\lambda(t)$, diferenciável por partes, e uma constante λ_0 , igual a 0 ou 1, tal que

$$H(t, z^*(t), u^*(t), \lambda(t)) \equiv \max_{u \in U} H(t, z(t), u(t), \lambda(t)),$$

para todo controle admissível u em cada $t \in [t_0, t_1]$, onde o Hamiltoniano H é dado por

$$H = \lambda_0 f(t, z(t), u(t)) + \lambda(t) g(t, z(t), u(t))$$

e

$$\lambda'(t) = -\frac{\partial H}{\partial z}(t, z^*(t), u^*(t)) = -\lambda_0 \frac{\partial f}{\partial z} - \lambda(t) \frac{\partial g}{\partial z}. \quad (2.8)$$

Os exemplos seguintes ilustram a forma de resolver tais problemas.

Exemplo 2.3 ([4]) *Minimizar*

$$J(u) = \int_0^1 u(t) dt,$$

sujeito a

$$\frac{dz}{dt}(t) = u(t)^2, \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 0.$$

Resolução: Primeiro, transformemos o problema de mínimo em um problema de máximo, como segue

$$\min_u J(u) = \min_u \int_0^1 u(t)dt = - \max_u \int_0^1 -u(t)dt,$$

sujeito a

$$\frac{dz}{dt}(t) = u(t)^2, \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 0.$$

Se examinarmos a equação diferencial, vemos que $u \equiv 0$ é o único controle que produz um estado z que satisfaz as condições de fronteira. Portanto, ele é automaticamente o controle ótimo. De fato, primeiro vamos supor que estamos no caso $\lambda_0 = 1$. Então

$$H = -u + \lambda u^2,$$

$$\lambda' = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0.$$

Isto mostra que $\lambda \equiv c$ para alguma constante c . Agora, a condição que maximiza H em u^* , é a condição $0 = \partial H / \partial u$. A saber,

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u}$$

$$= -1 + 2\lambda u^*$$

$$= -1 + 2cu^*.$$

Daí,

$$u^* \equiv \frac{1}{2c}.$$

Portanto,

$$\frac{dz}{dt}(t) = \frac{1}{4c^2}.$$

Mas, isto é incompatível com as condições de fronteira. Logo, $\lambda_0 \neq 1$.

Por outro lado, podemos verificar que $u = 0$ satisfaz todas as condições do teorema (2.1) quando $\lambda_0 = 0$.

Exemplo 2.4 ([4]) *Minimizar*

$$J(u) = \int_0^4 u^2(t) + z(t)dt,$$

sujeito a

$$\frac{dz}{dt}(t) = u(t), \quad z(0) = 0, \quad z(4) = 1.$$

Resolução: Novamente transformemos o problema de mínimo em um problema de máximo, como segue

$$\begin{aligned}\min J(u) &= \min_u \int_0^4 u^2(t) + z(t) dt \\ &= -\max_u \int_0^4 -(u^2(t) + z(t)) dt,\end{aligned}$$

sujeito a

$$\frac{dz}{dt}(t) = u(t), \quad z(0) = 0, \quad z(4) = 1.$$

Formemos o Hamiltoniano

$$H = -u^2 - z + \lambda u.$$

Note que não temos condição de transversalidade, pois z possui condições inicial e final, mas faremos uso da equação adjunta, que é dada por

$$\lambda'(t) = -\frac{\partial H}{\partial z} = 1,$$

que nos dá

$$\lambda(t) = t + k,$$

onde k é uma constante. Então, a condição de otimalidade nos fornece

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial H}{\partial u} \\ &= -2u + \lambda.\end{aligned}$$

Assim, obtemos que

$$\begin{aligned}u^*(t) &= \frac{\lambda(t)}{2} \\ &= \frac{t+k}{2}.\end{aligned}$$

Resolvendo a equação de estado com este controle, temos

$$z^*(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{kt}{2} + c,$$

onde c é uma constante. Usando as condições de fronteira $z(0) = 0$, obtemos $c = 0$, e $z(4) = 1$ nos dá $k = -\frac{3}{2}$. Assim,

$$u^*(t) = \frac{2t-3}{4} \quad \text{e} \quad z^*(t) = \frac{t^2-3t}{4}.$$

Na Figura 2, plotamos a evolução do controle ótimo u^* e estado ótimo z^* obtidos para o Exemplo 2.4. Podemos ver que apesar de u^* ser sempre crescente em $t \in [0, 4]$, o

mesmo não vale para z^* , que possui um intervalo de decrescimento. Além disso, observe que $z^*(4) = 1$, satisfazendo a restrição imposta à variável de estado.

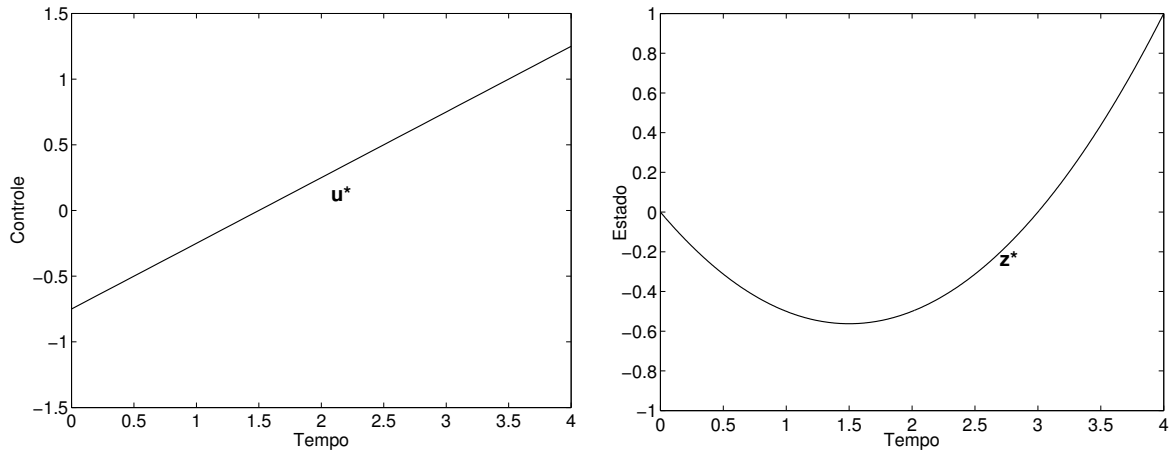


Figura 2: São ilustradas a evolução do controle ótimo u^* e estado ótimo z^* , em função do tempo, obtidos para o Exemplo 2.4. Note que, u^* é crescente em $t \in [0, 4]$ e z^* satisfaz a restrição exigida, $z^*(4) = 1$.

Exemplo 2.5 ([7]) *Encontre o controle ótimo e estado ótimo que minimiza*

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t) dt$$

sujeito a

$$\frac{dz}{dt}(t) = z(t) + u(t), \quad z(0) = 1, \quad z(1) = 0.$$

Resolução: Mais uma vez, transformemos o problema de mínimo em um problema de máximo, como segue

$$\begin{aligned} \min J(u) &= \min_u \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t) dt \\ &= -\max_u \frac{1}{2} \int_0^1 -(u^2(t)) dt, \end{aligned}$$

sujeito a

$$\frac{dz}{dt}(t) = z(t) + u(t), \quad z(0) = 1, \quad z(1) = 0.$$

Note que aqui o funcional objetivo não depende de z , mas devemos encontrar um controle que leva z do valor de 1 para o valor 0. O Hamiltoniano é

$$H = -\frac{1}{2}u^2 + \lambda z + \lambda u.$$

A condição de otimalidade nos dá

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial H}{\partial u} \\ &= -u + \lambda. \end{aligned}$$

Logo

$$u^*(t) = \lambda(t).$$

Temos também

$$\begin{aligned}\lambda'(t) &= -\frac{\partial H}{\partial z} \\ &= -\lambda.\end{aligned}$$

Daí

$$\lambda(t) = Ce^{-t},$$

onde C é uma constante. Assim temos

$$u^*(t) = \lambda(t) = Ce^{-t}.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}(t) &= z(t) + u(t) \\ &= z(t) + Ce^{-t},\end{aligned}$$

que nos fornece

$$z^*(t) = -\frac{C}{2}e^{-t} + Ke^t.$$

Usando as condições de fronteira sobre z , obtemos

$$\begin{aligned}1 &= z(0) = -\frac{C}{2} + K \\ 0 &= z(1) = -\frac{C}{2e} + Ke.\end{aligned}$$

Daí temos $C = -\frac{2e^2}{e^2 - 1}$ e $K = \frac{1}{1 - e^2}$, e assim

$$u^*(t) = \frac{2}{1 - e^2}e^{2-t} \quad \text{e} \quad z^*(t) = \frac{1}{e^2 - 1}(e^{2-t} - e^t).$$

Na Figura 3, plotamos a evolução do controle ótimo u^* e estado ótimo z^* obtidos no Exemplo 2.5. Podemos ver que u^* é estritamente crescente em $t \in [0, 1]$ em contraste com z^* que é estritamente decrescente neste mesmo intervalo de tempo. Note também,

que $z^*(1) = 0$, satisfazendo a restrição da variável de estado.

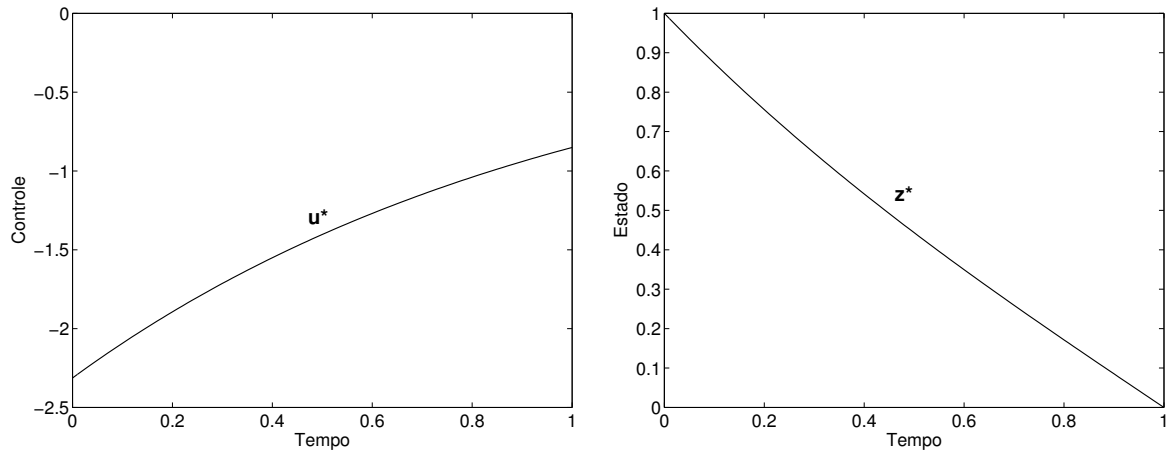


Figura 3: São ilustradas a evolução do controle ótimo u^* e estado ótimo z^* , obtidos para o Exemplo 2.5. Note que, u^* é estritamente crescente em $t \in [0, 1]$, ao passo que z^* é estritamente decrescente em $t \in [0, 1]$ e satisfaz a restrição exigida, $z^*(1) = 0$.

Nesta próxima seção será considerado o mesmo problema da Seção 2.1, mas adicionando restrições (limitações) à variável de controle.

2.4 Problema de Controle Ótimo com Variável de Controle Limitada

Em muitos problemas podemos ter que exigir também algumas restrições sobre o controle para obtermos uma solução realista. Suponha, por exemplo, que nosso controle é a quantidade de um produto químico usado em um sistema. Devemos então exigir que essa quantidade seja não negativa, ou seja, $u \geq 0$. Muitas vezes, o controle também deve ser limitado superiormente, pois talvez haja limitações físicas na quantidade de produto químico ou regulamentos ambientais que proíbem certos níveis de utilização. Também poderíamos ter um problema onde o controle fosse a percentagem de alguma força ou utilização, assim

$0 \leq u \leq 1$. A fim de resolver os problemas onde o controle possui limitações, temos que desenvolver condições necessárias alternativas.

Estamos agora considerando o problema de maximizar

$$J[u(t)] = \phi(z(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, z(t), u(t))dt, \quad (2.9)$$

sujeito a

$$\frac{dz}{dt}(t) = g(t, z(t), u(t)), \quad z(t_0) = z_0, \quad a \leq u(t) \leq b,$$

onde a e b são constantes reais fixadas, com $a < b$.

Sejam z^* , u^* um par de soluções ótimas para este problema. Seja h uma função real, contínua por partes, onde existe uma constante positiva ϵ_0 tal que para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$

$$u^\epsilon(t) = u^*(t) + \epsilon h(t)$$

é um controle admissível, ou seja,

$$a \leq u^\epsilon(t) \leq b \quad \text{para todo } t.$$

Devido às limitações no controle, a derivada do funcional objetivo pode não ser zero no controle ótimo, uma vez que o controle u , pode estar na fronteira para alguns pontos do intervalo de tempo considerado. Sendo assim, só podemos conhecer o sinal dessa derivada. Para calcular este sinal, também restringimos o sinal do parâmetro ϵ . Seja $z^\epsilon(t)$ a variável de estado correspondente para cada $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$.

Exatamente como foi feito na Seção 1.1, introduzimos a variável adjunta $\lambda(t)$, contínua por partes e aplicamos o Teorema Fundamental do Cálculo para escrevermos $J(u^\epsilon)$ como

$$J(u^\epsilon) = \int_{t_0}^{t_1} [f(t, z^\epsilon(t), u^\epsilon(t)) + \lambda(t)g(t, z^\epsilon(t), u^\epsilon(t)) + z^\epsilon(t)\lambda'(t)] dt - \lambda(t_0)z_0 + \lambda(t_1)z^\epsilon(t_1) + \phi(z(t_1)). \quad (2.10)$$

Como o máximo de $J(u)$ ocorre em u^* , segue

$$0 \geq \left. \frac{d}{d\epsilon} J(u^\epsilon) \right|_{\epsilon=0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{J(u^\epsilon) - J(u^*)}{\epsilon}. \quad (2.11)$$

Observe que a constante ϵ foi escolhida positiva, então podemos fazer apenas o limite lateral à direita. O numerador é claramente não-positivo, pois u^* é máximo para $J(u)$ e isto nos dá a desigualdade mostrada acima, ao invés da igualdade (1.4) da Seção 1.1. No entanto, isso é tudo que precisamos. Como fizemos antes, escolhemos a variável adjunta de modo que,

$$\lambda'(t) = -[f_z(t, z^*, u^*) + \lambda(t)g_z(t, z^*, u^*)], \quad \lambda(t_1) = \phi'(z^*(t_1)).$$

Assim, (2.10) e (2.11) reduzem a

$$0 \geq \int_{t_0}^{t_1} (f_u + \lambda g_u) h dt, \quad (2.12)$$

e esta desigualdade vale para todo h , como descrito acima.

Seja s um ponto de continuidade de u^* , com $a \leq u^*(s) < b$. Suponhamos que

$$f_u + \lambda g_u > 0 \quad \text{para } s.$$

Como u^* é contínua em s , temos que $f_u + \lambda g_u$ também o é. Daí, existe um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, contendo s , tal que $f_u + \lambda g_u$ é estritamente positiva e $u^* < b$, para pontos de I . Seja

$$M = \max\{u^*(t) : t \in I\} < b.$$

Defina uma h particular por

$$h(t) = \begin{cases} b - M & \text{se } t \in I, \\ 0 & \text{se } t \notin I. \end{cases}$$

Observe que $h > 0$ em I , pois $b - M > 0$. Além disso, $a \leq u^* + \epsilon h \leq b$, para todo $\epsilon \in [0, 1]$. Mas,

$$\int_{t_0}^{t_1} (f_u + \lambda g_u) h \, dt = \int_I (f_u + \lambda g_u) h \, dt > 0,$$

devido a escolha de I e h . Isto contradiz (2.12), e implica $f_u + \lambda g_u \leq 0$ para s .

De modo análogo, seja s um ponto de continuidade de u^* , com $a < u^*(s) \leq b$. Suponha $f_u + \lambda g_u < 0$ em s . Como anteriormente, existe um intervalo $\tilde{I} \subseteq \mathbb{R}$, contendo s , em que $f_u + \lambda g_u$ é estritamente negativa e $u^* > a$, para pontos de \tilde{I} . Seja

$$m = \min\{u^*(t) : t \in \tilde{I}\},$$

e defina uma função h por

$$h(t) = \begin{cases} a - m & \text{se } t \in \tilde{I}, \\ 0 & \text{se } t \notin \tilde{I}. \end{cases}$$

Então, $a \leq u^* + \epsilon h \leq b$, para todo $\epsilon \in [0, 1]$. Mas,

$$\int_{t_0}^{t_1} (f_u + \lambda g_u) h \, dt = \int_{\tilde{I}} (f_u + \lambda g_u) h \, dt > 0,$$

que contradiz (2.12). Assim, $f_u + \lambda g_u \geq 0$ para s . Além disso, isto vale para todos os pontos de continuidade s . Em resumo,

$$\begin{aligned} u^*(t) &= a & \text{se } \frac{\partial f}{\partial u} + \lambda \frac{\partial g}{\partial u} &\leq 0, \\ a < u^*(t) < b & \text{se } \frac{\partial f}{\partial u} + \lambda \frac{\partial g}{\partial u} &= 0, \\ u^*(t) &= b & \text{se } \frac{\partial f}{\partial u} + \lambda \frac{\partial g}{\partial u} &\geq 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Sendo que essas relações valem para todos os pontos t onde u é contínua. Como os pontos de descontinuidades são irrelevantes para o funcional objetivo e para a equação de

estado, não nos preocuparemos com eles. Estas novas condições necessárias podem ser escritas também em função do Hamiltoniano como as estabelecidas até agora. Formando o Hamiltoniano

$$H(t, z, u, \lambda) = f(t, z, u) + \lambda(t)g(t, z, u),$$

as condições necessárias para z^* e λ permanecem inalteradas, a saber

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{\partial H}{\partial \lambda}, & z(t_0) &= z_0, \\ \lambda'(t) &= -\frac{\partial H}{\partial z}, & \lambda(t_1) &= \phi'(z(t_1)). \end{aligned} \tag{2.14}$$

E segue que as condições de otimalidade (2.13) são dadas por

$$\begin{cases} u^* = a & \text{se } \frac{\partial H}{\partial u} < 0, \\ a \leq u^* \leq b & \text{se } \frac{\partial H}{\partial u} = 0, \\ u^* = b & \text{se } \frac{\partial H}{\partial u} > 0. \end{cases} \tag{2.15}$$

Observação 2.1 *Observe que os limites sobre o controle não tiveram efeito sobre a condição de transversalidade. No desenvolvimento das condições acima, lidamos apenas com o caso do estado ser fixado no momento inicial e livre no momento terminal. No entanto, outros casos podem ser tratados da mesma forma, fazendo algumas adaptações. Por exemplo, se $z(t_0)$ e $z(t_1)$ são fixos, então a variável adjunta não terá condições de contorno.*

Apresentamos a seguir um exemplo em que existem restrições sobre o controle.

Exemplo 2.6 ([4]) *Maximizar*

$$J[u(t)] = \int_0^2 [2z(t) - 3u(t) - u^2(t)]dt$$

sujeito a

$$\frac{dz}{dt}(t) = z(t) + u(t), \quad z(0) = 5, \quad 0 \leq u(t) \leq 2.$$

Resolução: Formemos o Hamiltoniano

$$H = 2z - 3u - u^2 + \lambda(z + u).$$

Então, resolvemos a equação adjunta

$$\lambda'(t) = -\frac{\partial H}{\partial z} = -2 - \lambda \implies \lambda(t) = -2 + Ce^{-t}.$$

Como $\lambda(2) = 0$, segue que $\lambda(t) = 2e^{2-t} - 2$. Já que encontramos o valor da adjunta, voltaremos nossa atenção para u^* , que deve levar em conta o sinal de $\frac{\partial H}{\partial u}$. Como

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -3 - 2u + \lambda,$$

temos

$$\begin{aligned} 0 > \frac{\partial H}{\partial u} \text{ em } t &\implies u(t) = 0 \\ &\implies 0 > -3 + \lambda = -3 + (2e^{2-t} - 2) \\ &\implies t > 2 - \ln(5/2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 < \frac{\partial H}{\partial u} \text{ em } t &\implies u(t) = 2 \\ &\implies 0 < -3 - 2(2) + \lambda = -7 + (2e^{2-t} - 2) \\ &\implies t < 2 - \ln(9/2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial H}{\partial u} \text{ em } t &\implies u(t) = \frac{1}{2}(\lambda - 3) \\ &\implies 0 \leq \frac{1}{2}(\lambda - 3) \leq 2 \\ &\implies 2 - \ln(9/2) \leq t \leq 2 - \ln(5/2). \end{aligned}$$

Portanto, o controle ótimo é dado por

$$u^*(t) = \begin{cases} 2 & \text{quando } 0 \leq t < 2 - \ln(9/2), \\ e^{2-t} - \frac{5}{2} & \text{quando } 2 - \ln(9/2) \leq t < 2 - \ln(5/2), \\ 0 & \text{quando } 2 - \ln(5/2) < t \leq 2. \end{cases}$$

Para encontrar o estado ótimo, substituímos o valor de u^* encontrado, na equação diferencial

$$\frac{dz}{dt}(t) = z(t) + u(t),$$

e resolvemos os três casos. Fazendo isso, encontramos que o estado ótimo é dado por

$$z^*(t) = \begin{cases} C_1 e^t - 2 & \text{quando } 0 \leq t < 2 - \ln(9/2), \\ C_2 e^t - \frac{1}{2}e^{2-t} + \frac{5}{2} & \text{quando } 2 - \ln(9/2) \leq t < 2 - \ln(5/2), \\ C_3 e^t & \text{quando } 2 - \ln(5/2) < t \leq 2, \end{cases}$$

onde C_1, C_2, C_3 são constantes. Usando o fato que $z(0) = 5$, obtemos $C_1 = 7$. Lembrando que a variável de estado é contínua, exigimos que ela seja contínua em $t = 2 - \ln(9/2)$ e

$t = 2 - \ln(5/2)$, e encontramos assim as constantes $C_2 = 7 - \frac{81}{8}e^{-2}$ e $C_3 = 7 - 7e^{-2}$. Daí o estado ótimo é

$$z^*(t) = \begin{cases} 7e^t - 2 & \text{quando } 0 \leq t \leq 2 - \ln(9/2), \\ \left(7 - \frac{81}{8}e^{-2}\right)e^t - \frac{1}{2}e^{2-t} + \frac{5}{2} & \text{quando } 2 - \ln(9/2) \leq t \leq 2 - \ln(5/2), \\ (7 - 7e^{-2})e^t & \text{quando } 2 - \ln(5/2) \leq t \leq 2. \end{cases}$$

A Figura 4 mostra a evolução do controle ótimo u^* e estado ótimo z^* , em função do tempo, obtidos no Exemplo 2.6. Note que, u^* começa sendo constante, igual a 2, passa por um intervalo de decrescimento, e depois volta a ser constante igual a 0, enquanto z^* é estritamente crescente em todo intervalo de tempo $t \in [0, 2]$. Além disso, observe que $z^*(0) = 5$, satisfazendo a restrição da variável de estado.

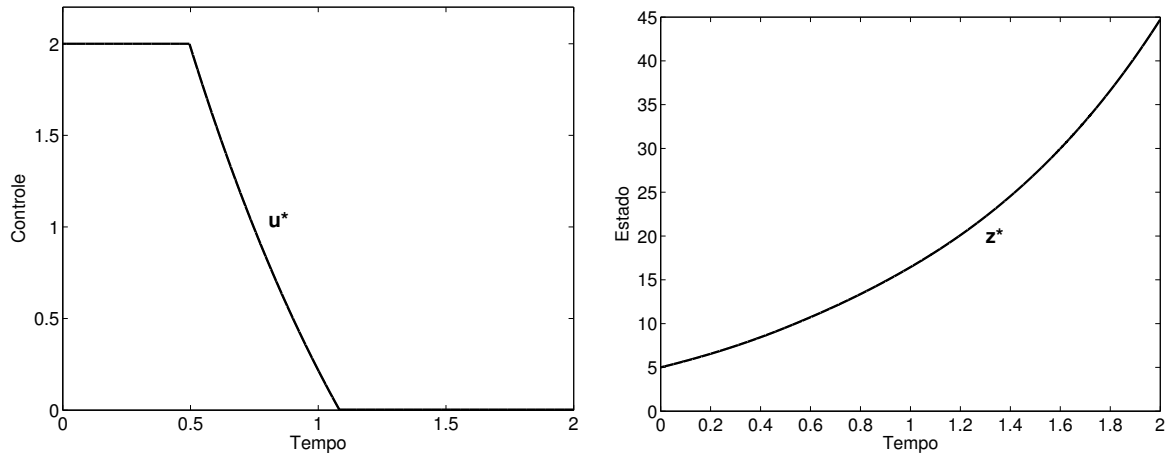


Figura 4: São ilustradas a evolução do controle ótimo u^* e estado ótimo z^* , obtidos para o Exemplo 2.6. Note que, enquanto u^* permanece constante ou em decrescimento em $t \in [0, 2]$, z^* é estritamente crescente neste intervalo e satisfaz a restrição exigida, $z^*(0) = 5$.

Capítulo 3

Controle Ótimo de Várias Variáveis

Nos capítulos anteriores analisamos problemas com um controle e uma variável de estado apenas. Muitas vezes queremos considerar mais variáveis. Por exemplo, quando consideramos um sistema de modelagem em que é utilizado antibióticos para combater uma infecção viral. Além do número de partículas virais no sangue podemos também querer acompanhar o número de anticorpos e glóbulos brancos. Estas quantidades seriam representadas como variáveis de estado adicionais. Além disso, suponha que o paciente estivesse tomando dois antibióticos diferentes o que levou o organismo a produzir anticorpos em diferentes taxas ou horas. Poderíamos também estar interessados em analisar um modelo de epidemia SIR [13], onde o controle fosse os diferentes níveis de vacinação. Discutiremos a seguir, como lidar com problemas deste tipo.

3.1 Condições Necessárias

Nesta seção estenderemos as condições necessárias para otimalidade, no caso de uma variável de controle e uma variável de estado da Seção 1.1, para o problema que possui várias variáveis de controle e múltiplas variáveis de estado.

O método desenvolvido até agora para um controle e um estado é estendido a controle ótimo de múltiplos estados e variáveis de controle. Considere um problema com n variáveis de estado, m variáveis de controle e uma *função retorno* ϕ . Assim, o nosso problema é

$$\max_{u_1, \dots, u_m} \left[\phi(z_1(t_1), \dots, z_n(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, z_1(t), \dots, z_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)) dt \right], \quad (3.1)$$

sujeito a

$$\frac{dz_i}{dt}(t) = g_i(t, z_1(t), \dots, z_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t)), \quad z_i(t_0) = z_{i0} \text{ para } i = 1, \dots, n,$$

onde f, g_i são continuamente diferenciáveis em todas variáveis. Não fazemos nenhuma restrição sobre m, n , ou seja, $m < n, m = n$ ou $m > n$ são todos aceitos. Usaremos a notação vetorial para transformarmos o problema em uma forma mais familiar.

Sejam

$$\begin{aligned} z(t) &= (z_1(t), \dots, z_n(t)), \\ u(t) &= (u_1(t), \dots, u_m(t)), \\ z_0 &= (z_{10}, \dots, z_{n0}), \\ g(t, z(t), u(t)) &= (g_1(t, z(t), u(t)), \dots, g_n(t, z(t), u(t))). \end{aligned}$$

Então, podemos reescrever o nosso problema como segue

$$\max_u J(u) = \max_u \left[\phi(z(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, z(t), u(t)) dt \right], \quad (3.2)$$

sujeito a

$$\frac{dz}{dt}(t) = g(t, z(t), u(t)), \quad z(t_0) = z_0.$$

Seja u^* um vetor de funções de controle ótimo e z^* o vetor de variáveis de estado ótimo correspondente. Com estado de dimensão, precisamos de n equações adjuntas, uma para cada dimensão do estado. Introduzimos um vetor de funções diferenciáveis por partes,

$$\lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)),$$

onde cada λ_i é a variável adjunta correspondente ao estado z_i . Defina o Hamiltoniano

$$H(t, z(t), u(t), \lambda(t)) = f(t, z(t), u(t)) + \lambda(t) \cdot g(t, z(t), u(t)),$$

onde \cdot representa o produto interno de vetores. Pelo mesmo argumento já apresentado para um controle e um estado apenas, encontramos as variáveis satisfazendo a condição de otimalidade, equação adjunta e a condição de transversalidade em cada componente do vetor, ou seja, u^* maximiza $H(t, z^*, u^*, \lambda)$ com respeito a u em cada t e u^*, z^* e λ satisfazem

$$\begin{aligned} \frac{dz_i}{dt}(t) &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} = g_i(t, z, u) & \text{e } z_i(t_0) &= z_{i0} \quad i = 1, \dots, n. \\ \lambda'_j(t) &= -\frac{\partial H}{\partial z_j} & \text{e } \lambda_j(t_1) &= \phi_{z_j}(z(t_1)) \quad \text{para } j = 1, \dots, n. \\ 0 &= \frac{\partial H}{\partial u_k} & \text{para } k &= 1, \dots, m, \end{aligned}$$

onde

$$H(t, z(t), u(t), \lambda(t)) = f(t, z(t), u(t)) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) \cdot g_i(t, z(t), u(t)),$$

e ϕ_{z_j} representa a derivada parcial de ϕ na componente z_j . Observe que se $\phi \equiv 0$, então $\lambda_j(t_1) = 0$ para todo j , como usual.

Modificações dos problemas produzem ajustes sobre as condições necessárias, análogas às apresentadas para uma variável de controle e uma variável de estado. Por exemplo, se uma variável de estado z_i , particular, satisfaz $z_i(t_0) = z_{i0}$, $z_i(t_1) = z_{i1}$, ambos fixados, então a adjunta λ não tem condição de fronteira. Similarmente, se limitações são impostas sobre as variáveis de controle, $a_k \leq u_k \leq b_k$, então a condição de otimalidade é mudada de

$$\frac{\partial H}{\partial u_k} = 0,$$

para

$$\begin{cases} u_k = a_k & \text{se } \frac{\partial H}{\partial u_k} < 0; \\ a_k \leq u_k \leq b_k & \text{se } \frac{\partial H}{\partial u_k} = 0; \\ u_k = b_k & \text{se } \frac{\partial H}{\partial u_k} > 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Ilustraremos estas idéias com os exemplos a seguir:

Exemplo 3.1 ([7]) *Resolva*

$$\max_{u_1, u_2} \int_0^1 z(t) - \frac{1}{8}u_1^2(t) - \frac{1}{2}u_2^2(t) dt \quad (3.4)$$

sujeito a

$$\frac{dz}{dt}(t) = u_1(t) + u_2(t), \quad z(0) = z_0, \quad 1 \leq u_1(t) \leq 2.$$

Resolução: O Hamiltoniano neste caso é dado por

$$H(t, z(t), u_1(t), u_2(t), \lambda(t)) = z - \frac{1}{8}u_1^2(t) - \frac{1}{2}u_2^2(t) + \lambda(t)u_1(t) + \lambda(t)u_2(t).$$

A equação adjunta e a condição de transversalidade produzem

$$\lambda'(t) = -\frac{\partial H}{\partial z} = -1 \quad \lambda(1) = 0.$$

Daí, $\lambda(t) = 1 - t$. O segundo controle não tem limitação, assim podemos encontrá-lo fazendo,

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u_2} = -u_2 + \lambda.$$

Daí, $u_2^*(t) = \lambda(t) = 1 - t$.

Para encontrarmos u_1^* , note que

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = \lambda - \frac{u_1}{4}.$$

E assim temos,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial u_1} < 0 &\implies u_1(t) = 1 \\
&\implies 1 - t < \frac{1}{4} \\
&\implies t > \frac{3}{4} \\
\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0 &\implies u_1(t) = 4\lambda = 4 - 4t \\
&\implies 1 \leq 4 - 4t \leq 2 \\
&\implies \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\
\frac{\partial H}{\partial u_1} > 0 &\implies u_1(t) = 2 \\
&\implies 1 - t > \frac{1}{2} \\
&\implies t < \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Substituindo os três casos na equação de estado,

$$\frac{dz}{dt}(t) = u_1(t) + u_2(t),$$

e exigindo a continuidade, encontramos z^* . Então, o conjunto de soluções ótimas é:

$$\begin{aligned}
u_1^*(t) &= \begin{cases} 2 & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ 4 - 4t & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ 1 & \frac{3}{4} < t \leq 1. \end{cases} & u_2^*(t) = 1 - t, \\
z^*(t) &= \begin{cases} 3t - \frac{1}{2}t^2 & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 5t - \frac{5}{2}t^2 - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ 2t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{5}{8} & \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Na Figura 5, é mostrado a diferença entre os u_1^* e u_2^* em função do tempo, obtidos no Exemplo 3.1. Note que, u_1^* começa sendo constante, igual a 2, passa por um intervalo de decréscimo, e depois volta a ser constante igual a 1, enquanto o controle u_2^* é

estritamente decrescente em todo intervalo de tempo $t \in [0, 1]$.

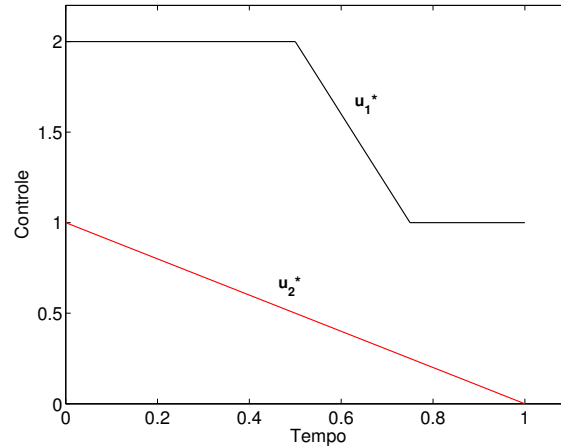


Figura 5: São ilustradas a evolução dos controles u_1^* e u_2^* obtidos para o Exemplo 3.1. Note que, enquanto u_1^* permanece constante em valores diferentes, ou em decrescimento em $t \in [0, 2]$, u_2^* é estritamente decrescente em todo este intervalo.

Exemplo 3.2 ([7]) Considere um biorreator bem agitado em que existe contaminante e bactérias e que eles estejam espacialmente uniforme, onde

- $z(t)$ é a concentração de contaminante no instante t e
- $x(t)$ é a concentração de bactéria no instante t .

O biorreator é rico em todos nutrientes, exceto um, que queremos controlar,

$u(t)$ concentração da entrada de nutrientes no instante t .

A bactéria degrada o contaminante via co-metabolismo, ou seja, as bactérias não consomem o contaminante diretamente. O crescimento das bactérias como resultado do consumo de nutriente u é uma função crescente limitada, chamada cinética Monod ou Michealis-Menton [7]:

$$x'(t) = \frac{Gu(t)}{B + u(t)}x(t) - Dx^2(t), \quad x(0) = x_0,$$

$$z'(t) = -Kx(t)z(t), \quad z(0) = z_0.$$

Aqui, G representa a taxa máxima de crescimento, D é a taxa de mortalidade e K é a taxa de degradação das bactérias e a constante B é a concentração de nutrientes. Nosso objetivo neste problema é minimizar a concentração final de contaminantes e injeção total do nutriente. Como o logaritmo natural é uma função estritamente crescente, podemos minimizar o funcional objetivo

$$J(u) = \ln(z(T)) + \int_0^T Au(t)dt. \quad (3.5)$$

Resolução: A introdução do logaritmo natural apesar de parecer artificial, permite uma grande simplificação. Observe também que a primeira variável de estado x , no instante t , não depende de $z(t)$ em sua equação de estado. Então, se podemos encontrar uma expressão de $z(t)$ em termos de t , x e, ou u , podemos eliminar a variável z do problema. Resolvendo a equação

$$z'(t) = -Kx(t)z(t),$$

segue que

$$z(t) = z_0 e^{\left(-\int_0^t Kx(s)ds\right)}.$$

Usando esta expressão com $t = T$,

$$\int_0^T Kx(s)ds = -\ln\left(\frac{z(T)}{z_0}\right) = \ln(z_0) - \ln(z(T)).$$

A constante $\ln(z_0)$ é irrelevante na minimização, assim ignoramos ela. Substituindo $\ln(z(T))$ pela expressão integral acima em (3.5), e tomando $-J(u)$, o nosso problema passa a ser expresso como

$$\max_u \int_0^T [Kx(t) - Au(t)] dt, \quad (3.6)$$

sujeito a

$$\frac{dx}{dt}(t) = \frac{Gu(t)}{B + u(t)}x(t) - Dx^2(t), \quad x(0) = x_0, \quad u(t) \geq 0.$$

Observe que eliminamos a variável z , portanto não há necessidade de incluir a sua equação de estado no problema. Uma vez que tenhamos encontrado o controle ótimo e x^* , então podemos encontrar z . Por enquanto, trabalharemos apenas com x , e assim, apenas uma equação adjunta.

Usando o Hamiltoniano, calculamos as condições necessárias

$$\begin{aligned} H &= Kx - Au + \lambda \left(\frac{Gux}{B + u} - Dx^2 \right) \\ \frac{\partial H}{\partial u} &= -A + \lambda x \frac{GB}{(B + u)^2} \implies u^* = \max\{0, A^{-1/2}(\lambda x GB)^{1/2} - B\}, \\ \lambda' &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -\left[\lambda \left(\frac{Gu}{B + u} - 2Dx \right) + K \right], \quad \lambda(T) = 0. \end{aligned}$$

Agora poderíamos encontrar u^* , x^* e λ numericamente, mas este trabalho não é feito aqui. Para ver um problema do biorreator com um termo de crescimento mais simples e sua solução numérica veja [7].

No próximo capítulo usaremos a teoria estudada até agora em dois problemas realistas.

Capítulo 4

Aplicações da Teoria do Controle Ótimo

Neste capítulo iremos apresentar aplicações práticas da Teoria do Controle Ótimo, por meio do estudo dos artigos *Optimal Control of Biological Invasions in Lake Networks* de Alexei B. Potapov, Mark A. Lewis e David C. Finnoff [10] e *Optimal Control Applied to Competing Chemotherapeutic Cell-Kill Strategies* de K. Renee Fister e John Carl Panetta [3]. Para estudar o primeiro artigo, na Seção 4.1, utilizaremos a teoria apresentada no Capítulo 3, no caso em que o termo de retorno $\phi \equiv 0$. Já para o segundo, na Seção 4.2, usaremos a teoria estudada na Seção 2.4, caso em que o termo de retorno não é identicamente nulo.

Na Seção 4.1, apresentamos o modelo de controle da invasão em redes de lagos [10], onde iremos entender por meio das soluções analítica e numérica, como a política de prevenção ótima se comporta com a mudança de alguns fatores, tais como os danos econômicos causados pela espécie invasora, a eficiência da prevenção, o tempo horizonte, a quantidade de lagos invadidos no início da prevenção, e a taxa de desconto.

Finalizamos apresentando na Seção 4.2 o modelo de tratamento de câncer [3], onde buscaremos como se comporta a densidade de um tumor quando é aplicado e não é aplicado controle no tratamento (tratamento com drogas) e ainda saber qual a influência da densidade inicial para o tratamento.

4.1 Controle Ótimo de Invasões Biológicas em uma Rede de Lagos

Atualmente, com a globalização, as trocas comerciais, o turismo e os meios de transporte entre regiões ou até mesmo entre países, vêm favorecendo a introdução (en-

trada e estabelecimento) e dispersão de espécies exóticas invasoras de uma região para outra. Espécies exóticas invasoras são espécies não nativas que são introduzidas por meio de dispersão natural ou devido a ação humana (por meio marítimo ou rodoviário, por exemplos), que encontrando um meio favorável para o seu desenvolvimento, estabelece e começa espalhar-se, causando danos biológicos e econômicos, pois uma vez que não existe predadores para tal espécie, ela começa a se espalhar, competindo assim com outras espécies nativas e muitas vezes também prejudicando alguma atividade econômica da região em que infesta [13].

Um exemplo de uma espécie exótica invasora é o *mexilhão zebra*, que vem trazendo sérios problemas na Região dos Grandes Lagos na América do Norte [10], que é a região central do mapa, ilustrada na Figura 6.

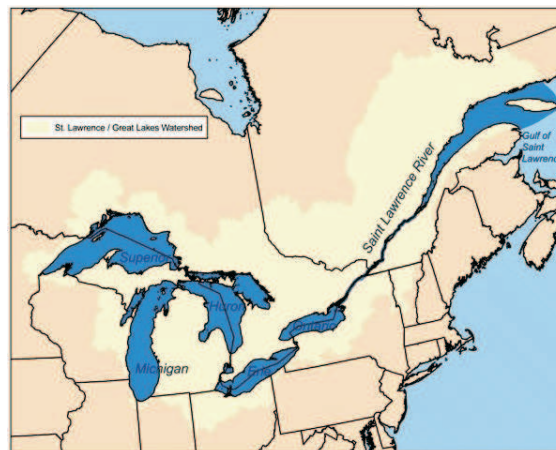


Figura 6: Região dos Grandes Lagos, situados na América do Norte, formada pelos Lagos Superior, Michigan, Huron, Erie e Ontário.

Dentre os problemas causados pelo *mexilhão zebra* podemos citar:

- Entupimento do sistema de abastecimento de água de tubos de centrais elétricas e industriais.
- Problemas de gosto e odor na água potável.
- Danos nos motores de barcos e fixação no casco de barcos de pesca.
- Matam moluscos nativos, perturbando assim a cadeia alimentar aquática e eliminam as camas de desova dos peixes.
- Criam mau cheiro em praias e outras áreas de diversão.

O primeiro e terceiro problemas são apresentados na Figura 7.



Figura 7: Na figura à esquerda temos a hélice de um barco tomada pelo mexilhão zebra e na figura à direita temos o entupimento de canos pela mesma espécie invasora.

Nessa seção iremos fazer um estudo do artigo *Optimal Control of Biological Invasions in Lake Networks* de Alexei B. Potapov, Mark A. Lewis e David C. Finnoff, que apresenta uma análise de como gerir recursos para controlar a invasão de espécies exóticas, como o *mexilhão zebra*, numa rede de lagos. O artigo considera uma rede de lagos, que é invadida por espécies exóticas que causam danos biológicos e, ou, econômicos à região. Então, é apresentado o modelo que descreve a parte biológica do problema e em seguida, como existe um certo custo (prejuízos causados por ela e custos devido à prevenção que necessita ser empregada) devido a essa invasão, o objetivo é encontrar controles ótimos que minimizem este custo restrito à descrição do modelo biológico.

Apresentaremos, na Subseção 4.1.1, a descrição do problema e um modelo matemático que o descreve. Apresentaremos ainda a descrição da parte econômica envolvida, pois a invasão causa prejuízos e também gastos devido à prevenção empregada. Aplicase, então, na Subseção 4.1.2, a Teoria do Controle Ótimo, apresentada na Seção 3.1 ($\phi \equiv 0$, $a \leq u_k \leq b$) para solucionar o problema.

Alguns resultados utilizados nas Subseções 4.1.1 e 4.1.2 serão provados em 4.1.4 para simplificação do texto.

4.1.1 Modelo macroscópico de invasão e prevenção

Suponhamos que exista uma espécie exótica invasora (neste caso, uma espécie invasora pode significar um grupo de espécies, pois o grupo causa o prejuízo econômico e, ou, biológico) introduzida em um ou vários lagos, que ela tenha se estabelecido e começa a espalhar-se para outros lagos da região. A principal ação humana que influencia a propagação de tais espécies é o transporte de barcos e equipamentos de pesca de um lago para outro. Consideremos que o gestor de recursos, o responsável pelo gerenciamento do problema em questão, possui recursos escassos para maximizar o bem estar social,

sujeito aos danos da invasão, custos de prevenção de disseminação e propagação da espécie invasora.

Chamaremos os lagos invadidos de “doadores”, uma vez que eles são as fontes da propagação de invasores, e os lagos não invadidos chamaremos de “destinatários”. O número total de lagos N se presume ser grande o suficiente, tal que

- (i) podemos caracterizar o processo de invasão por uma única variável, a proporção de lagos invadidos p , no instante de tempo t , (o número de lagos invadidos, denotado por N_i , dividido pelo número total de lagos N , $p = \frac{N_i}{N}$) e
- (ii) a mudança de p com o tempo pode ser razoavelmente aproximada por uma função contínua e diferenciável. Neste caso é possível obter um modelo de crescimento quadrático para $p(t)$, isto é, que é tanto biologicamente razoável e matematicamente conveniente

$$\frac{dp}{dt} = Ap(t)(1 - p(t)), \quad (4.1)$$

conhecida como *Modelo de Verhulst* ou *Equação Logística* [9].

A obtenção de (4.1) decorre da hipótese de que o transporte de barcos e equipamentos de pesca independem do processo de invasão e é também suposto este mecanismo de transporte para poder ligar todos os lagos considerados.

Ao número médio de propagação de invasores que podem ser transportados de um doador para um destinatário, chamaremos tráfego do mecanismo de transporte e na ausência de qualquer aplicação de prevenção, assumimos que o número médio de propagação que pode ser transportado de qualquer lago doador para um lago destinatário por tempo, (definido como intensidade de transporte de propagação) é constante e denotado por A_1 .

Para um pequeno período de tempo Δt , o número médio total de propagação transportada de cada lago invadido N_i , para qualquer outro dado lago é então

$$K = N_i A_1 \Delta t.$$

Assim, o número total introduzido dentro de N_r lagos ainda não invadidos é

$$N_i N_r A_1 \Delta t.$$

Se a probabilidade de uma propagação sobreviver depois da introdução é dado por A_2 , o número de propagações sobreviventes será

$$N_i N_r A_1 A_2 \Delta t.$$

Como N_r é o número de lagos ainda não invadidos, $N_r = N - N_i$, e assim o aumento no número de lagos invadidos durante Δt é

$$\Delta N_i = A_1 A_2 \Delta t N_i (N - N_i). \quad (4.2)$$

Dividindo a equação (4.2) por N e levando em conta que $\Delta N_i/N = \Delta p$, $N_i = pN$, e $\Delta N_i = N\Delta p$, temos

$$\Delta p = A_1 A_2 N p (1 - p) \Delta t.$$

Assumindo $p(t)$ diferenciável e Δt pequeno, obtemos a equação (4.1), com $A = A_1 A_2 N$.

Suponha que o gestor de recursos leve em conta que os benefícios de prevenir a disseminação da invasão seja tal que grandes investimentos na prevenção são justificados. Suponha que seja possível estimar o custo dos danos causados ao ecossistema pela invasão e que o custo do prejuízo por unidade de tempo seja proporcional ao número total de lagos invadidos, e seja g (constante) o custo financeiro do prejuízo em um único lago durante uma unidade de tempo. Assim, o custo do prejuízo total por unidade de tempo será

$$C_1(t) = gN_i(t).$$

Suponha ainda que o gestor dos recursos emprega alguma prevenção, o que aumenta o custo da invasão por unidade de tempo. Por exemplo, um meio empregado na prevenção da disseminação, é a desinfecção de equipamentos quando se vai de um lago para outro e para isso é necessário criar postos de controle e fornecer materiais, sendo que ambos são caros.

Embora não seja necessário, para abreviar o processo de desinfecção (prevenção), consideraremos que este processo de desinfecção possa ser realizado em todos os lagos, tanto doadores como também em destinatários (No contexto de epidemias, isto é similar ao tratamento de tanto infectados, com uma doença, como também daqueles ainda não infectados).

Sendo assim, sejam $x(t)$ os esforços de prevenção em lagos doadores no instante de tempo t , com unidade de custo w_x (constante), e $s(t)$ os esforços de prevenção em lagos destinatários no instante de tempo t , com unidade de custo w_s . Daí, o custo total da prevenção por unidade de tempo é

$$C_2(t) = w_x x(t) N_i(t) + w_s s(t) (N - N_i(t)). \quad (4.3)$$

Combinando prejuízos e custo da prevenção, temos o custo total por unidade de tempo,

$$\tilde{C}(t) = C_1(t) + C_2(t) = gN_i(t) + w_x x(t) N_i(t) + w_s s(t) (N - N_i(t)).$$

Para manter o foco do gestor sobre a proporção de lagos invadidos, calcularemos o custo médio de invasão por lago por unidade de tempo,

$$C(t) = \frac{\tilde{C}(t)}{N} = gp(t) + w_x x(t)p(t) + w_s s(t)(1 - p(t)). \quad (4.4)$$

Note que o custo médio é composto do custo médio dos prejuízos causados devido à invasão (primeiro termo), custo médio de prevenção para lagos doadores (segundo termo) e o custo médio de prevenção para lagos destinatários (terceiro termo).

Note também que a prevenção $x(t)$ em um lago doador reduz o número médio de propagação transportada para qualquer lago destinatário de A_1 para

$$A_1 a(x(t)), \quad 0 < a \leq 1,$$

onde $a(x(t))$ é a probabilidade de uma propagação escapar depois do tratamento e temos que $1 - a(x(t))$ pode ser interpretada como a proporção tratada em lagos doadores.

Analogamente, $s(t)$ e $b(s(t))$ ($0 < b \leq 1$), são esforços de prevenção e a probabilidade de uma propagação escapar após o tratamento em qualquer lago destinatário, respectivamente.

Para concluir a descrição do problema é necessário definir uma relação explícita entre a proporção tratada, $1 - a(x(t))$ em doadores, $1 - b(s(t))$ em destinatários e os esforços de tratamento $x(t)$ e $s(t)$. Iremos assumir que os efeitos de dois tratamentos sucessivos são independentes, e o tratamento com efeitos x_1 e x_2 são equivalentes a um único tratamento com efeito $x_1 + x_2$. Então, das propriedades de probabilidade de dois eventos independentes, temos

$$a(x_1 + x_2) = a(x_1)a(x_2). \quad (4.5)$$

Assumimos ainda, que um pequeno efeito $x_2 = \Delta x \ll 1$ trata uma fração proporcional de propagação

$$1 - a(\Delta x) \approx k_1 \Delta x, \quad (4.6)$$

onde k_1 é a eficácia do controle. Usando as relações (4.5) e (4.6) obtemos

$$a(x + \Delta x) = a(x)a(\Delta x) \approx a(x) - k_1 a(x) \Delta x,$$

ou

$$\Delta a = -k_1 a(x) \Delta x$$

quando $\Delta x \rightarrow 0$.

Similarmente,

$$\Delta b = -k_2 b(s) \Delta s,$$

quando $\Delta s \rightarrow 0$. Isto nos leva a uma forma exponencial que incorpora a eficácia de prevenção,

$$a(x(t)) = e^{-k_1 x(t)}, \quad b(s(t)) = e^{-k_2 s(t)}, \quad (4.7)$$

onde k_1 e k_2 caracterizam a eficiência do tratamento.

Sob estes pressupostos, a disseminação da infecção quando empregado prevenção é descrita pela equação (4.1), com $A = A_1 A_2 N$ sendo substituída por $A = A_1 a A_2 b N$, onde a e b são dados pela equação (4.7),

$$\frac{dp}{dt} = A e^{-k_1 x(t) - k_2 s(t)} p(t) (1 - p(t)) \quad (4.8)$$

com uma proporção inicial de lagos infectados $p(0) = p_0$.

Na subseção a seguir, é estudado o problema de controle ótimo em questão, fazendo uso da Teoria do Controle Ótimo apresentada na Seção 3.1.

4.1.2 Controle ótimo da invasão

Para caracterizar o gerenciamento ótimo, o problema que o gestor de recursos enfrenta é a escolha dos esforços de prevenção, $x(t) \geq 0$ e $s(t) \geq 0$, de modo a minimizar o fluxo de custos descontado J durante um dado tempo horizonte (duração de tempo máximo que se pretende fazer a prevenção) T ,

$$J[x(t), s(t)] = \int_0^T e^{-rt} C(t) dt,$$

sujeito a

$$\frac{dp}{dt}(t) = A e^{-k_1 x(t) - k_2 s(t)} p(t) (1 - p(t)), \quad p(0) = p_0,$$

onde

$$C(t) = gp(t) + w_x x(t)p(t) + w_s s(t)(1 - p(t))$$

representa o custo médio da invasão e r (constante) é a *taxa de desconto* (taxa de desconto e taxa de juros, são termos sinônimos, normalmente aplicada quando os pagamentos futuros são descontados ou quando os pagamentos atuais são compostos, respectivamente) [1].

Se x e s são escolhidos tais que o custo total da invasão J seja mínimo, uma tarefa de controle ótimo é obtida. Trajetórias ótimas para x e s serão denotadas por $x^*(t)$, $s^*(t)$. Note que queremos minimizar J , então vale lembrar que $\min\{J\} = -\max\{-J\}$. Assim, preocuparemos com $\max\{-J\}$.

O *Princípio do Máximo de Pontryagin* (versão das condições necessárias apresentada na Seção 3.1) é usado para resolver a tarefa imposta ao gestor. Regras ótimas para

x e s , dada uma proporção inicial de lagos invadidos, pode ser encontrada pelo princípio do máximo aplicado ao Hamiltoniano do *valor corrente* (valor corrente quer dizer que o determinado valor está expresso exatamente com os números que ele tinha na época em que foi registrado). O Hamiltoniano do *valor presente* (valor atual do investimento que será feito, ou seja, o valor agora de tal investimento que será feito) é dado por

$$H(t, (x, s), p, \lambda) = -e^{-rt}C(t) + \lambda(t)Ae^{-k_1x-k_2s}p(1-p).$$

Logo o Hamiltoniano do *valor corrente*, definido por $\tilde{H} = e^{rt}H$, é dado por

$$\tilde{H} = e^{rt}H = -C(t) + \mu Ae^{-k_1x-k_2s}p(1-p),$$

onde

$$\mu(t) = e^{rt}\lambda(t)$$

é o *preço sombra do valor corrente* da proporção de lagos invadidos (valor atribuído a produtividade futura, ou seja, quanto de dinheiro adicional vou precisar quando fizer um aumento adicional na proporção de lagos invadidos). Portanto,

$$\tilde{H}(t, (x, s), p, \mu) = -(gp + w_xxp + w_ss(1-p)) + \mu Ae^{-k_1x-k_2s}p(1-p). \quad (4.9)$$

Do Princípio do Máximo de Pontryagin, para controles ótimos x^* , s^* , μ temos

$$\frac{d\mu}{dt} = r\mu - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p} = \mu[r - Ae^{-k_1x-k_2s}(1-2p)] + (g + w_xx - w_ss).$$

Logo p e μ satisfazem as equações diferenciais

$$\frac{dp}{dt} = Ae^{-k_1x(t)-k_2s(t)}p(t)(1-p(t)) = F(p, x, s), \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.10)$$

$$\frac{d\mu}{dt} = \mu[r - Ae^{-k_1x-k_2s}(1-2p)] + (g + w_xx - w_ss) = G(p, \mu, x, s), \quad (4.11)$$

$$p(0) = p_0, \quad \mu(T) = 0.$$

Dado o pressuposto do controle ser limitado inferiormente, contínuo por partes, isto implica que $p(t)$ e $\mu(t)$, soluções das equações diferenciais ordinárias (4.10) e (4.11), são contínuas e continuamente diferenciáveis por partes, isto devido a continuidade por partes da expressão do lado direito das equações (4.10) e (4.11).

A condição necessária de otimalidade (caso de controles limitados (veja a Seção 3.1, equação (3.3)), para o controle ótimo é o valor máximo de \tilde{H} para cada momento de

tempo t , isto é, para ótimos $x = x^*$ e $s = s^*$

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} = -w_x p - k_1 \mu A e^{-k_1 x - k_2 s} p(1-p) = 0, \quad \text{ou} \quad x = 0, \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} < 0, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial s} = -w_s(1-p) - k_2 \mu A e^{-k_1 x - k_2 s} p(1-p) = 0, \quad \text{ou} \quad s = 0, \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial s} < 0, \quad (4.13)$$

onde suprimimos a notação de tempo.

A primeira condição em cada equação de (4.12) e (4.13) correspondem a um “máximo no interior” para x e s , respectivamente, enquanto que a segunda condição corresponde ao “máximo na fronteira”.

Observe que, genericamente, as condições

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial s} = 0,$$

não podem ser satisfeitas juntas, porque então simultaneamente,

$$w_x = -k_1 \mu A e^{-k_1 x - k_2 s} (1-p), \quad w_s = -k_2 \mu A e^{-k_1 x - k_2 s} p, \quad (4.14)$$

ou $k_2 p w_x = k_1 (1-p) w_s$, isto nos dá apenas um único valor para p , a saber

$$p = p_s = \frac{w_s k_1}{w_s k_1 + w_x k_2}. \quad (4.15)$$

Ou seja, a proporção de lagos invadidos é fixa, o que não condiz com a realidade. Portanto, não mais que um tipo de controle é não nulo, isto é, se $x > 0$ temos $s = 0$ e se $s > 0$ devemos ter $x = 0$.

No que se segue é necessário conhecer o sinal de μ .

Proposição 4.1 *O preço sombra $\mu(t)$ para $t < T$ é sempre negativo, desde que a invasão seja cara, ou seja $g > 0$.*

A prova deste resultado é dada na Subseção 4.1.4.

Para determinar que p vai corresponder a que tipo de controle considere (4.15) e as condições necessárias.

Sendo $p < p_s$, então das expressões para

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial s},$$

segue que,

$$\text{se } s \geq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial s} = 0, \quad \text{então} \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} > 0 \quad \text{e} \quad x \geq 0,$$

o que nos dá uma contradição, pois para $x \geq 0$ temos que

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \leq 0.$$

Por outro lado,

$$\text{se } x \geq 0 \text{ e } \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} = 0, \text{ então } \frac{\partial \tilde{H}}{\partial s} < 0 \text{ e } s = 0,$$

o que é compatível.

Analogamente, para o caso $p > p_s$, se supomos que

$$\text{se } s \geq 0 \text{ e } \frac{\partial \tilde{H}}{\partial s} = 0, \text{ então } \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} < 0 \text{ e } x = 0,$$

o que é compatível com o que temos. Mas,

$$\text{se } x \geq 0 \text{ e } \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} = 0, \text{ então } \frac{\partial \tilde{H}}{\partial s} > 0 \text{ e } s = 0,$$

o que é uma contradição, pois para $s \geq 0$ temos que

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial s} \leq 0.$$

Estas considerações nos permite concluir que

- a) Para $p < p_s$ apenas controle para lagos invadidos (doadores) pode ser não nulo;
- b) Para $p > p_s$ apenas controle para lagos não invadidos (destinatários) pode ser não nulo;
- c) O valor $p = p_s$ corresponde à mudança entre os dois tipos de controle. As condições (4.12) e (4.13) fornecem apenas o valor do controle total, $\varphi = k_1x + k_2s$ para este ponto, mas não para x e s separadamente. Portanto, um dos controles x ou s podem ser escolhidos a nossa conveniência. Por exemplo, podemos escolher $s = 0$, então um dos controles é zero para $p = p_s$.

Portanto, para qualquer momento apenas uma variável de controle será não nula. Isto permite que as condições suficientes para um máximo de \tilde{H} sejam verificadas como se fosse uma função de apenas uma variável, e assim basta apenas verificar os sinais das segundas derivadas $\partial^2 \tilde{H} / \partial x^2$ e $\partial^2 \tilde{H} / \partial s^2$. Isto ocorre pelo fato do máximo de \tilde{H} , neste caso, sempre ser alcançado na fronteira do conjunto de controle admissível (pois, de modo geral, não ocorre $x > 0$ e $s > 0$ simultaneamente).

Deste modo, o procedimento padrão para máximo interno de uma função de duas variáveis, envolvendo a matriz Hessiana, não é aplicável.

Para as condições suficientes podemos mostrar que, desde que $\mu < 0$,

$$\frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial x^2} = k_1^2 \mu A e^{(k_1 x - k_2 s)} p(1-p) < 0,$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial s^2} = k_2^2 \mu A e^{(k_1 x - k_2 s)} p(1-p) < 0,$$

e portanto as condições

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial s} = 0,$$

implicam que existe um ponto de máximo de \tilde{H} em relação a x ou s .

Em resumo, temos Regiões I, II e III, onde obtemos os seguintes tipos de soluções ótimas:

(i) **Região I.** Controle em doadores, $x^* > 0$, $s^* = 0$, as condições de otimalidade

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial s} < 0,$$

significam que $p < p_s$ e

$$x^* = \frac{1}{k_1} \ln \left(\frac{-k_1 A \mu (1-p)}{w_x} \right). \quad (4.16)$$

De fato,

$$0 = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} = -w_x p - k_1 \mu A e^{-k_1 x - k_2 s} p(1-p) \implies -w_x p - k_1 \mu A e^{-k_1 x^*} p(1-p) = 0.$$

Daí

$$e^{-k_1 x^*} = \frac{-w_x}{k_1 \mu A (1-p)},$$

que nos dá

$$x^* = \frac{1}{k_1} \ln \left(\frac{-k_1 A \mu (1-p)}{w_x} \right).$$

(ii) **Na Região II.** Controle em destinatários $x^* = 0$, $s^* > 0$, as condições de otimalidade

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} < 0, \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial s} = 0,$$

significam que $p > p_s$ e

$$s^* = \frac{1}{k_2} \ln \left(\frac{-k_2 A \mu p}{w_s} \right). \quad (4.17)$$

De fato, como

$$0 = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial s} = -w_s (1-p) - k_2 \mu A e^{-k_1 x - k_2 s} p(1-p) \implies -w_s (1-p) - k_2 \mu A e^{-k_2 s^*} p(1-p) = 0.$$

Daí

$$e^{-k_2 s^*} = \frac{-w_s}{k_2 \mu A p},$$

que nos dá

$$s^* = \frac{1}{k_2} \ln \left(\frac{-k_2 A \mu p}{w_s} \right).$$

(iii) **Na Região III.** Nenhum controle, $x^* = 0$, $s^* = 0$, as condições de otimalidade

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} < 0, \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial s} < 0,$$

nos dão que

$$k_1 A(1-p)\mu > -w_x \quad \text{e} \quad k_2 A p \mu > -w_s.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} = -w_x p - k_1 \mu A e^{-k_1 x - k_2 s} p(1-p) < 0 &\implies k_1 \mu A p(1-p) > -w_x p \\ &\implies k_1 A(1-p)\mu > -w_x, \end{aligned} \quad (4.18)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial s} = -w_s(1-p) - k_2 \mu A e^{-k_1 x - k_2 s} p(1-p) < 0 &\implies (-w_s - k_2 \mu A p)(1-p) < 0 \\ &\implies k_2 A p \mu > -w_s. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Combinando as soluções (4.18) e (4.19), temos

$$\mu > \mu_{SW}(p) = \max \left\{ -\frac{w_x}{k_1 A(1-p)}, -\frac{w_s}{k_2 A p} \right\}. \quad (4.20)$$

A curva $\mu = \mu_{SW}(p)$ corresponde a outra mudança de condição: de controle positivo para não controle.

Como expressamos x^* , s^* em (4.16) e (4.17) por meio de p e μ , podemos reescrever (4.10), (4.11) como um sistema autônomo de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = F(p, x^*(p, \mu), s^*(p, \mu)) = \tilde{F}(p, \mu), \\ \frac{d\mu}{dt} = G(p, \mu, x^*(p, \mu), s^*(p, \mu)) = \tilde{G}(p, \mu), \end{cases} \quad (4.21)$$

e portanto podemos aplicar a técnica de análise do plano de fase para estudá-lo.

As curvas

$$\mu = \mu_{SW}(p), \quad 0 < p < 1, \quad \text{e} \quad p = p_s, \quad \mu \leq \mu_{SW}(p),$$

dividem o plano de fase $p\mu$ em três regiões, de acordo com os três tipos de controle. Quando as trajetórias de (4.21) cruzarem estas linhas, a mudança de controle ocorre

(veja a Figura 8). Na Figura 8 é plotado o plano de fase $p\mu$, que é dividido em Região I (controle em lagos doadores), Região II (controle em lagos destinatários) e Região III (nenhum controle). É mostrado também os pontos p_s , que é o ponto de mudança de x controle para a região de s controle e p_z , que é o ponto de mudança de x , ou s controle para nenhum controle e a linha μ_{SW} , que separa as Regiões I e II de s controle e x controle, respectivamente, da Região III de nenhum controle.

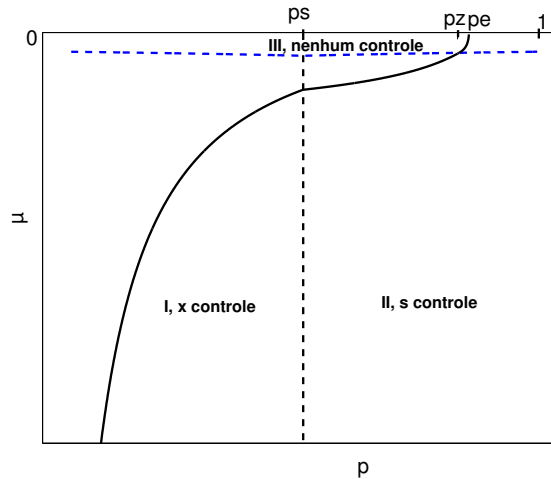


Figura 8: São exibidas esquematicamente as três Regiões I, II, e III do plano de fase $p\mu$, que são, respectivamente, as regiões de x controle, s controle e nenhum controle. Também é ilustrado uma trajetória e os pontos de mudança p_s (mudança de x controle para s controle e vice-versa) e p_z (mudança de x ou s controle para nenhum controle) de uma região para outra, além do ponto inicial p_0 e ponto final p_e .

Esta abordagem nos permite inferir sobre o comportamento do controle ótimo “total” $\varphi(t) = k_1x^* + k_2s^*$ (relembrando que apenas um ou nenhum controle será não nulo fora dos pontos de mudanças) que é importante para a construção de soluções.

Lema 4.1 *O controle ótimo total, $\varphi(t) = k_1x^* + k_2s^*$ é uma função contínua no tempo em $[0, T]$, e é diferenciável por partes neste intervalo.*

A prova é dada na Subseção 4.1.4.

Corolário 4.1 *O fluxo de (4.21) é C^1 dentro de cada Região I, II, III, e é C^0 para $p > 0$, $\mu < 0$.*

Este resultado segue da Proposição 1.1.

Corolário 4.2 *Para o ponto $t = t_1$ de mudança de controle, de $x > 0$ para $s > 0$ ($p = p_s$) $\lim_{t \rightarrow t_1^-} k_1x(t) = \lim_{t \rightarrow t_1^+} k_2s(t)$. Para os pontos de mudança onde o controle total vai para zero, o valor de $x^* = 0$ ou $s^* = 0$ deve ser ótimo, afim de que uma das relações (4.14) se*

mantenha com $\varphi^* = 0$. Isto nos permite relacionar valores de p e μ com os pontos de mudança, uma vez que $\mu(1 - p) = -w_x/(k_1A)$ ou $\mu p = -w_s/(k_2A)$.

Prova: Pelo Lema 4.1, temos que

$$\lim_{t \rightarrow t_1^-} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow t_1^+} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow t_1} \varphi(t).$$

Como

$$\lim_{t \rightarrow t_1^-} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow t_1^-} k_1 x(t) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow t_1^+} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow t_1^+} k_2 s(t),$$

segue

$$\lim_{t \rightarrow t_1^-} k_1 x(t) = \lim_{t \rightarrow t_1^+} k_2 s(t).$$

Mais simplificações estão relacionadas com a substituição do valor do problema na fronteira para p e μ por um problema para μ apenas. A idéia é usar p como uma variável independente.

Desde que $0 < p < 1$, $dp/dt > 0$ na equação (4.10), assim $p(t)$ é uma função 1-1 (bijetora) estritamente crescente em $[p_0, p_e]$, onde a proporção final de lagos invadidos é

$$p_e = p(T).$$

Portanto, $p(t)$ tem uma inversa $t(p)$. Substituindo-a em $x(t)$, $s(t)$, e $\mu(t)$ obtemos o seguinte lema.

Lema 4.2 *Os controles x e s , e o preço sombra μ podem ser expressos como funções de p : $x(p)$, $s(p)$, e $\mu(p)$, definidas no intervalo $[p_0, p_e]$, $p_e = p(T)$.*

Este lema permite-nos resolver apenas uma equação em vez de duas em (4.21),

$$\frac{d\mu}{dp} = \frac{\tilde{G}(p, \mu)}{\tilde{F}(p, \mu)}. \quad (4.22)$$

Podemos resolver (4.22) numericamente, ou algumas vezes analiticamente, para qualquer p_e tal que $0 < p_0 < p_e < 1$. O procedimento consiste do seguinte: encontramos primeiramente a solução da equação dentro de cada região do plano de fase, uma vez que nas Regiões I e II as condições iniciais não são dadas, a solução contém uma constante arbitrária. Para a Região III a condição inicial é

$$\mu(p_e) = 0,$$

que então fornece uma solução $\mu_{III}(p)$. O processo é continuado até a linha de mudança

$$\mu = \mu_{SW}(p)$$

e é interceptada para algum $p = p_Z$. Suponha que isto aconteça na fronteira entre as Regiões III e II, ou seja, $p_Z > p_S$. Então, desde que μ seja contínua, temos a condição inicial para a Região II,

$$\mu_{II}(p_Z) = \mu_{SW}(p_Z),$$

e devido à continuidade do controle total,

$$s(p_Z) = 0.$$

Por isso, temos a solução dentro da Região II.

Novamente continuando o processo até a próxima linha de mudança $p = p_S$, obtemos a condição inicial para a Região I,

$$k_1 x(p_S) = k_2 s(p_S) \quad \text{e} \quad \mu_I(p_S) = \mu_{II}(p_S).$$

Então podemos construir a solução na Região I e continuar para baixo até $p = p_0$. Se p_e é suficientemente pequeno, a solução não entra na Região II ($p_0 < p_Z \leq p_S$), então o controle no lago destinatário nunca é utilizado, e a solução permanece no interior da Região I e III. Finalmente, pode ser que p_e seja tão pequeno, que $p_Z \leq p_0$, e então a solução sempre permanece na Região II, e por isso a completa ausência de qualquer controle é ótimo.

Na subseção a seguir, serão analisadas algumas propriedades da solução ótima para o problema.

4.1.3 Propriedades da solução ótima

Nas Regiões I e II, podemos expressar o preço sombra μ como função dos controles x ou s e também de p , e para obter a equação para dx/dp e ds/dp , respectivamente, o que é mais simples que (4.22). As equações resultantes para as três regiões,

$$\text{Região I : } \frac{d}{dp} \left[k_1 p x + \left(1 + \frac{k_1 g}{w_x} \right) p \right] = \frac{r}{A} \frac{e^{k_1 x}}{(1-p)}, \quad \mu = -\frac{w_x e^{k_1 x}}{k_1 A (1-p)}, \quad (4.23)$$

$$\text{Região II : } \frac{d}{dp} \left[k_2 (1-p) s + \left(\frac{k_2 g}{w_s} - 1 \right) p \right] = \frac{r}{A} \frac{e^{k_2 s}}{p}, \quad \mu = -\frac{w_s e^{k_2 s}}{k_2 A p}, \quad (4.24)$$

$$\text{Região III : } \frac{d}{dp} \left[p(1-p)\mu - \frac{g}{A} p \right] = \frac{r}{A} \mu. \quad (4.25)$$

Para mais detalhes veja a Subseção 4.1.4.

No caso $r = 0$ as equações (4.23), (4.24) e (4.25) podem ser resolvidas analiticamente, mesmo sabendo que não condiz com a realidade, mas os resultados são balizadores para o caso $r > 0$. Para isto, a solução satisfazendo $\mu(p_e) = 0$, para a Região III é

$$\mu(p) = -\frac{g}{A} \frac{p_e - p}{p(1-p)}, \quad \max\{p_0, p_Z\} \leq p \leq p_e, \quad r = 0.$$

De fato, como $r = 0$ a equação (4.25) torna-se

$$\frac{d}{dp} \left[p(1-p)\mu - \frac{g}{A}p \right] = 0.$$

Logo

$$p(1-p)\mu - \frac{g}{A}p$$

é constante. Como $\mu(p_e) = 0$, segue

$$p(1-p)\mu - \frac{g}{A}p = \frac{g}{A}p_e.$$

Daí,

$$\mu(p) = -\frac{g}{A} \frac{p_e - p}{p(1-p)}.$$

Isto nos permite obter a expressão para p_Z , que é o ponto de intersecção das trajetórias com a linha $\mu_{SW}(p)$ (4.20),

$$p_Z = \max \left\{ \frac{k_2 g p_e - w_s}{k_2 g - w_s}, \frac{k_1 g p_e}{k_1 g + w_x} \right\}. \quad (4.26)$$

De fato,

$$\mu_{SW}(p) = \max \left\{ -\frac{w_x}{k_1 A(1-p)}, -\frac{w_s}{k_2 A p} \right\}, \quad \mu(p) = -\frac{g}{A} \frac{p_e - p}{p(1-p)}.$$

Para $p = p_Z$, se

$$\begin{aligned} \mu_{SW}(p_Z) &= \max \left\{ -\frac{w_x}{k_1 A(1-p_Z)}, -\frac{w_s}{k_2 A p_Z} \right\} \\ &= -\frac{w_x}{k_1 A(1-p_Z)} \\ &= -\frac{g}{A} \frac{p_e - p_Z}{p_Z(1-p_Z)}, \end{aligned}$$

temos

$$p_Z = \frac{k_1 g p_e}{k_1 g + w_x}.$$

Se

$$\begin{aligned}\mu_{sw}(p_Z) &= \max \left\{ -\frac{w_x}{k_1 A(1-p_Z)}, -\frac{w_s}{k_2 A p_Z} \right\} \\ &= -\frac{w_s}{k_2 A p_Z} \\ &= -\frac{g}{A} \frac{p_e - p_Z}{p_Z(1-p_Z)},\end{aligned}$$

temos

$$p_Z = \frac{k_2 g p_e - w_s}{k_2 g - w_s}.$$

Portanto,

$$p_Z = \max \left\{ \frac{k_2 g p_e - w_s}{k_2 g - w_s}, \frac{k_1 g p_e}{k_1 g + w_x} \right\}.$$

$$\text{Para a Região II: } k_2 s(p) = \left(\frac{k_2 g}{w_s} - 1 \right) \frac{p_Z - p}{1 - p}, \quad p_s \leq p < p_Z \quad (4.27)$$

(somente se $p_s < p_Z$, $p_0 < p_Z$).

De fato, para $r = 0$, da equação (4.24) temos

$$\frac{d}{dp} \left[k_2(1-p)s + \left(\frac{k_2 g}{w_s} - 1 \right) p \right] = 0.$$

Daí, segue que

$$k_2(1-p)s + \left(\frac{k_2 g}{w_s} - 1 \right) p$$

é constante. Como $s(p_Z) = 0$, para $p_s \leq p < p_Z$, segue

$$k_2(1-p)s + \left(\frac{k_2 g}{w_s} - 1 \right) p = \left(\frac{k_2 g}{w_s} - 1 \right) p_Z.$$

Logo,

$$k_2 s(p) = \left(\frac{k_2 g}{w_s} - 1 \right) \frac{p_Z - p}{1 - p}, \quad p_s \leq p < p_Z.$$

$$\text{E para a Região I: } k_1 x(p) = \frac{k_1 g p_e - p}{w_x p} - 1, \quad p_0 \leq p < \min\{p_s, p_Z\} \quad (4.28)$$

(somente se $p_0 < p_Z$, $p_0 < p_s$).

De fato, para $r = 0$, a equação (4.23) torna-se

$$\frac{d}{dp} \left[k_1 p x + \left(1 + \frac{k_1 g}{w_x} \right) p \right] = 0.$$

Daí, segue

$$k_1 p x + \left(1 + \frac{k_1 g}{w_x} \right) p \text{ é constante.}$$

Para $p_Z < p_s$ temos

$$\begin{aligned} p_Z &= \max \left\{ \frac{k_2 g p_e - w_s}{k_2 g - w_s}, \frac{k_1 g p_e}{k_1 g + w_x} \right\} \\ &= \frac{k_1 g p_e}{k_1 g + w_x}. \end{aligned}$$

Neste caso, temos a condição $x(p_Z) = 0$. Daí

$$\begin{aligned} k_1 p x + \left(1 + \frac{k_1 g}{w_x} \right) p &= \left(1 + \frac{k_1 g}{w_x} \right) p_Z \\ &= \left(1 + \frac{k_1 g}{w_x} \right) \frac{k_1 g p_e}{k_1 g + w_x}. \end{aligned}$$

Logo

$$k_1 x(p) = \frac{k_1 g}{w_x} \frac{p_e - p}{p} - 1.$$

Para $p_s < p_Z$, temos

$$\begin{aligned} p_Z &= \max \left\{ \frac{k_2 g p_e - w_s}{k_2 g - w_s}, \frac{k_1 g p_e}{k_1 g + w_x} \right\} \\ &= \frac{k_2 g p_e - w_s}{k_2 g - w_s}. \end{aligned}$$

Neste caso, temos a condição $k_2 s(p_s) = k_1 x(p_s)$. Mas, de (4.27) temos

$$\begin{aligned} k_2 s(p_s) &= \left(\frac{k_2 g}{w_s} - 1 \right) \frac{p_Z - p_s}{1 - p_s} \\ &= \left(\frac{k_2 g - w_s}{w_s} \right) \left(\frac{k_2 g p_e - w_s}{k_2 g - w_s} - p_s \right) \frac{1}{(1 - p_s)} \\ &= \frac{k_2 g (p_e - p_s) - w_s (1 - p_s)}{w_s (1 - p_s)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$k_2 s(p_s) = \frac{k_2 g (p_e - p_s)}{w_s (1 - p_s)} - 1. \quad (4.29)$$

Como

$$\frac{d}{dp} \left[k_1 p x + \left(1 + \frac{k_1 g}{w_x} \right) p \right] = 0,$$

temos

$$k_1 p x + \left(1 + \frac{k_1 g}{w_x} \right) p = C,$$

onde C é uma constante. Daí, fazendo $p = p_s$,

$$k_1 p_s x(p_s) + \left(1 + \frac{k_1 g}{w_x} \right) p_s = C.$$

Substituindo $k_1 x(p_s)$ pela expressão (4.29) obtida anteriormente,

$$C = \frac{p_s k_2 g (p_e - p_s)}{w_s (1 - p_s)} + \frac{k_1 g p_s}{w_x}.$$

Lembrando que

$$p_s = \frac{w_s k_1}{w_s k_1 + w_x k_2},$$

e fazendo manipulações algébricas, obtemos

$$\begin{aligned} k_1 p x + \left(1 + \frac{k_1 g}{w_x} \right) p &= \frac{p_s k_2 g (p_e - p_s)}{w_s (1 - p_s)} + \frac{k_1 g p_s}{w_x} \\ &= \frac{k_1 g p_e}{w_x}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Logo,

$$k_1 x(p) = \frac{k_1 g p_e - p}{w_x p} - 1.$$

Portanto,

$$k_1 x(p) = \frac{k_1 g p_e - p}{w_x p} - 1, \quad p_0 \leq p < \min\{p_s, p_z\}.$$

A trajetória permanece no interior da Região III. Ela é sempre ótima para nenhum controle desde que

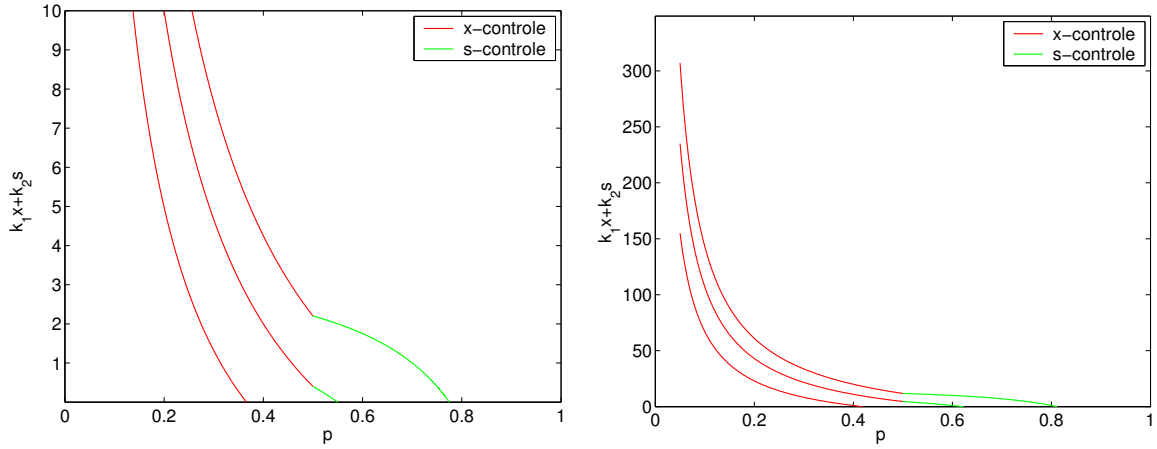
$$p_0 \geq \max \left\{ \frac{k_2 g p_e - w_s}{k_2 g - w_s}, \frac{k_1 g p_e}{k_1 g + w_x} \right\}.$$

Exemplos de soluções analíticas são mostradas na Figura 9, para três valores diferentes para k_1 , k_2 e g , onde adotamos

$$w_s = w_x = 1.$$

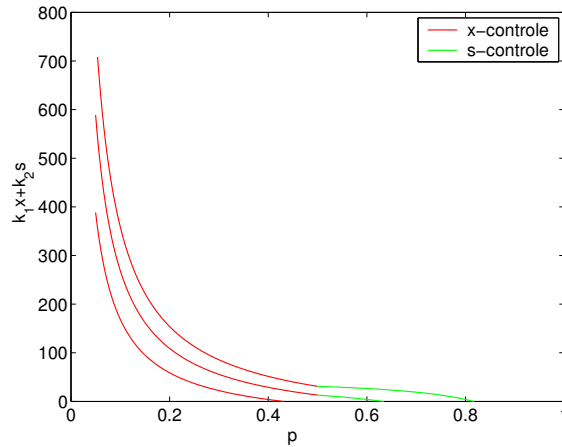
As trajetórias correspondem a três valores distintos para p_e , entre 0,4 e 0,9, e sendo $p_0 = 0,05$. O ponto de mudança de x controle para s controle é dado, neste caso, por

$p_s = 0,5$. Observe que, como um dos controles x , ou s é nulo, o controle total mostra apenas o comportamento do outro controle que é não nulo.



a) $k_1 = 0,5, k_2 = 0,5, g = 5, r/A = 0$

b) $k_1 = 1, k_2 = 1, g = 5, r/A = 0$.



c) $k_1 = 2, k_2 = 2, g = 10, r/A = 0$.

Figura 9 : Nas figuras 9a, 9b e 9c são mostradas soluções analíticas no plano de fase $p\varphi$, onde $\varphi(p) = k_1x(p) + k_2s(p)$ é o controle total. As trajetórias correspondem a três valores de p_e entre 0,4 e 0,9, sendo $p_0 = 0,05$.

Para $r > 0$, as equações (4.23), (4.24) e (4.25) não podem ser resolvidas analiticamente, mas podemos fazer algumas comparações entre as soluções para $r > 0$ com as soluções analíticas para $r = 0$, (para mais detalhes veja a Proposição 4.3 e o Corolário 4.3, na Subseção 4.1.4).

Por brevidade, apenas os principais pontos da comparação dos resultados são discutidos, apesar de resultados completos e as suas provas estarem na Subseção 4.1.4. É natural usar a solução analítica de (4.26), (4.27) e (4.28) como um ponto de referência para o caso $r > 0$, com outros parâmetros mantidos constantes. Contudo, aqui chegamos a um problema, se a taxa de desconto é alterada para um valor não nulo, isto normalmente muda o valor do controle ótimo, e portanto muda o valor final de p . Portanto, se

precisamos comparar duas soluções com o mesmo tempo horizonte T , elas têm diferentes p_e e vice-versa.

Dadas estas questões, um resumo dos resultados da comparação é

- Se consideramos duas soluções com $r = 0$ e $r > 0$ e mesmo p_0 e p_e , então a solução com $r > 0$ possui tempo horizonte T menor (Proposição 4.3, Corolários 4.3, 4.4), vide Subseção 4.1.4.
- Se consideramos duas soluções com $r = 0$ e $r > 0$ e mesmo p_0 e T , então a solução com $r > 0$ possui maior p_e (Corolário 4.5), vide Subseção 4.1.4.
- Das duas declarações acima é então possível usar as soluções analíticas como limite superior na estimativa para os valores de controle, isto é

$$\tilde{x} \geq x, \quad \tilde{s} \geq s \quad \text{e} \quad \tilde{\mu} \leq \mu,$$

onde \tilde{x} , \tilde{s} , $\tilde{\mu}$ são as soluções para $r = 0$ e x , s , μ são as soluções para $r > 0$ (Corolário 4.6), vide Subseção 4.1.4.

- Consequentemente, se em um caso de não desconto é ótimo para que haja não controle, o mesmo é verdade para qualquer $r > 0$ e mesmo p_e (Corolário 4.7), vide Subseção 4.1.4.
- Existe uma correspondência 1-1 entre $p_e p_0 < p_e < 1$, e o tempo horizonte T . Isto é, para tais p_e existe T para o qual $p(T) = p_e$. Daí, então existe uma função $T(p_e)$, que é contínua e estritamente crescente (Proposição 4.4), vide Subseção 4.1.4.

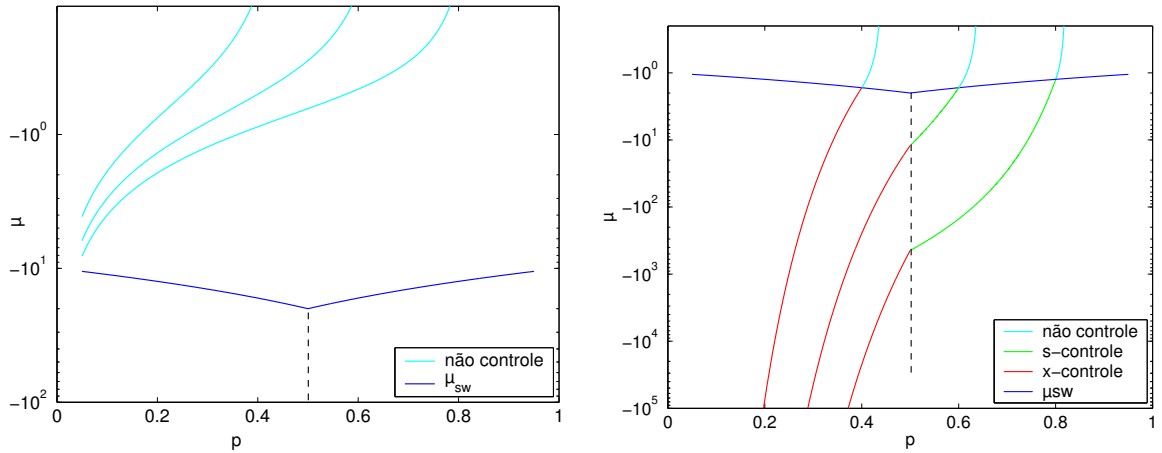
O último resultado é importante para a validade de ambas técnicas analítica e numérica.

Algumas combinações de parâmetros e trajetórias resultantes são mostrados na Figura 10, para o caso em que não há taxa de desconto, e $w_s = w_x = 1$. Na Figura 10a,

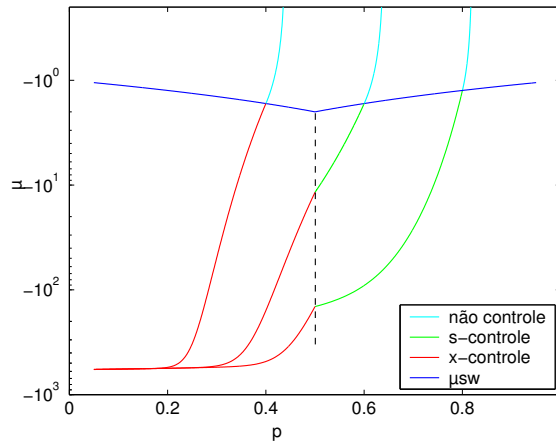
$$k_1 = 0, 1, \quad k_2 = 0, 1, \quad g = 0, 5, \quad r/A = 0,$$

ou seja, a eficácia dos controles é baixa, o prejuízo causado pela invasão é pequeno. Observe que as trajetórias não chegam à curva de mudança (ficando todas dentro da região de nenhum controle), isto é, neste caso é ótimo nenhum controle. Nas Figuras 10b e 10c, $k_1 = 1$, $k_2 = 1$, $g = 0, 5$, $r/A = 0$ e $k_1 = 2$, $k_2 = 2$, $g = 0, 5$, $r/A = 0$, respectivamente. Nas Figuras 10b e 10c, as trajetórias possuem um ou dois pontos de mudança, de x controle para s controle ou de x controle para nenhum controle, ou de s

controle para nenhum controle.



a) $k_1 = 0, 1, k_2 = 0, 1, g = 0, 5, r/A = 0$ b) $k_1 = 1, k_2 = 1, g = 10, r/A = 0$.



c) $k_1 = 1, k_2 = 1, g = 10, r/A = 0, 03$.

Figura 10 : Nas Figuras 10a, 10b e 10c temos $\mu(p)$ plotada no plano $p\mu$. As trajetórias correspondem a três valores de p_e entre 0,4 e 0,9, sendo $p_0 = 0,05$. A mudança de x controle para s controle é dada pela linha tracejada. E a mudança de x controle ou s controle para nenhum controle por μ_{sw} . A Figura 10a mostra que as trajetórias não chegam a cruzar μ_{sw} , ou seja, ótimo é nenhum controle. Nas Figuras 10b e 10c podemos ver que existem um ou dois pontos de mudança de controle.

Soluções $x(t)$, $s(t)$, $\mu(t)$ e a relação entre p_e e T não podem ser encontradas analiticamente, nem mesmo para $r = 0$, exceto no caso de não controle.

Quando o controle é muito eficiente (k_1, k_2 grandes) ou se existe grandes perdas (g grande), e a taxa de desconto é 0 ou muito pequena, torna-se ótimo manter os elevados níveis de controle, veja a Figura 9c. Isto faz a invasão propagar muito lentamente, e portanto os valores de p próximos de 1 só podem ser alcançados depois de um período de tempo muito grande (T grande). Por causa desta dependência do tempo horizonte no

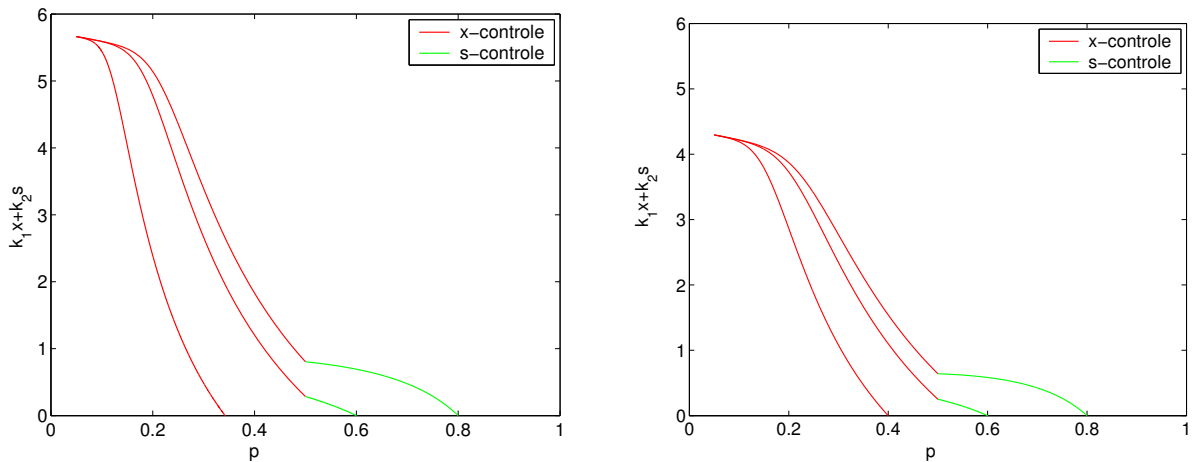
nível final de invasões, consideramos a influência de parâmetros na política de controle para p_e fixado e T fixado.

A dependência das soluções analíticas de k_1 , k_2 e g nos dá que quanto maior são seus valores mais intenso é o controle. Isto continua verdade no caso $r > 0$.

O desconto traz duas novas características qualitativas:

- (i) $s(p)$ pode ir crescendo para algum p , mas no caso de não desconto é sempre decrescente, (Veja as Figuras 9a, 9b e 9c).
- (ii) x continua uma função decrescente de p , mas o seu crescimento torna-se limitado quando $p \rightarrow 0$ (Figuras 11a e 11b), em contraste com o caso de não desconto, (veja Figura 9a).

As Figuras 11a e 11b, ilustram a influência do desconto no comportamento das trajetórias no plano de fase $p\varphi$ quando comparadas com aquelas da Figura 9a.



a) $k_1 = 0,5, k_2 = 0,5, g = 5, r/A = 0,03$. b) $k_1 = 0,5, k_2 = 0,5, g = 5, r/A = 0,1$.

Figura 11 : São ilustradas soluções analíticas no plano de fase $p\varphi$, para dois descontos diferentes, onde $\varphi(p) = k_1x(p) + k_2s(p)$ é o controle total. Podemos ver a influência do desconto no comportamento das trajetórias no plano de fase, quando comparamos com a Figura 9a. Fizemos aqui $r = 0,03$ e $r = 0,1$. As trajetórias correspondem a três valores de p_e entre 0,4 e 0,9, sendo $p_0 = 0,05$.

O modelo de controle da invasão desenvolvido no artigo *Optimal Control of Biological Invasions in Lake Networks* [10] demonstra importantes implicações para o gestor de recursos para prevenção. Podemos notar, por meio das soluções analítica e numérica, que a política de prevenção ótima é sensível a alguns fatores chave, dos quais incluem os danos econômicos causados pela espécie invasora, a eficiência da prevenção, o tempo horizonte, e da quantidade de lagos invadidos no início da prevenção, e a taxa de desconto.

Podemos notar também, que cada momento é ótimo para fazer apenas um tipo de prevenção (em doadores ou em destinatários) ou mesmo nenhum e nunca nos dois ao mesmo tempo. Vimos que pode haver um momento de mudança de controle, que depende da eficiência e do custo por unidade de controle de cada lago.

Como uma caracterização analítica do sistema não foi possível, foi apresentado algumas proposições de comparação entre as soluções analíticas (caso de não desconto) e as soluções numéricas (caso em que a taxa de desconto é não nula).

4.1.4 Provas dos resultados utilizados

Esta subseção contém a prova de alguns resultados que foram apresentados no problema de controle ótimo de invasões biológicas em redes de lagos das Subseções 4.1.2 e 4.1.3. Isto foi feito para simplificação do texto.

Proposição 4.2 *O preço sombra $\mu(t)$ para $t < T$ é sempre negativo desde que o prejuízo da invasão $g > 0$.*

Prova: De acordo com a condição de fronteira, $\mu(T) = 0$, que implica

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} = -w_x p < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial s} = -w_s(1 - p) < 0$$

para $t = T$. Neste caso, o máximo de \tilde{H} é alcançado para $x = s = 0$, e nenhum controle é ótimo para o último instante de tempo. Portanto, $d\mu/dt(T) = g > 0$. Daí, perto de T ,

$$t < T, \mu(t) < 0.$$

Para atingir valores não negativos, a função contínua $\mu(t)$ deve atravessar o eixo t pelo menos uma vez, e para o ponto de travessia, que chamaremos de t_C , $d\mu/dt \leq 0$. Para este ponto $\mu(t_C) = 0$. Por isso, $\partial \tilde{H}/\partial x < 0$ e $\partial \tilde{H}/\partial s < 0$ para $t = t_C$, e portanto $x(t_C) = s(t_C) = 0$. Isto implica que $d\mu/dt(t_C) = g > 0$, que nos dá uma contradição provando a proposição.

Lema 4.3 *O controle ótimo “total”, $\varphi^*(t) = k_1 x^* + k_2 s^*$ é uma função contínua no tempo sobre $[0, T]$, e é diferenciável por partes neste intervalo.*

Prova: Se $\varphi(t) > 0$, uma das condições de otimalidade (4.14) deve ser satisfeita.

Seja $p < p_s$, então $s^* = 0$, e portanto (4.14) é satisfeita para x^* e s^* , e

$$e^{\varphi^*} = k_1 |\mu| A(1 - p) / w_x.$$

Uma vez que $p(t)$ e $\mu(t)$ são contínuas, $\varphi^*(t)$ também o é. Analogamente, no caso em que $\varphi^*(t) > 0$ e $p > p_s$ obtemos a continuidade de (4.14). Para $p = p_s$ a continuidade segue de ambas condições. No caso $\varphi^*(t) = 0$ a afirmação do resultado é direta.

O Lema 4.3 mostra que o controle total não pode parar bruscamente, isto é, $\varphi^*(t)$ não pode saltar de um valor positivo para zero. De fato, considere a função contínua

$$F(t) = k_1 |\mu(t)| \frac{A(1-p(t))}{w_x}.$$

Suponha que para

$$t < t_{SW}, \varphi^*(t) > f_0 > 0, \quad \text{e para } t > t_{SW}, \varphi^*(t) = 0.$$

Sem perda de generalidade, seja (4.14) satisfeita para $t < t_{SW}$. Então,

$$F(t) = e^{\varphi^*} > e^{f_0} > 1.$$

Para $t > t_{SW}$, $s^* = x^* = 0$ ótimo, implica que $\partial \tilde{H} / \partial x < 0$ e portanto $F(t) < 1$. Daí temos descontinuidade em $t = t_{SW}$, pois F tem um salto de $e^{(f_0)}$ para um valor inferior a 1, sem tomar qualquer valor intermediário, por exemplo, ela não passa através de $e^{(f_0/2)}$, o que é uma contradição. Esta contradição implica que $\varphi^*(t)$ deve aproximar continuamente a zero no tempo. Por isso, é uma função contínua em todo o intervalo $[0, T]$. A continuidade de φ^* , significa que a equação (4.10) implica que p é continuamente diferenciável em toda parte, exceto nos pontos de transição, e a equação (4.11) implica que μ tem a mesma propriedade. Portanto, $\varphi(t) = \log(F(t))$ é também diferenciável em toda parte, exceto nos pontos de transição.

A seguir apresentaremos as deduções das equações (4.23), (4.24) e (4.25), onde obtemos as expressões para dx/dp , ds/dp , $d\mu/dp$ e escrevemos o preço sombra em função dos controles x ou s .

Nas Regiões I e II, podemos expressar o preço sombra μ como função dos controles x ou s e também de p , e para obter a equação para dx/dp e ds/dp , respectivamente, o que é mais simples que (4.22). As equações resultantes para a

Região I, $x \geq 0$, $s = 0$.

A relação (4.14) permite-nos expressar x através de μ e p ,

$$x = \frac{1}{k_1} \ln \left(-\frac{k_1 A \mu (1-p)}{w_x} \right), \quad e^{-k_1 x} = -\frac{w_x}{k_1 A \mu (1-p)},$$

e para reescrever (4.10) e (4.11) como um sistema de equações diferenciais, que não contem controles desconhecidos:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{w_x p}{k_1 \mu},$$

$$\frac{d\mu}{dt} = \mu r + \frac{w_x (1-2p)}{k_1 (1-p)} + g + \frac{w_x}{k_1} \ln \left(-\frac{k_1 A \mu (1-p)}{w_x} \right),$$

pois

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mu}{dt} &= \mu r - \mu A e^{-k_1 x - k_2 s} (1 - 2p) + (g + w_x x - w_s s) \\
 &= \mu r - \mu A e^{-k_1 x} (1 - 2p) + (g + w_x x) \\
 &= \mu r + \frac{w_x (1 - 2p)}{k_1 (1 - p)} + g + \frac{w_x}{k_1} \ln \left(-\frac{k_1 A \mu (1 - p)}{w_x} \right).
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{d\mu}{dp} = -\frac{k_1 \mu}{w_x p} \left[\mu r + \frac{w_x (1 - 2p)}{k_1 (1 - p)} + g + \frac{w_x}{k_1} \ln \left(-\frac{k_1 A \mu (1 - p)}{w_x} \right) \right].$$

É possível conseguir uma forma mais conveniente para a análise, usando x , μ e p :

$$\mu = -\frac{w_x e^{k_1 x}}{k_1 A \mu (1 - p)}.$$

Note que,

$$\begin{aligned}
 k_1 \frac{dx}{dt} &= -\frac{w_x}{k_1 A \mu (1 - p)} \frac{1}{w_x} \left(-k_1 A \frac{d\mu}{dt} (1 - p) + k_1 A \mu \frac{dp}{dt} \right) \\
 &= \frac{e^{-k_1 x}}{w_x} \left[\left(\frac{r w_x e^{k_1 x}}{(1 - p)} - \frac{A w_x (1 - 2p)}{(1 - p)} - k_1 A g - k_1 A w_x x \right) (1 - p) - A w_x p \right] \\
 &= \frac{e^{-k_1 x}}{w_x} (r w_x e^{k_1 x} - A w_x (1 - 2p) - k_1 A g (1 - p) - k_1 A w_x x (1 - p) - A w_x p) \\
 &= r - A e^{-k_1 x} (1 - 2p) - \frac{A g}{w_x} k_1 e^{-k_1 x} (1 - p) - A k_1 x e^{-k_1 x} (1 - p) - A e^{-k_1 x} p \\
 &= r - A e^{-k_1 x} (1 - p) \left(1 + \frac{k_1 g}{w_x} + k_1 x \right).
 \end{aligned}$$

Então, chegamos ao sistema

$$\frac{dp}{dt} = A e^{-k_1 x} p (1 - p),$$

$$k_1 \frac{dx}{dt} = r - A e^{-k_1 x} (1 - p) \left(1 + \frac{k_1 g}{w_x} + k_1 x \right).$$

Daí

$$\begin{aligned}
 k_1 \frac{dx}{dp} &= \frac{r - A e^{-k_1 x} (1 - p) \left(1 + \frac{k_1 g}{w_x} + k_1 x \right)}{A e^{-k_1 x} p (1 - p)} \\
 &= \frac{r e^{k_1 x}}{A p (1 - p)} - \frac{\left(1 + \frac{k_1 g}{w_x} + k_1 x \right)}{p}.
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Multiplicando a equação (4.31) acima por p , obtemos

$$k_1 p \frac{dx}{dp} = \frac{r e^{k_1 x}}{A(1-p)} - \left(1 + \frac{k_1 g}{w_x} + k_1 x\right).$$

Daí,

$$k_1 x + k_1 p \frac{dx}{dp} + \left(1 + \frac{k_1 g}{w_x}\right) = \frac{r e^{k_1 x}}{A(1-p)},$$

ou seja,

$$\frac{d}{dp} \left[k_1 p x + \left(1 + \frac{k_1 g}{w_x}\right) p \right] = \frac{r}{A} \frac{e^{k_1 x}}{(1-p)}, \quad \mu = -\frac{w_x e^{k_1 x}}{k_1 A(1-p)}$$

Região II, $x = 0$, $s \geq 0$.

Analogamente ao caso anterior, da relação (4.15) podemos expressar s em função de p e μ ,

$$s = \frac{1}{k_2} \ln \left(-\frac{k_2 A \mu p}{w_s} \right), \quad e^{-k_2 s} = -\frac{w_s}{k_2 A \mu p}.$$

Daí

$$\mu = -\frac{w_s e^{-k_2 s}}{k_2 A p}.$$

Temos, para este caso, o seguinte sistema

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{w_s(1-p)}{k_2 \mu},$$

$$\frac{d\mu}{dt} = \mu r + \frac{w_s(1-2p)}{k_2 p} + g - \frac{w_s}{k_2} \ln \left(-\frac{k_2 A \mu p}{w_s} \right),$$

pois

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{dt} &= \mu r - \mu A e^{-k_1 x - k_2 s} (1-2p) + (g + w_x x - w_s s) \\ &= \mu r - \mu A e^{-k_2 s} (1-2p) + (g - w_s s) \\ &= \mu r + \frac{w_s(1-2p)}{k_2 p} + g - \frac{w_s}{k_2} \ln \left(-\frac{k_2 A \mu p}{w_s} \right). \end{aligned}$$

É possível conseguir uma forma mais conveniente para a análise, usando s , μ e p :

$$\mu = -\frac{w_s e^{k_2 s}}{k_2 A \mu p}.$$

Seguindo os mesmos passos como na Região I, obtemos

$$\begin{aligned}
 k_2 \frac{ds}{dp} &= -\frac{w_s}{k_2 A \mu p} \left(-\frac{k_2 A p}{w_s} \frac{d\mu}{dt} - \frac{k_2 A \mu}{w_s} \frac{dp}{dt} \right) \\
 &= -\frac{w_s}{k_2 A \mu p} \left(-\frac{k_2 A p}{w_s} [\mu(r - A e^{-k_2 s}(1 - 2p)) + (g - w_s s)] - \frac{k_2 A \mu}{w_s} A e^{-k_2 s} p(1 - p) \right) \\
 &= r - A e^{-k_2 s}(1 - 2p) + \frac{g}{\mu} - \frac{w_s s}{\mu} + A e^{-k_2 s}(1 - p) \\
 &= r + A e^{-k_2 s} p - \frac{g k_2 A e^{-k_2 s} p}{w_s} + k_2 A p e^{-k_2 s} s \\
 &= \frac{r e^{k_2 s}}{A p(1 - p)} + \frac{1}{(1 - p)} - \frac{g k_2}{w_s(1 - p)} + \frac{k_2 s}{(1 - p)}. \tag{4.32}
 \end{aligned}$$

Multiplicando a equação (4.32) acima por $1 - p$ temos,

$$\begin{aligned}
 (1 - p) k_2 \frac{ds}{dp} &= \frac{r e^{k_2 s}}{A p} + 1 - \frac{g k_2}{w_s} + k_2 s \\
 &= k_2 \frac{ds}{dp} - k_2 s - k_2 p \frac{ds}{dp} + \frac{k_2 g}{w_s} - 1 = \frac{r e^{k_2 s}}{A p},
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dp} \left[k_2(1 - p)s + \left(\frac{k_2 g}{w_s} - 1 \right) p \right] = \frac{r e^{k_2 s}}{A p} \quad \mu = -\frac{w_s e^{-k_2 s}}{k_2 A p}.$$

Obtemos assim (4.24).

Região III, $x = 0$, $s = 0$.

Neste caso, os termos de controle somem, e podemos usar (4.10), (4.11) diretamente

$$\frac{dp}{dt} = A p(1 - p),$$

$$\frac{d\mu}{dt} = \mu[r - A(1 - 2p)] + g.$$

Então (4.22) assume a forma

$$\frac{d\mu}{dp} = \mu \left[\frac{r}{A p(1 - p)} - \frac{(1 - 2p)}{p(1 - p)} \right] + \frac{g}{A p(1 - p)}.$$

Depois multiplicando a última equação por $p(1 - p)$, obtemos

$$p(1 - p) \frac{d\mu}{dp} = \mu \frac{r}{A} - \mu(1 - 2p) + \frac{g}{A}.$$

Daí,

$$\mu + p \frac{d\mu}{dp} - 2p\mu - p^2 \frac{d\mu}{dp} - \frac{g}{A} = \frac{r}{A} \mu,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dp} \left[p(1-p)\mu - \frac{g}{A}p \right] = \frac{r}{A}\mu.$$

Esta é a nossa equação (4.25).

Agora apresentaremos alguns resultados de comparação entre as soluções para x , s e μ , no caso em que a taxa de desconto é $r = 0$ ou $r > 0$.

Proposição 4.3 (Comparação) *Seja $x(p)$ solução de (4.23) para $r > 0$ em $[p_1, p_2]$, e $\tilde{x}(p)$ a solução para $r = 0$, tal que $\tilde{x}(p_2) \geq x(p_2)$. Então $\tilde{x}(p) \geq x(p)$ em $[p_1, p_2]$. Proposições similares podem ser provadas para $s(p)$ e $\mu(p)$: se $s(p)$, $\tilde{s}(p)$, $\tilde{\mu}(p)$ são as soluções de (4.24) e (4.25), e além disso, $\tilde{s}(p_2) \geq s(p_2)$, $\tilde{\mu}(p_2) \leq \mu(p_2)$, então $\tilde{s}(p) \geq s(p)$, $\tilde{\mu}(p) \leq \mu(p)$ em $[p_1, p_2]$, respectivamente.*

Prova: Mostraremos primeiramente para $x(p)$, e posteriormente para os outros dois casos. Temos

$$\frac{d}{dp} \left[k_1 p x + \left(1 + \frac{k_1 g}{w_x} \right) p \right] = \frac{r}{A} \frac{e^{k_1 x}}{(1-p)}, \quad \frac{d}{dp} \left[k_1 p \tilde{x} + \left(1 + \frac{k_1 g}{w_x} \right) p \right] = 0.$$

Subtraindo a segunda da primeira temos

$$\frac{d}{dp} [k_1 p (x - \tilde{x})] = \frac{r}{A} \frac{e^{k_1 x}}{(1-p)} > 0.$$

Desde que $p > 0$,

$$k_1 p (x(p) - \tilde{x}(p)) < k_1 p_2 (x(p_2) - \tilde{x}(p_2)) \leq 0.$$

Se $\tilde{x}(p_2) > x(p_2)$, então $\tilde{x}(p) > x(p)$.

Agora mostremos o fato para $s(p)$. De (4.24)

$$\frac{d}{dp} \left[k_2 (1-p)s + \left(\frac{k_2 g}{w_s} - 1 \right) p \right] = \frac{r}{A} \frac{e^{k_2 s}}{p} \quad (4.33)$$

e

$$\frac{d}{dp} \left[k_2 (1-p)\tilde{s} + \left(\frac{k_2 g}{w_s} - 1 \right) p \right] = 0. \quad (4.34)$$

Subtraindo a equação (4.34) de (4.33), obtemos

$$\frac{d}{dp} [k_2 (1-p)(s - \tilde{s})] = \frac{r}{A} \frac{e^{k_2 s}}{p} > 0,$$

desde que $p > 0$. Dessa expressão, temos

$$k_2 (1-p)(s(p) - \tilde{s}(p)) < k_2 (1-p_2)(s(p_2) - \tilde{s}(p_2)) \leq 0.$$

Logo, $s(p) \leq \tilde{s}(p)$ em $[p_1, p_2]$.

Analogamente, de (4.25) temos

$$\frac{d}{dp} \left[p(1-p)\mu - \frac{g}{A}p \right] = \frac{r}{A}\mu \quad (4.35)$$

e

$$\frac{d}{dp} \left[p(1-p)\mu - \frac{g}{Ap} \right] = 0. \quad (4.36)$$

Subtraindo a equação (4.36) de (4.35), obtemos

$$\frac{d}{dp} [p(1-p)(\mu - \tilde{\mu})] = \frac{r}{A}\mu < 0.$$

Daí

$$p(1-p)(\mu(p) - \tilde{\mu}(p)) > p_2(1-p_2)(\mu(p_2) - \tilde{\mu}(p_2)) \geq 0.$$

Logo, $\mu(p) \geq \tilde{\mu}(p)$ em $[p_1, p_2]$.

Corolário 4.3 *Vamos denotar por $x(p)$, $s(p)$, $\tilde{\mu}(p)$ e $x(p)$, $\tilde{s}(p)$, $\tilde{\mu}(p)$ as soluções do problema de controle ótimo, com mesma condição inicial e nível final de invasão p_0 e p_e , $r > 0$ e $r = 0$, respectivamente. Então $\tilde{x}(p) \geq x(p)$, $\tilde{s}(p) \geq s(p)$, $\tilde{\mu}(p) \leq \mu(p)$, e para valores de p onde, $\tilde{x}(p) > 0$ ou $\tilde{s}(p) > 0$, ou $\tilde{\mu}(p) < 0$ a desigualdade correspondente é estrita, isto é $\tilde{x}(p) > x(p)$, $\tilde{s}(p) > s(p)$, ou $\tilde{\mu}(p) < \mu(p)$.*

Prova: É conveniente analisar a situação de “frente para trás”, ou seja, de p_e para p_0 . Como $\tilde{\mu}(p_e) = \mu(p_e) = 0$, de acordo com a Proposição 4.3, para $p < p_e$,

$$\tilde{\mu}(p) < \mu(p),$$

onde elas satisfazem (4.25), ou seja, antes de interceptarem a curva de mudança $\mu_{SW}(p)$ (4.20). Desde que

$$\tilde{\mu}(p) < \mu(p),$$

temos que $\tilde{\mu}(p)$ intercepta a curva de mudança primeiro. Isto implica que os pontos de mudança $\tilde{p}_Z > p_Z$. No intervalo $[p_Z, \tilde{p}_Z]$,

$$\tilde{\mu}(p) < \mu(p),$$

pois elas são separadas pela curva de mudança. Para simplicidade, assuma que $p_Z > p_s$, então

$$s(p_Z) = 0,$$

enquanto que $\tilde{s}(p_Z) > 0$. Se a Proposição 4.3 for aplicada novamente no intervalo onde $p_s > p_Z$, então

$$\tilde{s}(p) > s(p).$$

Manipulando a condição de otimalidade de modo que $\mu = -\frac{w_s}{k_2 Ap} e^{k_2 s}$, então

$$\tilde{\mu}(p) < \mu(p).$$

Finalmente para $p = p_s$ $\tilde{x}(p_s) > x(p_s)$, e por isso

$$\tilde{x}(p) > x(p),$$

para $p < p_s$. Usando que

$$\mu = -\frac{w_x}{k_1 A p} e^{k_1 x},$$

obtemos

$$\tilde{\mu}(p) < \mu(p).$$

Situações como

$$\tilde{p}_Z > p_s > p_Z \quad \text{e} \quad p_s > \tilde{p}_Z > p_Z,$$

podem ser analisadas similarmente. Se para o problema de não desconto a escolha ótima for nenhum controle, então as soluções coincidem.

Corolário 4.4 *Se as condições do Corolário 4.3 são satisfeitas, então o tempo horizonte para o problema com desconto é menor que para o caso do problema de não desconto, ou seja, $T < \tilde{T}$.*

Prova: Temos que $p : [0, T] \rightarrow [p_0, p_e]$ é estritamente crescente, logo admite inversa

$$h : [p_0, p_e] \rightarrow [0, T].$$

Daí, $h(p(t)) = t$. Aplicando a regra da cadeia, temos

$$\frac{dh}{dp}(p(t)) \frac{dp}{dt}(t) = 1.$$

Logo,

$$\frac{dh}{dp}(p(t)) = \frac{1}{dp/dt(t)}.$$

Daí,

$$\int_{p_0}^{p_e} \frac{dh}{dp}(p(t)) dp = \int_{p_0}^{p_e} \frac{1}{dp/dt} dp,$$

ou seja,

$$h(p_e) - h(p_0) = \int_{p_0}^{p_e} \frac{1}{dp/dt} dp.$$

Mas, como $h(p_0) = h(p(0)) = 0$, segue

$$h(p_e) = \int_{p_0}^{p_e} \frac{1}{dp/dt} dp.$$

Assim, lembrando que

$$\frac{dp}{dt} = A e^{-k_1 x(t) - k_2 s(t)} p(t) (1 - p(t)),$$

temos

$$T = h(p(T)) = h(p_e) = \int_{p_0}^{p_e} \frac{1}{dp/dt} dp = \int_{p_0}^{p_e} \frac{e^{k_1 x(p) + k_2 s(p)}}{Ap(1-p)} dp. \quad (4.37)$$

Assim, desde que $\tilde{x}(p) < x(p)$, para $p_0 \leq p < \min(p_s, p_Z)$, e como o integrando é sempre positivo, obtemos

$$T = \int_{p_0}^{p_e} \frac{e^{k_1 x(p)}}{Ap(1-p)} dp < \int_{p_0}^{p_e} \frac{e^{k_1 \tilde{x}(p)}}{Ap(1-p)} dp = \tilde{T}.$$

Corolário 4.5 *Se os problemas com desconto e não desconto têm o mesmo tempo horizonte T e o mesmo nível inicial de invasão p_0 , o problema com desconto tem maior nível final de infecção, isto é, $p_e > \tilde{p}_e$.*

Prova: Para o problema de não desconto $x(p)$, $s(p)$, e p_Z são funções crescentes de p_e , e por isso \tilde{T} é uma função crescente de p_e também. Para fazer o tempo horizonte iguais em ambos os problemas, é necessário reduzir \tilde{T} , e conseqüentemente o nível final de invasão. Isto prova a afirmação.

Para tempo horizonte T muito grande, o nível final de invasão é muito próximo de 1, assim é razoável considerar o que acontece no limite $p_e \rightarrow 1$. Em seguida, para o caso de $r = 0$ as soluções analíticas nos dão

(i) $p_Z \rightarrow 1$, quando $p_e \rightarrow 1$.

De fato,

$$p_Z = \max \left\{ \frac{k_2 g p_e - w_s}{k_2 g - w_s}, \frac{k_1 g p_e}{k_1 g + w_x} \right\}.$$

Daí quando $p_e \rightarrow 1$,

$$p_Z \rightarrow \max \left\{ 1, \frac{k_1 g}{k_1 g + w_x} \right\} = 1.$$

(ii) $k_2 s(p) \rightarrow \left(\frac{k_2 g}{w_s} - 1 \right)$, quando $p_e \rightarrow 1$.

De fato,

$$k_2 s(p) = \left(\frac{k_2 g}{w_s} - 1 \right) \frac{p_Z - p}{1 - p}.$$

Se $p_e \rightarrow 1$, pelo item anterior $p_Z \rightarrow 1$. Logo,

$$k_2 s(p) \rightarrow \left(\frac{k_2 g}{w_s} - 1 \right).$$

(iii) $k_1 x(p) \rightarrow \frac{k_1 g}{w_x} \frac{1 - p}{p} - 1$, quando $p_e \rightarrow 1$.

De fato,

$$k_1 x(p) = \frac{k_1 g}{w_x} \frac{p_e - p}{p} - 1.$$

Quando $p_e \rightarrow 1$,

$$k_1 x(p) \rightarrow \frac{k_1 g}{w_x} \frac{1-p}{p} - 1.$$

Uma vez que x e s aumentam com aumento de p_e , é possível obter limites para os controles:

Corolário 4.6 *Os valores das variáveis de controle sob o controle ótimo, para qualquer r satisfaz*

$$0 \leq k_1 x(p) \leq \frac{k_1 g}{w_x} \frac{1-p}{p} - 1, \quad 0 \leq k_2 s(p) \leq \left(\frac{k_2 g}{w_s} - 1 \right).$$

Segue que, o controle de lagos destinatários é usado somente no caso $k_2 g \geq w_s$. De (4.24), quando $p \rightarrow p_Z$, s vai para zero e não pode ser crescente, assim $ds/dp \leq 0$. Isto significa que a condição necessária para o controle de lagos destinatários é

$$\frac{r}{Ap_Z} - \frac{k_2 g}{w_s} + 1 \leq 0 \quad \text{ou ainda} \quad k_2 g \geq w_s \left(1 + \frac{r}{Ap_Z} \right) > w_s \left(1 + \frac{r}{A} \right).$$

Prova: De (4.24)

$$-k_2 s(p) + k_2(1-p) \frac{ds}{dp} + \left(\frac{k_2 g}{w_s} - 1 \right) = \frac{r e^{k_2 s}}{A p}.$$

Quando $p \rightarrow p_Z$, $s \rightarrow 0$ e disso $ds/dp \leq 0$. Daí

$$0 \geq k_2(1-p_Z) \frac{ds}{dp} = \frac{r}{Ap_Z} - \frac{k_2 g}{w_s} + 1.$$

Logo

$$\frac{r}{Ap_Z} - \frac{k_2 g}{w_s} + 1 \leq 0,$$

ou ainda

$$\frac{k_2 g}{w_s} \geq \frac{r}{Ap_Z} + 1.$$

Assim,

$$k_2 g \geq w_s \left(1 + \frac{r}{Ap_Z} \right) > w_s \left(1 + \frac{r}{A} \right).$$

Corolário 4.7 (Condição suficiente para a otimalidade de nenhum controle) *Se no caso $r = 0$ (não desconto) é ótimo para uma completa ausência de controle, então para $r > 0$ e mesmo nível final de infecção p_e , também é ótimo para que haja uma ausência de controle.*

Prova: Considere, as trajetórias de frente para trás, de p_e para p_0 para ambos problemas. O controle muda quando cruza a curva de mudança. De acordo com o Corolário 4.8,

$$\tilde{\mu}(p) < \mu(p),$$

para $p < p_e$, portanto $\tilde{\mu}(p)$ deve atravessar a curva de mudança primeiro. Se não tiver atravessado ela até p_0 (quando o não controle é ótimo), o mesmo será verdade para $\mu(p)$. Isto significa que para $r > 0$ a ausência de controle é ótima.

Proposição 4.4 *Para cada $0 < p_0 < 1$ e $T_0 > 0$ finito, existe $p_e > p_0$, tal que $h(p_e) = T_0$.*

Prova: Para cada $0 < p_0 < 1$, existem únicas soluções limitadas do problema de controle ótimo para $\mu(t)$, $x(p)$, $s(p)$, e portanto é possível definir uma função $h(p_e)$, dada por

$$h(p_e) = \int_{p_0}^{p_e} \frac{1}{dp/dt} dp = \int_{p_0}^{p_e} \frac{e^{k_1 x(p) + k_2 s(p)}}{Ap(1-p)} dp. \quad (4.38)$$

Como a solução da EDO depende continuamente dos dados iniciais, esta função é contínua e monotonicamente crescente em toda parte que ela existe.

Considere duas soluções

$$\mu_1(p) \text{ e } \mu_2(p), \quad p_{e1} < p_{e2}.$$

Uma vez que são trajetórias no plano, elas não podem se cruzar, e portanto

$$\mu_1(p) > \mu_2(p), \quad \text{para } p_0 < p < p_{e1}.$$

Das condições de otimalidade, segue-se que para os mesmos valores p ,

$$x_1 \leq x_2, \quad s_1 \leq s_2,$$

e daí de (4.38) temos

$$T_1 = h(p_{e1}) = \int_{p_0}^{p_{e1}} \frac{e^{k_1 x(p) + k_2 s(p)}}{Ap(1-p)} dp < \int_{p_0}^{p_{e2}} \frac{e^{k_1 x(p) + k_2 s(p)}}{Ap(1-p)} dp = h(p_{e2}) = T_2.$$

Logo, $T_1 < T_2$.

Para demonstrar que o domínio de $h(p_e)$ é $p_0 \leq p_e < 1$ e que seu alcance é $T > 0$, os limites inferior e superior são determinados. Do Corolário 4.6 resulta que

$$\begin{aligned} 0 \leq k_1 x + k_2 s &\leq \max \left\{ \frac{k_1 g}{w_x} \frac{1-p}{p} - 1, \frac{k_2 g}{w_s} - 1 \right\} \\ &< \max \left\{ \frac{k_1 g}{w_x p_S}, \frac{k_2 g}{w_s} \right\} \equiv C. \end{aligned}$$

Considere duas equações

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= Au(1-u), \\ \frac{dv}{dt} &= Ae^{-C}v(1-v), \end{aligned} \quad u(0) = v(0) = p_0.$$

Comparando com (4.10), obtemos que

$$u \geq p > v, \quad \frac{du}{dt}(p) \geq \frac{dp}{dt}(p) > \frac{dv}{dt}(p), \quad p_0 < p < 1.$$

Portanto, de (4.37)

$$\int_{p_0}^{p_e} \frac{1}{Au(1-u)} du \leq h(p_e) < \int_{p_0}^{p_e} \frac{e^C}{Au(1-u)} du,$$

ou seja

$$\frac{1}{A} \ln \left(\frac{p_e(1-p_0)}{p_0(1-p_e)} \right) \leq h(p_e) < \frac{e^C}{A} \ln \left(\frac{p_e(1-p_0)}{p_0(1-p_e)} \right).$$

Portanto, o domínio de $h(p_e)$ é $p_0 < p_e < 1$, e toma qualquer valor positivo quando $p_e \rightarrow 1$. Então ela tem uma inversa em $[0, \infty)$, e por isso para qualquer $T_0 > 0$ finito, existe um correspondente $p_0 < p_{e0} < 1$, tal que $h(p_{e0}) = T_0$, e existe a solução de controle ótimo correspondente.

Na próxima seção apresentaremos uma aplicação da Teoria do Controle Ótimo ao tratamento de câncer baseado no artigo *Optimal Control Applied to Competing Chemotherapeutic Cell-Kill Strategies* de K. Renee Fister e John Carl Panetta [3].

4.2 Tratamento de Câncer

A Teoria do Controle Ótimo tem grande utilidade no desenvolvimento de estratégias ótimas para o tratamento de câncer através do uso de drogas. O objetivo no tratamento do câncer é minimizar a densidade do tumor e além disso, minimizar os efeitos (males) causados pela droga ao longo de um determinado intervalo de tempo, e um trabalho desse tipo foi feito por Panetta e Fister no artigo *Optimal Control Applied to Competing Chemotherapeutic Cell-Kill Strategies* [3].

O tratamento do câncer se resume a encontrar estratégias eficazes e a compreender os efeitos (males) causados pelas drogas de quimioterapia em tumores, que é de grande importância. Várias abordagens para a modelagem de quimioterápicos para matar células de tumores de câncer têm sido desenvolvidos. Três modelos diferentes são apresentados em [3]. Aqui estudamos apenas um deles, o que diz que as células mortas pela droga administrada é proporcional às células do tumor. Daí, se $N(t)$ representa a densidade do tumor no tempo t , temos o modelo matemático,

$$\frac{dN}{dt} = r N(t) \ln \left(\frac{1}{N(t)} \right) - \delta u(t) N(t), \quad (4.39)$$

onde N é o volume do tumor, r é a taxa de crescimento do tumor, δ é a magnitude da dose do controle $u(t)$, $F(N) = \ln \left(\frac{1}{N} \right)$ representa uma função de crescimento e a função

$G(N) = \delta u(t)N$ descreve os efeitos farmacocinéticos (caminho que o medicamento faz no organismo, etapas que a droga passa desde sua administração, até sua eliminação) e efeitos farmacodinâmicos (efeitos fisiológicos causados pela droga). Observe que $u(t) = 0$ implica que a droga não está presente, ao passo que $u(t) > 0$ significa a intensidade dos efeitos da droga que está presente.

O funcional objetivo leva em consideração a quantidade (toxicidade) da droga administrada e a densidade do tumor no tempo final de tratamento. Nosso objetivo é então minimizar este funcional. Então, matematicamente, queremos minimizar

$$J(u) = aN(T) + b \int_0^T u(t) dt, \quad (4.40)$$

sujeito a

$$\frac{dN}{dt} = r N(t) \ln \left(\frac{1}{N(t)} \right) - \delta u(t)N(t), \quad N(0) = N_0,$$

onde $0 < N_0 < 1$, a e b são parâmetros positivos. Nosso conjunto de controles admissíveis será

$$U = \{u(t) / 0 \leq u(t) \leq M, t \in [0, T]\},$$

tal que o funcional seja minimizado sobre a classe de controle U . Para simplificar as discussões, fazemos $x(t) = \ln N(t)$ e assim o problema original (4.40) é transformado em minimizar

$$J(u) = ae^{x(T)} + b \int_0^T u(t) dt, \quad (4.41)$$

sujeito a

$$\frac{dx}{dt} = -rx - \delta u(t), \quad x(0) = \ln N_0.$$

lembrando que $\min J = -\max(-J)$, trabalharemos com $-J$. Assim o nosso problema passa a ser de maximizar

$$-J(u) = -ae^{x(T)} - b \int_0^T u(t) dt, \quad (4.42)$$

sujeito a

$$\frac{dx}{dt} = -rx - \delta u(t), \quad x(0) = \ln N_0.$$

Usaremos para resolver esse problema a teoria desenvolvida na seção (2.4). Note que

$$\phi(s) = -ae^s,$$

o que nos dá

$$\phi'(s) = -ae^s.$$

Formando o Hamiltoniano, temos

$$H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = -bu(t) + \lambda(t)(-rx - \delta u(t)).$$

Conforme o que foi visto, na Seção 2.4, condições dadas pela equação (2.14), obtemos

$$\frac{d\lambda}{dt}(t) = r\lambda \quad \text{e} \quad \lambda(T) = -ae^{x(T)}.$$

Das condições de otimalidade dadas pela equação (2.15) da Seção 2.4, segue

$$\begin{cases} u^* = 0 & \text{se } \frac{\partial H}{\partial u} < 0, \\ u^* = M & \text{se } \frac{\partial H}{\partial u} > 0. \end{cases}$$

Daí,

$$\begin{cases} u^* = 0 & \text{se } \lambda > -b/\delta, \\ u^* = M & \text{se } \lambda < -b/\delta. \end{cases}$$

Portanto, temos o seguinte sistema de otimalidade

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -rx - \delta u^*(t), \\ \frac{d\lambda}{dt}(t) = r\lambda \\ x(0) = \ln N_0, \quad \text{e} \quad \lambda(T) = -ae^{x(T)}, \end{cases} \quad (4.43)$$

onde

$$\begin{cases} u^* = 0 & \text{se } \lambda > -b/\delta, \\ u^* = M & \text{se } \lambda < -b/\delta. \end{cases}$$

A partir do sistema dado em (4.43), fizemos algumas simulações, lembrando que

$$x(t) = \ln N(t).$$

Na Figura 12 é plotado em um mesmo plano de fase o controle $u(t)$ (quantidade de droga) e o estado $N(t)$ (densidade do tumor) em função do tempo t . Para a Figura 12a adotamos os seguintes parâmetros

δ	r	M	N_0	b	a	T
0,225	0,1	1	0,75	0,5	40	14

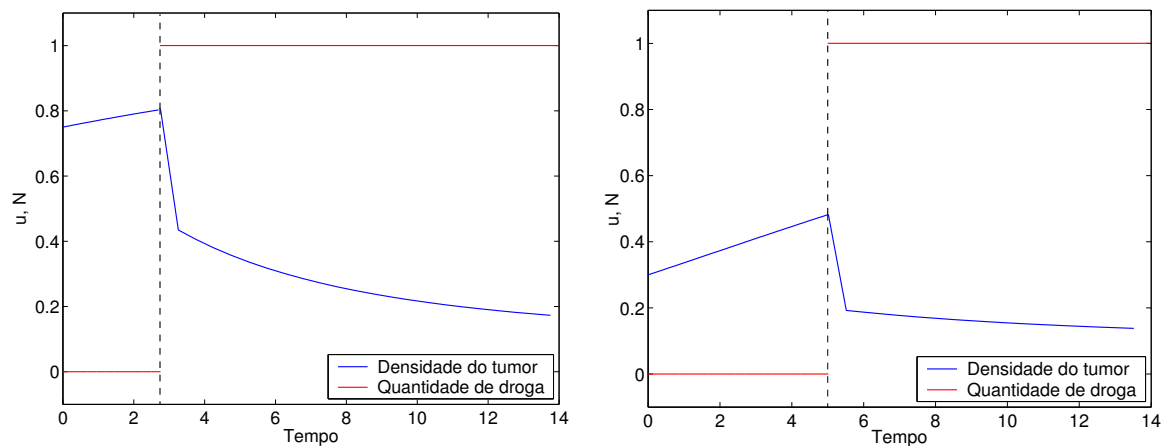
Para a Figura 12b foram adotados os mesmos parâmetros anteriores, com exceção da densidade inicial, que agora é $N_0 = 0,30$.

Na Figuras 12a e 12b, podemos notar que quando não é administrada nenhuma quantidade de droga, a densidade do tumor é uma função crescente no tempo mas, a partir do momento que começa a ser administrada uma certa quantidade (constante) da droga, a densidade do tumor cai muito rapidamente nos primeiros instantes do tratamento

e depois mais lentamente com o passar do tempo. Note que, quando consideramos o tumor com densidade inicial maior (Figura 12a), a queda geral da densidade do tumor quando é empregado tratamento ($u(t) > 0$) é mais acentuada que aquela quando consideramos ele com uma densidade inicial menor (Figura 12b).

Foram realizadas também outras simulações considerando os mesmos parâmetros acima, mas onde inicia-se o tratamento mais cedo. Porém, o comportamento das soluções no tempo final é muito próximo do obtido.

Assim, a partir das simulações realizadas concluímos que quando não é administrada nenhuma quantidade de droga, a densidade do tumor aumenta com o passar do tempo mas, a partir do momento que começa o tratamento, sua densidade cai muito rapidamente nos primeiros instantes e depois mais lentamente com o passar do tempo. Além disso, iniciando o tratamento mais cedo não se obtém resultados melhores, isso implicaria somente numa maior exposição do paciente aos males causados pelo tratamento. Portanto, com os resultados advindos da Teoria do Controle Ótimo sabemos quando é ótimo aplicar ou não a droga.



a) $\delta = 0, 225$, $r = 0, 1$, $M = 1$, $N_0 = 0, 75$, $b = 0, 5$, $a = 40$, $T = 14$. b) $\delta = 0, 225$, $r = 0, 1$, $M = 1$, $N_0 = 0, 30$, $b = 0, 5$, $a = 40$, $T = 14$.

Figura 12 : Nas Figuras 12a, 12b temos N , u plotadas em função do tempo t . Note que, nas duas figuras, quando não é administrada nenhuma quantidade de droga, a densidade do tumor vai crescendo com o passar do tempo t , mas a partir do momento que começa ser empregado o tratamento, sua densidade cai muito rapidamente nos primeiros instantes do tratamento e depois mais lentamente com o passar do tempo. Observe que a única diferença da Figura 12a para a 12b foi a densidade inicial do tumor N_0 . Note ainda que, quando a densidade inicial do tumor é maior (Figura 12a), sua queda geral quando é empregado o tratamento é mais acentuada que aquela em que consideramos uma densidade inicial menor (Figura 12b).

Conclusões Gerais

Pudemos ver que a utilização da Teoria do Controle Ótimo no modelo de controle da invasão dos lagos desenvolvido no artigo *Optimal Control of Biological Invasions in Lake Networks* [10] é de grande importância para o gestor de recursos para a prevenção, pois com as soluções analítica e numérica obtidas pode-se notar que a política de prevenção ótima é sensível a alguns fatores, tais como os prejuízos econômicos causados pela espécie invasora, a eficiência da prevenção usada no processo de prevenção, o tempo que é empregado a prevenção e a taxa de desconto. Notamos também, que cada momento é ótimo para fazer apenas um tipo de prevenção (em doadores ou em destinatários) ou mesmo nenhum e nunca os dois ao mesmo tempo.

O modelo de invasão estudado é adequado para o caso em que a espécie invasora causa somente prejuízos. Um exemplo onde este modelo não se aplica é a invasão de *Pinus* em uma região, pois apesar de trazer prejuízos ecológicos, pode-se obter lucros por meio da comercialização da madeira.

Agora utilizando a Teoria do Controle Ótimo para o modelo de tratamento de câncer, apresentado no artigo *Optimal Control Applied to Competing Chemotherapeutic Cell-Kill Strategies* [3], observamos que ela nos leva a conclusões importantes como, por exemplo, quando não é administrada nenhuma quantidade de droga a densidade do tumor é crescente no tempo mas, a partir do momento em que ela é administrada, essa densidade cai (o que, em geral, condiz com a realidade). Além disso, quando consideramos o tumor com uma densidade inicial maior, a queda de sua densidade quando é empregado o tratamento é mais acentuada, que aquela quando o consideramos com uma densidade inicial menor. Além disso, nos dá quando é ótimo aplicar ou não a droga, o que é de fundamental importância no tratamento do câncer.

Com esta dissertação então, pudemos notar a grande aplicação da Teoria do Controle Ótimo para a obtenção de regras ótimas em problemas biológicos, sendo que existem ainda diversas aplicações em outras áreas, mostrando a grande importância de tal teoria.

Esperamos que este texto introdutório sobre Teoria do Controle Ótimo, apresentado de forma multidisciplinar: matemática, economia e biologia, possa servir de estímulo aos iniciantes nesse assunto.

E dominando as técnicas apresentadas, podemos estudar problemas mais elaborados com vários objetivos como, por exemplo, o trabalho *Multi-Objective Evolutionary Optimization of Biological Pest Control with Impulsive Dynamics in Soybean Crops* de Rodrigo T. N. Cardoso, André R. da Cruz, Elizabeth F. Wanner e Ricardo H. C. Takahashi, publicado no *Journal Bulletin of Mathematical Biology* em 2009.

Referências Bibliográficas

- [1] CLARK, Colin W. *Mathematical Bioeconomics: The Optimal Management of Renewable Resources*. 2 ed. New York: John Wiley and Sons, 1990.
- [2] DOERING, Claus I. e LOPES, Artur O. *Equações Diferenciais Ordinárias*. 1 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.
- [3] FISTER, K. Renee e PANETA, John Carl. Optimal Control Applied to Competing Chemotherapeutic Cell-Kill Strategies. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 63(6) 1954-1971, 2003.
- [4] KAMIEN, Morton I. e SCHWARTZ, Nancy L. *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*. 2 ed. New York: Elsevier North Holland, 1981.
- [5] LEITÃO, Antônio e BAUMEISTER, Johann *Introdução à Teoria de Controle e Programação Dinâmica*. 1 ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides-IMPA, 2008.
- [6] LEITÃO, Antônio *Cálculo Variacional e Controle Ótimo*. 23^o Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, Rio de Janeiro, 2001.
- [7] LENHART, Suzanne e WORKMAN, John T. *Optimal Control Applied to Biological Models*. Chapman & Hall/ CRC, 2007.
- [8] *Matlab*, Versão 6.5, The MathWorks, Inc., Natick, MA, 2002.
- [9] OKUBO, Akira e LEVIN, Simon A. *Diffusion and Ecological Problems: Modern Perspectives*. Springer Verlag, 2002.
- [10] POTAPOV, Alexei B., LEWIS, Mark A. e FINNOFF, David C. Optimal Control of Biological Invasions in Lake Networks. *Nat. Res. Mod.* 20(3) 351-379, 2007.
- [11] PONTRYAGIN, Lev S., BOLTYANSKIY, V. G., GAMKRELIDZE, R. V. e MISHCHENKO, E. F. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Interscience Publishers, New York, 1962 (edição original em russo, 1961).

- [12] RUDIN, Walter *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1966.
- [13] SHIGESADA, Nanako e KAWASAKI, Kohkichi *Biological Invasions: Theory and Practice*. Oxford University Press, 1997.