

LÍLIAN NEVES SANTA ROSA

INVARIANTES DE ARNOLD DE CURVAS PLANAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2010

LÍLIAN NEVES SANTA ROSA

INVARIANTES DE ARNOLD DE CURVAS PLANAS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 25 de fevereiro de 2010.

Oziride Manzoli Neto

Rogério Casagrande

Catarina Mendes de Jesus
(Co-orientadora)

Francisco Dutenhefner
(Co-orientador)

Simone Maria de Moraes
(Orientadora)

*Aos meus pais,
por todos os sacrifícios de uma vida,
sobretudo relativos à educação de seus filhos...*

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo dom da vida, renovado a cada provação que se apresenta e nos sonhos que se concretizam, como este que agora se torna realidade.

Fruto de muito estudo, dedicação e persistência, este trabalho contou com o apoio e a colaboração de muitas pessoas, às quais dedico meus agradecimentos especiais:

À minha família, pela base sólida que sempre me deu forças para encarar a vida de frente e pelo imenso amor. Aos meus pais, Vicente e Maria Aparecida, pelos sacrifícios que fizeram pra que eu pudesse prosseguir nos estudos, pelo exemplo de vida, dedicação e amor. Aos meus irmãos, Hélder, Liliane e Lívia, pela presença na minha vida, pelo auxílio nas minhas escolhas e por me confortarem nas horas difíceis.

À minha orientadora, Prof. Simone Maria de Moraes, por me orientar, pelos valiosos momentos de discussão e conhecimentos compartilhados. Por acreditar no meu potencial nos momentos em que nem eu mesma acreditava e por sua amizade. Seu exemplo de profissionalismo será sempre uma inspiração.

À minha co-orientadora, Prof. Catarina Mendes de Jesus, pela disponibilidade em me ajudar, pelas importantes contribuições neste trabalho e pela amizade.

Ao meu co-orientador, Prof. Francisco Dutenhofner, pela disponibilidade em me receber na UFMG e por todas as sugestões oportunas.

Às minhas amigas Kátia, Mônica e Tatiana, sem dúvida as melhores pessoas que a vida me permitiu conhecer, por sua amizade sincera e gratuita. “ Ter amigos é como arvorear: lançar galhos, lançar raízes... Para que o outro, quando olhar a árvore, saiba que nós estamos ali... Que nós permanecemos para fazer sombra, para trazer ao outro um pouco do aconchego que, às vezes, ele precisa na vida...” (Pe. Fábio de Melo).

Aos colegas de mestrado, todos especiais, agradeço a amizade, o carinho e a cumplicidade demonstrados na alegria dos bons momentos e na ansiedade das horas difíceis, dando-me forças para continuar essa trajetória.

Ao Anderson, por suas palavras de amor, carinho e amizade. Graças à sua presença foi mais fácil transpor os dias de desânimo e cansaço.

À Marinalva de Alcântara Fernandes, pessoa agraciada por Deus em bondade, generosidade e humildade, que sempre me incentivou com suas palavras gentis e alegres e sempre me acolheu com um sorriso no rosto.

À Universidade Federal de Viçosa, por me acolher como estudante e por promover meu crescimento profissional.

Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática, em especial ao corpo docente do Programa de Mestrado, pelo enriquecimento acadêmico e pessoal.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES, pela concessão da bolsa de estudos.

Expresso aqui a minha gratidão a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho: a vocês o meu sincero obrigada!

Sumário

Lista de Figuras	vii
Resumo	xi
Abstract	xii
Introdução	1
1. Resultados Preliminares	5
1.1 Jatos	5
1.2 A \mathcal{C}^∞ - Topologia de Whitney	9
1.3 Transversalidade	10
1.4 Estabilidade	11
1.5 Discriminante	14
2. Os Invariantes Básicos de Arnold	20
2.1 Equivalência Clássica de Curvas Planas	20
2.2 Outras Equivalências de Curvas Planas	24
2.3 Os Invariantes Básicos de Arnold	28
2.3.1 Hipersuperfície Discriminante	29
2.3.2 Propriedades dos Invariantes de Arnold	35
2.3.3 Teoremas de Existência e Unicidade dos Invariantes	40
2.3.4 Cálculo de St através da função de Whitney	52
2.3.5 Diagrama de Gauss e Árvore de Raiz	58
3. Algoritmos para o cálculo dos Invariantes de Arnold	64
3.1 Fórmulas de Viro	64

3.2 Fórmula de Shumakovich	78
3.3 Fórmulas de Polyak	89
Conclusão	111
Bibliografia	113

Lista de Figuras

1.1	Transversalidade.	10
1.2	Imagens de aplicações diferenciáveis de S^1 em \mathbb{R}^2	12
1.3	Curvas estáveis (à direita) e não estáveis (à esquerda).	13
1.4	Discriminante $b^2 = ac$	15
2.1	Representações de curvas α e β equivalentes.	21
2.2	Uma família de imersões deformando suavemente α em β	21
2.3	Um esquema para achar um caminho entre a figura oito e o círculo.	22
2.4	Índice de Whitney.	22
2.5	Família de curvas básicas.	24
2.6	Auto-tangência direta.	24
2.7	Auto-tangência inversa.	24
2.8	Ponto triplo.	25
2.9	As curvas α_1 e α_2 são genéricas, enquanto as curvas β_1 e β_2 não o são.	25
2.10	Um caminho genérico.	26
2.11	Perestroikas.	26
2.12	Curvas J^+ -equivalentes.	27
2.13	Curvas J^- -equivalentes.	27
2.14	Curvas St -equivalentes.	28
2.15	Discriminantes para uma curva de índice 1.	29
2.16	Um caminho genérico da curva K_2 para si mesma.	30
2.17	Cruzamento positivo de uma auto-tangência direta.	30
2.18	Cruzamento negativo de uma auto-tangência direta.	31
2.19	Cruzamento positivo de uma auto-tangência inversa.	31
2.20	Cruzamento negativo de uma auto-tangência inversa.	31
2.21	Cruzamento Triplo	31
2.22	Ordenação cíclica dos lados do triângulo.	32
2.23	Triângulos desaparecendo.	32
2.24	Normalização dos invariantes de Arnold para as curvas básicas.	33
2.25	Caminho genérico conectando α a K_1	34
2.26	Exemplo da soma conexa de duas curvas planas.	35
2.27	Exemplo onde não é possível a soma conexa.	35
2.28	A classe da soma conexa depende da escolha da ponte de conexão.	36
2.29	Aniquilação de laços com orientações opostas.	37
2.30	Soma conexa de duas curvas básicas K_0	38

2.31	Sequência de perestroikas.	38
2.32	Ponto duplo cruzando a ponte de conexão entre duas curvas.	39
2.33	Soma estranha de duas imersões.	39
2.34	Prolongando um “rabo” em uma curva.	40
2.35	Ramos ortogonais de uma curva orientando o plano positivamente.	42
2.36	Índice do ponto duplo.	42
2.37	Índices de pontos duplos sob a perestroika de auto-tangência direta.	43
2.38	Exemplo onde os semi-índices mudam.	44
2.39	Exemplo onde os índices não mudam.	44
2.40	Índices de pontos duplos sob a perestroika de auto-tangência inversa.	45
2.41	Exemplo onde os semi-índices mudam.	46
2.42	Exemplo onde os índices não mudam.	46
2.43	Cruzamento positivo de um ponto triplo.	47
2.44	Cruzamento positivo de um ponto triplo.	47
2.45	Cruzamento positivo de um ponto triplo.	47
2.46	Cruzamento positivo de um ponto triplo.	48
2.47	Cruzamento positivo de um ponto triplo.	48
2.48	Semi-índices e índices de pontos duplos.	49
2.49	Generalização para as curvas básicas K_{i+1} , $i > 0$	50
2.50	Cálculo do invariante St de uma curva após empurrão de um fragmento.	52
2.51	Ponto duplo p positivo com respeito a x	53
2.52	Cálculo da função de Whitney.	53
2.53	Cálculo de St através da função de Whitney.	54
2.54	Cálculo de St através da função de Whitney.	54
2.55	Cálculo de St através da função de Whitney.	55
2.56	Cálculo de St através da função de Whitney.	55
2.57	Função de Whitney e índices para K_0	56
2.58	Função de Whitney e índices para a curva básica K_i	56
2.59	Função de Whitney e índices.	57
2.60	Cálculo do índice pela soma de pontos duplos.	58
2.61	Curvas extremais com 4 pontos duplos.	58
2.62	Curvas extremais e seus respectivos diagramas de Gauss.	59
2.63	Árvore de raiz das curvas extremais da figura 2.61.	60
2.64	Curva extremal K_2 e sua árvore de raiz.	62
2.65	Cálculo do invariante St para curvas extremais.	62
2.66	Cálculo do invariante St para curvas extremais.	62
2.67	Curva α e sua árvore de raiz.	63
3.1	Curva Γ	65
3.2	Índice de uma componente de uma curva.	65
3.3	Suavização de um ponto duplo.	65
3.4	Triangulação de C para obtenção de sua característica de Euler.	67
3.5	Característica de Euler de um disco com n buracos.	67
3.6	Suavização da curva básica K_0	68

3.7	Curva básica K_1	69
3.8	Suavização da curva básica K_2	69
3.9	Generalização para qualquer curva básica K_{i+1}	70
3.10	Perestroika de auto-tangência direta e sua suavização.	71
3.11	Perestroika de auto-tangência inversa e sua suavização.	72
3.12	Suavização após uma perestroika de ponto triplo.	74
3.13	Suavização após uma perestroika de ponto triplo.	75
3.14	Suavização da curva Γ e índices de suas componentes.	77
3.15	Sinal $s(p)$ para uma curva plana fechada.	79
3.16	Regra de Alexander.	79
3.17	Regra de Alexander para o ponto duplo a de Γ	80
3.18	Índice de um ponto duplo p para uma curva plana Γ	80
3.19	Índice do ponto duplo p para a curva K_0	81
3.20	Índice do ponto duplo p para a curva K_2	81
3.21	Generalização para qualquer curva básica K_{i+1}	82
3.22	Componentes de Γ ao cruzar uma auto-tangência direta.	82
3.23	Índices das componentes de Γ após uma auto-tangência direta.	83
3.24	Componentes de Γ ao cruzar uma auto-tangência inversa.	83
3.25	Índices das componentes Γ após uma auto-tangência inversa.	83
3.26	Cruzamento positivo de ponto triplo.	84
3.27	Cruzamento positivo de ponto triplo.	85
3.28	Cruzamento positivo de ponto triplo.	86
3.29	Cruzamento positivo de ponto triplo.	87
3.30	Independência da escolha do ponto base.	88
3.31	Mudança no sinal de $s(p)$ devida à mudança do ponto base.	88
3.32	Sinais dos pontos duplos de Γ	88
3.33	Sinais dos pontos duplos de Γ	89
3.34	Diagrama base de Gauss de Γ	90
3.35	Diagramas de duas cordas.	91
3.36	Diagrama de Gauss da curva básica K_0	92
3.37	Diagrama de Gauss da curva básica K_1	92
3.38	Diagrama de Gauss da curva básica K_2	93
3.39	Diagrama de Gauss da curva básica K_3	94
3.40	Curva básica K_{i+1} e seu diagrama base de Gauss.	94
3.41	Cordas do diagrama de Gauss resultantes de uma auto-tangência direta.	96
3.42	Cordas do diagrama de Gauss resultantes de uma auto-tangência inversa.	97
3.43	Cordas do diagrama de Gauss resultantes do cruzamento do caso 1.	99
3.44	Subdiagramas envolvidos no cruzamento do caso 1.	99
3.45	Subdiagramas envolvidos no cruzamento do caso 1.	100
3.46	Cordas do diagrama de Gauss resultantes do cruzamento do caso 2.	101
3.47	Subdiagramas envolvidos no cruzamento do caso 2.	102
3.48	Subdiagramas envolvidos no cruzamento do caso 1.	102
3.49	Cordas do diagrama de Gauss resultantes do cruzamento do caso 3.	103
3.50	Subdiagramas envolvidos no cruzamento do caso 3.	104

3.51	Subdiagramas envolvidos no cruzamento do caso 3.	104
3.52	Cordas do diagrama de Gauss resultantes do cruzamento do caso 4.	105
3.53	Subdiagramas envolvidos no cruzamento do caso 4.	106
3.54	Subdiagramas envolvidos no cruzamento do caso 3.	106
3.55	Curva Γ e escolhas do ponto base.	107
3.56	Representações de B_2 e B_3 para Γ antes e após mudança no ponto base. . .	108
3.57	Representações de B_4 para Γ antes e após mudança no ponto base.	109
3.58	Subdiagramas do tipo B_3	109
3.59	Subdiagramas do tipo B_2	110

Resumo

SANTA ROSA, Lílian Neves, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2010.
Invariantes de Arnold de curvas planas. Orientadora: Simone Maria de Moraes.
Co-orientadores: Catarina Mendes de Jesus e Francisco Dutenhefner.

Esta dissertação é dedicada ao estudo dos invariantes de Arnold de curvas diferenciáveis fechadas imersas no plano. Os invariantes J^\pm e St foram definidos axiomáticamente por Arnold em [Ar1] como característica numérica de curvas genéricas fechadas (imersões de círculos) no plano. Estes três invariantes estão associados às transições através de auto-tangências diretas e inversas e cruzamentos triplos. Neste trabalho estudamos e introduzimos os invariantes de Arnold de curvas genéricas e suas propriedades. Também introduzimos e demonstramos as fórmulas explícitas para cálculo destes invariantes dadas por Viro, Shumakovich e Polyak.

Abstract

SANTA ROSA, Lílian Neves, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February of 2010.
Arnold's invariants of plane curves. Advisor: Simone Maria de Moraes. Co-advisers:
Catarina Mendes de Jesus and Francisco Dutenhefner.

This dissertation is devoted to the study of Arnold's invariants of smooth immersed closed curves in the plane. The invariants J^\pm and St were axiomatically defined by Arnold in [Ar1] as numerical characteristic of generic closed curves (immersion of the circle) on \mathbb{R}^2 . These three Arnold's invariants are associated to the transitions through direct and inverse self-tangencies and triple crossings. In this work, we study and present the Arnold's generic curve invariants and their properties. We also introduce and demonstrate the explicit formulas for calculating invariants given by Viro, Shumakovich and Polyak.

Introdução

Em 1994 os artigos [Ar1] e [Ar2] de V.I. Arnold atraíram a atenção de vários matemáticos, pelos novos aspectos apresentados, de um bem conhecido objeto topológico, a teoria de curvas planas fechadas.

Sendo $\mathcal{C}^\infty(S^1, \mathbb{R}^2)$, o espaço das curvas diferenciáveis fechadas orientadas imersas no plano, sabemos que este espaço tem diferentes componentes conexas, representadas pelas distintas classes de isotopia das curvas planas fechadas imersas.

Em 1937 Whitney introduziu em [Whi] um invariante completo para estas classes de isotopia, o índice de uma curva, dado pelo número de rotações da curva, mais precisamente o número de voltas completas que o vetor tangente faz ao percorrer a curva considerando sua orientação.

Arnold utilizou a Teoria de Vassiliev e estratificou o conjunto $\mathcal{C}^\infty(S^1, \mathbb{R}^2)$ através de seu discriminante. A Teoria de Vassiliev, desenvolvida pelo próprio no início da década de 90 do século XX, consiste em um método para a obtenção de invariantes topológicos de isotopia em espaços de aplicações, em especial para obtenção de invariantes de nós em \mathbb{R}^3 . O mais interessante é que este método não só obtém invariantes, mas consegue uma base do espaço de invariantes, isto é, proporciona alguns geradores por meio dos quais se pode obter qualquer outro invariante com combinações lineares destes geradores. A técnica de Vassiliev consiste em caracterizar o subespaço de interesse como o complemento de um certo subconjunto estratificado, o discriminante.

Esta teoria estimulou vários matemáticos a dedicarem seus estudos a invariantes topológicos de aplicações estáveis, tanto do ponto de vista local como global, sendo aplicada em:

- (i) aplicações estáveis de mergulhos de S^1 em \mathbb{R}^3 , os conhecidos nós, pelo próprio Vassiliev [Va2];
- (ii) aplicações estáveis de imersões de S^1 em \mathbb{R}^2 , como já comentado, por Arnold [Ar1] e [Ar2];
- (iii) aplicações estáveis de superfícies imersas em \mathbb{R}^3 , por Goryunov [Gor1];
- (iv) aplicações estáveis de superfícies no plano, por Ohmoto e Aicardi [Oh-Ai] e Hacon, Mendes de Jesus e Romero-Fuster [HMR].

No caso de curvas planas fechadas Arnold introduziu três invariantes no subconjunto $\mathcal{E}^\infty(S^1, \mathbb{R}^2)$ de $\mathcal{C}^\infty(S^1, \mathbb{R}^2)$ das curvas planas fechadas estáveis, estas curvas são aquelas em que os únicos pontos múltiplos são os pontos duplos com auto-interseção transversal e são chamadas *curvas genéricas*.

Aplicando a Teoria de Vassiliev ao conjunto $\mathcal{C}^\infty(S^1, \mathbb{R}^2,)$ temos que o conjunto das curvas planas fechadas não genéricas forma uma hipersuperfície discriminante em $\mathcal{C}^\infty(S^1, \mathbb{R}^2)$ formada por três estratos, a saber, o de curvas fechadas com um ponto triplo, o de curvas fechadas com uma auto-tangência direta e de curvas fechadas com uma auto-tangência inversa, a reunião destes três estratos forma um conjunto denso no discriminante.

Arnold associou um sinal a um cruzamento genérico de cada um destes estratos, também introduziu os invariantes básicos J^+ , J^- e St de curvas planas fechadas genéricas imersas em \mathbb{R}^2 , que estimam o número de cruzamentos, em cada um das três partes do discriminante, que são necessários para transformar uma curva genérica em outra.

Nesta dissertação, partindo do artigo *Topological Invariants of Plane Curves and Cusps* [Ar1] de Arnold, nos propomos a explicitar os invariantes básicos J^+ , J^- e St de Arnold, estudar suas propriedades, introduzir os resultados que dão suas definições axiomáticas e apresentar alguns algoritmos para calculá-los.

Para isto dividimos o trabalho em três capítulos distribuídos como segue:

Iniciamos o trabalho com um capítulo de conceitos e resultados preliminares de Topologia Diferencial e Teoria de Singularidades, tais como o conceito de k -jatos, a topologia de Whitney, os teoremas de transversalidade, os conceitos de aplicações estáveis, de discriminante e de estratificação, necessários ao entendimento dos temas abordados no capítulo 2. A bibliografia básica aqui é: [Gib], [Go-Gu] e [NB-RF].

É no capítulo 2 que desenvolvemos todo o estudo de Arnold, começamos considerando a noção “clássica” de equivalência onde diremos que duas curvas planas são equivalentes se existir uma família a 1-parâmetro de curvas planas que deforma suavemente uma curva na outra. Consideramos esta família a 1-parâmetro como um caminho no espaço de imersões que conecta as duas curvas equivalentes. Whitney mostrou quando duas curvas planas são equivalentes pela noção clássica de equivalência. Usando o Teorema de Whitney, podemos classificar completamente todas as curvas planas pelos seus índices.

Na seção seguinte introduzimos três novas noções de equivalência que surgem quando colocamos restrições nos caminhos que conectam duas curvas. Se duas curvas são equivalentes, então existirá um caminho genérico entre elas tal que cada curva no caminho conterà no máximo um dos seguintes eventos: auto-tangência direta, auto-tangência inversa ou cruzamento de ponto triplo.

Assim, definimos as novas noções de equivalência:

- (i) Duas curvas são J^+ - equivalentes se existe um caminho genérico entre elas tal que nenhuma das curvas no caminho contém uma auto-tangência direta.

- (ii) Duas curvas são J^- - equivalentes se existe um caminho genérico entre elas tal que nenhuma das curvas no caminho contém uma auto-tangência inversa.
- (iii) Duas curvas são St - equivalentes se existe um caminho genérico entre elas tal que nenhuma das curvas no caminho contém um cruzamento triplo.

Com a introdução destes novos tipos de equivalência surge novamente a pergunta:

Quando duas curvas são equivalentes?

Sendo mais específicos, perguntamos:

Quando duas curvas planas fechadas são J^+ , J^- ou St - equivalentes?

Arnold encontrou um modo de resolver nosso problema para curvas planas fechadas distintas em termos de J^+ , J^- e St -equivalências introduzindo os seus três invariantes básicos de curvas planas, J^+ , J^- e St :

- (i) J^+ é o invariante básico associado a cruzamentos do discriminante J^+ .
- (ii) J^- é o invariante básico associado a cruzamentos do discriminante J^- .
- (iii) St é o invariante básico associado a cruzamentos do discriminante St .

Desse modo, dizemos que duas curvas do plano serão equivalentes pelas novas noções de equivalência se elas estiverem na mesma componente conexa do complemento do discriminante apropriado.

Ainda no capítulo 2 discutimos as propriedades dos invariantes de Arnold. Vemos como calcular os invariantes de Arnold eficazmente para uma curva. O modo mais óbvio é começar encontrando o índice da curva. Como consequência do Teorema de Whitney, podemos encontrar um caminho genérico para uma curva básica de mesmo índice que a curva plana dada. Se contamos, com sinais próprios, o número de auto-tangências diretas, auto-tangências inversas e pontos triplos neste caminho, podemos usar a normalização dada para as curvas básicas para entender os invariantes para nossa curva plana. Como este método é muito teórico, pode se tornar um trabalho muito intenso e complicado. Buscando outras alternativas para o cálculo do invariantes básicos, definiremos a função de Whitney e mostraremos como calcular o invariante St de uma curva plana fechada qualquer a partir dela e usaremos também o diagrama de Gauss e a árvore de raiz para calcular o invariante St de um tipo especial de curva, as curvas extremas.

No capítulo 3, seguindo o trabalho de Chmutov e Duzhin [Ch-Du] apresentamos os algoritmos de O. Viro para obtenção dos invariantes J^+ e J^- , o algoritmo de Shumakovich para obtenção do invariante St e o algoritmo de Polyak para o cálculo dos três invariantes de Arnold. Para o cálculo destes invariantes introduzimos as técnicas de suavização de curvas, a regra de Alexander e os diagramas de Gauss.

A técnica utilizada por Oleg Viro ([Vi]) consistiu em expressar fórmulas para os invariantes J^+ e J^- em termos do índice das componentes do complemento da suavização da curva Γ considerada e da característica de Euler destas componentes.

No caso Shumakovich ([Sh]) sua estratégia foi considerar os pontos duplos p sobre uma dada curva Γ e determinar uma fórmula para o invariante St em termos de um sinal $s(p)$ e de um índice $ind_{\Gamma}(p)$, previamente definidos, destes pontos duplos.

Por fim, Polyak ([Po]), deu fórmulas explícitas para os invariantes de Arnold em termos do diagrama base de Gauss, isto é, um diagrama de Gauss com um ponto base fixado.

Finalizamos o trabalho comentando as conexões entre os capítulos 2 e 3; as vantagens e as desvantagens dos algoritmos do capítulo 3, observando também algumas possibilidades de trabalhos futuros.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

O objetivo deste capítulo é introduzir algumas definições e resultados que serão usados ao longo deste trabalho. Neste sentido, abordaremos alguns conceitos da Teoria de Singularidades do ponto de vista da Topologia Diferencial, como por exemplo, o conceito de k -jatos, a topologia de Whitney, teoremas de transversalidade, os conceitos de aplicações estáveis, de discriminante e de estratificação.

As principais referências para este capítulo são [Gib] , [Go-Gu] e [NB-RF].

1.1 Jatos

Definição 1.1 *Dadas X e Y variedades diferenciáveis e $x \in X$, dizemos que duas aplicações diferenciáveis $f, g : X \rightarrow Y$ com $f(x) = g(x) = y$ têm:*

(i) **contato de primeira ordem em x** se, e somente se, $(df)_x = (dg)_x$ como aplicações de $T_x X \rightarrow T_y Y$.

Notação: $f \sim_x g$.

(ii) **contato de ordem k** , com $k \geq 1$ em x se, e somente se, $(df) : TX \rightarrow TY$ tem contato de ordem $(k - 1)$ com (dg) em todo ponto de $T_x X$.

Notação: $f \sim_k g$.

Observações:

1. Equivalentemente, sejam $f, g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \sim_k g$ em x se, e somente se, $\frac{\partial^{|\alpha|} f_i}{\partial x^\alpha}(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} g_i}{\partial x^\alpha}(x)$ para todo multi-índice α tal que $|\alpha| \leq k$, onde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$, f_i e g_i são as funções coordenadas de f e g , com $1 \leq i \leq n$, e x_1, \dots, x_m são as coordenadas de x . Assim, $f \sim_k g$ em x se, e somente se, f e g têm o mesmo desenvolvimento de Taylor de ordem k .

2. Utilizando cartas locais nas variedades X e Y podemos escrever a definição 1.1 como segue:

Sejam X e Y variedades diferenciáveis de dimensão n e m , respectivamente, e aplicações $f, g : X \rightarrow Y$ com $f(x) = g(x) = y$, dizemos que f e g têm **contato de ordem k** com $k \geq 1$, em x e y , e representamos por $f \sim_k g$ em x , se, e somente se, existem cartas coordenadas centradas na origem (U, φ) e (V, ψ) de x e y em X e Y , respectivamente, com $f(U) \subset V$ e $g(U) \subset V$, e os difeomorfismos φ e ψ , dados no diagrama comutativo abaixo,

$$\begin{array}{ccc} U \subset \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(U) \subset X \\ \psi^{-1} \circ f \circ \varphi, \psi^{-1} \circ g \circ \varphi \downarrow & & \downarrow f, g \\ V \subset \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\psi} & \psi(V) \subset Y \end{array}$$

são tais que $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ e $\psi^{-1} \circ g \circ \varphi$ têm contato de ordem k em 0 , ou seja, as derivadas parciais de $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ e $\psi^{-1} \circ g \circ \varphi$ em torno de $0 \in \mathbb{R}^n$ coincidem até ordem k .

Assim, sobre o conjunto $\mathcal{C}_{x,y}^r(X, Y)$, das aplicações diferenciáveis de X em Y de classe \mathcal{C}^r com imagem de x sendo y , a relação \sim_k define uma relação de equivalência.

Denotamos o conjunto das classes de equivalência de $\mathcal{C}_{x,y}^r(X, Y)$ pela relação \sim_k por $J_{x,y}^{k,r}(X, Y)$, ou seja, $J_{x,y}^{k,r}(X, Y) = \mathcal{C}_{x,y}^r(X, Y) / \sim_k$. No caso em que consideramos as aplicações infinitamente diferenciáveis escrevemos $J_{x,y}^k(X, Y)$.

Além disso, também utilizamos as seguintes notações:

$$J^{k,r}(X, Y) = \bigcup_{(x,y) \in (X \times Y)} J_{x,y}^{k,r}(X, Y),$$

$$J^k(X, Y) = \bigcup_{(x,y) \in (X \times Y)} J_{x,y}^k(X, Y)$$

e $j^k f(x)$ um elemento em $J^k(X, Y)$ com imagem de x sendo $y = f(x)$.

Definição 1.2 *Sejam X e Y variedades diferenciáveis, os k -jatos de X em Y são os elementos de $J^k(X, Y)$.*

Definição 1.3 *Seja $\sigma = j^k f(x) \in J^k(X, Y)$ um k -jato, com f um representante da classe de equivalência de σ em $J_{x,f(x)}^k(X, Y)$, dizemos que $x \in X$ é a **fonte** de σ e que $y = f(x)$ é a **meta** de σ . Além disso, as aplicações:*

$$\begin{array}{ccc} \alpha : J^k(X, Y) & \longrightarrow & X \\ \sigma & \longmapsto & \alpha(\sigma) = x \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} \beta : J^k(X, Y) & \longrightarrow & Y \\ \sigma & \longmapsto & \beta(\sigma) = f(x) \end{array}$$

são chamadas, respectivamente, **aplicação fonte** e **aplicação meta**.

Dada uma aplicação diferenciável $f : X \longrightarrow Y$ definimos uma extensão f a k -jatos através da aplicação

$$\begin{array}{ccc} j^k f : X & \longrightarrow & J^k(X, Y) \\ x & \longmapsto & j^k f(x) \end{array},$$

onde $j^k f(x)$ é a classe de equivalência de f em $J_{x, f(x)}^k(X, Y)$.

Seja A_n^k o espaço vetorial dos polinômios em n variáveis de grau menor ou igual a k , com coeficientes em \mathbb{R} e cujos termos constantes são iguais a zero. É claro que A_n^k é isomorfo ao espaço vetorial euclidiano \mathbb{R}^N , onde $N = d(n, k) + d(n, k-1) + \dots + d(n, 1)$ e $d(n, k) = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$. Através deste isomorfismo, vemos que A_n^k pode ser considerado como uma variedade \mathcal{C}^∞ . Tomando $B_{n,m}^k = \oplus_{i=1}^m A_n^k$ temos, de maneira análoga, que $B_{n,m}^k$ também é uma \mathcal{C}^∞ -variedade de dimensão $\dim B_{n,m}^k = m \cdot \dim A_n^k = m \cdot N$.

Observação 1.4 Lembremos que uma aplicação diferenciável $\varphi : X \longrightarrow Y$, onde X e Y são variedades diferenciáveis de dimensões n e m , respectivamente, de posto máximo é:

- (a) uma submersão $\iff \dim X \leq \dim Y$.
- (b) uma imersão $\iff \dim X \geq \dim Y$.

Teorema 1.5 ([Go-Gu] p. 40.) Sejam X, Y variedades \mathcal{C}^∞ de dimensões n e m , respectivamente. Então:

- (i) $J^k(X, Y)$ é uma variedade \mathcal{C}^∞ de dimensão dada por $\dim J^k(X, Y) = n + m + \dim B_{n,m}^k$.
- (ii) As aplicações α, β e $\alpha \times \beta$ são submersões.
- (iii) Se $f : X \longrightarrow Y$ é diferenciável, então $j^k f : X \longrightarrow J^k(X, Y)$ também é diferenciável.

Observação 1.6 Para a demonstração do item (iii) é utilizado o seguinte:

O espaço $J^k(X, Y)$ pode ser identificado localmente com $X \times Y \times B_{n,m}^k$. Se σ é um k -jato e f é um representante de σ , podemos representar σ por $\sigma = (x, f(x), \frac{\partial^{|\alpha|} f_i}{\partial x^\alpha}(x))$ com $\alpha \in \mathbb{N}^m$ multi-índice tal que $|\alpha| \leq k$.

Agora, apresentaremos uma generalização do espaço de jatos, que será útil para estudar as auto-interseções de aplicações diferenciáveis.

Sejam X e Y variedades diferenciáveis de classe C^∞ , denotamos por $X^s = \underbrace{X \times \dots \times X}_s$ e definimos:

$$X^{(s)} = \left\{ (x_1, \dots, x_s) \in X^s; x_i \neq x_j \text{ para } 1 \leq i < j \leq s \right\}.$$

Seja $\alpha : J^k(X, Y) \rightarrow X$ a aplicação fonte, definimos a aplicação

$$\begin{aligned} \alpha^s : (J^k(X, Y))^s &\longrightarrow X^s \\ (\sigma_1, \dots, \sigma_s) &\longmapsto \alpha^s(\sigma_1, \dots, \sigma_s) \end{aligned}$$

da seguinte forma: $\alpha^s(\sigma_1, \dots, \sigma_s) = (\alpha(\sigma_1), \dots, \alpha(\sigma_s)) = (x_1, \dots, x_s)$.

Definição 1.7 *Seja $J^k(X, Y)$ a variedade dos k -jatos de X em Y , definimos o **espaço de multi-jatos de ordem k em s variáveis**, denotando por ${}_s J^k(X, Y)$, como sendo o seguinte subconjunto de $(J^k(X, Y))^s$:*

$${}_s J^k(X, Y) = (\alpha^s)^{-1}(X^{(s)}), \text{ ou seja,}$$

$${}_s J^k(X, Y) = \left\{ (\sigma_1, \dots, \sigma_s) \in (J^k(X, Y))^s; \alpha(\sigma_i) \neq \alpha(\sigma_j), \text{ para todo } i \neq j \right\}.$$

Observação 1.8 *Já que $X^{(s)}$ é aberto em X^s segue que ${}_s J^k(X, Y) = (\alpha^s)^{-1}(X^{(s)})$ é um aberto em $(J^k(X, Y))^s$, e portanto uma subvariedade diferenciável.*

Definição 1.9 *Dada $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação C^r , definimos o **s -multi k -jato** de f como a aplicação ${}_s j^k f : X^{(s)} \rightarrow {}_s J^k(X, Y)$ dada por:*

$${}_s j^k f(x_1, \dots, x_s) = (j^k f(x_1), \dots, j^k f(x_s)).$$

1.2 A C^∞ -Topologia de Whitney

Sejam X e Y variedades diferenciáveis e $C^\infty(X, Y)$ o conjunto das aplicações diferenciáveis de classe C^∞ de X em Y .

Consideremos k um número inteiro não negativo e \mathcal{U} um subconjunto de $J^k(X, Y)$, denotamos por $\mathcal{M}^k(\mathcal{U})$ o seguinte subconjunto de $C^\infty(X, Y)$:

$$\mathcal{M}^k(\mathcal{U}) = \left\{ f \in C^\infty(X, Y) : j^k f(\alpha(\mathcal{U})) \subseteq \mathcal{U} \right\}.$$

É fácil ver que $\mathcal{M}^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{M}^k(\mathcal{V}) = \mathcal{M}^k(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$.

Lema 1.10 *A família de subconjuntos $\left\{ \mathcal{M}^k(\mathcal{U}) \right\}$, onde \mathcal{U} é um aberto de $J^k(X, Y)$, forma uma base para uma topologia em $C^\infty(X, Y)$.*

Definição 1.11 *A topologia introduzida no lema 1.10 é chamada C^k -topologia de Whitney em $C^\infty(X, Y)$ e é denotada por \mathcal{W}_k .*

Definição 1.12 *A C^∞ -topologia de Whitney em $C^\infty(X, Y)$ é aquela cuja base é dada por $\mathcal{W} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{W}_k$.*

Definição 1.13 *Seja \mathcal{F} um espaço topológico, então dizemos que:*

- (i) *Um subconjunto G de \mathcal{F} é **residual** se, e somente se, G é a interseção enumerável de abertos densos em \mathcal{F} .*
- (ii) *\mathcal{F} é um **espaço de Baire** se, e somente se, cada subconjunto residual de \mathcal{F} é denso em \mathcal{F} .*

Proposição 1.14 *([Go-Gu] p. 44) Sejam X e Y variedades diferenciáveis, então $C^\infty(X, Y)$ é um espaço de Baire com a C^∞ -topologia de Whitney.*

1.3 Transversalidade

Definição 1.15 *Sejam X e Y variedades diferenciáveis e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação diferenciável. Sejam W uma subvariedade de Y e x um ponto em X , dizemos que f **intersecta (corta) W transversalmente em x** , e denotamos por $f \bar{\cap} W$ em x , se, e somente se:*

(i) *ou $f(x) \notin W$,*

(ii) *ou $f(x) \in W$ e $T_{f(x)}Y = T_{f(x)}W + (df)_x(T_xX)$.*

Exemplo:

Sejam $X = \mathbb{R} = W$, $Y = \mathbb{R}^2$ e $f(x) = (x, x^2)$, então $f \bar{\cap} W$ em todo $x \neq 0$. A figura 1.1 ilustra este exemplo e ligeiras perturbações que f pode sofrer de modo que continue transversal a W .

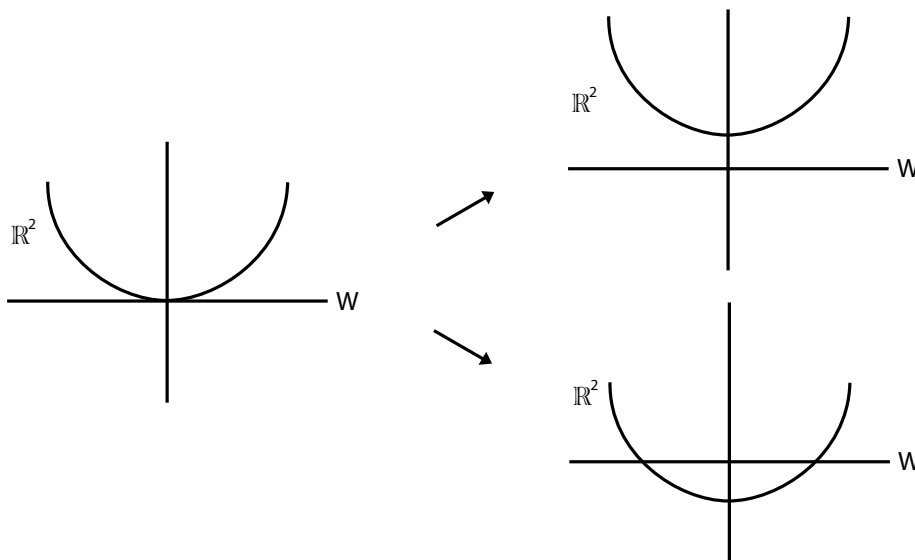


Figura 1.1: Transversalidade.

Definição 1.16 *Sejam X , Y variedades diferenciáveis, A um subconjunto de X e W uma subvariedade de Y , dizemos que:*

(i) *f **intersecta W transversalmente em A** , e denotamos por $f \bar{\cap} W$ em A , se, e somente se, $f \bar{\cap} W$ em x , para cada $x \in A$.*

(ii) *f **intersecta W transversalmente** se $f \bar{\cap} W$ em X .*

Proposição 1.17 ([Go-Gu] p. 51.) *Sejam X e Y variedades diferenciáveis e $W \subset Y$ uma subvariedade de Y . Suponha $\dim W + \dim X < \dim Y$ (isto é, $\dim X < \text{codim } W$). Dada uma aplicação diferenciável $f : X \rightarrow Y$ tal que $f \bar{\cap} W$, então $f(X) \cap W = \emptyset$.*

Proposição 1.18 ([Go-Gu] p. 52.) *Sejam X e Y variedades diferenciáveis, W uma subvariedade de Y e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação diferenciável tal que $f \bar{\cap} W$. Então $f^{-1}(W)$ é uma subvariedade de X . Além disso, $\text{codim } f^{-1}(W) = \text{codim } W$. Em particular, se $\dim X = \text{codim } W$, então $f^{-1}(W)$ consiste somente de pontos isolados.*

Teorema 1.19 (Teorema Elementar de Transversalidade de Thom) ([Go-Gu] p. 54.) *Sejam X, Y variedades diferenciáveis e W uma subvariedade de $J^k(X, Y)$. Seja*

$$T_W = \left\{ f \in C^\infty(X, Y); j^k f \bar{\cap} W \right\},$$

então T_W é residual em $C^\infty(X, Y)$ com a C^∞ -topologia de Whitney. Além disso, se W é fechada, então T_W é aberto.

Teorema 1.20 (Teorema de Transversalidade para Multi-jatos) ([Go-Gu] p. 57.) *Sejam X e Y variedades diferenciáveis $C^\infty(X, Y)$ e seja W uma subvariedade de ${}_s J^k(X, Y)$. Seja*

$$T_W = \left\{ f \in C^\infty(X, Y); {}_s j^k f \bar{\cap} W \right\},$$

então T_W é residual em $C^\infty(X, Y)$ com a topologia C^∞ de Whitney. Além disso, se W é compacta, então T_W é aberto.

1.4 Estabilidade

Definição 1.21 *Sejam $f, g \in C^\infty(X, Y)$, com X, Y variedades diferenciáveis. Dizemos que f é **\mathcal{A} -equivalente a g** , e escrevemos $f \sim_{\mathcal{A}} g$, se existem difeomorfismos $\phi : X \rightarrow X$ e $\psi : Y \rightarrow Y$ tais que $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$, ou seja, se o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Definição 1.22 Dizemos que $f \in \mathcal{C}^\infty(X, Y)$ é **\mathcal{A} -estável** se existe W vizinhança de f em $\mathcal{C}^\infty(X, Y)$ com a \mathcal{C}^∞ -topologia de Whitney tal que $f \sim_{\mathcal{A}} f'$ para todo $f' \in W$.

Definição 1.23 Sejam $f : X \rightarrow Y$, $f \in \mathcal{C}^\infty(X, Y)$, $f^{(s)} : X^{(s)} \rightarrow Y^s$ a restrição de $f \times \dots \times f : X^s \rightarrow Y^s$ a $X^{(s)}$ e $\Delta Y^s = \{(y, \dots, y) ; y \in Y\}$, então f é uma **aplicação com cruzamentos normais** se, e somente se, para todo $s > 1$, $f^{(s)} \bar{\cap} \Delta Y^s$.

Definição 1.24 Uma **curva plana fechada** é uma aplicação diferenciável $\phi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de um círculo no plano cuja derivada nunca se anula, isto é, uma imersão do círculo no plano. A imagem de uma curva plana será chamada uma **representação da curva**.

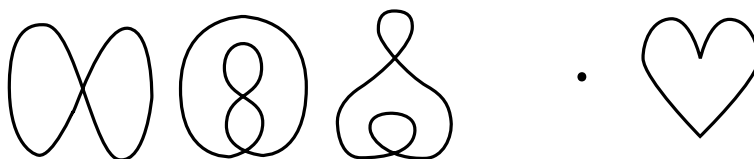


Figura 1.2: Imagens de aplicações diferenciáveis de S^1 em \mathbb{R}^2 .

Observação 1.25 As três imagens à esquerda na figura 1.2 são representações de curvas planas, já as duas imagens à direita não são representações de curvas planas, pois no caso de um único ponto a diferencial da aplicação é identicamente nula e consideramos a aplicação infinitamente singular, no caso da figura coração, a aplicação tem pontos singulares (os bicos), que são chamados cúspides.

Exemplo: Vejamos alguns exemplos de aplicações estáveis ([Go-Gu] pp. 78 – 86):

- (a) Todas as submersões são estáveis.
- (b) Se $f \in \mathcal{C}^\infty(X, Y)$ e X é compacto, então as imersões injetoras são estáveis.
- (c) Sejam $f \in \mathcal{C}^\infty(X, Y)$, X compacto, $\dim Y \geq 2\dim X$. Então

f é estável $\Leftrightarrow f$ é uma imersão com cruzamentos normais.

- (c₁) Observemos em particular o caso das curvas planas, na figura 1.3 vemos que não são estáveis as curvas que têm cruzamentos tangentes e pontos triplos. Assim, não basta ser imersão ou curva regular para ser estável.

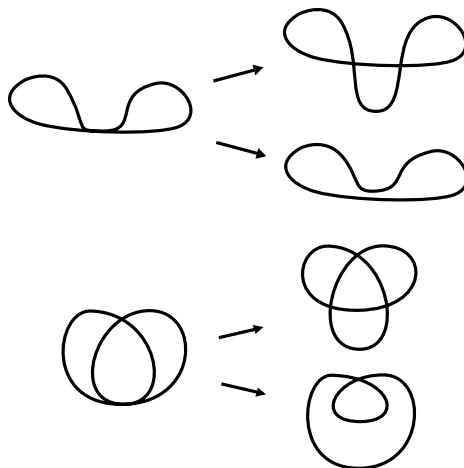


Figura 1.3: Curvas estáveis (à direita) e não estáveis (à esquerda).

Observação 1.26 *As aplicações estáveis nem sempre são densas. Em [Go-Gu] p.163, mostra-se que uma aplicação estável $f : X^n \rightarrow Y^m$ é densa em $C^\infty(X, Y)$ se, e somente se, o par (n, m) satisfaz uma das seguintes condições:*

- (a) $6m - 7n > -8$, quando $m - n \geq 4$.
- (b) $6m - 7n > -9$, quando $3 \geq m - n \geq 0$.
- (c) $m < 8$, quando $m - n = -1$.
- (d) $m < 6$, quando $m - n = -2$.
- (e) $m < 7$, quando $m - n \leq -3$.

As aplicações estáveis consideradas neste trabalho são as curvas planas fechadas que não possuem pontos de auto-tangência, nem pontos triplas. Estas são densas em $\mathcal{I}(S^1, \mathbb{R}^2)$ pois satisfazem a condição (b) acima.

Definição 1.27 *Dadas duas parametrizações de curvas planas*

$$\begin{aligned} \alpha, \beta : I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto \alpha(s), \beta(s) \end{aligned} ,$$

*dizemos que α e β são **homotópicas** se, e somente se, existe uma aplicação contínua*

$$\begin{aligned} \varphi : I \times I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (s, t) &\longmapsto \varphi(s, t) \end{aligned}$$

tal que $\varphi(s, 0) = \alpha(s)$ e $\varphi(s, 1) = \beta(s)$, para todo s .

*A aplicação φ é chamada uma **homotopia** entre α e β .*

Definição 1.28 Dizemos que duas curvas α e β são **isotópicas** se, e somente se, α e β são homotópicas e, para cada $t \in I$, a aplicação $\varphi_t = \varphi|_{I \times \{t\}}$ é um homeomorfismo, ou seja, α e β são isotópicas se, e somente se, existe

$$\begin{aligned} \varphi: I \times I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (s, t) &\longmapsto \varphi(s, t) \end{aligned}$$

aplicação contínua tal que $\varphi(s, 0) = \alpha(s)$ e $\varphi(s, 1) = \beta(s)$, para todo $s \in I$ e

$$\begin{aligned} \varphi_t: I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ s &\longmapsto \varphi_t(s) = \varphi(s, t) \end{aligned} \quad \text{é homeomorfismo para todo } t \in I.$$

1.5 Discriminantes

A **Teoria de Vassiliev** [Va1] foi desenvolvida para obtenção de invariantes topológicos de isotopia em espaços de aplicações, em especial para obtenção de invariantes de nós em \mathbb{R}^3 . Desde então o estudo tem se generalizado em outros âmbitos, nos quais se tem obtido resultados surpreendentes.

Esta teoria vem sendo utilizada por vários matemáticos, por exemplo por Arnold para introduzir invariantes às curvas planas fechadas estáveis, como veremos neste trabalho. Já para aplicações estáveis de superfícies imersas em \mathbb{R}^3 foi utilizada por Goryunov [Gor1], em aplicações estáveis de superfícies no plano foi utilizada por Ohmoto e Aicardi [Oh-Ai] e Yamamoto [Ya] utilizou estas técnicas para a obtenção de invariantes de aplicações estáveis de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^2 .

O mais interessante é que este método não só é possível obter os invariantes, mas também uma base do espaço de invariantes, isto é, proporciona alguns geradores por meio dos quais se pode obter qualquer outro invariante com combinações lineares destes geradores.

A técnica de Vassiliev consiste em caracterizar o subespaço de interesse como o complemento de um certo subconjunto estratificado conhecido como discriminante.

Neste seção daremos algumas definições, resultados e exemplos para melhor entendimento do conjunto discriminante.

Historicamente o termo discriminante era utilizado para designar o que distinguia as raízes múltiplas dos polinômios, por exemplo, no caso do polinômio de segundo grau $ax^2 + bx + c$, $b^2 - 4ac$ é o discriminante. Hoje em dia, um discriminante é um subconjunto de um espaço de aplicações definido por todas aquelas que cumprem uma certa particularidade. Por particularidade podemos nos referir a muitas coisas; é por isso que não se pode definir o discriminante em geral, temos que definí-lo em cada caso dizendo qual será essa particularidade.

Exemplo:

Seja $H^2(2)$ o espaço dos polinômios homogêneos de grau 2 em duas variáveis:

$$H^2(2) = \left\{ f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Definimos o discriminante como:

$$\Delta = \left\{ f(x, y) \in H^2(2) : f \text{ admite raízes múltiplas} \right\}.$$

É fácil ver que f tem raízes múltiplas se, e somente se, $b^2 = ac$, identificando cada polinômio com o ponto (a, b, c) no espaço de parâmetros \mathbb{R}^3 , obtemos Δ como ilustrado na figura 1.4.

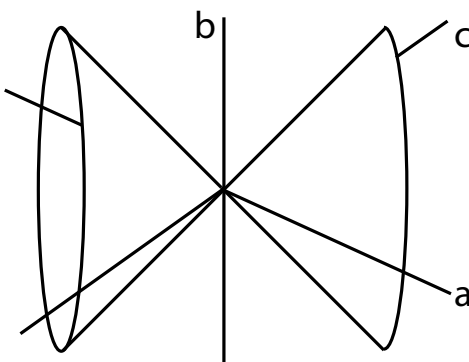


Figura 1.4: Discriminante $b^2 = ac$.

Neste trabalho vamos considerar em $\mathcal{C}^\infty(S^1, \mathbb{R}^2)$ a definição de Arnold de discriminante, a saber:

Definição 1.29 O *discriminante* de $\mathcal{C}^\infty(S^1, \mathbb{R}^2)$ é o subconjunto de aplicações que apresentam singularidades não estáveis e denotamos por Δ .

Observação 1.30 É importante notar que muitos objetos de estudo podem ser definidos como o complemento do discriminante em um espaço maior. Por exemplo, as aplicações estáveis de $\mathcal{C}^\infty(X, Y)$ são o complemento de todas aquelas com algum tipo de singularidade não estável.

Definição 1.31 *Dados uma variedade diferenciável X e um subconjunto S de X , uma **estratificação** de S é uma partição localmente finita de S em subvariedades de X , chamadas **estratos**.*

Definição 1.32 *A **codimensão** de um subconjunto estratificado S de uma variedade diferenciável X é a codimensão do estrato de menor codimensão.*

Para obter informações topológicas acerca do complemento do discriminante é importante saber como estão dispostos os estratos do discriminante entre si. Para isso, primeiro usamos a linguagem de jatos introduzida na seção 1.1 para identificar que elementos estarão no discriminante e em estratos de que codimensão.

Se estamos estudando as aplicações estáveis f de $\mathcal{C}^\infty(X, Y)$, consideramos sua extensão multi-jato:

$$\begin{aligned} {}_s j^k f : \quad X^{(s)} &\longrightarrow {}_s J^k(X, Y) \\ (x_1, \dots, x_s) &\longmapsto \left(x_1, f(x_1), \frac{\partial^{|\alpha|} f_i}{\partial x^\alpha}(x_1), \dots, x_s, f(x_s), \frac{\partial^{|\alpha|} f_i}{\partial x^\alpha}(x_s) \right). \end{aligned}$$

Para saber se as singularidades se dão de forma genérica ou não, procedemos do seguinte modo:

O tipo de singularidade estudado se traduz em equações sobre as componentes de ${}_s J^k(X, Y)$, $(a_1, b_1, \dots, a_s, b_s, \dots)$, dependendo do número de equações, estas definem uma subvariedade algébrica S em ${}_s J^k(X, Y)$ (se trabalhamos com uma singularidade multilo-cal) de codimensão igual ao número de equações linearmente independentes.

Uma aplicação f terá singularidades do tipo exigido se, e somente se, ${}_s j^k f(X^{(s)}) \cap S \neq \emptyset$. Isso nos dá $s \dim X = \dim X^{(s)} < \text{codim}_{{}_s J^k(X, Y)}(S)$, e pelo Teorema 1.17, teremos que ${}_s j^k f \bar{\cap} S$ se, e somente se, ${}_s j^k f(X^{(s)}) \cap S = \emptyset$.

Pelo Teorema de Transversalidade para multi-jatos

$$T_S = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(X, Y); {}_s j^k f \bar{\cap} S \right\}$$

é denso, e assim, $T_S = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(X, Y); {}_s j^k f(X^{(s)}) \cap S = \emptyset \right\}$, o que nos diz que essas aplicações não terão esse tipo de singularidade, ou na linguagem de jatos, uma f genérica satisfaz ${}_s j^k f(X^{(s)}) \cap S = \emptyset$, e mais ainda, isto significa que as aplicações com esse tipo de singularidade estão no discriminante.

Agora, para as aplicações que estão no discriminante que tem singularidades que não são determinados de modo genérico, podemos estratificá-los ou subdividí-los dependendo do grau de degeneração ou da codimensão. Para isto, fazemos o seguinte:

Se construímos uma família de aplicações com suficientes parâmetros de forma que $\dim X^{(s)} + \dim U = \text{codim}_{sJ^k(X,Y)}(S)$, com U o espaço de parâmetros, então podemos determinar que ${}_s j^k F(X^{(s)} \times U) \cap S \neq \emptyset$ onde F define uma família genérica a $\dim U$ -parâmetros:

$$\begin{aligned} {}_s j^k F : \quad X^{(s)} \times U &\longrightarrow {}_s J^k(X, Y) \\ (x_1, \dots, x_s, u) &\longmapsto \left(x_1, F_u(x_1), \frac{\partial^{|\alpha|} F_{u_i}}{\partial x^\alpha}(x_1), \dots, x_s, F_u(x_s), \frac{\partial^{|\alpha|} F_{u_i}}{\partial x^\alpha}(x_s) \right) \end{aligned}$$

isto é, existe $u \in U$ tal que F_u tem a singularidade exigida. Deste modo sabemos o mínimo de parâmetros necessários de forma que uma família genérica com esse número de parâmetros possa conter pelo menos uma aplicação com esse tipo de singularidade. Este número é o que chamaremos **codimensão da singularidade** (ou diremos que essa singularidade só acontece em famílias com este número de parâmetros) e o que nos dará o grau de degeneração do elemento do discriminante. Esta é a codimensão do subconjunto ou estrato de todas as aplicações que têm esta singularidade no espaço $\mathcal{C}^\infty(X, Y)$. Esses estratos são as \mathcal{A} -órbitas.

Abaixo apresentamos exemplos para melhor ilustrar o explicado acima.

Exemplos:

1. Seja $\mathcal{F} = \mathcal{C}^\infty(S^1, \mathbb{R}^2)$ e seja \mathcal{M} o subespaço de todas as curvas planas fechadas estáveis, isto é, o conjunto das curvas planas fechadas sem ponto triplos e sem cruzamentos tangentes. Aqui o discriminante é $\Delta = \mathcal{F} \setminus \mathcal{M}$.

Seja Λ o conjunto de todas as aplicações com ponto triplo, então: $f \in \Lambda$ se, e somente se, sua extensão 0-jato

$$\begin{aligned} {}_3 j^0 f : \quad S^1 \times S^1 \times S^1 &\longrightarrow {}_3 J^0(S^1, \mathbb{R}^2) \simeq S^1 \times S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \\ (s, t, w) &\longmapsto (s, t, w, f(s), f(t), f(w)) \end{aligned}$$

verifica: existe $(s, t, w) \in S^1 \times S^1 \times S^1$ tal que $f(s) = f(t) = f(w)$.

Se as coordenadas em ${}_3 J^0(S^1, \mathbb{R}^2)$ são $(x, y, z, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2)$, estas equações definem um subespaço S de codimensão 4 em ${}_3 J^0(S^1, \mathbb{R}^2)$, formado por todos os pontos tais que $a_1 = b_1 = c_1$ e $a_2 = b_2 = c_2$.

Se tomamos uma função genérica $f \in \mathcal{F}$, pelo Teorema de Transversalidade de Thom, ${}_3j^0 f \bar{\cap} S$ e, usando o Teorema 1.17, teremos que

$${}_3j^0 f \bar{\cap} S \iff {}_3j^0 f(S^1 \times S^1 \times S^1) \cap S = \emptyset.$$

Como $f \in \Lambda$ se, e somente se, ${}_3j^0 f(S^1 \times S^1 \times S^1) \cap S \neq \emptyset$, segue que pertencer a Λ não é uma propriedade genérica. Por isso, tomamos uma família genérica a 1-parâmetro

$$\begin{aligned} {}_3j^0 F : S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1 &\longrightarrow {}_3J^0(S^1, \mathbb{R}^2) \\ (s, t, w, u) &\longmapsto (s, t, w, F_u(s), F_u(t), F_u(w)) \end{aligned} \text{ ,}$$

de modo que ${}_3j^0 F$ cortará S em pontos isolados, isto é, existirá $u \in \mathbb{R}$ tal que $F_u \in \Lambda$. Portanto, $\text{codim } \Lambda = 1$.

2. Sejam \mathcal{F} e \mathcal{M} como no exemplo 1.

Seja Ω o conjunto de todas as aplicações com cruzamentos tangentes, então: $g \in \Omega$ se, e somente se, sua extensão 1-jato

$$\begin{aligned} {}_2j^1 g : S^1 \times S^1 &\longrightarrow {}_2J^1(S^1, \mathbb{R}^2) \simeq S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \\ (s, t) &\longmapsto (s, t, g(s), g(t), g'(s), g'(t)) \end{aligned}$$

verifica: existe $(s, t) \in S^1 \times S^1$ tal que $g(s) = g(t)$ e $g'_1(s)g'_2(t) = g'_1(t)g'_2(s)$, com (g'_1, g'_2) as funções coordenadas de g' .

Se as coordenadas em ${}_2J^1(S^1, \mathbb{R}^2)$ são $(x, y, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2)$, estas equações definem um subespaço W de codimensão 3 em ${}_2J^1(S^1, \mathbb{R}^2)$, formado por todos os pontos tais que $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ e $c_1 d_2 = c_2 d_1$.

Se tomamos uma função genérica $g \in \mathcal{F}$, pelo Teorema de Transversalidade de Thom, ${}_2j^1 g \bar{\cap} W$ e, usando o Teorema 1.17, teremos que

$${}_2j^1 g \bar{\cap} W \iff {}_2j^1 g(S^1 \times S^1) \cap W = \emptyset.$$

Como $g \in \Omega$ se, e somente se, ${}_2j^1 g(S^1 \times S^1) \cap W \neq \emptyset$, segue que pertencer a Ω não é uma propriedade genérica. Por isso, tomamos uma família genérica a 1-parâmetro

$$\begin{aligned} {}_2j^1 G : S^1 \times S^1 \times S^1 &\longrightarrow {}_2J^1(S^1, \mathbb{R}^2) \\ (s, t, u) &\longmapsto (s, t, G_u(s), G_u(t), G'_u(s), G'_u(t)) \end{aligned} \text{ ,}$$

de modo que ${}_2j^1 G$ cortará W em pontos isolados, isto é, existirá $u \in \mathbb{R}$ tal que $G_u \in \Omega$. Portanto, $\text{codim } \Omega = 1$.

Neste trabalho vamos considerar o conjunto $\mathcal{I}(S^1, \mathbb{R}^2)$ das imersões regulares de S^1 em \mathbb{R}^2 , com:

1. sua estratificação através do índice de Whitney da curva.
2. uma subestratificação da anterior considerando os eventos não genéricos, a saber, auto-tangências e pontos triplos.

Capítulo 2

Os Invariantes Básicos de Arnold

Neste capítulo apresentaremos três novas equivalências de curvas planas fechadas, J^+ , J^- e St - equivalências, que estão associadas com os eventos não-genéricos de auto-tangências diretas, auto-tangências inversas e pontos triplos. Apresentaremos, então, os três invariantes básicos de Arnold a elas associados: J^+ , J^- e St , algumas de suas propriedades e formas de calculá-los. No que segue, vamos considerar sempre curvas planas fechadas.

As referências para este capítulo são [Ar1] e [Ar2].

2.1 Equivalência Clássica de Curvas Planas

Nesta seção vamos definir a equivalência clássica de curvas planas de modo a estabelecer a estratificação do espaço das imersões dada por Whitney.

Dadas duas curvas planas fechadas, queremos determinar quando elas são as “mesmas”. Iniciamos examinando a equivalência clássica de curvas planas: duas curvas são equivalentes se uma puder ser deformada suavemente na outra, mais precisamente temos a seguinte definição:

Definição 2.1 *Duas curvas planas fechadas $\alpha, \beta : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ são **equivalentes** se existe uma aplicação contínua*

$$\begin{aligned} \phi : [0, 1] \times S^1 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, s) &\longmapsto \phi(t, s) \end{aligned}$$

onde para cada $t \in [0, 1]$, $\phi(t, *) = \phi_t : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma imersão de uma curva plana, com $\phi_0 = \alpha$ e $\phi_1 = \beta$.

Dizemos que a aplicação ϕ fornece uma família a 1-parâmetro de imersões de curvas planas.

Notação: $\alpha \sim \beta$.

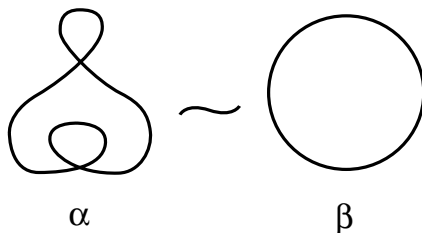


Figura 2.1: Representações de curvas α e β equivalentes.

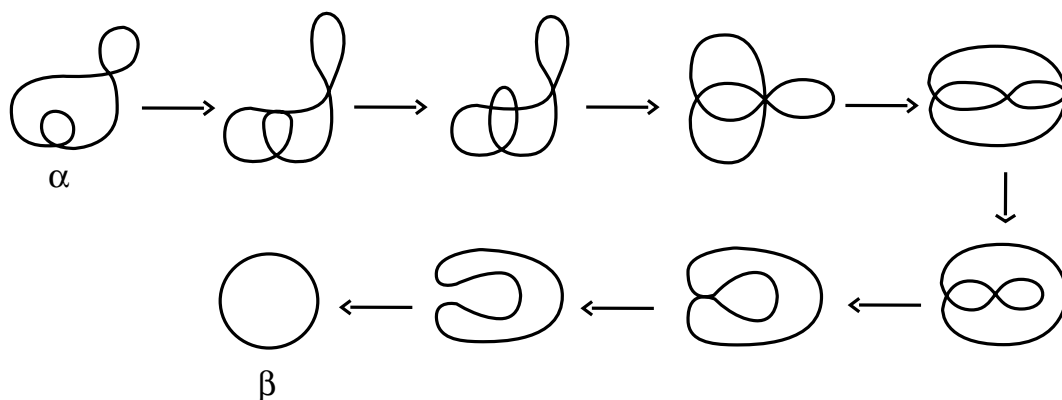


Figura 2.2: Uma família de imersões deformando suavemente α em β .

Observação 2.2 Um modo de pensar na equivalência de curvas planas fechadas é considerar a família a 1-parâmetro ϕ_t como um caminho no espaço de imersões $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que conecta α e β . Neste trabalho usaremos a palavra **caminho** para designar a família a 1-parâmetro de imersões mencionada na definição 2.1.

Com a definição de equivalência de curvas em mãos é natural questionar o seguinte:

Dadas duas curvas planas arbitrárias, como podemos determinar se elas são equivalentes?

Por exemplo, a curva de figura oito é equivalente ao círculo?

Vamos apresentar um esquema para tentar deformar a figura oito no círculo, onde somos “induzidos” a processar o seguinte:

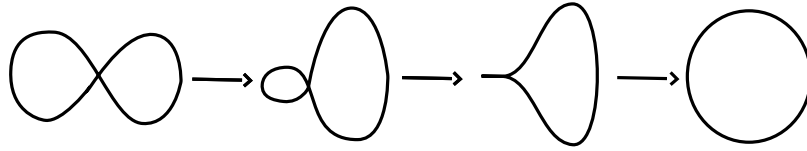


Figura 2.3: Um esquema para achar um caminho entre a figura oito e o círculo.

Porém, notemos que a terceira imagem não é uma imersão porque contém um bico (cúspide). Assim, o esquema apresentado na figura 2.3 não é um caminho válido entre a figura oito e o círculo.

Com isso ainda não podemos afirmar que as duas curvas não são equivalentes, mas vemos que para passar de uma a outra aparecerá a singularidade de tipo cúspide (bico), então nos surge outra pergunta:

Como podemos concluir confiantemente que não existe caminho algum ϕ_t entre as duas curvas em questão?

Este questionamento nos conduz a um conceito importante sobre curvas planas que nos ajudará a distinguir curvas não equivalentes.

Definição 2.3 *Seja $\phi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana fechada, se considerarmos uma orientação do círculo S^1 no plano \mathbb{R}^2 , dizemos que ϕ é uma **curva plana fechada orientada**, cuja orientação é induzida pela orientação de S^1 .*

Definição 2.4 *Dada uma curva plana fechada α , o **índice de Whitney** de α é o número de rotações do vetor tangente quando um ponto percorre a curva no sentido positivo.*

Notação: $I_w(\alpha)$.

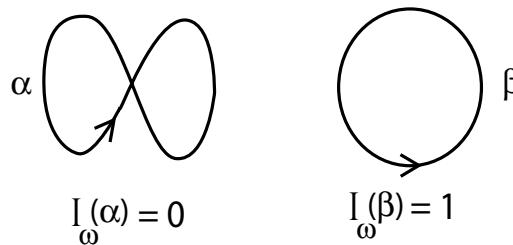


Figura 2.4: Índice de Whitney.

Observação 2.5 *Note que se o círculo tivesse sido orientado de maneira oposta, teria um índice -1 . Podemos generalizar isto dizendo que mudando a orientação de todas as curvas com índice não nulo mudamos o sinal do índice da curva.*

Teorema 2.6 (*[Whi] Teorema de Whitney*) *O espaço de imersões do círculo no plano com os mesmos índices formam uma componente conexa no espaço de imersões do círculo no plano.*

Consequências do Teorema de Whitney:

1. Pelo Teorema de Whitney podemos concluir que duas curvas com índices de Whitney distintos não são equivalentes. Isto significa que estas curvas estão em componentes de caminhos distintos e não existe qualquer caminho de imersões entre as duas.

Desse modo, concluímos que a curva de figura oito e o círculo não são equivalentes. Como podemos ver na figura 2.4, a curva de figura oito tem índice 0 enquanto o círculo tem índice ± 1 (dependendo de sua orientação).

2. Também podemos usar este teorema para afirmar que duas curvas com mesmo índice de Whitney são equivalentes sem ter que achar explicitamente um caminho entre elas. Considerando que ambas as curvas têm o mesmo índice, elas pertencerão a mesma componente de caminho no espaço de imersões e então existirá um caminho entre elas.

Por exemplo, como ambas as curvas da figura 2.1 têm índice 1, podemos dizer que elas são equivalentes sem achar o caminho entre elas.

3. Pelo teorema também podemos estabelecer classes de equivalência de curvas planas baseados no índice da curva.

Através do índice de Whitney podemos estratificar o conjunto das imersões do círculo no plano considerando as classes das curvas que têm o mesmo índice, a menos de sinal. Cada classe é chamada **representação canônica da curva**, denotada por K_i , com $i \in \mathbb{N}$.

Assim, uma representação canônica K_i é o conjunto de todas as curvas planas fechadas com índice de Whitney $I_w = \pm i$.

Arnold em [Ar1] estabeleceu representantes para cada representação canônica K_i denominando-as **curvas básicas**. Estas curvas formam o que chamamos de **família de curvas básicas** ilustradas na figura a seguir:

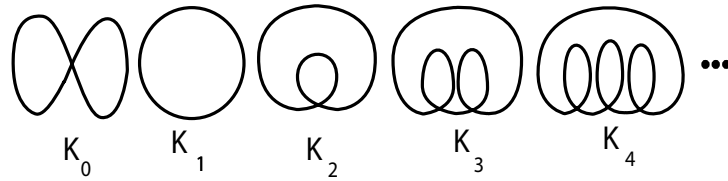


Figura 2.5: Família de curvas básicas.

2.2 Outras Equivalências de Curvas Planas

Agora que estabelecemos a equivalência clássica de curvas planas, consideraremos as consequências através de restrições mais específicas na relação de equivalência de duas curvas. Nesta seção introduziremos três novas equivalências de curvas planas: J^+ - equivalência, J^- - equivalência e St -equivalência, assim como as propriedades referentes a elas.

Definição 2.7 *Uma auto-tangência de uma curva é chamado ponto de **auto-tangência direta** se os vetores tangentes têm o mesmo sentido.*

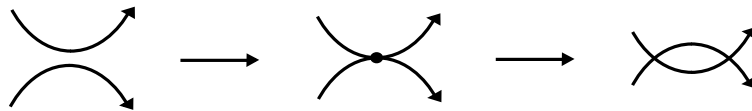


Figura 2.6: Auto-tangência direta.

Definição 2.8 *Uma auto-tangência de uma curva é chamado ponto de **auto-tangência inversa** se os vetores tangentes têm sentidos opostos.*

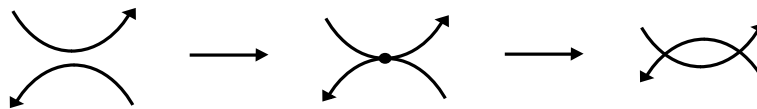


Figura 2.7: Auto-tangência inversa.

Definição 2.9 Dizemos que uma curva $\alpha : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tem um **ponto triplo** se, e somente se, existem θ_1, θ_2 e θ_3 , dois a dois distintos, tais que $\alpha(\theta_1) = \alpha(\theta_2) = \alpha(\theta_3)$.

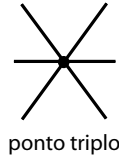


Figura 2.8: Ponto triplo.

Definição 2.10 Uma curva plana fechada α é chamada **genérica** se, e somente se, α não tem pontos de auto-tangência, nem pontos triplos.

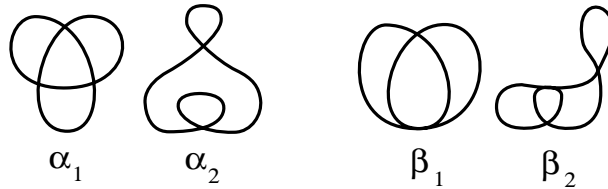


Figura 2.9: As curvas α_1 e α_2 são genéricas, enquanto as curvas β_1 e β_2 não o são.

Observação 2.11 Dizer que uma curva plana fechada é genérica significa que ao se fazer uma pequena perturbação na curva os fenômenos que ocorrem sobre elas não se alteram. Notamos que se uma curva tem pontos de auto-tangência ou pontos triplos qualquer pequena perturbação os desfaz, como ilustra a figura 1.3.

Definição 2.12 Um caminho $\phi_t : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \in [0, 1]$, é um caminho **genérico** se, e somente se, para todo t , ϕ_t ou é genérico ou contém no máximo um dos três seguintes eventos:

- (a) auto-tangência direta;
- (b) auto-tangência inversa;
- (c) pontos triplos.

A figura 2.10 ilustra um caminho genérico entre duas diferentes curvas de índice ± 1 .

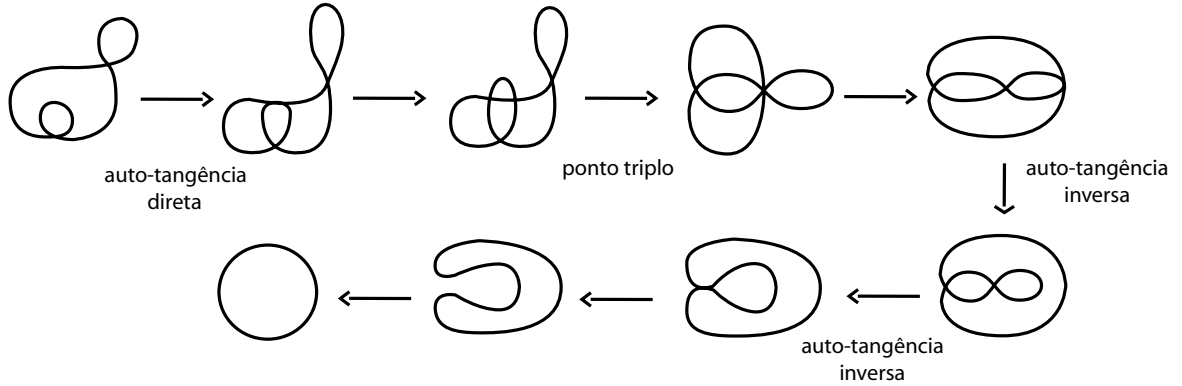


Figura 2.10: Um caminho genérico.

Observação 2.13 O caminho mostrado na figura 2.10 é um exemplo de um caminho genérico. Note que cada curva no caminho contém no máximo um dos seguintes eventos: auto-tangências diretas, auto-tangências inversas e pontos triplos.

Definição 2.14 Os eventos de auto-tangência direta, auto-tangência inversa e pontos triplos experimentados por uma curva plana fechada quando a mesma cruza um caminho genérico são chamados por Arnold de **perestroikas**.

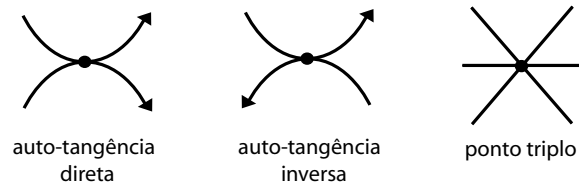


Figura 2.11: Perestroikas.

Definição 2.15 Duas curvas planas fechadas $\alpha, \beta : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ são **J^+ -equivalentes** se existe um caminho genérico ϕ_t entre elas tal que, para todo t , o caminho ϕ_t não contém nenhuma imersão com auto-tangências diretas.

Exemplo:

Um exemplo de duas curvas α e β que são J^+ -equivalentes. Note que o caminho entre as duas curvas não contém imersões com auto-tangências diretas, mas são permitidos auto-tangências inversas e pontos triplos.

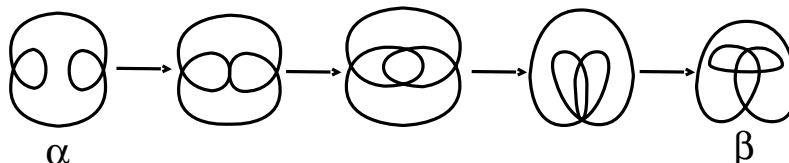


Figura 2.12: Curvas J^+ -equivalentes.

Definição 2.16 Duas curvas planas fechadas, $\alpha, \beta : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, são J^- -equivalentes se existe um caminho genérico ϕ_t entre elas tal que, para todo t , o caminho ϕ_t não contém nenhuma imersão com auto-tangências inversas.

Exemplo:

Um exemplo de duas curvas α e β que são J^- -equivalentes. Note que o caminho entre as duas curvas não contém imersões com auto-tangências inversas, mas são permitidos auto-tangências diretas e pontos triplos.

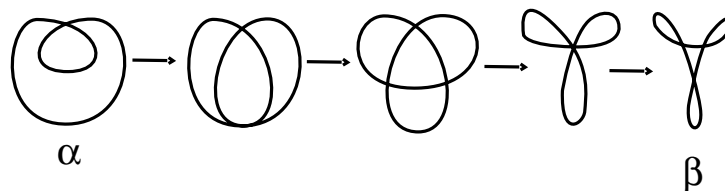


Figura 2.13: Curvas J^- -equivalentes.

Definição 2.17 Duas curvas planas fechadas, $\alpha, \beta : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, são **St-equivalentes** se existe um caminho genérico ϕ_t entre elas tal que, para todo t , o caminho ϕ_t não contém nenhuma imersão com pontos triplos.

Exemplo:

Um exemplo de duas curvas α e β que são St -equivalentes. Note que o caminho entre as duas curvas não contém nenhuma imersão com pontos triplos, mas são permitidas auto-tangências diretas e inversas.

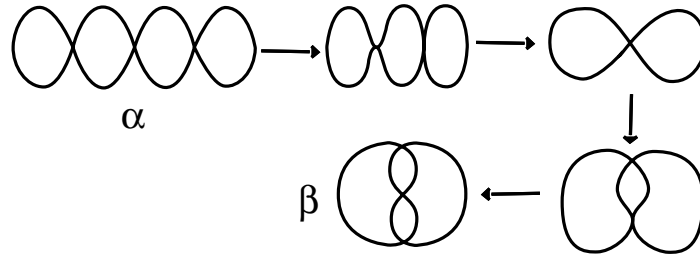


Figura 2.14: Curvas St -equivalentes.

Observemos que estas três novas equivalências, J^+ , J^- e St - equivalência, implicam a noção clássica de equivalência. Associaremos frequentemente estas novas equivalências ao evento não genérico que proibem. Assim, J^+ - equivalência será associada à auto-tangência direta, J^- - equivalência à auto-tangência inversa e St - equivalência será associada ao ponto triplo.

Dessa forma, vamos reformular a pergunta feita no início do capítulo “Quando duas curvas planas fechadas são equivalentes?” passando aos casos mais específicos e perguntando:

Quando duas curvas planas fechadas são J^+ , J^- ou St - equivalentes?

O teorema de Whitney foi suficiente para responder esta questão no caso da equivalência clássica, no entanto agora para estas novas noções de equivalência ele não é suficiente (veja figura 2.15). Assim necessitamos de ferramentas que sejam sensíveis aos tipos de imersões contidas nos caminhos entre duas curvas.

2.3 Os Invariantes Básicos de Arnold

Arnold encontrou um modo de resolver nosso problema para curvas planas fechadas distintas em termos de J^+ , J^- e St - equivalências. Ele definiu três invariantes básicos contando os sinais de cruzamentos da hipersuperfície discriminante. Nesta seção, introduziremos os discriminantes J^+ , J^- e St , os invariantes básicos a eles associados e mostraremos que tais invariantes são aditivos sob a soma conexa. Definiremos ainda a função de Whitney e mostraremos como calcular o invariante St a partir desta. Por fim, usaremos o diagrama de Gauss e a árvore de raiz para calcular o invariante St de um tipo especial de curva, as curvas extremas.

2.3.1 Hipersuperfície Discriminante

Consideremos $\mathcal{C}^\infty(S^1, \mathbb{R}^2)$ e escolhamos uma das novas relações de equivalência, J^+ , J^- ou St - equivalência. Chamaremos qualquer imersão que contém o evento não genérico associado a esta equivalência uma **imersão degenerada**. Arnold mostrou que as imersões degeneradas formam uma hipersuperfície de codimensão um no espaço de imersões, que será chamada **hipersuperfície discriminante** ou simplesmente **discriminante**. O discriminante divide componentes de imersões com um índice fixo. Cada componente do complemento do discriminante consiste em imersões não degeneradas do mesmo tipo.

Por exemplo, a hipersuperfície discriminante para a St -equivalência, que chamaremos de **discriminante St** , é composta de todas as imersões que contêm um ponto triplo. Se duas imersões, α e β , estão na mesma componente conexa do complemento da hipersuperfície discriminante St , podemos criar um caminho genérico de curvas ϕ_t de α para β , que não contém nenhuma curva com ponto triplo, isto é, ϕ_t pertence a mesma componente conexa para todo t e não contém nenhuma imersão degenerada. Assim $\alpha \sim_{St} \beta$.

De maneira análoga, temos os discriminantes J^+ e J^- para as hipersuperfícies de auto-tangência direta e auto-tangência inversa.

A figura 2.15 ilustra um exemplo dos três discriminantes, J^+ , J^- e St , para uma curva de índice 1.

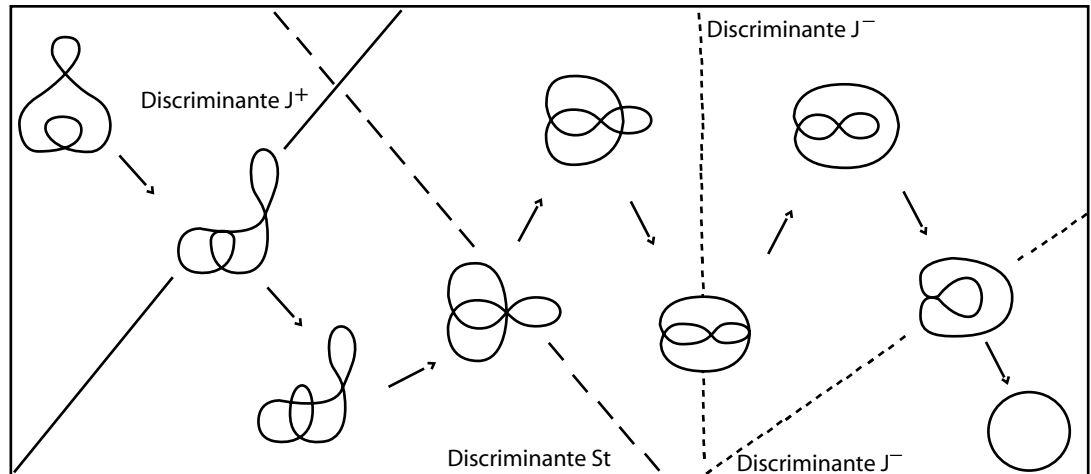


Figura 2.15: Discriminantes para uma curva de índice 1.

Arnold introduziu três invariantes básicos de curvas planas que determinam quando duas curvas planas não são J^+ , J^- ou St - equivalentes, respectivamente, como segue:

- (i) \mathbf{J}^+ é o invariante básico associado a cruzamentos do discriminante J^+ .

- (ii) \mathbf{J}^- é o invariante básico associado a cruzamentos do discriminante J^- .
- (iii) \mathbf{St} é o invariante básico associado a cruzamentos do discriminante St .

Na seção 2.3.2 apresentaremos a definição axiomática destes invariantes.

Como mencionado no começo desta seção, estes invariantes contam o número de sinais dos cruzamentos do discriminante. Porém, contar simplesmente o número destes cruzamentos não é o bastante. Por exemplo, considere a figura 2.16 que apresenta um caminho genérico da curva K_2 para si mesma.

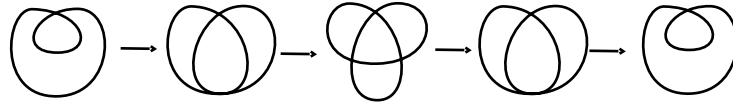


Figura 2.16: Um caminho genérico da curva K_2 para si mesma.

Neste caminho baixamos o laço interior da curva e depois o deslizamos até sua posição original. Já que começamos e terminamos com a mesma curva, esperaríamos que ambas as representações de K_2 tivessem os mesmos invariantes. Porém, se simplesmente contamos o número de auto-tangências diretas que aparecem, pensaríamos que o invariante J^+ deveria mudar, já que a curva sofre duas auto-tangências diretas durante o caminho. Assim, precisamos de uma ferramenta para responder porque a segunda auto-tangência direta neste caminho cancela a primeira.

Para resolver este problema, para cada transversal que cruza um ponto não genérico é dada um sinal. Assim, atribuímos um sinal a cada cruzamento como segue:

Estabelecendo o sinal de um cruzamento:

1º Caso: Cruzamento de auto-tangência:

O cruzamento de uma auto-tangência (direta e inversa) é **positivo** se o número de pontos duplos aumenta. O cruzamento é **negativo** se o número de pontos duplos diminui.

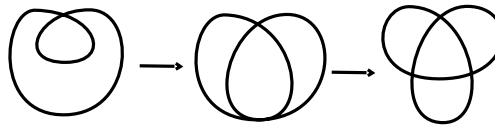


Figura 2.17: Cruzamento positivo de uma auto-tangência direta.

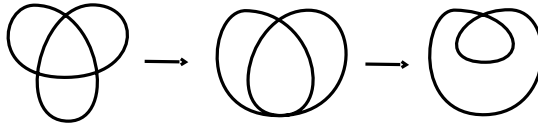


Figura 2.18: Cruzamento negativo de uma auto-tangência direta.

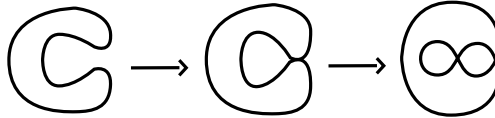


Figura 2.19: Cruzamento positivo de uma auto-tangência inversa.

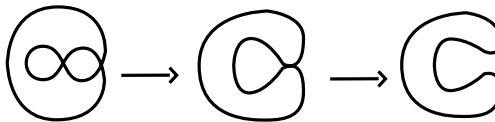


Figura 2.20: Cruzamento negativo de uma auto-tangência inversa.

2º Caso: Cruzamento de ponto triplo:

Dar um sinal a um cruzamento triplo é mais complicado que nos outros dois casos. Arnold deduziu este método de um estudo da topologia de singularidades de codimensão 1 da hipersuperfície discriminante.

Começamos notando que antes e após o cruzamento de um ponto triplo, a curva dá origem a triângulos que chamamos de **triângulos desaparecendo**. Antes da ocorrência do ponto triplo também havia um triângulo que chamamos o triângulo “**morto**” e o triângulo formado depois do cruzamento é chamado o triângulo “**recém-nascido**”. Também associamos um sinal a cada um destes dois triângulos.

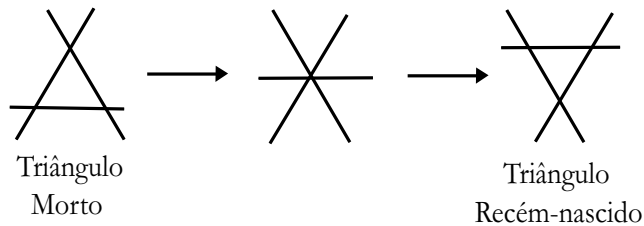


Figura 2.21: Cruzamento Triplo

Para determinar o sinal dos triângulos desaparecendo, começamos fixando uma orientação no círculo traçado no plano pelas imersões.

Fixando uma orientação no círculo sendo traçado no plano por uma imersão, induzimos uma orientação sobre a curva. A orientação deste círculo dá uma ordenação cíclica bem definida aos lados do triângulo desaparecendo, isto é, a ordem na qual a curva visita os lados. Assim induzimos uma orientação nos triângulos. Além disso, devido à orientação induzida na curva, cada lateral do triângulo desaparecendo já tem sua própria direção.

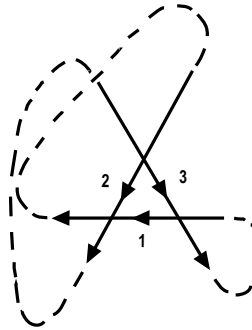


Figura 2.22: Ordenação cíclica dos lados do triângulo.

A direção de cada um dos lados do triângulo pode ou não coincidir com a orientação do triângulo. Para cada triângulo, seja q o número de lados cuja direção coincide com a orientação do triângulo. Note que q pode receber apenas os valores 0, 1, 2 ou 3. Estabeleceremos o **sinal** de um triângulo desaparecendo como $(-1)^q$.

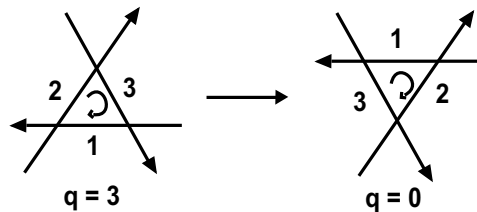


Figura 2.23: Triângulos desaparecendo.

No triângulo “morto” do exemplo da figura 2.23, a direção de cada lado coincide com a orientação do triângulo, assim $q = 3$, isto nos dá $(-1)^q = (-1)^3 = -1$, então o triângulo “morto” tem sinal negativo. Já no triângulo “recém-nascido” a direção de cada lado difere da orientação do triângulo, assim $q = 0$, o que nos dá $(-1)^q = (-1)^0 = 1$. Assim o triângulo “recém-nascido” tem sinal positivo.

- O **sinal do cruzamento triplo** é definido como o sinal do triângulo “recém-nascido”.

Para o exemplo da figura 2.23, o sinal do cruzamento triplo é +1.

Os invariantes básicos ficam então definidos pela escolha de saltos a cruzamentos positivos dos discriminantes. Arnold estabeleceu que a escolha do salto para J^+ é 2, para J^- é -2 e para St é 1. O salto para o cruzamento positivo de uma auto-tangência direta foi escolhido de tal modo que o invariante J^+ aumente pelo mesmo número com que aumenta o número n de pontos duplos e o cruzamento positivo de uma auto-tangência inversa aumenta pelo oposto do incremento de n .

Além destas escolhas para as transições de um caminho genérico, ele também associou aos invariantes básicos a seguinte normalização sobre a família de curvas básicas K_i :

- $St(K_0) = 0, St(K_{i+1}) = i, i = 0, 1, \dots;$
- $J^+(K_0) = 0, J^+(K_{i+1}) = -2i, i = 0, 1, \dots;$
- $J^-(K_0) = -1, J^-(K_{i+1}) = -3i, i = 0, 1, \dots$

Podemos ver as normalizações e transições de um caminho genérico resumidos na tabela da figura 2.24.

		K_0	K_1	K_2	K_3	K_4	\dots		
St	1	0	0	0	0	1	2	3	\dots
J^+	0	2	0	0	0	-2	-4	-6	\dots
J^-	0	0	-2	-1	0	-3	-6	-9	\dots

Figura 2.24: Normalização dos invariantes de Arnold para as curvas básicas.

Conhecendo as normalizações e transições de um caminho genérico estamos prontos para calcular os invariantes de Arnold para qualquer curva plana fechada. O modo mais óbvio de se fazer isto é começar encontrando o índice da curva. Como consequência do Teorema de Whitney podemos encontrar um caminho genérico desta curva até a curva básica de mesmo índice. Se contamos, com sinal próprio, o número de auto-tangências

diretas, auto-tangências inversas e pontos triplos neste caminho podemos usar a normalização dada para as curvas básicas para entender os invariantes para nossa curva plana.

Vejam os um exemplo.

Exemplo:

Consideremos o caminho genérico da figura 2.25.

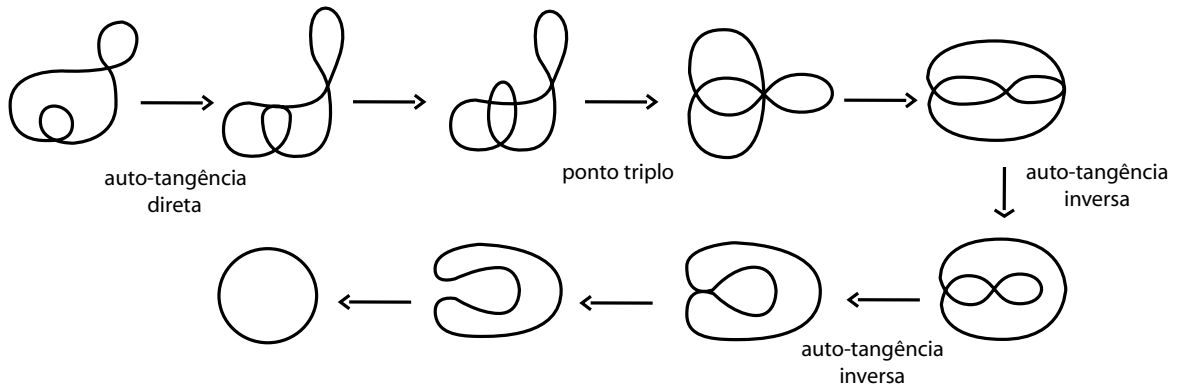


Figura 2.25: Caminho genérico conectando α a K_1 .

Seja α a curva do início deste caminho genérico, cujo índice de Whitney é $I_w(\alpha) = 1$. Neste caminho, até ser transformada na curva básica de mesmo índice, a curva α sofre uma auto-tangência direta, duas auto-tangências inversas e um cruzamento de ponto triplo.

O número de pontos duplos da curva α aumenta com o cruzamento da auto-tangência direta, logo este cruzamento é positivo. Assim, $J^+(\alpha) + 2 = J^+(K_1)$ e portanto,

$$J^+(\alpha) = -2.$$

O sinal do triângulo que “nasce” com o cruzamento do ponto triplo é negativo; logo, $St(\alpha) - 1 = St(K_1)$ e assim,

$$St(\alpha) = 1.$$

O número de pontos duplos de α diminui com a ocorrência das auto-tangências inversas, logo os cruzamentos são negativos. Assim, $J^-(\alpha) + 4 = J^-(K_1)$ e portanto,

$$J^-(\alpha) = -4.$$

2.3.2 Propriedades dos Invariantes de Arnold

Nesta subsecção vamos definir a soma conexa de curvas planas, propriedade esta que os invariantes J^+ , J^- e St possuem. Esta propriedade facilita o cálculo dos invariantes de uma dada curva plana fechada Γ , pois se decompomos Γ em curvas menores, digamos $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$, de forma que possamos obter Γ como soma conexa de $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$, uma vez conhecidos os invariantes de $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$, podemos obter o invariante de Γ através da soma destes invariantes.

Definição 2.18 *Dadas duas curvas planas fechadas α e β , imersas em semi-planos distintos, a **soma conexa de α e β** é uma nova curva obtida ao se conectar as duas curvas originais através de dois arcos paralelos (pontes), como segue: removemos um intervalo pequeno de cada curva e unimos as curvas pela ponte de tal modo que a curva resultante está conectada e terá uma orientação global que concorda com as orientações iniciais das duas curvas planas.*

Notação: $\alpha \# \beta$

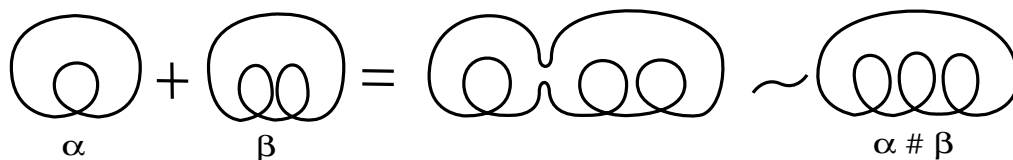


Figura 2.26: Exemplo da soma conexa de duas curvas planas.

A soma conexa não é uma operação na classe de imersões, não podemos somar certos pares de imersões, como por exemplo um par de círculos com orientações opostas (veja figura 2.27).

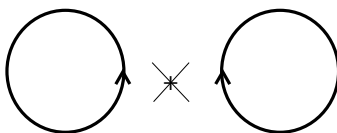


Figura 2.27: Exemplo onde não é possível a soma conexa.

Nos exemplos onde uma ponte conectante existe, a classe da soma resultante depende da escolha da ponte (veja figura 2.28).

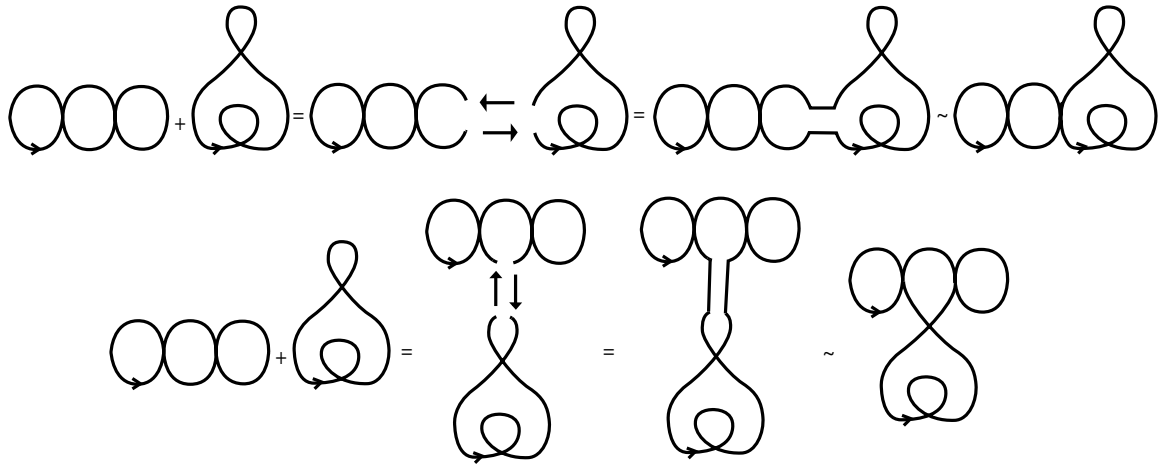


Figura 2.28: A classe da soma conexa depende da escolha da ponte de conexão.

Observação 2.19 A primeira soma da figura 2.28, que é adquirida embutindo uma ponte horizontal conectando as curvas, tem índice 1. A segunda soma, que é adquirida embutindo uma ponte vertical conectando as curvas, tem índice 3.

Teorema 2.20 O invariante St é aditivo sob a soma conexa de imersões.

Demonstração:

Primeiro daremos a prova deste teorema para a soma conexa de duas curvas básicas. Depois, observando que dadas duas curvas planas fechadas α e β , podemos sempre encontrar um caminho genérico entre α e uma curva básica de mesmo índice que α e um caminho genérico entre β e uma curva básica de mesmo índice que β , vamos combinar estes caminhos e usar o fato de que o incremento de St ao longo do novo caminho se iguala à soma de seus incrementos ao longo dos caminhos anteriores. Dessa forma, a prova do teorema para quaisquer duas curvas seguirá da prova dada para as curvas básicas.

1º Caso: Soma conexa de duas curvas básicas de índice $i > 0$:

Tomemos representantes canônicos de cada classe de imersões de índice i , orientando as curvas no sentido positivo (a curva da figura oito com ambas as orientações pertencem à mesma classe). Observemos que para $i, j > 0$, temos: $K_i + K_j = K_{i+j-1}$, $St(K_i) = i - 1$, $St(K_j) = j - 1$ e $St(K_{i+j-1}) = (i + j - 1) - 1$. Logo,

$$\begin{aligned}
 St(K_i + K_j) &= St(K_{i+j-1}) \\
 &= (i + j - 1) - 1 \\
 &= (i - 1) + (j - 1) \\
 &= St(K_i) + St(K_j).
 \end{aligned}$$

Assim, St é aditivo para as imersões canônicas de índices positivos $i > 0$, $j > 0$.

2º Caso: Soma conexa de um curva básica de índice $i > 0$ com a curva de figura oito:

Para uma prova por cálculo direto de que St é aditivo para a soma com a curva de figura oito (isto é, com a curva básica K_0) usamos o fato de que a cadeia de perestroikas mostrada na figura 2.29 faz St diminuir por 1, estes laços com orientações opostas sempre aparecem na soma de uma curva básica K_i , $i > 0$, com a curva básica K_0 .

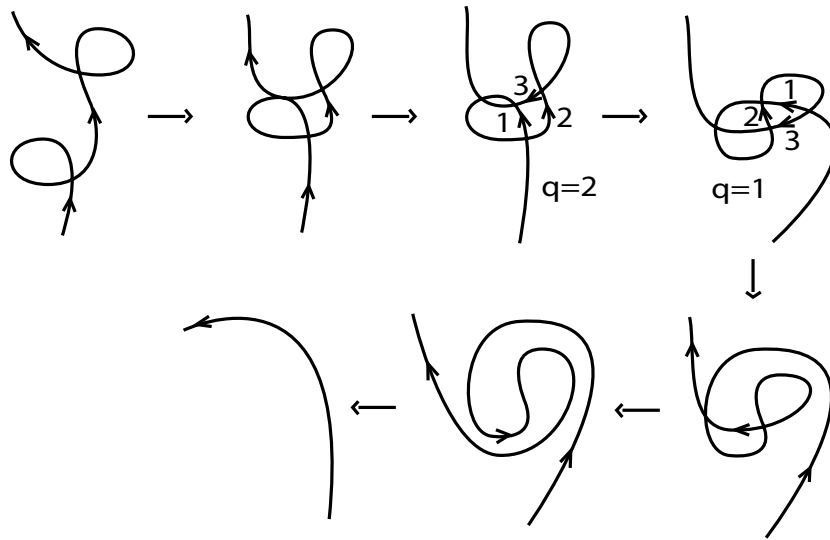


Figura 2.29: Aniquilação de laços com orientações opostas.

Notemos que ao movimentar a soma $K_i + K_0$, $i > 0$, como na figura 2.29, obtemos a curva K_{i-1} .

Assim, $St(K_i + K_0) = St(K_{i-1}) + 1 = (i-1) - 1 + 1 = i-1$ e, como $St(K_i) + St(K_0) = (i-1) + 0 = i-1$, vemos que:

$$St(K_i + K_0) = St(K_i) + St(K_0).$$

3º Caso: Soma conexa de duas curvas básicas K_0 :

No caso da soma conexa de duas curvas básicas K_0 , a conhecida figura oito, vemos, como ilustrado nas figuras abaixo, que a sequência de perestroikas não apresenta pontos triplos; logo, $St(K_0 + K_0) = St(K_1) = 0$.

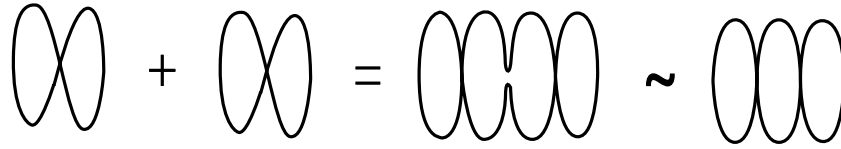


Figura 2.30: Soma conexa de duas curvas básicas K_0 .

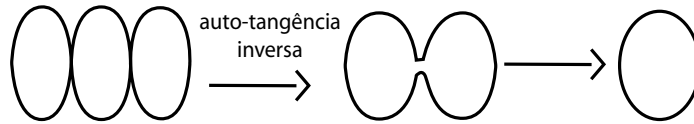


Figura 2.31: Sequência de perestroikas.

Como $St(K_0)$ também vale zero, segue que St também é aditivo neste caso:

$$St(K_0 + K_0) = 0 = 0 + 0 = St(K_0) + St(K_0).$$

4º Caso: Soma conexa de duas imersões genéricas quaisquer de um círculo:

Agora consideremos a soma $X + Y$ de quaisquer duas imersões genéricas de um círculo. Conectamos a curva à esquerda X com uma curva básica L de mesmo índice por um caminho genérico no espaço de imersões. De modo análogo, conectamos a curva à direita Y com uma curva básica R de mesmo índice no semi-plano direito. Combinando ambos os caminhos, obtemos um caminho genérico que conecta $X + Y$ com $L + R$.

O incremento de St ao longo deste caminho se iguala à soma de seus incrementos ao longo dos caminhos à esquerda e à direita.

De fato, nem as orientações dos triângulos desaparecendo nem as ordenações cíclicas de seus lados mudam sob a adição. Logo os sinais dos cruzamentos de pontos triplos das curvas à esquerda e à direita não mudam.

Além destes pontos, o novo caminho cruza pontos triplos enquanto os pontos duplos da curva à esquerda ou à direita se movem cruzando a ponte de ligação entre as curvas. Estes cruzamentos acontecem em pares de sinais opostos e não contribuem ao incremento de St já que os triângulos desaparecendo correspondentes diferem pela direção de um dos lados.

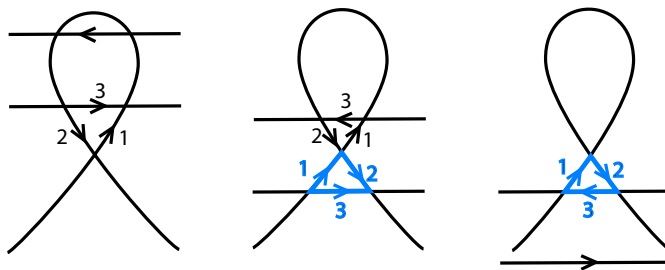


Figura 2.32: Ponto duplo cruzando a ponte de conexão entre duas curvas.

Como $St(X) = St(L) + \Delta(X)$ e $St(Y) = St(R) + \Delta(Y)$, temos:

$$\Delta(X+Y) = St(X+Y) - St(L+R) = St(X) - St(L) + St(Y) - St(R) = \Delta(X) + \Delta(Y).$$

Assim a aditividade para a soma conexa de quaisquer duas curvas segue da aditividade para a adição das curvas especiais L e R , pois como $St(L+R) = St(L) - St(R)$, temos:

$$St(X+Y) = St(L+R) + \Delta(X+Y) = St(L) + St(R) + \Delta(X) + \Delta(Y) = St(X) + St(Y).$$

□

Definição 2.21 Dadas duas imersões de um círculo no plano α e β (uma no semi-plano à esquerda, outra no semi-plano à direita), a **soma estranha de α e β** é definida pela imersão de um segmento que as une de tal forma que as imersões co-orientam o segmento imerso de modo diferente nos pontos da extremidade.

A figura 2.33 ilustra uma soma estranha de imersões.

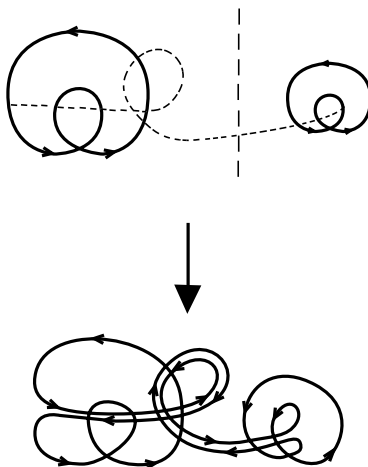


Figura 2.33: Soma estranha de duas imersões.

Teorema 2.22 *O invariante St é aditivo sob a soma estranha de imersões.*

Demonstração:

A soma estranha pode ser reduzida à conexa se primeiro prolongamos um “rabo” de cada curva na direção da outra (veja figura 2.34). Estes prolongamentos podem ser feitos sem introduzir pontos triplos; portanto não altera o valor de St . Assim, a soma estranha para St segue da soma conexa.

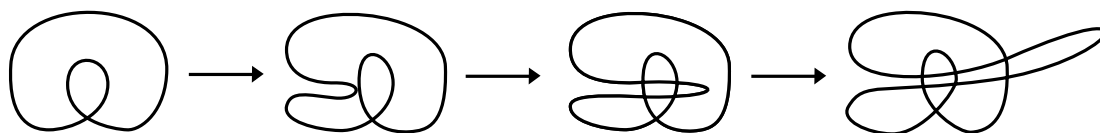


Figura 2.34: Prolongando um “rabo” em uma curva.

□

2.3.3 Teoremas de Arnold de Existência e Unicidade dos Invariantes de Curvas Planas

Agora que estabelecemos o conceito de soma conexa, nesta subseção, vamos apresentar os resultados que fornecem as definições axiomáticas dos três invariantes básicos de Arnold formalmente, antes porém vamos introduzir mais uma definição.

Definição 2.23 *Um invariante local é uma função constante sobre cada uma das componentes do discriminante. Local significa que o seu incremento no âmbito de um cruzamento genérico do discriminante depende apenas do comportamento da família de imersões nas vizinhanças dos pontos da pré-imagem do círculo enviados aos pontos envolvidos na singularidade.*

Os resultados apresentados nesta subseção foram dados por Arnold em [Ar2] e estabelecem a definição axiomática dos invariantes J^+ , J^- e St , cujas demonstrações encontram-se no referido artigo, aqui são apresentados os teoremas de existência e unicidade a fim de dar consistência à utilização destes invariantes.

Teorema 2.24 (Teorema de Arnold para o invariante St) *Existe exatamente um invariante, St , de imersões do círculo no plano sem pontos triplos que satisfaz os seguintes axiomas:*

- (i) *É local (o salto só depende do comportamento do ponto triplo).*

- (ii) *É aditivo sob a soma conexa.*
- (iii) *Tem orientação independente (independente da orientação de S^1 ou da orientação de \mathbb{R}^2).*

As propriedades (i) – (iii) determinam o invariante unicamente a menos de constante multiplicativa, que é fixada pela condição

$$(iv) \text{St}(K_2) = 1.$$

Podemos definir J^+ e J^- de forma análoga.

Teorema 2.25 (Teorema de Arnold para os invariantes J^+ e J^-) *Existe exatamente um invariante, J^+ (J^-), de imersões do círculo no plano sem auto-tangência direta (inversa) com as seguintes propriedades:*

- (i) *É local (usando a definição de invariante local pertinente para cruzamentos da hiper-superfície discriminante de auto-tangência direta (inversa); o salto depende somente do comportamento perto do ponto de auto-tangência).*
- (ii) *É aditivo sob a soma conexa.*
- (iii) *Tem orientação independente (independente da orientação de S^1 ou da orientação de \mathbb{R}^2).*

Estas condições definem o invariante unicamente a menos de constante multiplicativa, que vamos fixar pela condição

$$(iv) J^+(K_2) = -2 \quad (J^-(K_0) = -1).$$

Observação 2.26 *A constante multiplicativa (item (iv) do teorema anterior) foi escolhida de tal modo que um cruzamento do discriminante de auto-tangência direta J^+ aumenta pelo mesmo número com que aumenta o número n de pontos duplos, enquanto o cruzamento do discriminante de auto-tangência inversa J^- aumenta pelo oposto do incremento de n . Estas escolhas implicam no seguinte resultado:*

Corolário 2.27 $J^+ - J^- = n$.

Para provar que os invariantes J^+ e J^- também são aditivos com relação à soma conexa, vamos introduzir novos invariantes, denotados por I^\pm , e escrever os invariantes J^\pm como combinação dos invariantes aditivos St e I^\pm : estes invariantes I^\pm dependem dos índices de pontos duplos, ambos serão estabelecidos a continuação.

Dada uma curva plana genérica, escolhamos um representante desta curva de tal modo que todo cruzamento de pontos duplos seja ortogonal, escolhamos também a ordenação das direções dos ramos de partida “(1, 2)” em cada ponto duplo de maneira que os ramos orientem o plano positivamente (veja figura 2.35).

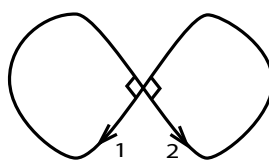


Figura 2.35: Ramos ortogonais de uma curva orientando o plano positivamente.

Definição 2.28 O *semi-índice* i_1 (respectivamente i_2) de um ponto duplo é o ângulo de rotação do raio-vetor que conecta este ponto duplo a um ponto que se move ao longo do ramo 1 (respectivamente i_2) até o próprio ponto duplo, dividido por $\frac{\pi}{2}$. O *índice do ponto duplo* é a diferença $i = i_1 - i_2$.

Exemplo:

Consideremos a curva da figura 2.36:

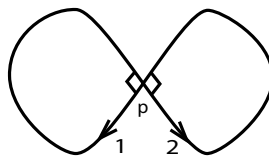


Figura 2.36: Índice do ponto duplo.

Temos:

$$1. \ i_1(p) = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\pi} = -1.$$

$$2. \ i_2(p) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\pi} = 1.$$

Logo, $i(p) = -2$.

Observação 2.29 *O índice do ponto duplo não depende das orientações da curva e do plano.*

Definição 2.30 *Os invariantes I^\pm são definidos pelas somas dos índices e de todos os n pontos duplos, isto é,*

$$I^\pm = \frac{\sum i \pm 2n}{4}.$$

Teorema 2.31 *Os invariantes J^\pm estão relacionados a I^\pm pela fórmula*

$$J^\pm = I^\pm - 3St.$$

Precisamos de mais alguns resultados antes de podermos demonstrar este teorema.

Lema 2.32 *Sejam A e B dois pontos duplos obtidos do cruzamento de uma auto-tangência direta, então:*

$$i(A) + i(B) = 4.$$

Demonstração:

Primeiro vamos calcular a soma para um exemplo (figura 2.37).

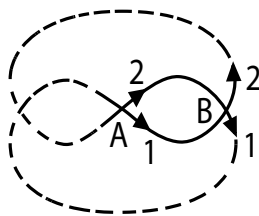


Figura 2.37: Índices de pontos duplos sob a perestroika de auto-tangência direta.

Para a curva da figura 2.37 temos:

1. $i_1(A) = 3$ e $i_2(A) = -3$.
2. $i_1(B) = -1$ e $i_2(B) = 1$.

Logo, $i(A) = 6$ e $i(B) = -2$. Portanto, $i(A) + i(B) = 4$.

O caso geral é redutível a figura 2.37. De fato, qualquer outro exemplo de curvas com auto-tangência direta difere deste apenas fora da vizinhança dos pontos recém-nascidos. A substituição de quaisquer dos ramos da curva fora desta vizinhança pode ser considerada como soma de uma curva fechada que não intersecta a vizinhança neste ramo.

Tal adição ou muda os semi-índices, aumentando-os de múltiplos de 4, (como vemos no exemplo da figura 2.38) ou os índices dos pontos duplos A e B são iguais, já que a curva somada não intersecta a vizinhança (como no exemplo da figura 2.39). No caso em que os semi-índices sofrem alteração, vemos que as ordenações dos ramos até A e até B são opostas, e o incremento de $i_1(A)$ acontece junto com um incremento igual de $i_2(B)$ (analogamente para $i_2(A)$ e $i_1(B)$). Assim o incremento da soma

$$i(A) + i(B) = i_1(A) - i_2(B) + i_1(B) - i_2(A)$$

desaparece sob a adição da curva fechada.

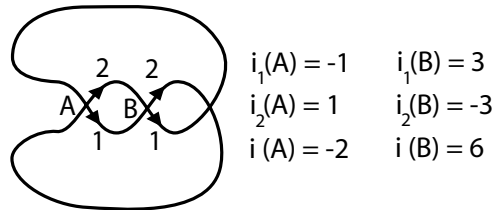


Figura 2.38: Exemplo onde os semi-índices mudam.

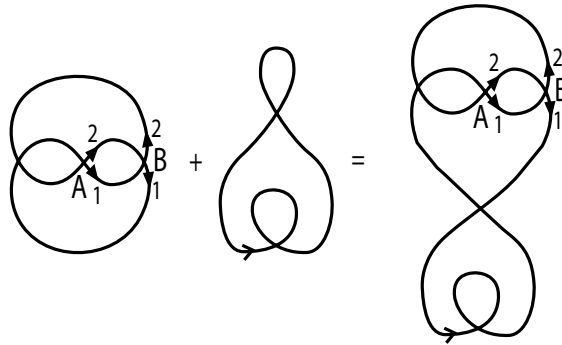


Figura 2.39: Exemplo onde os índices não mudam.

□

Lema 2.33 *Sejam A e B dois pontos duplos obtidos do cruzamento de uma auto-tangência inversa, então:*

$$i(A) + i(B) = -4.$$

Demonstração:

Um exemplo particular é mostrado na figura 2.40.

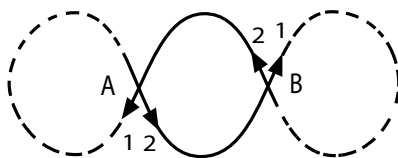


Figura 2.40: Índices de pontos duplos sob a perestroika de auto-tangência inversa.

Para a curva da figura 2.40 temos:

1. $i_1(A) = -1$ e $i_2(A) = 1$.
2. $i_1(B) = -1$ e $i_2(B) = 1$.

Logo, $i(A) = -2$ e $i(B) = -2$. Portanto, $i(A) + i(B) = -4$.

O lema para o caso geral segue da figura 2.40. De fato, qualquer outro exemplo de curvas com auto-tangência inversa difere deste apenas fora da vizinhança dos pontos recém-nascidos. A substituição de quaisquer dos ramos da curva fora desta vizinhança pode ser considerada como soma de uma curva fechada que não intersecta a vizinhança neste ramo.

Tal adição ou muda os semi-índices, aumentando-os de múltiplos de 4, (como vemos no exemplo da figura 2.41) ou os índices dos pontos duplos A e B são iguais, já que a curva somada não intersecta a vizinhança (como no exemplo da figura 2.42). No caso em que os semi-índices sofrem alteração, vemos que as ordenações dos ramos até A e até B são opostas, e o incremento de $i_1(A)$ acontece junto com um incremento igual de $i_2(B)$ (analogamente para $i_2(A)$ e $i_1(B)$). Assim o incremento da soma

$$i(A) + i(B) = i_1(A) - i_2(B) + i_1(B) - i_2(A)$$

desaparece sob a adição da curva fechada.

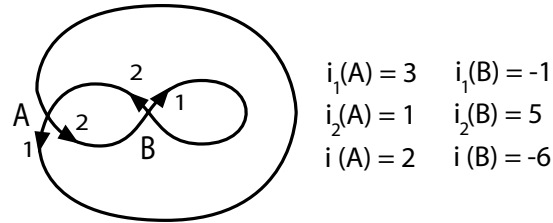


Figura 2.41: Exemplo onde os semi-índices mudam.

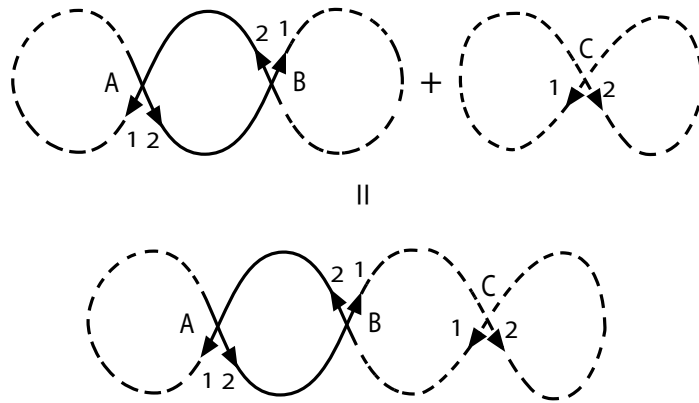


Figura 2.42: Exemplo onde os índices não mudam.

□

Lema 2.34 *O índice de cada um dos três vértices do triângulo desaparecendo cresce (decresce) por 4 sob um cruzamento positivo (negativo) de um ponto triplo.*

Demonstração:

Podemos fixar dois dos três ramos da curva que dão origem ao ponto triplo e mover o terceiro. Sejam A_1 e A_2 os ramos fixados e que deixam fixo o ponto de interseção A ao longo do ramos “(1, 2)” que orientam o plano positivamente. Podemos também tomar estes ramos de modo que a terceira visita do ponto triplo ocorra em um deles.

A rotação do raio-vetor mudará um dos ramos “(1, 2)” de cada ponto duplo quando a curva cruzar o ponto triplo. Esta mudança ocorrerá quando o raio-vetor atravessar o ramo que contém a terceira visita. O incremento do ângulo de rotação será $\pm 2\pi$. Este será positivo se, depois do cruzamento, o terceiro ramo definir uma ordenação “(3, 4)” (onde 3 é o raio-vetor de A para um ponto do terceiro ramo e 4 é o vetor velocidade do terceiro ramo) orientando o plano positivamente. Caso contrário, o incremento será negativo.

O incremento do argumento dividido por $\frac{\pi}{2}$ é igual ao incremento do índice do ponto A , com sinal positivo se o terceiro ponto de visita pertence ao ramo A_1 (partindo de A na direção 1).

Existem quatro possibilidades para ocorrer os triângulos desaparecendo (para as quais os incrementos do argumento ao longo do ramo e do índice do ponto A são ambos positivos). Eles são mostrados nas figuras 2.43, 2.44, 2.45 e 2.46. Observamos que estes quatro triângulos desaparecendo são positivos.

O caso da terceira visita no ramo 2 pode ser considerado de modo semelhante. Mas podemos evitar isto, pois J^+ e i não dependem das orientações.

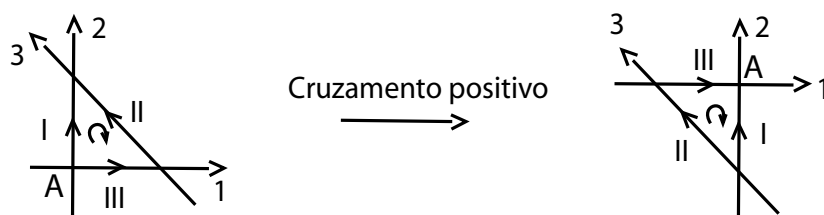


Figura 2.43: Cruzamento positivo de um ponto triplo.

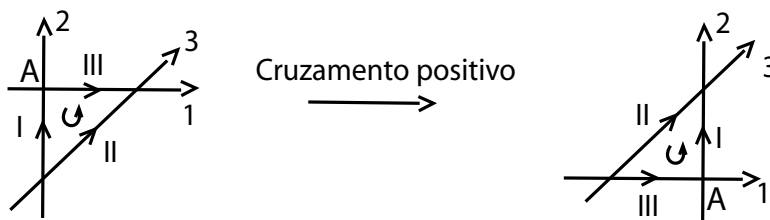


Figura 2.44: Cruzamento positivo de um ponto triplo.

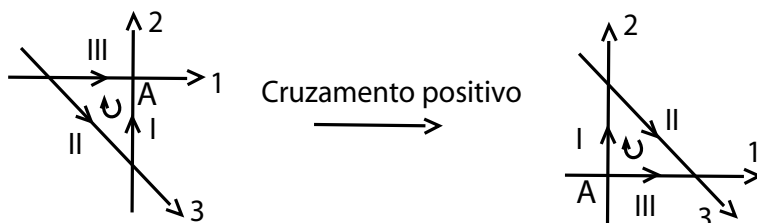


Figura 2.45: Cruzamento positivo de um ponto triplo.



Figura 2.46: Cruzamento positivo de um ponto triplo.

□

Para um melhor entendimento, vejamos um exemplo.

Exemplo:

Consideremos o cruzamento de ponto triplo exposto na figura 2.47:

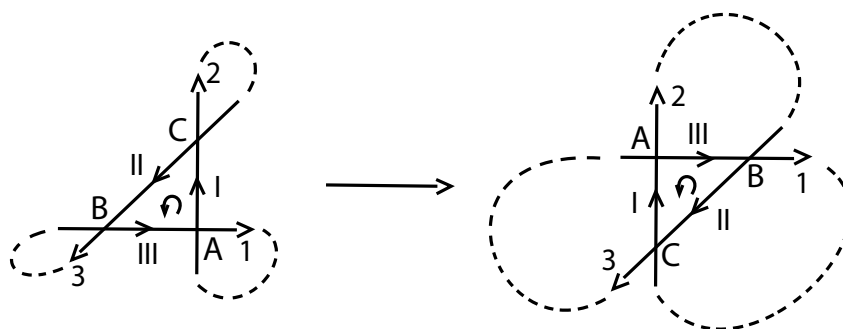


Figura 2.47: Cruzamento positivo de um ponto triplo.

Observemos que os ramos fixados neste cruzamento deixam fixo o ponto A e que o terceiro momento de visita do ponto triplo ocorre no ramo 1.

Os semi-índices dos pontos duplos da curva antes do cruzamento são:

1. $i_1(A) = -1$ e $i_2(A) = 1$.
2. $i_1(B) = -1$ e $i_2(B) = 1$.
3. $i_1(C) = -1$ e $i_2(C) = 1$.

Com o cruzamento do ponto triplo, estes semi-índices se tornam:

1. $i_1(A) = -1$ e $i_2(A) = -3$.
2. $i_1(B) = -1$ e $i_2(B) = -3$.
3. $i_1(C) = -1$ e $i_2(C) = -3$.

Notemos que os semi-índices que mudam com o cruzamento do ponto triplo são exatamente aqueles cujo raio-vetor atravessa o ramo que contém a terceira visita e o incremento da rotação é -2π . O sinal deste incremento também confere com o fato de que a ordenação “(3, 4)” orienta o plano negativamente.

Com os valores dos semi-índices calculados, chegamos aos seguintes índices para os pontos duplos:

1. Antes do cruzamento: $i(A) = i(B) = i(C) = -2$.
2. Depois do cruzamento: $i(A) = i(B) = i(C) = 2$.

Como a terceira visita do ponto triplo ocorre no ramo 1, o incremento da rotação do raio-vetor é igual ao incremento do índice do ponto A , porém com sinal positivo.

Com base nos lemas 2.32, 2.33 e 2.34, podemos demonstrar o teorema 2.31.

Demonstração do teorema 2.31:

Para as curvas básicas K_i da figura 2.5 isto pode ser checado diretamente.

Por exemplo, sabemos que $St(K_0) = 0$ e $St(K_2) = 1$. Na figura 2.48, vemos que $I^+(K_0) = 0$, $I^-(K_0) = -1$, $I^+(K_2) = 1$ e $I^-(K_2) = 0$. Logo, obtemos $J^+(K_0) = I^+(K_0) - 3St(K_0) = 0$, $J^-(K_0) = I^-(K_0) - 3St(K_0) = -1$, $J^+(K_2) = I^+(K_2) - 3St(K_2) = -2$ e $J^-(K_2) = I^-(K_2) - 3St(K_2) = -3$, como na normalização dada por Arnold.

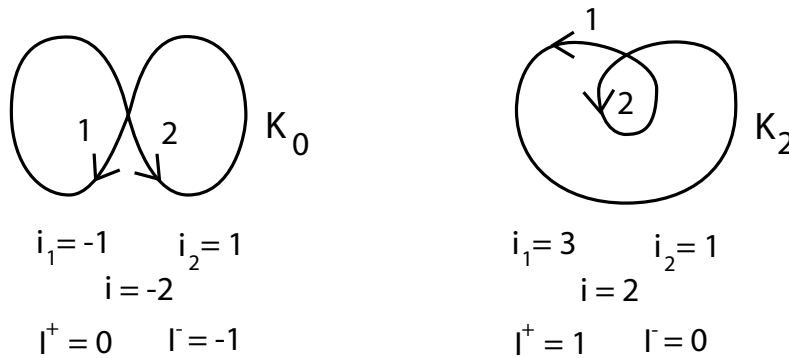


Figura 2.48: Semi-índices e índices de pontos duplos.

Notemos que, como a curva K_1 não apresenta pontos duplos, os índices $I^+(K_1)$ e $I^-(K_1)$ são ambos iguais a zero. Além disso, $St(K_1) = 0$. Logo, o teorema é válido para esta curva básica.

Podemos generalizar o resultado para qualquer curva básica K_{i+1} , $i > 0$, observando a figura 2.49:

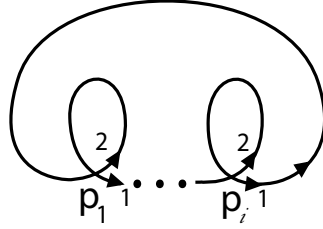


Figura 2.49: Generalização para as curvas básicas K_{i+1} , $i > 0$.

Notemos que $i_1(p_j) = 3$ e $i_2(p_j) = 1$, para cada $j = 1, \dots, i$. Logo, $i(p_j) = 2$, para cada $j = 1, \dots, i$.

Assim, $I^+(K_{i+1}) = i$ e $I^-(K_{i+1}) = 0$.

Portanto,

$$J^+(k_{i+1}) = I^+(K_{i+1}) - 3St(k_{i+1}) = i - 3i = -2i,$$

$$J^-(k_{i+1}) = I^-(K_{i+1}) - 3St(k_{i+1}) = 0 - 3i = -3i,$$

como determinado por Arnold na normalização que pode ser vista em 2.3.1.

Como para qualquer curva plana fechada α é possível encontrar um caminho genérico para uma curva básica de mesmo índice de Whitney I_w e como o valor dos invariantes J^\pm e St para a curva α são dados pelo valor da normalização sobre a curva básica de mesmo índice, acrescidos dos incrementos correspondentes à transição do caminho genérico entre as curvas, é suficiente verificar o que acontece com os incrementos de I^\pm sob perestroikas elementares.

Auto-tangência direta: Consideremos o cruzamento de uma auto-tangência direta que gera dois pontos duplos A e B . Queremos provar que o valor de I^+ aumenta por 2 e o valor de I^- não muda.

Se antes do cruzamento a soma dos índices dos pontos duplos era $\sum i$ e o número de pontos duplos era n , agora estes valores são, respectivamente, $\sum i + 4$ e $n + 2$, pelo lema 2.32. Portanto, se chamamos I_v^\pm o invariante I^\pm antes do cruzamento e I_n^\pm o invariante I^\pm depois do cruzamento, temos:

$$I_n^+ = \frac{\sum i + 4 + 2(n + 2)}{4} = I_v^+ + 2,$$

$$I_n^- = \frac{\sum i + 4 - 2(n + 2)}{4} = I_v^-.$$

Auto-tangência inversa: Consideremos o cruzamento de uma auto-tangência inversa que gera dois pontos duplos A e B . Queremos provar que o valor de I^- aumenta por -2 e o valor de I^+ não muda.

Se antes do cruzamento a soma dos índices dos pontos duplos era $\sum i$ e o número de pontos duplos era n , agora estes valores são, respectivamente, $\sum i - 4$ e $n + 2$, pelo lema 2.33. Portanto, se chamamos I_v^\pm o invariante I^\pm antes do cruzamento e I_n^\pm o invariante I^\pm depois do cruzamento, temos:

$$I_n^+ = \frac{\sum i - 4 + 2(n + 2)}{4} = I_v^+,$$

$$I_n^- = \frac{\sum i - 4 - 2(n + 2)}{4} = I_v^- - 2.$$

Ponto triplo: O número n de pontos duplos não muda sob um cruzamento de um ponto triplo. Pelo lema 2.34, o índice de cada um dos três vértices do triângulo desaparecendo aumenta (diminui) por 4 sob um cruzamento positivo (negativo) de um ponto triplo. O incremento de St ao longo deste mesmo cruzamento é $+1$ (-1).

Se antes do cruzamento a soma dos índices dos pontos duplos era $\sum i$ e o número de pontos duplos era n , agora estes valores são, respectivamente, $\sum i + 3 \cdot (\pm 4)$ e n . Portanto, se chamamos I_v^\pm o invariante I^\pm antes do cruzamento e I_n^\pm o invariante I^\pm depois do cruzamento, temos:

$$I_n^+ = \frac{\sum i + 3 \cdot (\pm 4) + 2n}{4} = I_v^+ \pm 3,$$

$$I_n^- = \frac{\sum i + 3 \cdot (\pm 4) - 2n}{4} = I_v^- \pm 3.$$

Assim, as quantidades $I^\pm - 3St$ e J^\pm se comportam do mesmo modo sob todas as três perestroikas elementares. Como seus valores nas curvas básicas K_i coincidem, o teorema está provado.

□

Corolário 2.35 *Os invariantes J^\pm são aditivos com respeito à soma conexa ordinária de imersões.*

Demonstração:

Os invariantes St e n (número de pontos duplos) são aditivos. Resta apenas mostrar a aditividade da soma dos índices dos pontos duplos.

Os pontos duplos da soma são exatamente os pontos duplos da curva à esquerda e da curva à direita. A adição preserva qualquer semi-índice de qualquer ponto duplo da curva à esquerda (direita), pois a parte somada da curva pode ser contraída no semi-plano direito (esquerdo) para o final do segmento de conexão. Portanto, os invariantes I^\pm são aditivos.

Assim, resulta que J^\pm também são aditivos com respeito à soma conexa ordinária de imersões.

□

2.3.4 Cálculo de St através da função de Whitney

O cálculo do invariante St é bastante simplificado pelo seguinte método: podemos controlar o incremento de St quando um fragmento de uma curva é empurrado, como mostrado na figura 2.50.

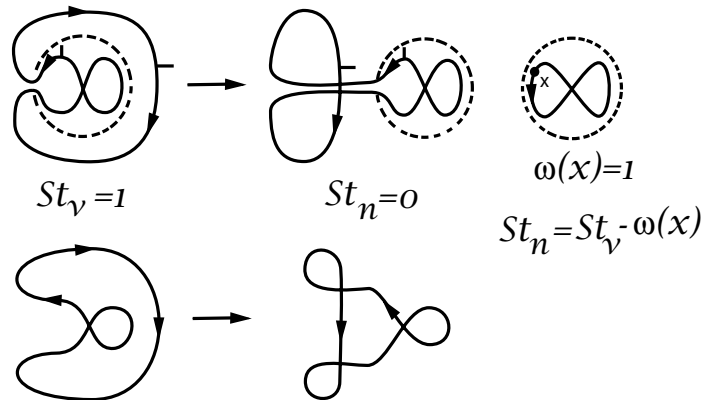


Figura 2.50: Cálculo do invariante St de uma curva após empurrão de um fragmento.

O fragmento cercado pela linha colidida na figura 2.50 é uma curva fechada imersa arbitrária, equipada com um “rabo” que consiste em dois segmentos paralelos ligando o segmento da curva fechada à curva principal. Supomos que o rabo não intersecta o fragmento em pontos diferentes destes locais de conexão.

Definição 2.36 *Seja x imagem de uma imersão do círculo orientado no plano orientado, dizemos que um ponto duplo p da imersão é **positivo** (**negativo**) com respeito a x se o referencial “(1, 2)” formado pelos vetores velocidade da primeira e da segunda visita do ponto pela curva orienta o plano positivamente (negativamente).*

Notação: $\omega_+(x)$ = número de pontos duplos positivos de uma imersão.
 $\omega_-(x)$ = número de pontos duplos negativos de uma imersão.

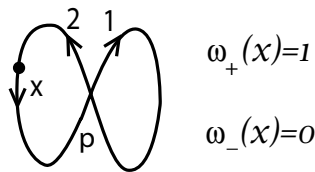


Figura 2.51: Ponto duplo p positivo com respeito a x .

Definição 2.37 *A função de Whitney, da imagem de uma imersão de S^1 em \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} , é a função que associa a cada ponto ordinário x da imersão do círculo a diferença entre os números de pontos duplos da imersão do círculo que são positivos e negativos com respeito a x . Denotando a função de Whitney por $\omega(x)$, temos:*

$$\omega(x) = \omega_+(x) - \omega_-(x).$$

A figura 2.52 ilustra alguns exemplos do cálculo da função de Whitney.

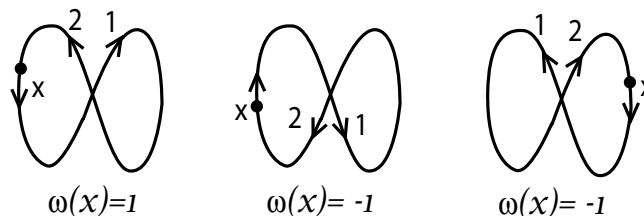


Figura 2.52: Cálculo da função de Whitney.

Teorema 2.38 *O incremento de St sob o empurrão de um fragmento por um intervalo de uma curva principal é igual ao valor da função de Whitney do fragmento no ponto de conexão do rabo, contanto que os ramos (direção de empurrão, direção do intervalo da curva principal) orientem o plano positivamente (se orientarem o plano negativamente, o incremento é $-\omega(x)$).*

Em outras palavras, denotando por St_v o invariante St da curva antes do empurrão de um fragmento e por St_n o invariante St da curva após este empurrão, temos:

$$St_n = St_v \pm \omega(x).$$

Demonstração:

Enquanto empurrarmos o fragmento, cada um de seus pontos duplos contribuirão com ± 1 ao incremento de St . O sinal depende do sinal do triângulo desaparecendo.

A ordenação cíclica dos lados do triângulo desaparecendo é “(1, 2, 3)” : a primeira visita, a segunda visita, a visita do intervalo da curva principal.

O triângulo desaparecendo que nasce no cruzamento do ponto triplo é positivo se, e só se, a orientação “(1, 2)” coincide com a orientação “(3, 4)” onde 3 é a direção do empurrão e 4 a direção do intervalo da curva principal.

Este fato é conferido diretamente por inspeção dos oito possíveis casos (conforme figuras 2.53, 2.54, 2.55 e 2.56). A adição sobre todos os triângulos desaparecendo agora prova o teorema.

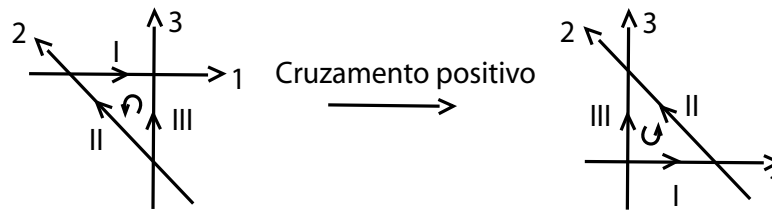


Figura 2.53: Cálculo de St através da função de Whitney.

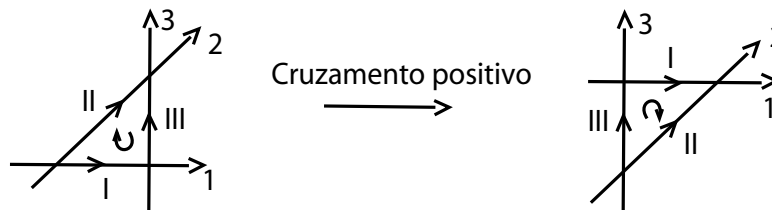


Figura 2.54: Cálculo de St através da função de Whitney.

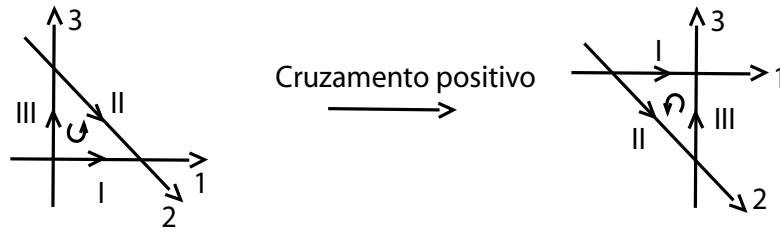


Figura 2.55: Cálculo de St através da função de Whitney.

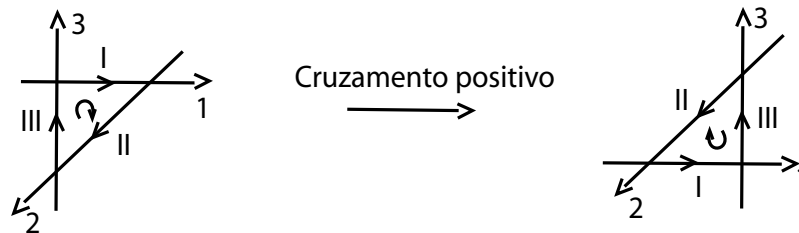


Figura 2.56: Cálculo de St através da função de Whitney.

□

A figura 2.50 ilustra o teorema 2.38.

Observação 2.39 *A orientação canônica do plano pode ser excluída da formulação. Temos que contar os pontos positivos (negativos) da curva definindo a função de Whitney ao mesmo tempo que usamos a orientação do plano definida pela direção do empurrão e pela direção do intervalo da curva principal. Deste modo vemos que o incremento de St independe da escolha da orientação canônica do plano.*

Observação 2.40 *Quando um ponto x se move sobre a curva passando por um ponto duplo p , o valor de $\omega(x)$ é acrescido de ± 2 . Chamaremos este incremento em $\omega(x)$ de salto da função de Whitney.*

A figura 2.59 ilustra o salto da função de Whitney.

Teorema 2.41 *O valor da função de Whitney em um ponto ordinário x de um círculo imerso é*

$$\omega(x) = i(x) - I_w,$$

onde $i(x)$ é o número de meio-voltas do vetor que conecta x a um ponto y movendo ao longo da curva de x para y , e onde I_w é o número de voltas do vetor tangente (índice de Whitney).

Observação 2.42 De modo análogo ao que acontece com a função de Whitney, quando um ponto x se move sobre a curva passando por um ponto duplo p , o valor de $i(x)$ é acrescido de ± 2 . Este incremento em $i(x)$ também será chamado salto.

A figura 2.59 também ilustra o salto de $i(x)$.

Demonstração do teorema 2.40:

Os saltos (± 2) de $\omega(x)$ e $i(x)$ em cada ponto duplo da curva são iguais. Consequentemente, a diferença de $\omega(x)$ e $i(x)$ em cada ponto duplo da curva é um invariante para a curva imersa.

Para as curvas básicas da figura 2.5, o resultado pode ser checado diretamente. Para a curva básica K_0 vista na figura 2.57, temos que $\omega(x) = 1$, $I_w(K_0) = 0$ e $i(x) = 1$. Assim, $\omega(x) = i(x) - I_w(K_0)$.

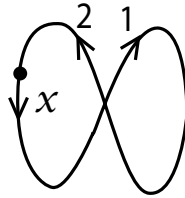


Figura 2.57: Função de Whitney e índices para K_0 .

Como a curva básica K_1 não possui pontos duplos, $\omega(x) = 0$. Além disso, sabemos que orientando a curva no sentido positivo, $I_w(K_1) = 1$ e $i(x) = 1$, para qualquer x . Assim, também é válida a expressão $\omega(x) = i(x) - I_w(K_1)$.

Para as outras curvas da família de curvas básicas, vejamos a figura 2.58:

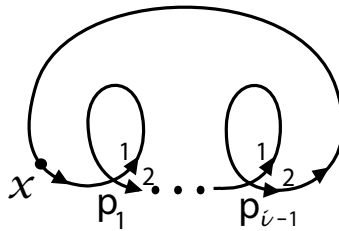


Figura 2.58: Função de Whitney e índices para a curva básica K_i .

Notemos que $\omega(x) = -(i - 1)$, $I_w(K_i) = i$ e $i(x) = 1$. Logo, $\omega(x) = i(x) - I_w(K_i)$.

Sabemos que, em consequência do Teorema de Whitney, dada uma curva plana fechada α qualquer, sempre podemos encontrar um caminho genérico entre esta e a curva básica

de mesmo índice de Whitney. Dessa forma, se mostrarmos que a diferença $\omega(x) - i(x)$ é constante ao longo do espaço das imersões de um determinado índice e igual a este índice, o teorema fica provado. Assim, devemos considerar o que acontece com o invariante $\omega(x) - i(x)$ sob as três perestroikas elementares.

Quando a curva experimenta uma perestroika de auto-tangência direta ou de auto-tangência inversa, nascem dois pontos duplos. Porém, as orientações “(1, 2)” destes pontos são opostas. Dessa forma, $\omega(x)$ não se altera. Como $i(x)$ também não se altera com o nascimento destes novos pontos, o invariante $\omega(x) - i(x)$ é constante sob as perestroikas de auto-tangência direta e auto-tangência inversa.

Quando a curva experimenta o cruzamento de um ponto triplo, o número de pontos duplos não mudam. Conseqüentemente, os valores $\omega(x)$ e $i(x)$ também não mudam. Logo, o invariante $\omega(x) - i(x)$ também é constante sob a perestroika de ponto triplo.

Portanto, como a diferença $\omega(x) - i(x)$ é constante sob as perestroikas elementares e seu valor ao longo espaço das imersões de um determinado índice coincide com o índice da curva básica deste espaço, o teorema está provado. □

A figura 2.59 ilustra estes valores para uma curva com duas auto-interseções.

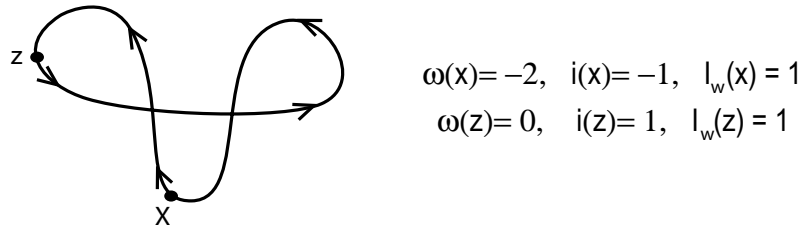


Figura 2.59: Função de Whitney e índices.

Aplicando este teorema aos pontos do contorno exterior, obtemos a seguinte fórmula de Whitney para o índice:

Teorema 2.43 *O índice de um círculo imerso é igual a $\delta + \sum$, onde $\delta = \pm 1$ e \sum é a soma de ± 1 sobre os pontos duplos da curva.*

Se o ponto x pertence ao contorno exterior, $i(x) = \pm 1$. O sinal dependerá da orientação da curva. Assim, tomando $\delta = i(x)$ e $\sum = -\omega(x)$, chegamos à fórmula $I_w = \delta + \sum$.

A figura 2.60 ilustra o cálculo do índice das curvas básicas K_0 e K_2 .

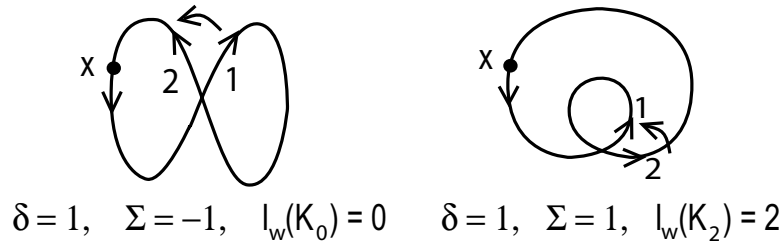


Figura 2.60: Cálculo do índice pela soma de pontos duplos.

Corolário 2.44 *O módulo do índice de uma curva plana fechada com n pontos de auto-interseção é no máximo $n + 1$, ou seja,*

$$|I_w| \leq n + 1.$$

Demonstração:

Sabemos que $I_w = i(x) - \omega(x) = \delta + \Sigma$, onde $\delta = \pm 1$ e Σ é a soma de ± 1 sobre cada ponto duplo. Assim, $\max\{\delta\} = 1$, $\min\{\delta\} = -1$, $\max\{\Sigma\} = n$ e $\min\{\Sigma\} = -n$.

Logo, $-1 - n \leq I_w \leq 1 + n$, o que implica:

$$|I_w| \leq n + 1.$$

□

2.3.5 Diagrama de Gauss e Árvore de Raiz

O objetivo desta subseção é introduzir as curvas extremais e mostrar que o invariante St destas curvas pode ser facilmente calculado em termos de sua árvore de raiz. Antes de mostrarmos este resultado precisamos de algumas definições.

Definição 2.45 *Uma curva plana fechada com n pontos duplos é dita **extremal** se o valor absoluto de seu índice de Whitney I_w assume o valor máximo possível $|I_w| = n + 1$.*

A figura 2.61 ilustra curvas extremais com quatro pontos duplos.

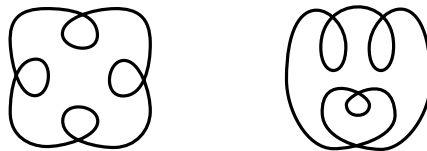


Figura 2.61: Curvas extremais com 4 pontos duplos.

Definição 2.46 Dada uma imersão genérica do círculo no plano, o seu **diagrama de Gauss** é o sistema de cordas do círculo imerso, conectando os pontos levados pela imersão ao mesmo ponto duplo da curva imersa.

A figura 2.62 ilustra o diagrama de Gauss de duas curvas extremais.

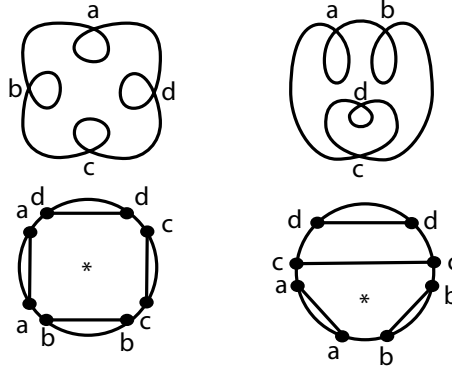


Figura 2.62: Curvas extremais e seus respectivos diagramas de Gauss.

Definição 2.47 Uma imersão do círculo no plano cujo diagrama de Gauss consiste de cordas que não se intersectam é chamada **curva arborescente** ou **do tipo árvore**. Em outras palavras, uma curva é arborescente se quaisquer de seus pontos duplos subdividí-la em dois laços disjuntos.

As curvas da figura 2.61 são curvas arborescentes.

Lema 2.48 O diagrama de Gauss de uma imersão extremal é planar (consiste em cordas que não se intersectam). Em outras palavras, os dois laços nos quais um ponto duplo parte uma curva extremal não intersecta os outros pontos.

Demonstração:

A diferenciabilidade de um círculo imerso em um ponto duplo transforma a curva em dois ramos imersos. O índices e os números de pontos duplos da curva inicial e dos dois ramos estão relacionados pelas seguintes equações:

$$I_w = I_{w_1} + I_{w_2}, \quad n = 1 + n_1 + n_2 + n_{12}.$$

Como a curva é extremal, $I_w = n + 1 = 2 + n_1 + n_2 + n_{12}$. As desigualdades de Whitney $I_{w_k} \leq 1 + n_k$ implicam $I_w = I_{w_1} + I_{w_2} \leq 2 + n_1 + n_2$. Assim, o número n_{12} das interseções dos ramos desaparece.

□

Assim, associamos a cada curva extremal uma decomposição do disco (o diagrama de Gauss). A cada componente limitada do complemento de uma curva extremal corresponde uma componente da decomposição de disco (esta é limitada pelos arcos que são levados à fronteira do complemento da componente pela imersão).

Lema 2.49 *Entre as componentes limitadas do complemento de uma curva extremal no plano exatamente uma componente tem fronteiras comuns com a componente ilimitada.*

Demonstração:

A fórmula de Whitney (teorema 2.43) implica que:

- (i) O contorno exterior de uma curva extremal está bem orientado bem pela imersão.
- (ii) Os laços conectando o contorno exterior aos pontos duplos estão dentro do domínio limitado por este contorno exterior (que limitam um disco topológico).

Estes laços, como vimos, não se intersectam. Assim, o complemento para os domínios limitados por estas voltas no disco anterior é conexo. Isto prova o lema.

□

Entre as partes da decomposição dadas pelo diagrama de Gauss, a que nós distinguimos corresponde à componente limitada do lema acima (os arcos de círculos limitando esta parte são levados ao contorno exterior pela imersão). Dessa forma, à uma curva extremal associamos uma decomposição com uma parte distinguida.

Agora, usando o diagrama de Gauss podemos construir a árvore de uma curva extremal:

Definição 2.50 *Escolhendo um ponto em cada parte da decomposição dada pelo diagrama de Gauss de uma imersão do círculo no plano e conectando estes pontos por arestas quando duas partes estiverem separadas por uma corda comum, obtemos uma **árvore de raiz plana**. Esta consiste de $n + 1$ vértices e n arestas.*

A figura 2.63 ilustra a árvore de raiz de duas curvas extremas.

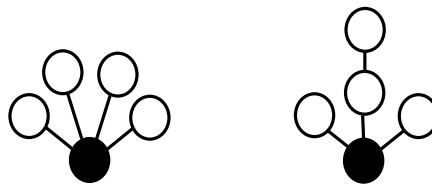


Figura 2.63: Árvore de raiz das curvas extremas da figura 2.61.

Observação 2.51 Cada vértice da árvore de raiz de uma curva extremal corresponde a uma das regiões nas quais a curva subdivide o plano. Os arcos do domínio do disco que contém o vértice são levados pela imersão extremal sobre os arcos que limitam as regiões correspondentes do plano. O vértice que corresponde à componente que distinguimos é a **raiz** da árvore de raiz da curva extremal.

Com base nas definições anteriores, podemos verificar o seguinte resultado:

Teorema 2.52 Existe uma bijeção natural entre:

- (i) o conjunto das classes das curvas extremais de índice $I_w = n + 1$ e n pontos duplos;
- (ii) o conjunto das classes das árvores de raiz com n arestas;
- (iii) o conjunto das classes dos diagramas de Gauss de n cordas sem pontos comuns e uma parte distinguida.

Com a construção da árvore de raiz plana a partir do diagrama de Gauss da curva, obtemos as aplicações necessárias entre as curvas extremais, as árvores de raiz plana e as partições do disco (diagrama de Gauss).

O fato que estas aplicações são bijetivas é provado indutivamente sobre o número n de pontos duplos. Os ramos da árvore codificam os lugares onde os laços devem ser presos ao contorno exterior, e estes laços são eles próprios padrões pela conjectura indutiva, já que eles têm menos pontos duplos.

Definição 2.53 Sejam a um vértice e r a raiz de uma árvore, definimos a **distância** de a a r por:

$$d(a, r) = \begin{cases} 0, & \text{se } a = r, \\ n, & \text{se existem } n \text{ arestas de } a \text{ até } r. \end{cases}$$

Teorema 2.54 O invariante St de uma curva extremal é igual à soma das distâncias dos vértices à raiz da árvore correspondente.

Demonstração:

Provaremos este resultado usando indução sobre número n de pontos duplos.

Vemos diretamente que o resultado é verdadeiro para $n = 1$. De fato, a curva extremal com 1 ponto duplo é a curva básica K_2 . Vemos na figura 2.64 a árvore de raiz desta curva e constatamos o resultado: da normalização dada por Arnold segue que o valor de St para

a curva básica K_2 é 1, valor este encontrado somando-se as distâncias dos vértices à raiz da árvore de raiz de K_2 .

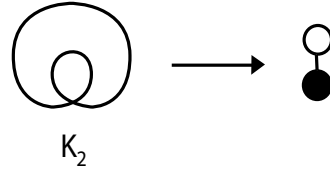


Figura 2.64: Curva extremal K_2 e sua árvore de raiz.

Se o contorno exterior contiver vários pontos duplos, usamos a aditividade (figura 2.65).

$$\text{St} \left(\text{Diagrama com dois pontos duplos e uma linha tracejada} \right) = \text{St} \left(\text{Diagrama com um ponto duplo e uma linha tracejada} \right) + \text{St} \left(\text{Diagrama com dois pontos duplos} \right)$$

Figura 2.65: Cálculo do invariante St para curvas extremais.

Porém, se houver apenas um ponto duplo no contorno exterior, repelimos o laço preso àquele ponto, como mostrado na figura 2.66. A curva resultante é a soma conexa de duas curvas extremais (desde que a orientação “(1, 2)” de todos os pontos duplos seja positiva). Usando a aditividade de St e conhecendo seus valores para as parcelas desta soma, podemos calcular o invariante St da soma.

$$\text{St} \left(\text{Diagrama com um ponto duplo e um laço} \right) = \text{St} \left(\text{Diagrama com um ponto duplo} \right) + \text{St} \left(\text{Diagrama com um ponto duplo} \right) - \omega \left(\text{Diagrama com um ponto duplo} \right)$$

Figura 2.66: Cálculo do invariante St para curvas extremais.

O valor de St para a curva inicial é maior que esta soma. Na verdade, é acrescido do valor $\pm\omega(x)$ da função de Whitney no ponto anexado (teorema 2.38). Este valor, em nosso caso, é igual ao número de pontos duplos do fragmento desde que todas as orientações “(1, 2)” sejam positivas.

Logo, temos uma expressão do valor de St em termos do valor St para a curva principal e para o fragmento e do número de pontos duplos do fragmento ($\pm\omega(x)$).

No nível de árvores, nossa operação é a decomposição da árvore em duas: cortamos um ramo à distância um da raiz e preservamos o vértice em ambos lugares cortados na árvore inicial e no ramo (onde se torna a raiz).

A soma das distâncias dos vértices à raiz decresce sob esta operação pelo número de arestas do ramo que foi cortado, isto é, por $\pm \omega(x)$. Assim, aplicando a hipótese de indução à árvore cortada e ao ramo, obtemos:

$$\begin{aligned} St(\text{curva inicial}) &= St(\text{árvore cortada}) + St(\text{ramo}) \pm \omega(x) \\ &= S(\text{árvore cortada}) + S(\text{ramo}) \pm \omega(x) \\ &= S(\text{árvore inicial}), \end{aligned}$$

onde S quer dizer a soma das distâncias dos vértices à raiz. Portanto, o teorema está provado. □

Corolário 2.55 *O valor do invariante St para curvas extremais com n pontos duplos está entre n e $\frac{n(n+1)}{2}$. As igualdades só são alcançadas para as curvas canônicas A_{n+1} (com árvore $\odot - \cdot - \dots - \cdot$) e K_{n+1} .*

Exemplo: Vejamos um exemplo da aplicação do Teorema 2.54. Consideremos a curva α da figura abaixo e sua árvore de raiz:

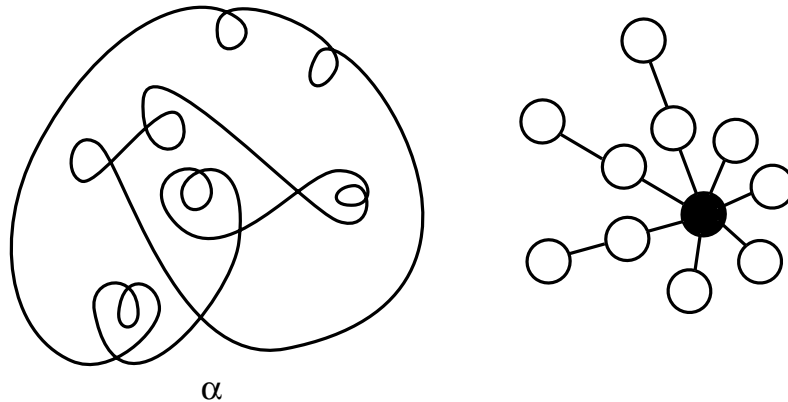


Figura 2.67: Curva α e sua árvore de raiz.

Pelo teorema segue que $St(\alpha) = 13$.

Capítulo 3

Algoritmos para o cálculo dos Invariantes de Arnold

Os invariantes de Arnold suscitaram várias pesquisas tanto no caso de curvas planas e curvas esféricas, como no caso de curvas que são imagens do conjunto singular de aplicações entre superfícies ou de variedades no caso geral; este é o típico caso em que o estudo de um determinado tema produz novos conceitos e resultados.

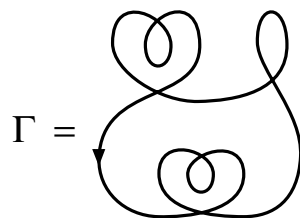
No estudo de curvas podemos citar alguns autores como por exemplo F. Aicardi [Ai1] e [Ai2], Chmutov e Duzhin [Ch-Du], Goryunov [Gor1], Ohmoto [Oh-Ai], Polyak [Po], Shumakovich [Sh], Oleg Viro [Vi], entre outros.

Neste capítulo, baseado no artigo de Chmutov e Duzhin [Ch-Du], apresentamos os algoritmos obtidos por Viro, Shumakovich e Polyak, demonstrando detalhadamente cada uma das fórmulas apresentadas. Não podemos afirmar que estes sejam mais eficientes, no sentido de como calcular, que a forma de cálculo estabelecida por Arnold, mas estudos desta natureza incentivaram outros pesquisadores a buscarem novos invariantes, estudando também o caso de superfícies e 3-variedades.

3.1 Fórmulas de Viro

Oleg Viro, em [Vi], expressou fórmulas para os invariantes J^+ e J^- em termos do índice das componentes de uma curva imersa no plano Γ e da característica de Euler destas componentes. O objetivo desta seção é explicitar estas fórmulas e prová-las; para isso vamos introduzir algumas definições que nos serão necessárias.

No que segue vamos considerar Γ uma curva fechada plana e escolher uma orientação arbitrária para a mesma, para então selecionarmos uma componente conexa C de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ e um ponto $x \in C$.

Figura 3.1: Curva Γ .

Definição 3.1 Dada uma curva Γ com componente conexa C , o *índice de C em relação à curva Γ* , denotado por $\text{ind}_{\Gamma}(C)$, é o número de voltas (no sentido anti-horário) feitas pelo raio-vetor de $x \in C$ a um ponto sobre Γ , deslocando ao longo da curva na direção de sua orientação.

A figura 3.2 ilustra o cálculo do índice de uma componente da curva Γ :

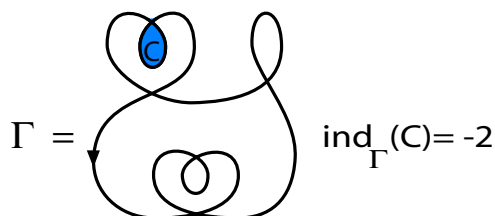


Figura 3.2: Índice de uma componente de uma curva.

Definição 3.2 Dada uma curva Γ com um ponto duplo p , a *suavização de p* é a eliminação do ponto duplo p conectando os pares de arcos incidentes neste ponto respeitando a orientação de Γ .

A figura abaixo ilustra a suavização de um ponto duplo.

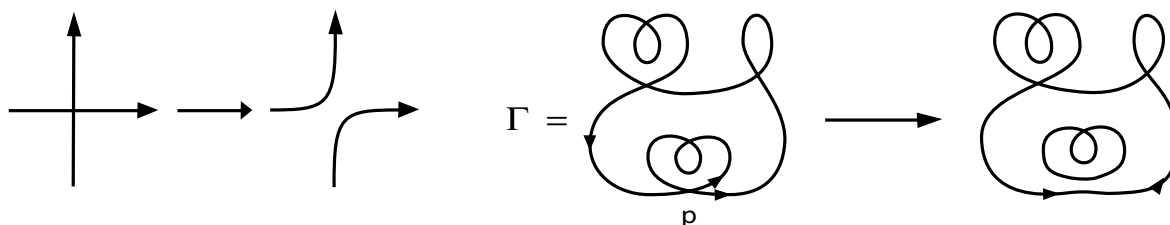


Figura 3.3: Suavização de um ponto duplo.

Seja $\tilde{\Gamma}$ a curva obtida de Γ pela suavização de todos os pontos duplos de Γ . É claro que $\tilde{\Gamma}$ é uma união de círculos. Observemos que cada suavização une duas componentes locais do complemento de Γ com o mesmo índice em uma componente do complemento de $\tilde{\Gamma}$. Desta forma, também podemos pensar em calcular o **índice de uma componente conexa** \tilde{C} de $\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{\Gamma}$, que vamos denotar por $ind_{\tilde{\Gamma}}(\tilde{C})$.

Agora que estabelecemos os conceitos de índice da componente C em relação à curva Γ , $ind_{\Gamma}(C)$, e de suavização de um ponto duplo, precisamos relembrar a definição de característica de Euler para então explicitarmos as fórmulas de Viro para o cálculo dos invariantes J^+ e J^- .

Antes porém, relembremos o conceito de triangulação:

Definição 3.3 *Dada uma superfície compacta S , uma **triangulação** de S consiste em uma família finita de subconjuntos fechados $\{T_1, \dots, T_n\}$ que cobrem S e uma família de homeomorfismos $\varphi_i : T'_i \rightarrow T_i$, $i = 1 \dots, n$, onde T'_i é um triângulo do plano (um subconjunto compacto de \mathbb{R}^2 limitado por três retas distintas). Os subconjuntos T_i são chamados **triângulos** e seus subconjuntos que são imagens por φ_i de vértices e arestas do triângulo T'_i também são chamados **vértices** e **arestas**, respectivamente.*

Observação 3.4 *Em uma triangulação, dois triângulos T_i e T_j ou são disjuntos, ou têm somente um vértice em comum, ou têm uma aresta em comum.*

Com a definição de triangulação em mãos, podemos definir uma das ferramentas utilizadas por Viro em suas fórmulas para os invariantes J^+ e J^- :

Definição 3.5 *Dada uma superfície compacta S com triangulação $\{T_1, \dots, T_n\}$, sejam V o número de vértices, A o número de arestas e F o número de triângulos (faces) de S , a **característica de Euler** de S , denotada por $\chi(S)$, é o seguinte número*

$$\chi(S) = V - A + F$$

Propriedade: ([Ha])

Seja $X = A \cup B$ uma superfície compacta, com A e B superfícies compactas, então temos:

$$\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B).$$

Exemplos:

1. Seja C a superfície da figura 3.4:

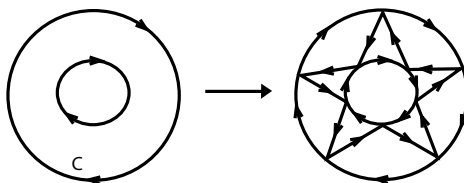


Figura 3.4: Triangulação de C para obtenção de sua característica de Euler.

Da triangulação dada segue que $V = 10$, $A = 20$ e $F = 10$.

Assim, $\chi(C) = 0$.

2. Consideremos um disco A com n buracos como na figura 3.5 e mostremos que $\chi(A) = 1 - n$.

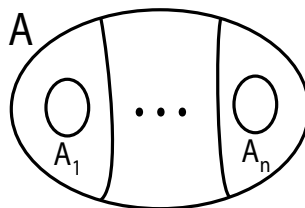


Figura 3.5: Característica de Euler de um disco com n buracos.

Separando o disco A em n discos, cada um deles com um buraco, que denotaremos por A_i , $i = 1, \dots, n$, temos $\chi(A_i) = 0$, para cada $i = 1, \dots, n$. Notemos que a interseção destes n discos são $n - 1$ segmentos de reta, cada um com característica de Euler igual a 1.

Como vale a expressão $\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$, resulta:

$$\begin{aligned} \chi(A) &= \chi(A_1 \cup \dots \cup A_n) \\ &= \chi(A_1) + \dots + \chi(A_n) - \chi(A_1 \cap \dots \cap A_n) \\ &= -(n - 1) \cdot 1 = 1 - n. \end{aligned}$$

Observação 3.6 *Observemos que nossa definição de característica de Euler é dada para superfícies compactas. Nas fórmulas de Viro será necessário o cálculo desta para todas as componentes de uma dada curva Γ , porém uma destas, a componente exterior, não é compacta. No entanto, o índice ind_{Γ} desta componente é zero, o que nos permite desconsiderar a componente exterior nas fórmulas de Viro.*

Com esta última consideração, estamos prontos para apresentar as fórmulas de Viro para os invariantes básicos J^+ e J^- :

Teorema 3.7 Fórmulas de Viro:

Seja Γ um curva plana fechada arbitrária. Então:

$$(i) J^+(\Gamma) = 1 + n - \sum_{\tilde{C}} ind_{\tilde{\Gamma}}^2(\tilde{C}) \chi(\tilde{C}),$$

$$(ii) J^-(\Gamma) = 1 - \sum_{\tilde{C}} ind_{\tilde{\Gamma}}^2(\tilde{C}) \chi(\tilde{C}),$$

onde a soma é tomada sobre todas as componentes \tilde{C} de $\tilde{\Gamma}$, n é o número de pontos duplos de Γ e χ é a característica de Euler.

Demonstração:

Para as curvas básicas K_i da figura 2.5, isto pode ser checado diretamente. Por exemplo:

1. Suavizando a curva básica K_0 obtemos as componentes C_1 e C_2 mostradas na figura 3.6, cujos índices e características de Euler são $ind_{\tilde{K}_0}(C_1) = 1$, $ind_{\tilde{K}_0}(C_2) = -1$, $\chi(C_1) = 1$ e $\chi(C_2) = 1$.

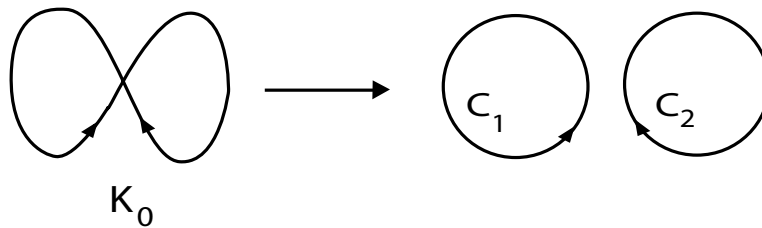


Figura 3.6: Suavização da curva básica K_0 .

Logo,

$$(i) J^+(K_0) = 1 + 1 - (1^2 \cdot 1 + (-1)^2 \cdot 1) = 0,$$

$$(ii) J^-(K_0) = 1 - (1^2 \cdot 1 + (-1)^2 \cdot 1) = -1.$$

2. Para a curva básica K_1 temos: $ind_{\tilde{K}_1}(C) = 1$ e $\chi(C) = 1$.

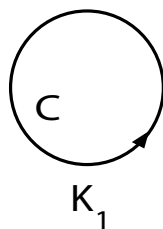


Figura 3.7: Curva básica K_1 .

Logo,

$$(i) J^+(K_1) = 1 - (1^2 \cdot 1) = 0,$$

$$(ii) J^-(K_1) = 1 - (1^2 \cdot 1) = 0.$$

3. Suavizando a curva básica K_2 obtemos as componentes C_1 e C_2 mostradas na figura 3.8, cujos índices e características de Euler são $ind_{\tilde{K}_2}(C_1) = 2$, $ind_{\tilde{K}_2}(C_2) = 1$, $\chi(C_1) = 1$ e $\chi(C_2) = 0$.

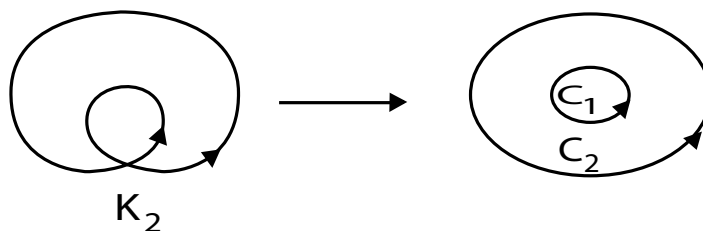


Figura 3.8: Suavização da curva básica K_2 .

Assim,

$$(i) J^+(K_2) = 1 + 1 - (2^2 \cdot 1 + (1)^2 \cdot 0) = -2,$$

$$(ii) J^-(K_2) = 1 - (2^2 \cdot 1 + (1)^2 \cdot 0) = -3.$$

Podemos generalizar o resultado para qualquer curva básica K_{i+1} observando a suavização mostrada na figura 3.9:

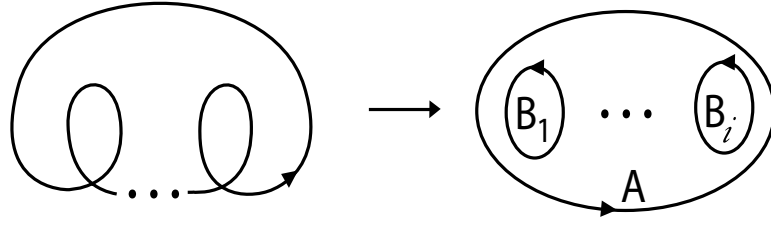


Figura 3.9: Generalização para qualquer curva básica K_{i+1} .

Notemos que:

$$(a) \text{ind}_{\tilde{k}_{i+1}}(A) = 1 \text{ e } \text{ind}_{\tilde{k}_{i+1}}(B_1) = \text{ind}_{\tilde{k}_{i+1}}(B_2) = \dots = \text{ind}_{\tilde{k}_{i+1}}(B_i) = 2.$$

$$(b) \chi(A) = 1 - i \text{ e } \chi(B_j) = 1, \text{ para } j = 1, \dots, i.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{\tilde{C}} \text{ind}_{\tilde{k}_{i+1}}^2(\tilde{C}) \chi(\tilde{C}) &= \text{ind}_{\tilde{k}_{i+1}}^2(A) \chi(A) + \sum_{j=1}^i \text{ind}_{\tilde{k}_{i+1}}^2(B_j) \chi(B_j) \\ &= 1(1 - i) + i \cdot 4 \cdot 1 = 1 + 3i. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(i) J^+(k_{i+1}) = 1 + i - (1 + 3i) = -2i,$$

$$(ii) J^-(k_{i+1}) = 1 - (1 + 3i) = -3i,$$

conforme a normalização dada por Arnold em 2.3.1.

Em consequência do Teorema de Whitney, dada uma curva plana fechada α , sempre podemos encontrar um caminho genérico para uma curva básica de mesmo índice de Whitney I_w . Sabemos que os valores dos invariantes J^+ e J^- para a curva α são dados

pela normalização sobre as curvas básicas, acrescidos do incremento correspondente à transição do caminho genérico entre as curvas.

Dessa forma, para provar o teorema para curvas de índice arbitrário é suficiente verificar o que acontece com as fórmulas de Viro sob as perestroikas elementares. Se constataremos que sob as perestroikas elementares os saltos dos invariantes J^+ e J^- são exatamente como os saltos determinados por Arnold para a transição de um caminho genérico, o teorema fica provado.

Passemos então à verificação do que acontece com as fórmulas de Viro sob as três perestroikas.

Perestroika de auto-tangência direta: Consideremos o cruzamento de uma auto-tangência direta gerando dois novos pontos duplos conforme figura 3.10.

Quando suavizamos a curva depois do cruzamento, voltamos às mesmas componentes da curva antes do cruzamento.

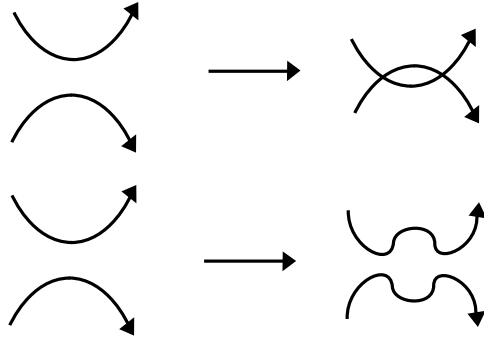


Figura 3.10: Perestroika de auto-tangência direta e sua suavização.

Se Γ é a curva antes do cruzamento de auto-tangência direta, Γ' é a mesma curva após este cruzamento e n é o número de pontos duplos de Γ , temos:

$$\begin{aligned}
 \text{(i) } J^+(\Gamma') &= 1 + n + 2 - \sum_{\tilde{C}} \text{ind}_{\Gamma'}^2(\tilde{C}) \chi(\tilde{C}) \\
 &= \left(1 + n - \sum_{\tilde{C}} \text{ind}_{\Gamma}^2(\tilde{C}) \chi(\tilde{C}) \right) + 2 \\
 &= J^+(\Gamma) + 2;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii) } J^-(\Gamma') &= 1 - \sum_{\tilde{C}} \text{ind}_{\tilde{\Gamma}}^2(\tilde{C}) \chi(\tilde{C}) \\
&= 1 - \sum_{\tilde{C}} \text{ind}_{\tilde{\Gamma}}^2(\tilde{C}) \chi(\tilde{C}) \\
&= J^-(\Gamma).
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que os saltos para os invariantes J^+ e J^- sob este cruzamento são como os determinados por Arnold.

Perestroika de auto-tangência inversa: Consideremos o cruzamento de uma auto-tangência inversa gerando dois novos pontos duplos conforme figura 3.11.

Quando suavizamos a curva antes e após o cruzamento, alteramos as componentes mostradas na figura 3.11.

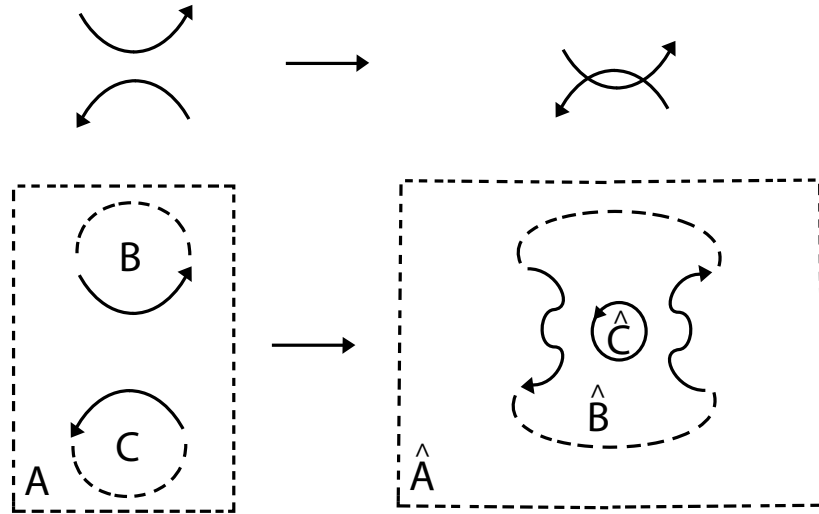


Figura 3.11: Perestroika de auto-tangência inversa e sua suavização.

Notemos que:

$$\text{(a) } \text{ind}_{\tilde{\Gamma}}(\hat{A}) = \text{ind}_{\tilde{\Gamma}}(A), \text{ind}_{\tilde{\Gamma}}(\hat{B}) = \text{ind}_{\tilde{\Gamma}}(B) = \text{ind}_{\tilde{\Gamma}}(C) = \text{ind}_{\tilde{\Gamma}}(A) + 1 \text{ e } \text{ind}_{\tilde{\Gamma}}(\hat{C}) = \text{ind}_{\tilde{\Gamma}}(B) + 1.$$

$$\text{(b) } \chi(\hat{A}) = \chi(A) + 1, \chi(\hat{B}) = \chi(B) + \chi(C) - 2 \text{ e } \chi(\hat{C}) = 1.$$

Denotando por $\hat{\gamma}$ as componentes suavizadas da curva Γ que foram alteradas após o cruzamento da auto-tangência inversa e por γ as mesmas componentes suavizadas antes deste cruzamento, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{\hat{\gamma}} \text{ind}_{\hat{\Gamma}}^2(\hat{\gamma}) \chi(\hat{\gamma}) &= \text{ind}_{\hat{\Gamma}}^2(\hat{A})\chi(\hat{A}) + \text{ind}_{\hat{\Gamma}}^2(\hat{B})\chi(\hat{B}) + \text{ind}_{\hat{\Gamma}}^2(\hat{C})\chi(\hat{C}) \\
&= \text{ind}_{\hat{\Gamma}}^2(A)\left(\chi(A) + 1\right) + \text{ind}_{\hat{\Gamma}}^2(B)\left(\chi(B) + \chi(C) - 2\right) + \left(\text{ind}_{\hat{\Gamma}}^2(B) + 1\right)^2 \\
&= \text{ind}_{\hat{\Gamma}}^2(A)\chi(A) + \text{ind}_{\hat{\Gamma}}^2(B)\chi(B) + \text{ind}_{\hat{\Gamma}}^2(C)\chi(C) + 2 \\
&= \sum_{\gamma} \text{ind}_{\hat{\Gamma}}^2(\gamma) \chi(\gamma) + 2.
\end{aligned}$$

Dessa forma, vemos que a soma dos produtos $\text{ind}_{\tilde{\Gamma}}^2(\tilde{C}) \chi(\tilde{C})$ sobre todas as componentes de $\tilde{\Gamma}$ é acrescida de 2.

Portanto, se Γ' é a curva Γ após o cruzamento da auto-tangência inversa e n é o número de pontos duplos de Γ , temos:

$$\begin{aligned}
\text{(i) } J^+(\Gamma') &= 1 + n + 2 - \left(\sum_{\tilde{C}} \text{ind}_{\tilde{\Gamma}'}^2(\tilde{C}) \chi(\tilde{C}) \right) \\
&= 1 + n + 2 - \left(\sum_{\tilde{C}} \text{ind}_{\tilde{\Gamma}}^2(\tilde{C}) \chi(\tilde{C}) + 2 \right) \\
&= 1 + n - \sum_{\tilde{C}} \text{ind}_{\tilde{\Gamma}}^2(\tilde{C}) \chi(\tilde{C}) \\
&= J^+(\Gamma); \\
\text{(ii) } J^-(\Gamma') &= 1 - \left(\sum_{\tilde{C}} \text{ind}_{\tilde{\Gamma}'}^2(\tilde{C}) \chi(\tilde{C}) \right) \\
&= 1 - \left(\sum_{\tilde{C}} \text{ind}_{\tilde{\Gamma}}^2(\tilde{C}) \chi(\tilde{C}) + 2 \right) \\
&= J^-(\Gamma) - 2.
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que os saltos para os invariantes J^+ e J^- sob o cruzamento de uma auto-tangência inversa são como os determinados por Arnold.

Perestroika de ponto triplo: Veremos a demonstração do que ocorre com as fórmulas de Viro quando uma curva atravessa a perestroika de ponto triplo nos dois seguintes casos: um em que as componentes da curva não se alteram com o cruzamento (caso 1) e outro em que as componentes mudam com o cruzamento (caso 2). O cálculo em outros casos podem ser feitos de maneira análoga.

Caso 1: Consideremos o cruzamento de um ponto triplo como na figura 3.12:

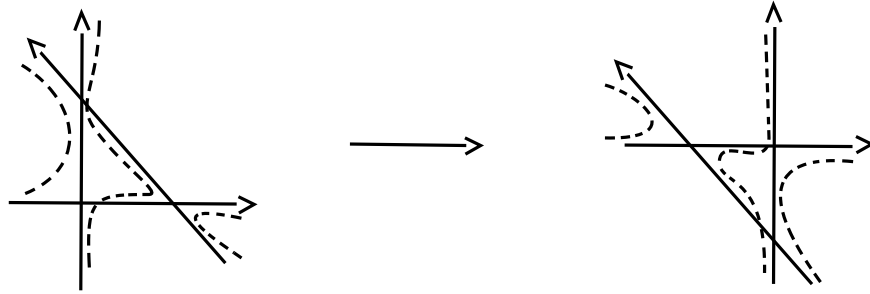


Figura 3.12: Suavização após uma perestroika de ponto triplo.

Quando suavizamos a curva depois deste cruzamento, voltamos às mesmas componentes da curva antes do cruzamento.

Assim, se Γ é a curva antes do cruzamento do ponto triplo, Γ' é a mesma curva após este cruzamento e n é o número de pontos duplos de Γ , temos:

$$\begin{aligned}
 \text{(i) } J^+(\Gamma') &= 1 + n - \sum_{\tilde{C}} \text{ind}_{\tilde{\Gamma}'}^2(\tilde{C}) \chi(\tilde{C}) \\
 &= 1 + n - \sum_{\tilde{C}} \text{ind}_{\tilde{\Gamma}}^2(\tilde{C}) \chi(\tilde{C}) \\
 &= J^+(\Gamma);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii) } J^-(\Gamma') &= 1 - \sum_{\tilde{C}} \text{ind}_{\tilde{\Gamma}'}^2(\tilde{C}) \chi(\tilde{C}) \\
 &= 1 - \sum_{\tilde{C}} \text{ind}_{\tilde{\Gamma}}^2(\tilde{C}) \chi(\tilde{C}) \\
 &= J^-(\Gamma).
 \end{aligned}$$

Portanto, J^+ e J^- não se alteram.

Caso 2: Consideremos o cruzamento de um ponto triplo como na figura 3.13.

Quando suavizamos a curva antes e após o cruzamento, alteramos as componentes mostradas na figura 3.13.

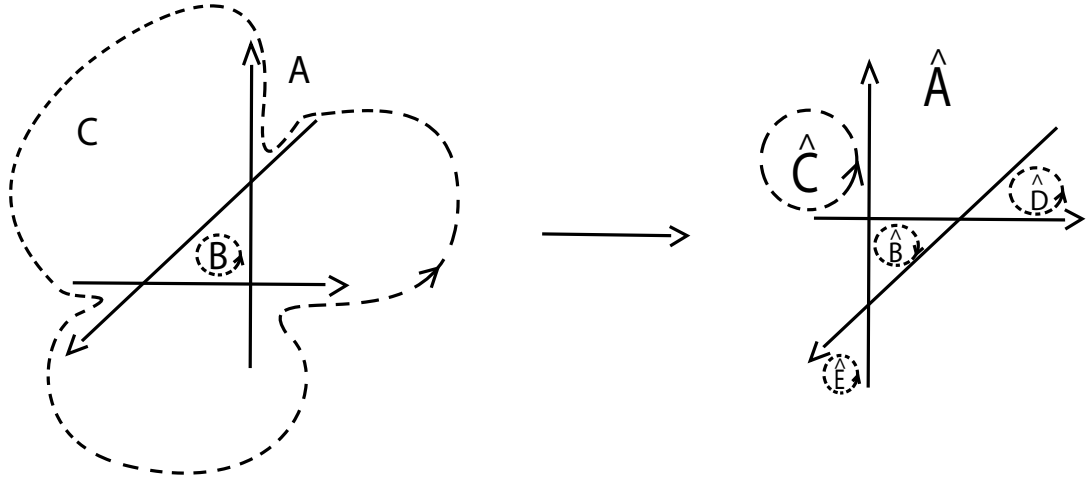


Figura 3.13: Suavização após uma perestroika de ponto triplo.

Observemos que:

- (a) $ind_{\hat{\Gamma}}(B) = ind_{\hat{\Gamma}}(A) + 2$, $ind_{\hat{\Gamma}}(C) = ind_{\hat{\Gamma}}(A) + 1$, $ind_{\hat{\Gamma}}(\hat{A}) = ind_{\hat{\Gamma}}(A)$, $ind_{\hat{\Gamma}}(\hat{B}) = ind_{\hat{\Gamma}}(A) - 1$ e $ind_{\hat{\Gamma}}(\hat{C}) = ind_{\hat{\Gamma}}(\hat{D}) = ind_{\hat{\Gamma}}(\hat{E}) = ind_{\hat{\Gamma}}(A) + 1$.
- (b) $\chi(\hat{A}) = \chi(A) - 3$, $\chi(\hat{B}) = \chi(B) = 1$ e $\chi(\hat{C}) + \chi(\hat{D}) + \chi(\hat{E}) = \chi(C) + 3$.

Denotando por $\hat{\gamma}$ as componentes suavizadas da curva Γ que foram alteradas após o cruzamento da auto-tangência inversa e por γ as mesmas componentes suavizadas antes deste cruzamento, temos:

$$\sum_{\hat{\gamma}} ind_{\hat{\Gamma}}^2(\hat{\gamma}) \chi(\hat{\gamma}) = ind_{\hat{\Gamma}}^2(\hat{A}) \chi(\hat{A}) + ind_{\hat{\Gamma}}^2(\hat{B}) \chi(\hat{B}) + ind_{\hat{\Gamma}}^2(\hat{C}) \chi(\hat{C}) + ind_{\hat{\Gamma}}^2(\hat{D}) \chi(\hat{D})$$

$$\begin{aligned}
& + \operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}^2(\hat{E}) \chi(\hat{E}) \\
& = \operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}^2(A) \left(\chi(A) - 3 \right) + \left(\operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}(A) - 1 \right)^2 \cdot 1 + \left(\operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}(A) + 1 \right)^2 \chi(\hat{C}) \\
& + \left(\operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}(A) + 1 \right)^2 \chi(\hat{D}) + \left(\operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}(A) + 1 \right)^2 \chi(\hat{E}) \\
& = \operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}^2(A) \chi(A) - 3 \operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}^2(A) + \operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}^2(A) - 2 \operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}(A) + 1 \\
& + \left(\operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}(A) + 1 \right)^2 \left(\chi(\hat{C}) + \chi(\hat{D}) + \chi(\hat{E}) \right) \\
& = \operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}^2(A) \chi(A) - 2 \operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}^2(A) - 2 \operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}(A) + 1 \\
& + \left(\operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}^2(A) + 2 \operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}(A) + 1 \right) \left(\chi(C) + 3 \right) \\
& = \operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}^2(A) \chi(A) - 2 \operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}^2(A) - 2 \operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}(A) + 1 + \operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}^2(A) \chi(C) + 3 \operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}^2(A) \\
& + 2 \operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}(A) \chi(C) + 6 \operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}(A) + \chi(C) + 3 \\
& = \operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}^2(A) \chi(A) + \operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}^2(A) + 4 \operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}(A) + 4 + \operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}^2(A) \chi(C) + 2 \operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}(A) \chi(C) \\
& + \chi(C) \\
& = \operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}^2(A) \chi(A) + \left(\operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}(A) + 2 \right)^2 \cdot 1 + \left(\operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}(A) + 1 \right)^2 \chi(C) \\
& = \operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}^2(A) \chi(A) + \operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}^2(B) \chi(B) + \operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}^2(C) \chi(C) \\
& = \sum_{\gamma} \operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}^2(\gamma) \chi(\gamma).
\end{aligned}$$

Dessa forma, vemos que a soma dos produtos $\operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}}^2(\tilde{C}) \chi(\tilde{C})$ sobre todas as componentes de $\tilde{\Gamma}$ não se altera.

Assim,

$$(i) \quad J^+(\Gamma') = 1 + n - \sum_{\hat{\gamma}} \operatorname{ind}_{\hat{\Gamma}'}^2(\tilde{C}) \chi(\tilde{C})$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + n - \sum_{\gamma} \text{ind}_{\tilde{\Gamma}}^2(\tilde{C}) \chi(\tilde{C}) \\
&= J^+(\Gamma); \\
\text{(ii) } J^-(\Gamma') &= 1 - \sum_{\hat{\gamma}} \text{ind}_{\tilde{\Gamma}'}^2(\tilde{C}) \chi(\tilde{C}) \\
&= 1 - \sum_{\gamma} \text{ind}_{\tilde{\Gamma}}^2(\tilde{C}) \chi(\tilde{C}) \\
&= J^-(\Gamma).
\end{aligned}$$

Portanto, J^+ e J^- não se alteram neste cruzamento.

Assim, constatamos que J^+ e J^- não se alteram sob qualquer cruzamento de ponto triplo, o que encerra a prova do teorema.

□

Observação 3.8 *Para obter o invariante J^- na demonstração acima, consideramos o algoritmo de Viro, afim de explicitar sua técnica. No entanto, tendo em mãos o valor do invariante J^+ poderíamos ter utilizado o corolário 2.27 ($J^+ - J^- = n$) para obter o invariante J^- .*

Exemplo:

Suavizando a curva Γ da figura 3.1, obtemos:

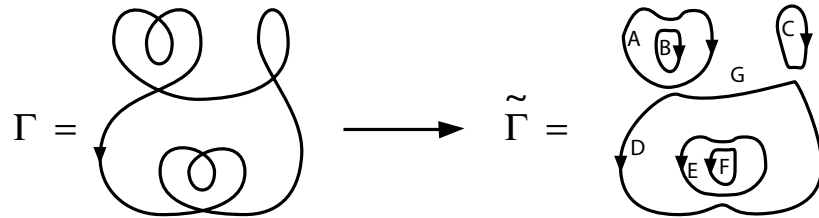


Figura 3.14: Suavização da curva Γ e índices de suas componentes.

Notemos que:

$$\text{(a) } \text{ind}_{\tilde{\Gamma}}(A) = -1, \text{ind}_{\tilde{\Gamma}}(B) = -2, \text{ind}_{\tilde{\Gamma}}(C) = -1, \text{ind}_{\tilde{\Gamma}}(D) = 1, \text{ind}_{\tilde{\Gamma}}(E) = 2 \text{ e } \text{ind}_{\tilde{\Gamma}}(F) = 3.$$

(b) $\chi(A) = \chi(E) = 0$, $\chi(B) = \chi(C) = \chi(F) = 1$ e $\chi(D) = 0$.

Assim, aplicando as fórmulas de Viro a Γ , encontramos:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad J^+(\Gamma) &= 1 + n - \sum_{\tilde{C}} \text{ind}_{\tilde{\Gamma}}^2(\tilde{C}) \chi(\tilde{C}) \\ &= 1 + 5 - \left((-1)^2 \cdot 0 + (-2)^2 \cdot 1 + (-1)^2 \cdot 1 + (1)^2 \cdot 0 + (2)^2 \cdot 0 + (3)^2 \cdot 1 \right) \\ &= 1 + 5 - (4 + 1 + 9) = -8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad J^-(\Gamma) &= 1 - \sum_{\tilde{C}} \text{ind}_{\tilde{\Gamma}}^2(\tilde{C}) \chi(\tilde{C}) \\ &= 1 - \left((-1)^2 \cdot 0 + (-2)^2 \cdot 1 + (-1)^2 \cdot 1 + (1)^2 \cdot 0 + (2)^2 \cdot 0 + (3)^2 \cdot 1 \right) \\ &= 1 - (4 + 1 + 9) = -13. \end{aligned}$$

3.2 Fórmula de Shumakovich

Enquanto Viro encontrou fórmulas para o cálculo dos invariantes J^\pm , Shumakovich em [Sh] forneceu uma fórmula para o invariante St . Em sua fórmula considera todos os pontos duplos p de uma curva imersa Γ , e o invariante St é dado em função de um sinal e de um índice de cada ponto duplo p , conceitos estes que definiremos a seguir. O objetivo desta seção é mostrar a fórmula de Shumakovich, antes porém passemos às definições.

No que segue, vamos assumir que há um ponto base $*$ marcado em S^1 . Consequentemente, com a escolha deste ponto base e com a orientação do círculo, fica fixado um ponto sobre a representação da curva. O ponto base e a orientação da curva definem então uma ordenação “(1, 2)” nas direções dos ramos de saída de cada ponto duplo curva. A partir dessa ordenação, podemos definir o sinal do ponto duplo:

Definição 3.9 *Dada uma curva plana fechada Γ , fixemos sobre ela um ponto base $*$. Para cada ponto duplo $p \in \Gamma$, definimos o **sinal**, denotado por $s(p)$, da seguinte forma:*

- (i) $s(p) = 1$, se as direções dos ramos “(1,2)” do ponto duplo p orientam o plano negativamente.
- (ii) $s(p) = -1$, se as direções dos ramos “(1,2)” do ponto duplo p orientam o plano positivamente.

A figura 3.15 ilustra o sinal $s(p)$ de um ponto duplo.

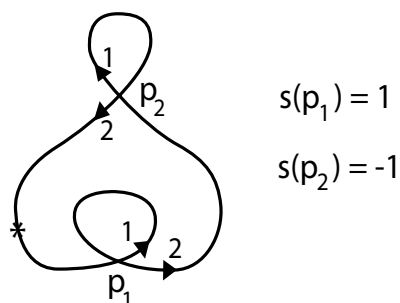


Figura 3.15: Sinal $s(p)$ para uma curva plana fechada.

Regra de Alexander:

Com relação às componentes conexas de uma curva plana fechada Γ , observemos que:

1. O índice da componente exterior é zero.
2. Se C_1 e C_2 são duas componentes adjacentes e C_1 ocupa um lugar à esquerda de Γ enquanto C_2 ocupa um lugar à direita, então $ind_{\Gamma}(C_1) = ind_{\Gamma}(C_2) + 1$.

Chegamos, assim, à **regra de Alexander** para os índices de quatro componentes conexas na vizinhança de um ponto duplo p , ilustrada na figura 3.16:

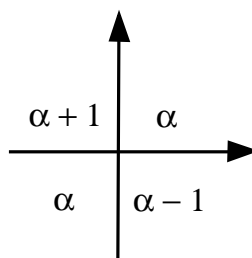


Figura 3.16: Regra de Alexander.

Na figura 3.17 ilustramos a regra de Alexander para as componentes do complemento da curva Γ da figura 3.1 em torno do ponto duplo a .

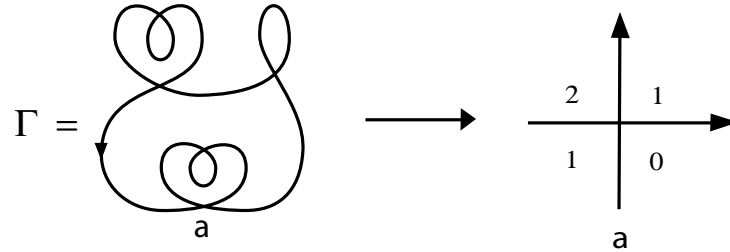


Figura 3.17: Regra de Alexander para o ponto duplo a de Γ .

Definição 3.10 Dada uma curva plana fechada Γ e um ponto duplo $p \in \Gamma$, o **índice do ponto duplo** p , denotado por $\text{ind}_{\Gamma}(p)$, é a média aritmética dos índices das quatro componentes do complemento de Γ em torno de p . (Se uma componente de Γ em torno de p é o complemento (em $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$) de duas componentes de Γ em torno de p , então seu índice é contado duas vezes.)

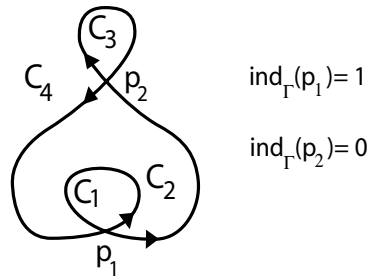


Figura 3.18: Índice de um ponto duplo p para uma curva plana Γ .

Teorema 3.11 Fórmula de Shumakovich:

Se o ponto base $*$ está no contorno exterior de uma curva plana fechada Γ , então

$$St(\Gamma) = \sum_p s(p) \text{ind}_{\Gamma}(p).$$

Demonstração:

Para as curvas básicas K_i da figura 2.5, isto pode ser checado diretamente. Por exemplo:

1. Para a curva K_0 temos:

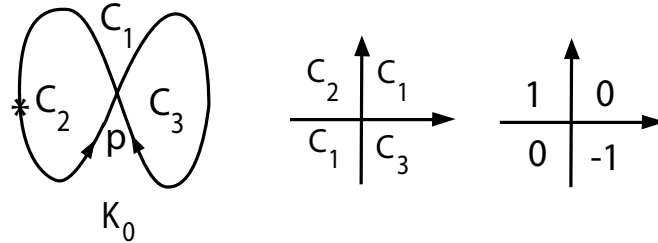


Figura 3.19: Índice do ponto duplo p para a curva K_0 .

Assim,

$$St(K_0) = \sum_p s(p) \text{ind}_{K_0}(p) = -1 \cdot 0 = 0.$$

2. Como a curva K_1 não tem pontos duplos, temos:

$$St(K_1) = \sum_p s(p) \text{ind}_{K_1}(p) = 0.$$

3. Para a curva K_2 temos:

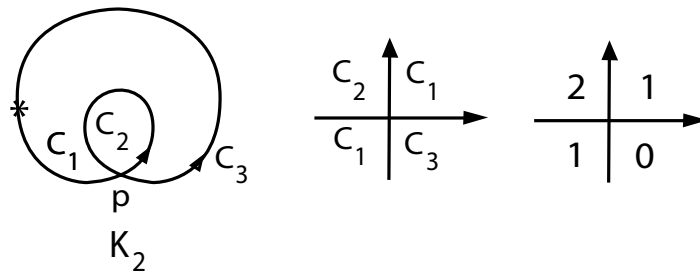


Figura 3.20: Índice do ponto duplo p para a curva K_2 .

Assim,

$$St(K_2) = \sum_p s(p) \text{ind}_{K_2}(p) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Podemos generalizar o resultado para qualquer curva básica K_{i+1} observando a suavização mostrada na figura 3.21:

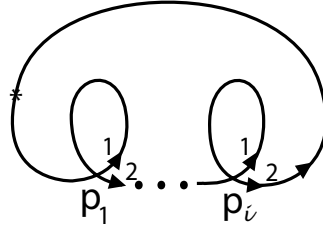


Figura 3.21: Generalização para qualquer curva básica K_{i+1} .

Notemos que $s(p_j) = 1$ e que o índice $ind_{K_{i+1}}(p_j) = 1$, para cada $j = 1, \dots, i$.

Assim,

$$St(K_{i+1}) = \sum_p s(p) ind_{K_{i+1}}(p) = i \cdot 1 = i,$$

conforme a normalização dada por Arnold em 2.3.1.

De forma análoga ao que fizemos para demonstrar as fórmulas de Viro, para provar o teorema para curvas de índice arbitrário é suficiente verificar o que acontece com a fórmula de Shumakovich sob perestroikas elementares. Isto também é devido ao Teorema de Whitney, já que dada uma curva plana fechada α sempre podemos encontrar um caminho genérico para uma curva básica de mesmo índice de Whitney I_w , e pelo fato de que o valor do invariante St para a curva α é dado pelo valor da normalização sobre a curva básica de mesmo índice, acrescido do incremento correspondente à transição do caminho genérico entre as curvas.

Assim, verifiquemos o que acontece com as fórmulas de Viro sob as três perestroikas:

Perestroika de auto-tangência direta: Consideremos o cruzamento de uma auto-tangência direta por uma curva Γ gerando dois novos pontos duplos conforme figura 3.22.

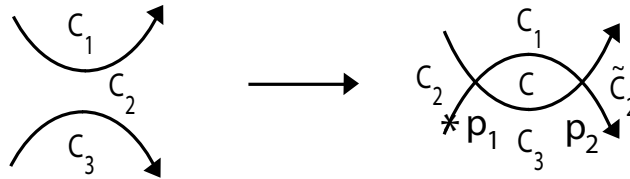


Figura 3.22: Componentes de Γ ao cruzar uma auto-tangência direta.

Aplicando a regra de Alexander às componentes de Γ em torno dos novos pontos duplos que surgem após o cruzamento da auto-tangência direta obtemos:

$$\begin{array}{c} C_1 \uparrow C \\ \hline C_2 \leftarrow C_3 \end{array} = \begin{array}{c} a+1 \uparrow a \\ \hline a \leftarrow a-1 \end{array} \quad \begin{array}{c} C_1 \uparrow \tilde{C}_2 \\ \hline C \leftarrow C_3 \end{array} = \begin{array}{c} a+1 \uparrow a \\ \hline a \leftarrow a-1 \end{array}$$

Figura 3.23: Índices das componentes de Γ após uma auto-tangência direta.

Logo, $ind_{\Gamma}(p_1) = a$ e $ind_{\Gamma}(p_2) = a$. Como as orientações “(1, 2)” dos novos pontos duplos são opostas, temos que $s(p_1)$ e $s(p_2)$ têm sinais opostos.

Portanto, $St(\Gamma) = \sum_p s(p) ind_{\Gamma}(p)$ não muda quando atravessamos a perestroika de auto-tangência direta.

Perestroika de auto-tangência inversa: Consideremos o cruzamento de uma auto-tangência inversa por uma curva Γ gerando dois novos pontos duplos conforme figura 3.24.

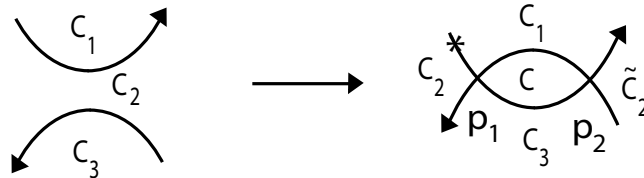


Figura 3.24: Componentes de Γ ao cruzar uma auto-tangência inversa.

Aplicando a regra de Alexander às componentes de Γ em torno dos novos pontos duplos que surgem após o cruzamento da auto-tangência direta obtemos:

$$\begin{array}{c} C \uparrow C_3 \\ \hline C_1 \leftarrow C_2 \end{array} = \begin{array}{c} a+1 \uparrow a \\ \hline a \leftarrow a-1 \end{array} \quad \begin{array}{c} C \uparrow C_1 \\ \hline C_3 \leftarrow \tilde{C}_2 \end{array} = \begin{array}{c} a+1 \uparrow a \\ \hline a \leftarrow a-1 \end{array}$$

Figura 3.25: Índices das componentes Γ após uma auto-tangência inversa.

Logo, $ind_{\Gamma}(p_1) = a$ e $ind_{\Gamma}(p_2) = a$. Como as orientações “(1, 2)” dos novos pontos duplos são opostas, temos que $s(p_1)$ e $s(p_2)$ têm sinais opostos.

Portanto, $St(\Gamma) = \sum_p s(p) ind_{\Gamma}(p)$ não muda quando atravessamos a perestroika de auto-tangência inversa.

Perestroika de ponto triplo: Para demonstrar o que ocorre com a fórmula de Shumakovich sob a perestroika de ponto triplo, analisaremos separadamente cada um dos 4 cruzamentos positivos de um ponto triplo.

Caso 1: Consideremos o cruzamento positivo de ponto triplo da figura 3.26, onde são dados os índices de cada uma das componentes da curva em torno dos pontos envolvidos neste cruzamento.

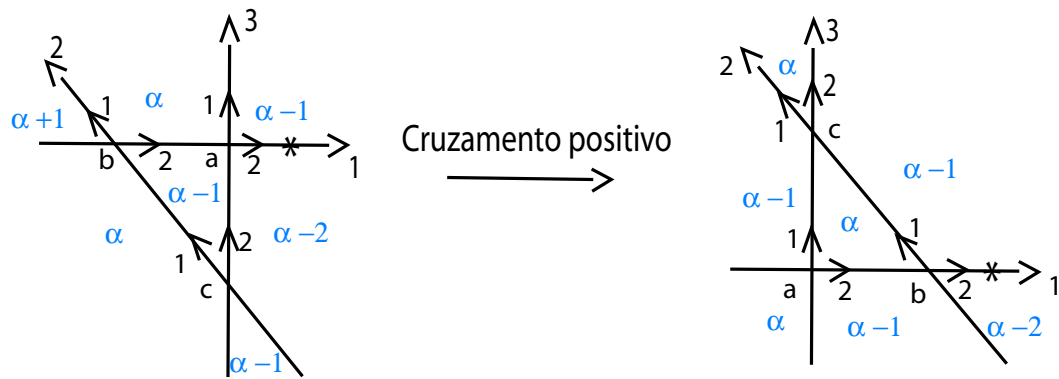


Figura 3.26: Cruzamento positivo de ponto triplo.

Observemos os índices dos pontos duplos não mudam sob este cruzamento. Porém, os índices das componentes em torno destes pontos sofrem a mudança mostrada na figura 3.26.

Assim, se Γ é a curva antes do cruzamento do ponto triplo da figura 3.26 e Γ' é a mesma curva após este cruzamento temos:

- (i) $s(a) = s(b) = s(c) = 1$.
- (ii) $ind_{\Gamma}(a) = \alpha - 1$, $ind_{\Gamma}(b) = \alpha$ e $ind_{\Gamma}(c) = \alpha$.
- (iii) $ind_{\Gamma'}(a) = \alpha$, $ind_{\Gamma'}(b) = \alpha - 1$ e $ind_{\Gamma'}(c) = 1$.

Dessa forma, o incremento de St neste cruzamento é:

$$\begin{aligned} & s(a)ind_{\Gamma'}(a) + s(b)ind_{\Gamma'}(b) + s(c)ind_{\Gamma'}(c) - \left(s(a)ind_{\Gamma}(a) + s(b)ind_{\Gamma}(b) + s(c)ind_{\Gamma}(c) \right) \\ &= 1 \cdot \alpha + 1 \cdot (\alpha - 1) + 1 \cdot \alpha - \left(1 \cdot (\alpha - 1) + 1 \cdot \alpha + 1 \cdot (\alpha - 1) \right) \\ &= 3 \cdot \alpha - 1 - (3 \cdot \alpha - 2) = 1. \end{aligned}$$

Caso 2: Consideremos o cruzamento positivo de ponto triplo da figura 3.27, onde são dados os índices de cada uma das componentes da curva em torno dos pontos envolvidos neste cruzamento.

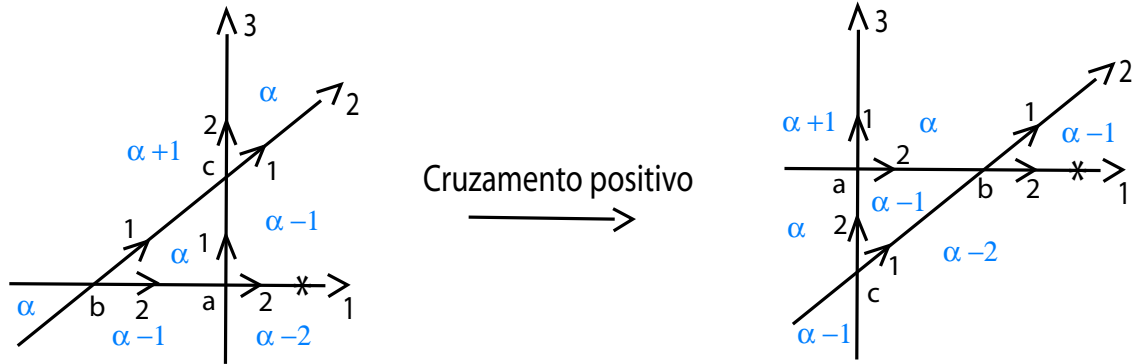


Figura 3.27: Cruzamento positivo de ponto triplo.

Com o cruzamento do ponto triplo, os índices dos pontos duplos não mudam. Porém, os índices das componentes em torno do pontos envolvidos no cruzamento sofrem a alteração que pode ser vista na figura 3.27.

Assim, se Γ é a curva antes do cruzamento na figura 3.27 e Γ' é a mesma curva após este cruzamento temos:

- (i) $s(a) = s(b) = 1$ e $s(c) = -1$.
- (ii) $ind_{\Gamma}(a) = \alpha - 1$, $ind_{\Gamma}(b) = \alpha$ e $ind_{\Gamma}(c) = \alpha$.
- (iii) $ind_{\Gamma'}(a) = \alpha$, $ind_{\Gamma'}(b) = \alpha - 1$ e $ind_{\Gamma'}(c) = \alpha - 1$.

Dessa forma, o incremento de St neste cruzamento é:

$$\begin{aligned}
& s(a)ind_{\Gamma'}(a) + s(b)ind_{\Gamma'}(b) + s(c)ind_{\Gamma'}(c) - \left(s(a)ind_{\Gamma}(a) + s(b)ind_{\Gamma}(b) + s(c)ind_{\Gamma}(c) \right) \\
&= 1 \cdot \alpha + 1 \cdot (\alpha - 1) - 1 \cdot (\alpha - 1) - \left(1 \cdot (\alpha - 1) + 1 \cdot \alpha - 1 \cdot \alpha \right) \\
&= \alpha - (\alpha - 1) = 1.
\end{aligned}$$

Caso 3: Consideremos o cruzamento positivo de ponto triplo da figura 3.28, onde são dados os índices de cada uma das componentes da curva em torno dos pontos envolvidos neste cruzamento.

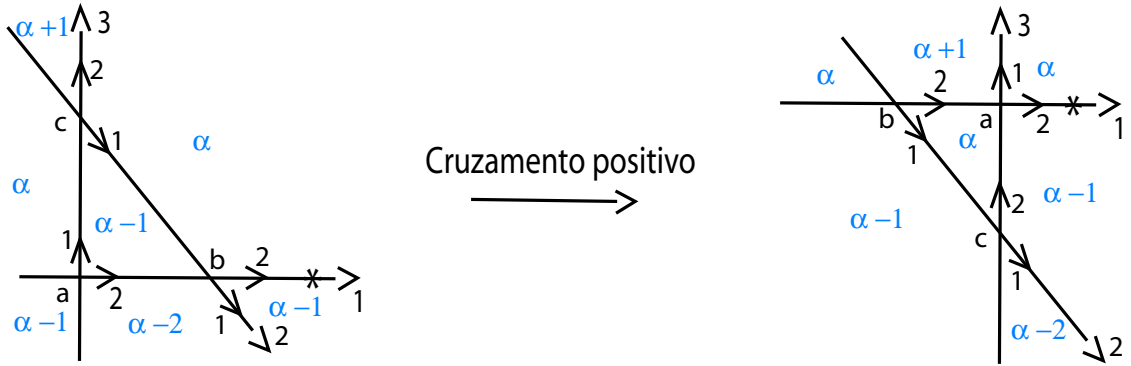


Figura 3.28: Cruzamento positivo de ponto triplo.

Observemos que os índices dos pontos duplos não mudam com o cruzamento do ponto triplo. No entanto, podemos observar na figura 3.28 que os índices das componentes em torno destes pontos mudaram.

Assim, se Γ é a curva antes do cruzamento do ponto triplo e Γ' é a mesma curva após este cruzamento temos:

- (i) $s(a) = 1$ e $s(b) = s(c) = -1$.
- (ii) $ind_{\Gamma}(a) = \alpha - 1$, $ind_{\Gamma}(b) = \alpha - 1$ e $ind_{\Gamma}(c) = \alpha$.
- (iii) $ind_{\Gamma'}(a) = \alpha$, $ind_{\Gamma'}(b) = \alpha$ e $ind_{\Gamma'}(c) = \alpha - 1$.

Dessa forma, o incremento de St neste cruzamento é:

$$\begin{aligned}
& s(a)ind_{\Gamma'}(a) + s(b)ind_{\Gamma'}(b) + s(c)ind_{\Gamma'}(c) - \left(s(a)ind_{\Gamma}(a) + s(b)ind_{\Gamma}(b) + s(c)ind_{\Gamma}(c) \right) \\
&= 1 \cdot \alpha - 1 \cdot \alpha - 1 \cdot (\alpha - 1) - \left(1 \cdot (\alpha - 1) - 1 \cdot (\alpha - 1) - 1 \cdot \alpha \right) \\
&= -\alpha + 1 - (-\alpha) = 1.
\end{aligned}$$

Caso 4: Consideremos o cruzamento positivo de ponto triplo da figura 3.29, onde são dados os índices de cada uma das componentes da curva em torno dos pontos envolvidos neste cruzamento.

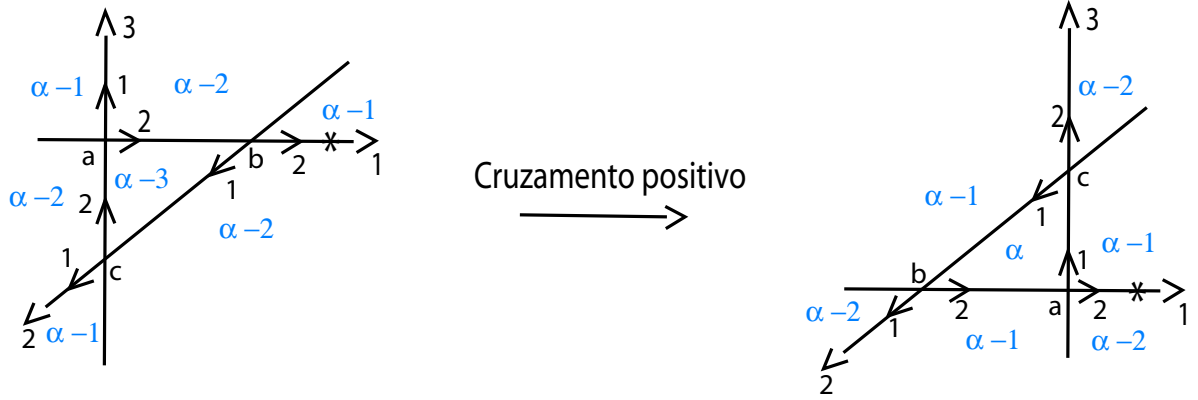


Figura 3.29: Cruzamento positivo de ponto triplo.

Como nos casos anteriores, percebemos que os índices dos pontos duplos não mudam, enquanto os índices das componentes em torno dos pontos envolvidos neste cruzamento sofrem alterações.

Assim, se Γ é a curva antes do cruzamento do ponto triplo e Γ' é a mesma curva após este cruzamento temos:

- (i) $s(a) = s(c) = 1$ e $s(b) = -1$.
- (ii) $ind_{\Gamma}(a) = \alpha - 2$, $ind_{\Gamma}(b) = \alpha - 2$ e $ind_{\Gamma}(c) = \alpha - 2$.
- (iii) $ind_{\Gamma'}(a) = \alpha - 1$, $ind_{\Gamma'}(b) = \alpha - 1$ e $ind_{\Gamma'}(c) = \alpha - 1$.

Dessa forma, o incremento de St neste cruzamento é:

$$\begin{aligned} & s(a)ind_{\Gamma'}(a) + s(b)ind_{\Gamma'}(b) + s(c)ind_{\Gamma'}(c) - \left(s(a)ind_{\Gamma}(a) + s(b)ind_{\Gamma}(b) + s(c)ind_{\Gamma}(c) \right) \\ &= 1 \cdot (\alpha - 1) - 1 \cdot (\alpha - 1) + 1 \cdot (\alpha - 1) - \left(1 \cdot (\alpha - 2) - 1 \cdot (\alpha - 2) + 1 \cdot (\alpha - 2) \right) \\ &= \alpha - 1 - (\alpha - 2) = 1. \end{aligned}$$

Portanto, o invariante St se comporta como esperado sob o cruzamento de uma prestroika de ponto triplo.

Para finalizar, devemos provar a independência da escolha do ponto base. Observemos que o ponto base é escolhido no contorno exterior da curva. Dessa forma, a orientação “(1, 2)” dos pontos duplos não sofrem alteração. Conseqüentemente, o sinal $s(p)$ do ponto duplo não se altera. Assim, a fórmula de Shumakovich não depende da escolha do ponto base.

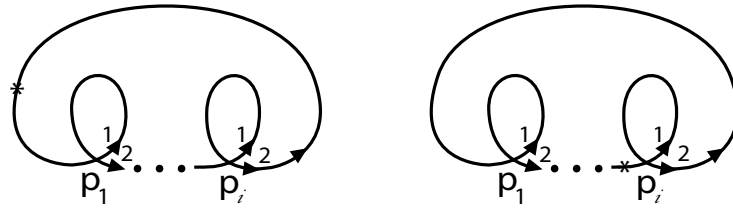


Figura 3.30: Independência da escolha do ponto base.

□

Observação 3.12 *Notemos que se a escolha do ponto base na demonstração do teorema acima fosse feita no contorno interior, o sinal de um dos pontos duplos seria trocado como ilustra a figura 3.31.*

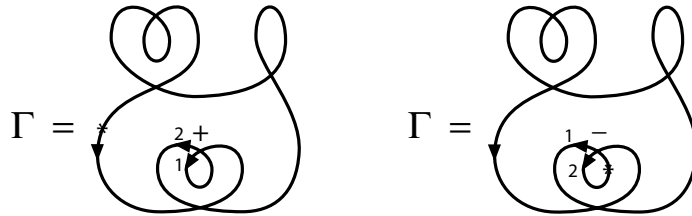


Figura 3.31: Mudança no sinal de $s(p)$ devida à mudança do ponto base.

Exemplo:

Neste exemplo, vamos calcular o invariante St para a curva da figura 3.1. Os sinais dos pontos duplos de Γ podem ser vistos na figura 3.32:

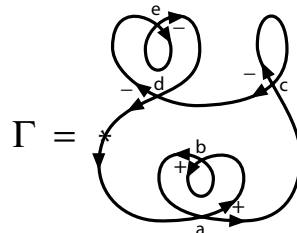


Figura 3.32: Sinais dos pontos duplos de Γ .

Usaremos a regra de Alexander para a curva Γ de modo a determinar os índices de suas componentes. Temos:

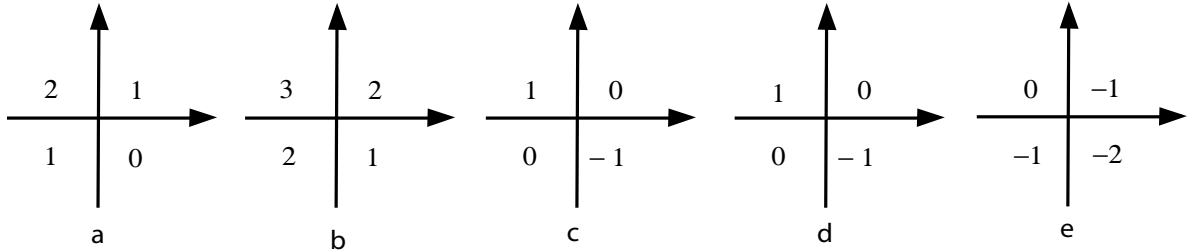


Figura 3.33: Sinais dos pontos duplos de Γ .

Das figuras 3.32 e 3.33, resulta:

$$(a) \quad s(a) = s(b) = +1 \text{ e } s(c) = s(d) = s(e) = -1.$$

$$(b) \quad ind_{\Gamma}(a) = 1, \quad ind_{\Gamma}(b) = 2, \quad ind_{\Gamma}(c) = 0, \quad ind_{\Gamma}(d) = 0 \text{ e } ind_{\Gamma}(e) = -1.$$

Assim, aplicando a Fórmula de Shumakovich a Γ , encontramos:

$$\begin{aligned} St(\Gamma) &= \sum_p s(p) ind_{\Gamma}(p) \\ &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) \\ &= 1 + 2 + 1 = 4. \end{aligned}$$

3.3 Fórmulas de Polyak

Nas seções anteriores, apresentamos fórmulas para calcular os invariantes de Arnold usando noções de índices. Agora vamos apresentar as fórmulas de Polyak para calcular tais invariantes. Para obter estas fórmulas Polyak utilizou o diagrama de Gauss de uma curva plana fechada Γ com um ponto base fixado, que chamaremos diagrama base de Gauss. Aqui nosso objetivo é demonstrar as fórmulas de Polyak. Para isso vamos definir o sinal de uma corda de um diagrama de Gauss G e uma função sobre o conjunto dos diagramas de Gauss.

Em 2.46 definimos o invariante de curvas conhecido como diagrama de Gauss. Nesta seção será conveniente considerar o **diagrama base de Gauss**, isto é, vamos assumir que há um ponto base marcado em S^1 (diferente das extremidades das cordas). Como na seção anterior, a escolha deste ponto base e a orientação do círculo fixam um ponto sobre a representação da curva, ponto este que define uma ordenação “(1, 2)” nas direções dos ramos de saída de cada ponto duplo curva. A partir destas orientações definimos então o sinal da corda:

Definição 3.13 *Seja G um diagrama base de Gauss de uma curva Γ , com ponto base $*$ fixado. Se p é um ponto duplo de Γ que dá origem à corda c , então definimos o **sinal** da corda c , que denotamos por $s(c)$, de acordo com a regra:*

- (i) $s(c) = 1$, se as direções dos ramos “(1, 2)” do ponto duplo p orientam o plano negativamente.
- (ii) $s(c) = -1$, se as direções dos ramos “(1, 2)” do ponto duplo p orientam o plano positivamente.

Observação 3.14 *A definição acima poderia ser reescrita da seguinte forma:*

Dados um diagrama base de Gauss G de uma curva Γ , com ponto base $$ fixado, e p um ponto duplo de Γ que dá origem à corda c , então o **sinal** da corda c , denotado por $s(c)$, é dado por:*

$$s(c) = s(p)$$

onde $s(p)$ é o sinal introduzido na definição 3.9 da seção anterior.

A figura abaixo ilustra o diagrama base de Gauss para a curva Γ da figura 3.1.

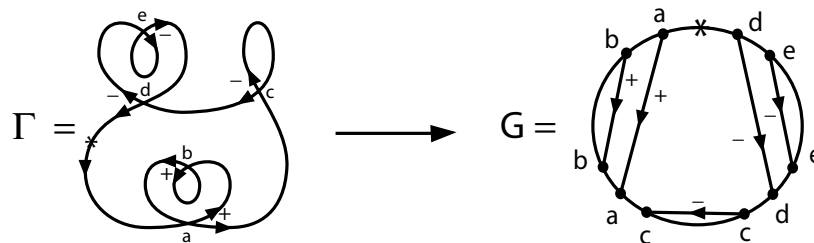


Figura 3.34: Diagrama base de Gauss de Γ .

Os diagramas de Gauss com duas cordas são ilustrados na figura 3.35. Observemos que a notação B_i foi introduzida por Polyak em [Po].

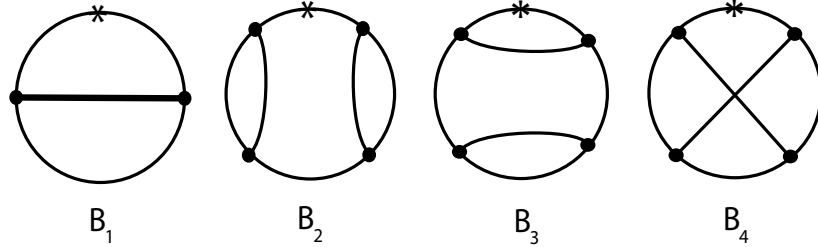


Figura 3.35: Diagramas de duas cordas.

Definição 3.15 *Dados um diagrama base de Gauss G e subdiagramas A deste, definimos uma **função de valor racional** sobre o conjunto de diagramas base de Gauss, denotada por $\langle A, G \rangle$, da seguinte maneira:*

$$\langle A, G \rangle = \sum_{G_A} \prod_{c \in G_A} s(c),$$

onde a soma é tomada sobre todos os subdiagramas G_A do tipo A e o produto é tomado sobre todas as cordas de G_A .

Observação 3.16 *No que segue, vamos considerar subdiagramas de duas cordas dos tipos B_2 , B_3 e B_4 .*

Com estas definições em mãos, podemos estabelecer as fórmulas de Polyak para os invariantes J^+ , J^- e St :

Teorema 3.17 Fórmulas de Polyak:

Seja G um diagrama base de Gauss de uma curva plana fechada Γ . Então:

$$(i) \quad J^+(\Gamma) = \langle B_2, G \rangle - \langle B_3, G \rangle - 3 \langle B_4, G \rangle - \frac{n + I_w^2(\Gamma) - 1}{2};$$

$$(ii) \quad J^-(\Gamma) = \langle B_2, G \rangle - \langle B_3, G \rangle - 3 \langle B_4, G \rangle - \frac{3n + I_w^2(\Gamma) - 1}{2};$$

$$(iii) \text{St}(\Gamma) = -\frac{1}{2} \langle B_2, G \rangle + \frac{1}{2} \langle B_3, G \rangle + \frac{1}{2} \langle B_4, G \rangle + \frac{n + I_w^2(\Gamma) - 1}{4},$$

onde n é o número de pontos duplos de Γ e $I_w(\Gamma)$ é o índice de Whitney de Γ .

Demonstração:

Para as curvas básicas K_i da figura 2.5, isto pode ser checado diretamente. Por exemplo:

1. O diagrama de Gauss da curva básica K_0 pode ser visto na figura 3.36:

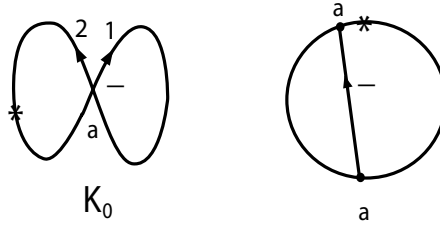


Figura 3.36: Diagrama de Gauss da curva básica K_0 .

Este diagrama não possui subdiagramas dos tipos B_i , $i = 1, 2, 3, 4$.

Logo, como $I_w(K_0) = 0$, temos:

$$(i) J^+(K_0) = -\frac{1 + 0 - 1}{2} = 0;$$

$$(ii) J^-(K_0) = -\frac{3 + 0 - 1}{2} = -1;$$

$$(iii) \text{St}(K_0) = \frac{1 + 0 - 1}{4} = 0.$$

2. O diagrama de Gauss da curva básica K_1 pode ser visto na figura 3.37:

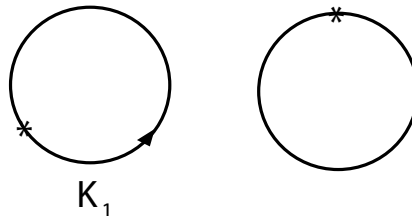


Figura 3.37: Diagrama de Gauss da curva básica K_1 .

Este diagrama não possui cordas e assim, não tem subdiagramas dos tipos B_i , $i = 1, 2, 3, 4$.

Logo, como $I_w(K_1) = 1$, temos:

$$(i) J^+(K_1) = -\frac{0+1-1}{2} = 0;$$

$$(ii) J^-(K_1) = -\frac{0+1-1}{2} = 0;$$

$$(iii) St(K_1) = \frac{0+1-1}{4} = 0.$$

3. O diagrama de Gauss da curva básica K_2 pode ser visto na figura 3.38:

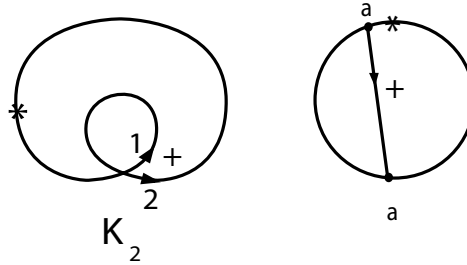


Figura 3.38: Diagrama de Gauss da curva básica K_2 .

Este diagrama não possui subdiagramas dos tipos B_i , $i = 1, 2, 3, 4$.

Logo, como $I_w(K_2) = 2$, temos:

$$(i) J^+(K_2) = -\frac{1+4-1}{2} = -2;$$

$$(ii) J^-(K_2) = -\frac{3+4-1}{2} = -3;$$

$$(iii) St(K_2) = \frac{1+4-1}{4} = 1.$$

4. O diagrama de Gauss da curva básica K_3 pode ser visto na figura 3.39:

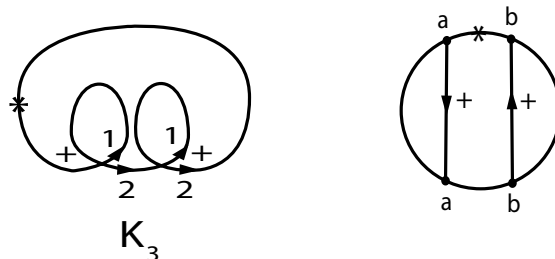


Figura 3.39: Diagrama de Gauss da curva básica K_3 .

Este diagrama é um diagrama do tipo B_2 e assim $\langle B_2, G \rangle = 1 \cdot 1 = 1$.

Como $I_w(K_3) = 3$, temos:

$$(i) J^+(K_3) = 1 - \frac{2 + 9 - 1}{2} = -4;$$

$$(ii) J^-(K_3) = 1 - \frac{6 + 9 - 1}{2} = -6;$$

$$(iii) St(K_3) = -\frac{1}{2} + \frac{2 + 9 - 1}{4} = 2.$$

Podemos generalizar o resultado para cada uma das curvas básicas K_{i+1} , $i \geq 2$.

Na figura abaixo, ilustramos a curva K_{i+1} e seu diagrama base de Gauss:

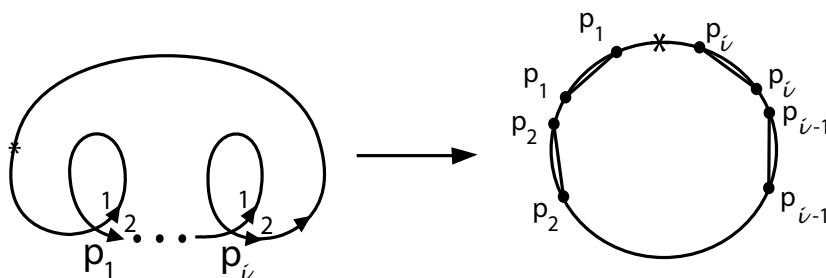


Figura 3.40: Curva básica K_{i+1} e seu diagrama base de Gauss.

Este diagrama possui i cordas, que combinadas duas a duas nos dão $\frac{i!}{(i-2)!2!}$ (com $i \geq 2$) subdiagramas do tipo B_2 . Observemos ainda que este diagrama não possui subdiagramas dos tipos B_3 e B_4 .

Como os ramos “(1, 2)” de cada ponto duplo orientam o plano negativamente, o sinal de cada uma das cordas é +1. Isso nos dá $\langle B_2, G \rangle = \frac{i!}{(i-2)!2!}$.

Logo, como $I_w(K_{i+1}) = i + 1$ e $n = i$, resulta:

$$\begin{aligned}
 \text{(i) } J^+(K_{i+1}) &= \langle B_2, G \rangle - \langle B_3, G \rangle - 3 \langle B_4, G \rangle - \frac{n + I_w^2(K_{i+1}) - 1}{2} \\
 &= \frac{i!}{(i-2)!2!} - \frac{i + (i+1)^2 - 1}{2} \\
 &= \frac{i^2 - i - (i^2 + 3i)}{2} = -2i, \\
 \text{(ii) } J^-(K_{i+1}) &= \langle B_2, G \rangle - \langle B_3, G \rangle - 3 \langle B_4, G \rangle - \frac{3n + I_w^2(K_{i+1}) - 1}{2} \\
 &= \frac{i!}{(i-2)!2!} - \frac{3i + (i+1)^2 - 1}{2} \\
 &= \frac{i^2 - i - (i^2 + 5i)}{2} = -3i, \\
 \text{(iii) } St(K_{i+1}) &= -\frac{1}{2} \langle B_2, G \rangle + \frac{1}{2} \langle B_3, G \rangle + \frac{1}{2} \langle B_4, G \rangle + \frac{n + I_w^2(K_{i+1}) - 1}{4} \\
 &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{i!}{(i-2)!2!} - \frac{i + (i+1)^2 - 1}{4} \\
 &= -\frac{i(i-1) + i + i^2 + 2i + 1 - 1}{4} = i,
 \end{aligned}$$

conforme a normalização dada por Arnold em 2.3.1.

Como para qualquer curva plana fechada α é possível encontrar um caminho genérico para uma curva básica de mesmo índice de Whitney I_w e como o valor dos invariantes J^\pm

e St para a curva α são dados pelo valor da normalização sobre a curva básica de mesmo índice, acrescidos dos incrementos correspondentes à transição do caminho genérico entre as curvas, é suficiente verificar o que acontece com as fórmulas de Polyak sob as três perestroikas elementares, como fizemos nas demonstrações das fórmulas de Viro e da fórmula de Shumakovich.

Assim, passemos à verificação do que acontece com as fórmulas de Polyak sob as três perestroikas:

Perestroika auto-tangência direta: Consideremos o cruzamento de uma auto-tangência direta por uma curva plana fechada Γ gerando dois novos pontos duplos e, conseqüentemente, duas novas cordas no diagrama de Gauss, conforme figura 3.41.

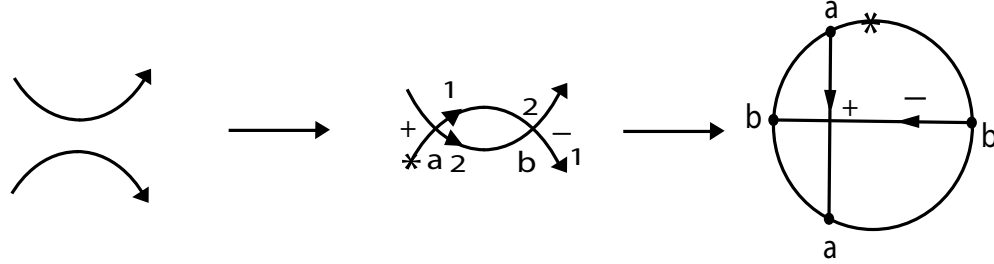


Figura 3.41: Cordas do diagrama de Gauss resultantes de uma auto-tangência direta.

Notemos que os sinais dessas novas cordas, digamos $s(c_1)$ e $s(c_2)$, são opostos. Assim, os valores $\langle B_2, G \rangle$ e $\langle B_3, G \rangle$ não mudam. Apenas o valor de $\langle B_4, G \rangle$ altera; na verdade, ele decresce por 1.

Se Γ' é a curva Γ após o cruzamento da auto-tangência direta, n é o número de pontos duplos de Γ , G é o diagrama de Gauss de Γ e B_2 , B_3 e B_4 são subdiagramas de G , temos:

$$\begin{aligned}
 \text{(i) } J^+(\Gamma') &= \langle B_2, G \rangle - \langle B_3, G \rangle - 3 \left(\langle B_4, G \rangle - 1 \right) - \frac{(n+2) + I_w^2(\Gamma) - 1}{2} \\
 &= \langle B_2, G \rangle - \langle B_3, G \rangle - 3 \langle B_4, G \rangle + 3 - \frac{n + I_w^2(\Gamma) - 1}{2} - 1 \\
 &= J^+(\Gamma) + 2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii) } J^-(\Gamma') &= \langle B_2, G \rangle - \langle B_3, G \rangle - 3 \left(\langle B_4, G \rangle - 1 \right) - \frac{3(n+2) + I_w^2(\Gamma) - 1}{2} \\
&= \langle B_2, G \rangle - \langle B_3, G \rangle - 3 \langle B_4, G \rangle + 3 - \frac{3n + I_w^2(\Gamma) - 1}{2} - 3 \\
&= J^-(\Gamma), \\
\text{(iii) } St(\Gamma') &= -\frac{1}{2} \langle B_2, G \rangle + \frac{1}{2} \langle B_3, G \rangle + \frac{1}{2} \left(\langle B_4, G \rangle - 1 \right) + \frac{(n+2) + I_w^2(\Gamma) - 1}{4} \\
&= -\frac{1}{2} \langle B_2, G \rangle + \frac{1}{2} \langle B_3, G \rangle + \frac{1}{2} \langle B_4, G \rangle - \frac{1}{2} + \frac{n + I_w^2(\Gamma) - 1}{4} + \frac{1}{2} \\
&= St(\Gamma),
\end{aligned}$$

conforme os valores determinados por Arnold para este cruzamento do discriminante.

Perestroika de auto-tangência inversa: Consideremos o cruzamento de uma auto-tangência inversa por uma curva plana fechada Γ gerando dois novos pontos duplos e, conseqüentemente, duas novas cordas no diagrama de Gauss, conforme figura 3.42.

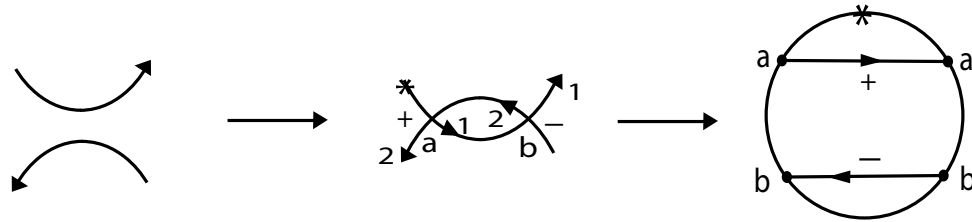


Figura 3.42: Cordas do diagrama de Gauss resultantes de uma auto-tangência inversa.

Notemos que os sinais dessas novas cordas, digamos $s(c_1)$ e $s(c_2)$, também são opostos, como no caso de uma auto-tangência direta. Assim, os valores $\langle B_2, G \rangle$ e $\langle B_4, G \rangle$ também não mudam. No entanto, o valor de $\langle B_3, G \rangle$ decresce por 1.

Se Γ' é a curva Γ após o cruzamento da auto-tangência inversa, n é o número de pontos duplos de Γ , G é o diagrama de Gauss de Γ e B_2 , B_3 e B_4 são subdiagramas de G , temos:

$$\begin{aligned}
\text{(i) } J^+(\Gamma') &= \langle B_2, G \rangle - \left(\langle B_3, G \rangle - 1 \right) - 3 \langle B_4, G \rangle - \frac{(n+2) + I_w^2(\Gamma) - 1}{2} \\
&= \langle B_2, G \rangle - \langle B_3, G \rangle + 1 - 3 \langle B_4, G \rangle - \frac{n + I_w^2(\Gamma) - 1}{2} - 1 \\
&= J^+(\Gamma), \\
\text{(ii) } J^-(\Gamma') &= \langle B_2, G \rangle - \left(\langle B_3, G \rangle - 1 \right) - 3 \langle B_4, G \rangle - \frac{3(n+2) + I_w^2(\Gamma) - 1}{2} \\
&= \langle B_2, G \rangle - \langle B_3, G \rangle + 1 - 3 \langle B_4, G \rangle - \frac{3n + I_w^2(\Gamma) - 1}{2} - 3 \\
&= J^-(\Gamma) - 2, \\
\text{(iii) } St(\Gamma') &= -\frac{1}{2} \langle B_2, G \rangle + \frac{1}{2} \left(\langle B_3, G \rangle - 1 \right) + \frac{1}{2} \langle B_4, G \rangle + \frac{(n+2) + I_w^2(\Gamma) - 1}{4} \\
&= -\frac{1}{2} \langle B_2, G \rangle + \frac{1}{2} \langle B_3, G \rangle - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \langle B_4, G \rangle + \frac{n + I_w^2(\Gamma) - 1}{4} + \frac{1}{2} \\
&= St(\Gamma),
\end{aligned}$$

como Arnold determinou para esta transição de caminho genérico.

Perestroika de ponto triplo: O número de pontos duplos não muda sob um cruzamento de um ponto triplo. Logo, não são acrescentadas cordas ao diagrama de Gauss da curva. Porém, a ordem com que a curva visita os pontos duplos é alterada, o que acarreta uma mudança no diagrama de Gauss da curva, como observaremos nos 4 cruzamentos positivos de um ponto triplo.

Caso 1: Consideremos o cruzamento de ponto triplo mostrado na figura 3.43 , com os respectivos subdiagramas de Gauss dados apenas pelas cordas envolvidas neste cruzamento.

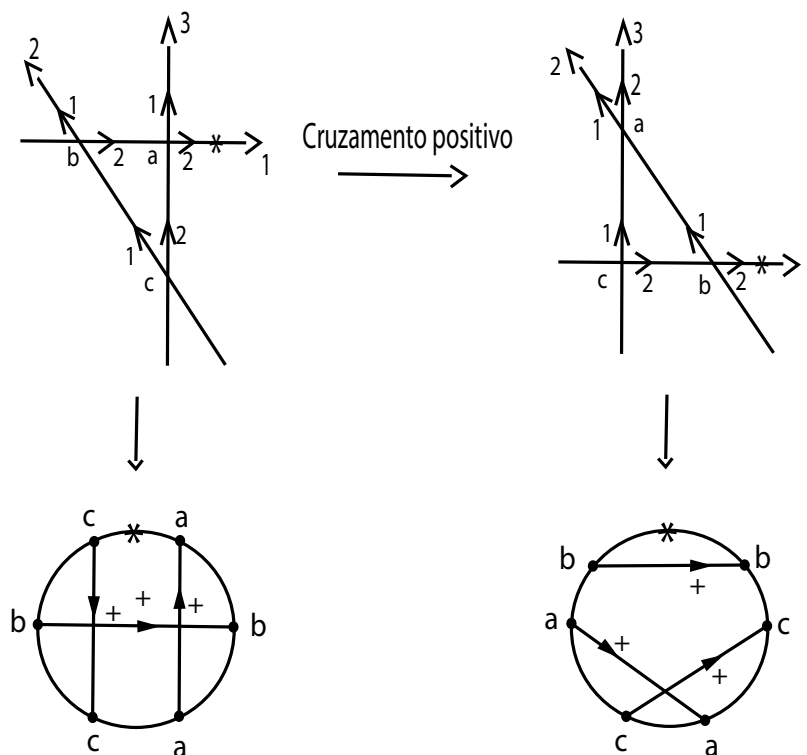


Figura 3.43: Cordas do diagrama de Gauss resultantes do cruzamento do caso 1.

Das cordas representadas na figura 3.43, obtemos o subdiagramas B_i , com $i \in \{2, 3, 4\}$, das figuras 3.44 e 3.45.

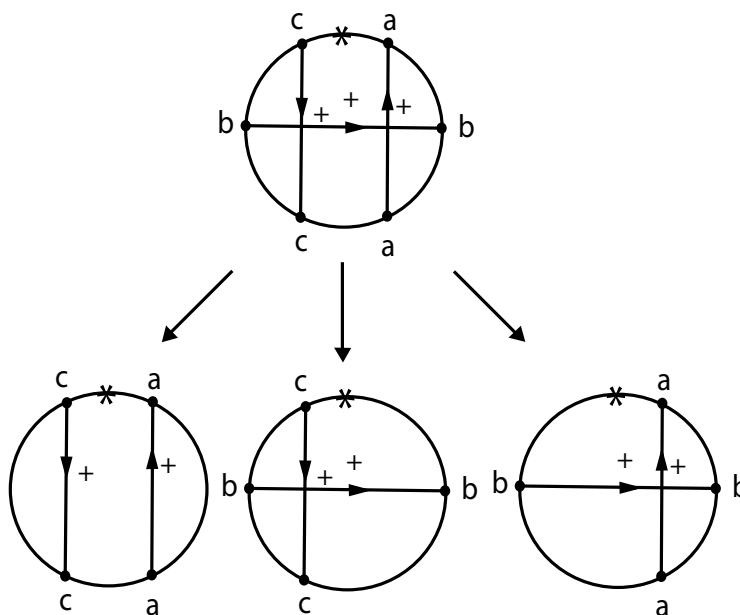


Figura 3.44: Subdiagramas envolvidos no cruzamento do caso 1.

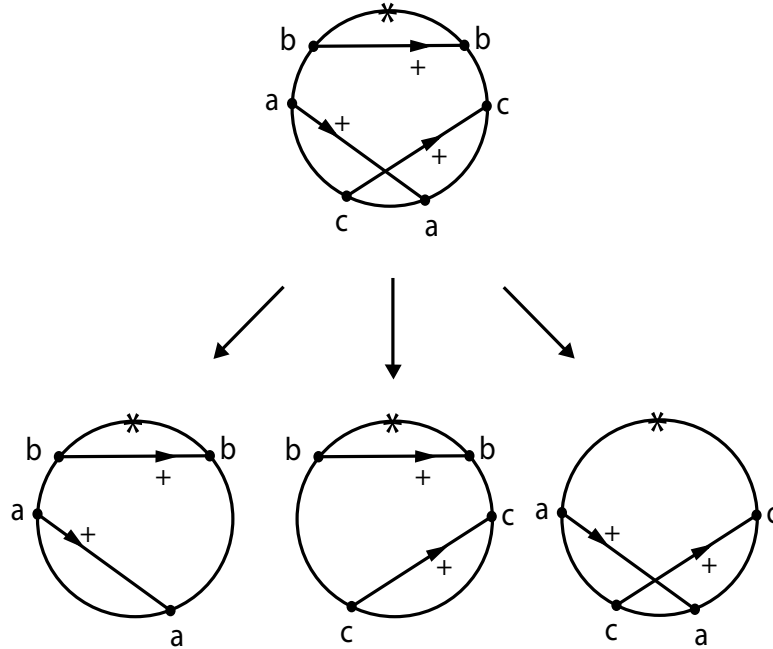


Figura 3.45: Subdiagramas envolvidos no cruzamento do caso 1.

Assim, com o cruzamento do ponto triplo os valores $\langle B_2, G \rangle$ e $\langle B_4, G \rangle$ diminuem por 1 e o valor de $\langle B_3, G \rangle$ aumenta por 2.

Se Γ' é a curva Γ após este cruzamento de ponto triplo, n é o número de pontos duplos de Γ , G é o diagrama de Gauss de Γ e B_2 , B_3 e B_4 são subdiagramas de G , temos:

$$\begin{aligned}
 \text{(i) } J^+(\Gamma') &= \left(\langle B_2, G \rangle - 1 \right) - \left(\langle B_3, G \rangle + 2 \right) - 3 \left(\langle B_4, G \rangle - 1 \right) - \frac{n + I_w^2(\Gamma) - 1}{2} \\
 &= \langle B_2, G \rangle - \langle B_3, G \rangle - 3 \langle B_4, G \rangle - \frac{n + I_w^2(\Gamma) - 1}{2} \\
 &= J^+(\Gamma).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii) } J^-(\Gamma') &= \left(\langle B_2, G \rangle - 1 \right) - \left(\langle B_3, G \rangle + 2 \right) - 3 \left(\langle B_4, G \rangle - 1 \right) - \frac{3n + I_w^2(\Gamma) - 1}{2} \\
 &= \langle B_2, G \rangle - \langle B_3, G \rangle + 1 - 3 \langle B_4, G \rangle - \frac{3n + I_w^2(\Gamma) - 1}{2} \\
 &= J^-(\Gamma).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(iii) } St(\Gamma') &= -\frac{1}{2} \left(\langle B_2, G \rangle - 1 \right) + \frac{1}{2} \left(\langle B_3, G \rangle + 2 \right) + \frac{1}{2} \left(\langle B_4, G \rangle - 1 \right) \\
 &\quad + \frac{n + I_w^2(\Gamma) - 1}{4} \\
 &= -\frac{1}{2} \langle B_2, G \rangle + \frac{1}{2} \langle B_3, G \rangle + \frac{1}{2} \langle B_4, G \rangle + \frac{n + I_w^2(\Gamma) - 1}{4} + 1 \\
 &= St(\Gamma) + 1.
 \end{aligned}$$

Caso 2: Consideremos o cruzamento de ponto triplo mostrado na figura 3.46, com os respectivos subdiagramas de Gauss dados apenas pelas cordas envolvidas neste cruzamento.

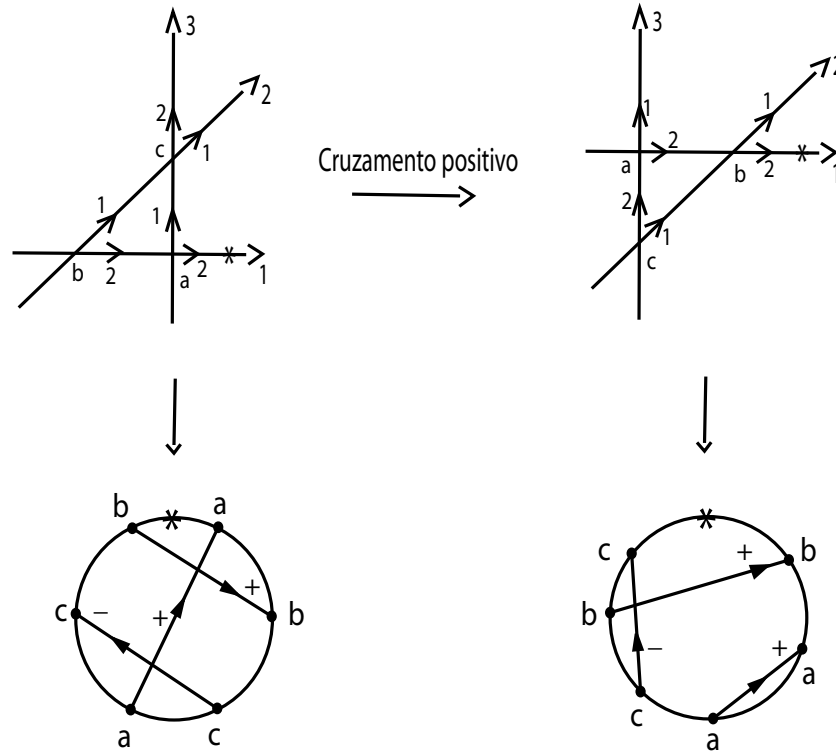


Figura 3.46: Cordas do diagrama de Gauss resultantes do cruzamento do caso 2.

Das cordas representadas na figura 3.46, obtemos o subdiagramas B_i , com $i \in \{2, 3, 4\}$, das figuras 3.47 e 3.48.

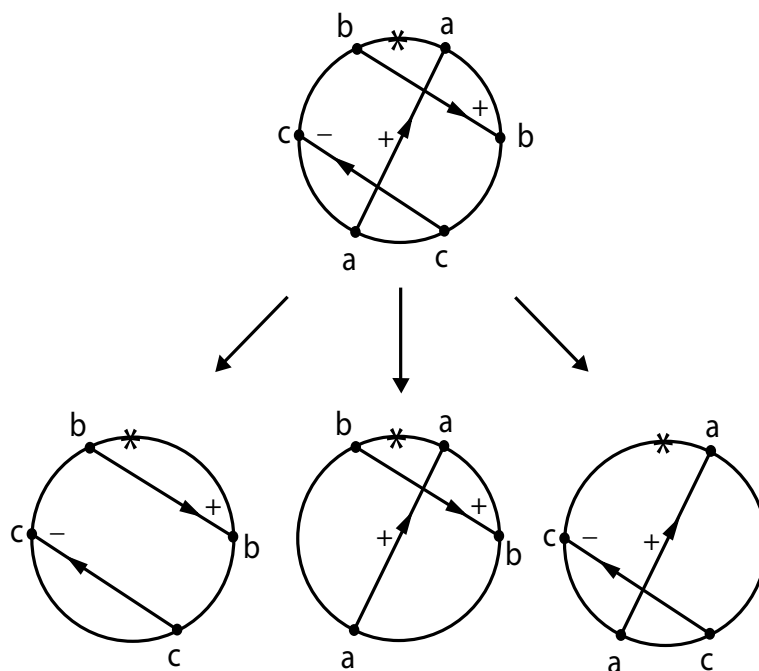


Figura 3.47: Subdiagramas envolvidos no cruzamento do caso 2.

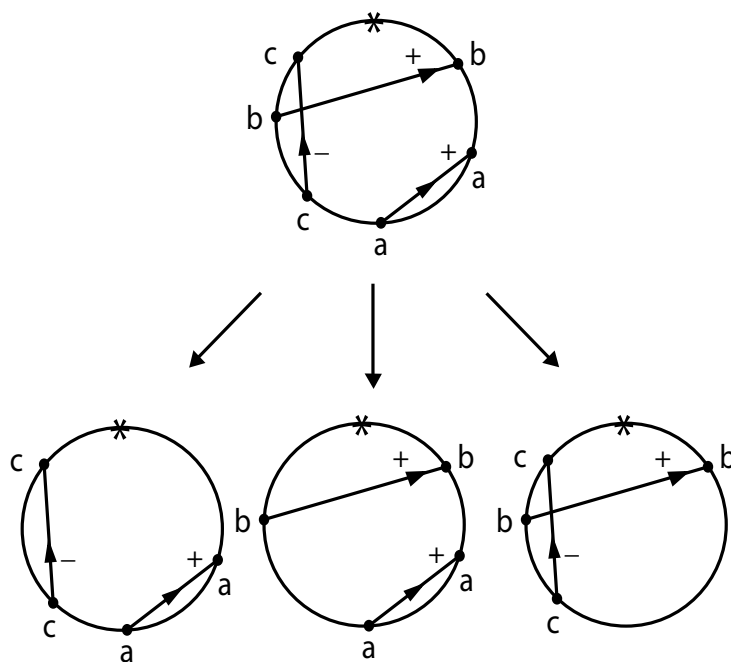


Figura 3.48: Subdiagramas envolvidos no cruzamento do caso 1.

Como no caso 1, com este cruzamento de ponto triplo os valores $\langle B_2, G \rangle$ e $\langle B_4, G \rangle$ também diminuem por 1 e o valor de $\langle B_3, G \rangle$ também aumenta por 2.

Logo, se Γ' é a curva Γ após este cruzamento de ponto triplo, n é o número de pontos duplos de Γ , G é o diagrama de Gauss de Γ e B_2 , B_3 e B_4 são subdiagramas de G , temos como no caso 1:

(i) $J^+(\Gamma') = J^+(\Gamma)$.

(ii) $J^-(\Gamma') = J^-(\Gamma)$.

(iii) $St(\Gamma') = St(\Gamma) + 1$.

Caso 3: Consideremos o cruzamento de ponto triplo da figura 3.49, com os respectivos subdiagramas de Gauss dados apenas pelas cordas envolvidas neste cruzamento.

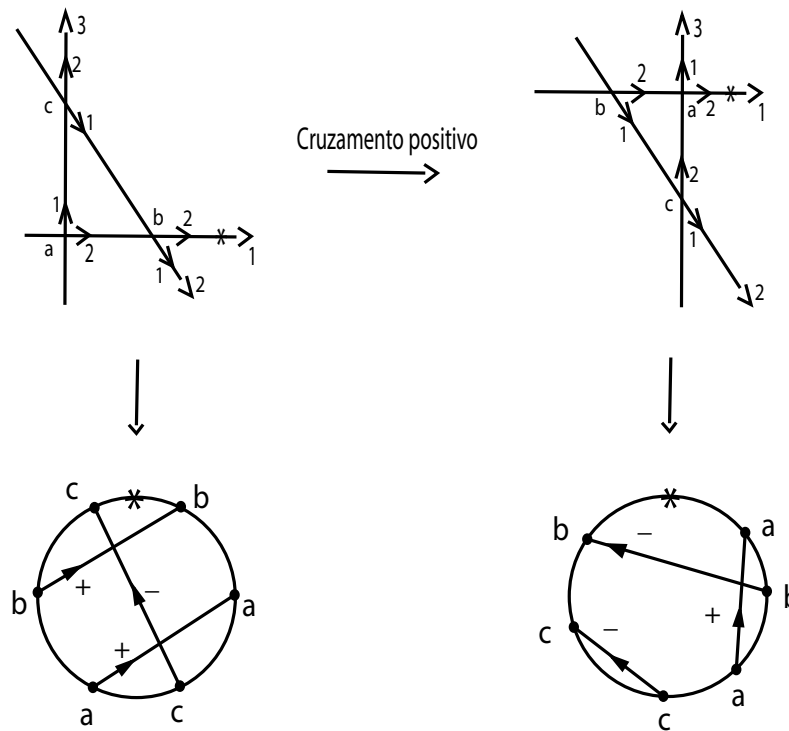


Figura 3.49: Cordas do diagrama de Gauss resultantes do cruzamento do caso 3.

Das cordas representadas na figura 3.49, obtemos o subdiagramas B_i , com $i \in \{2, 3, 4\}$, das figuras 3.50 e 3.51.

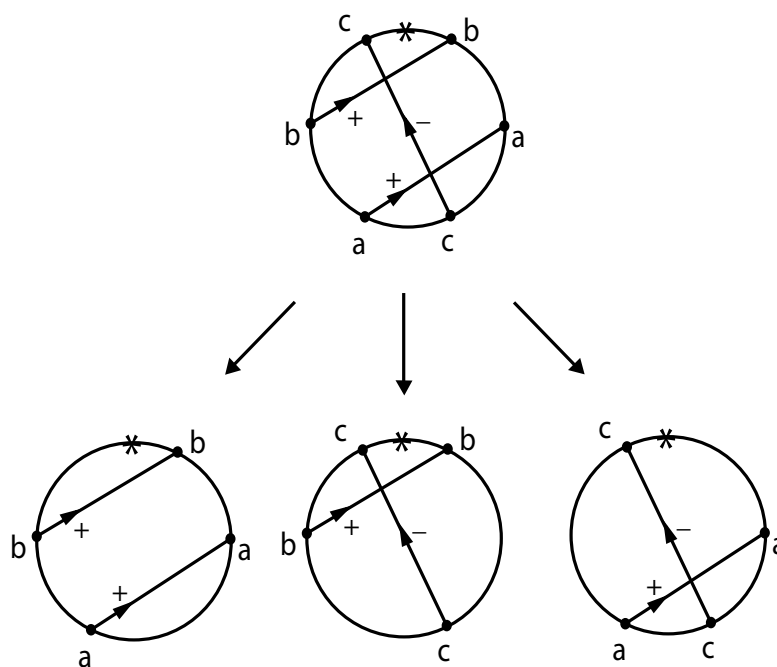


Figura 3.50: Subdiagramas envolvidos no cruzamento do caso 3.

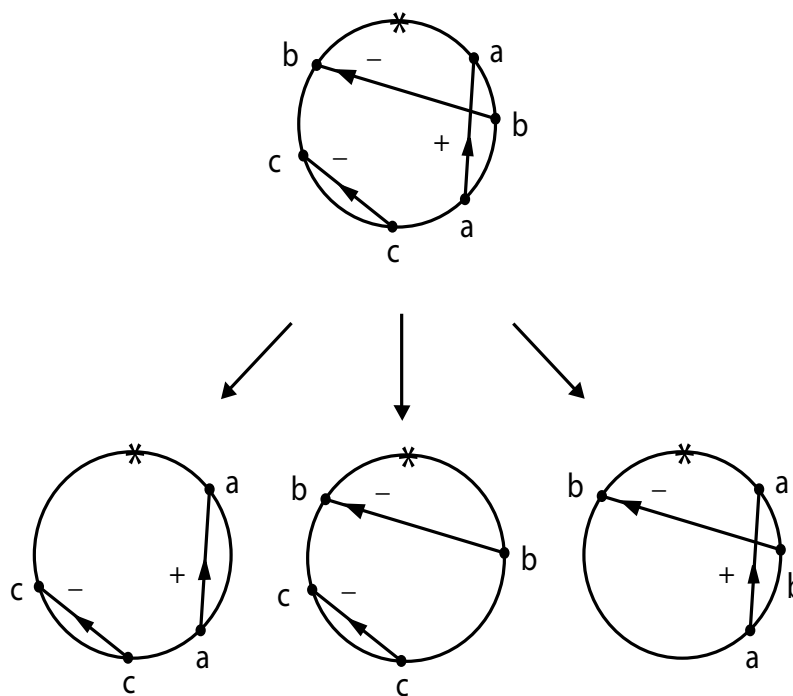


Figura 3.51: Subdiagramas envolvidos no cruzamento do caso 3.

Como nos casos 1 e 2, este cruzamento de ponto triplo altera os valores de $\langle B_i, G \rangle$,

$i \in \{2, 3, 4\}$, da seguinte maneira: $\langle B_2, G \rangle$ e $\langle B_4, G \rangle$ diminuem por 1 e o valor de $\langle B_3, G \rangle$ aumenta por 2.

Se Γ possui n pontos duplos, possui diagrama base de Gauss G , com subdiagramas B_2, B_3 e B_4 , e se Γ' é a curva Γ após este cruzamento de ponto triplo, temos como nos casos anteriores:

(i) $J^+(\Gamma') = J^+(\Gamma)$.

(ii) $J^-(\Gamma') = J^-(\Gamma)$.

(iii) $St(\Gamma') = St(\Gamma) + 1$.

Caso 4: Consideremos o seguinte cruzamento de ponto triplo, com os respectivos subdiagramas de Gauss dados apenas pelas cordas envolvidas neste cruzamento:

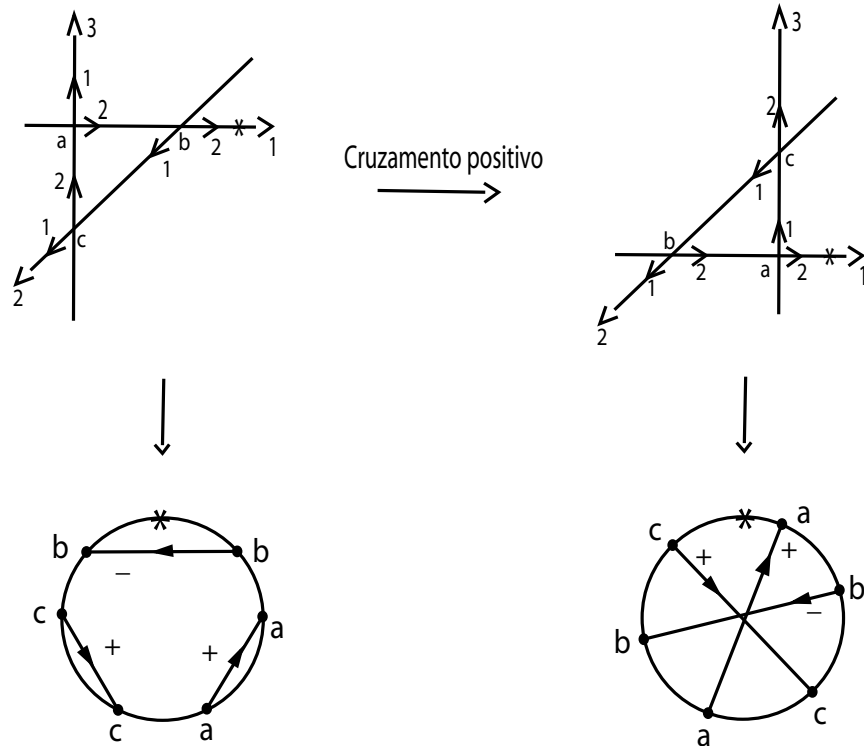


Figura 3.52: Cordas do diagrama de Gauss resultantes do cruzamento do caso 4.

Das cordas representadas na figura 3.52, obtemos o subdiagramas B_i , com $i \in \{2, 3, 4\}$, das figuras 3.53 e 3.54.

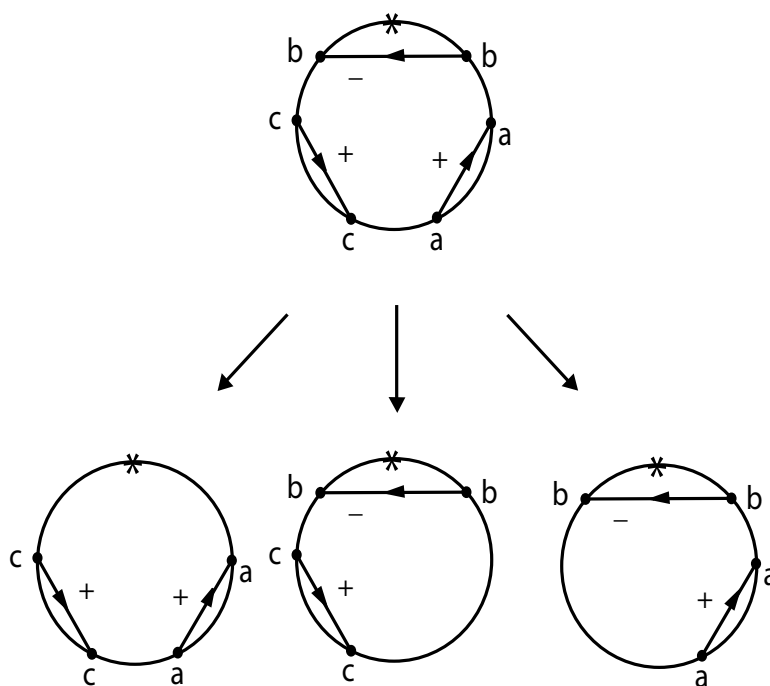


Figura 3.53: Subdiagramas envolvidos no cruzamento do caso 4.

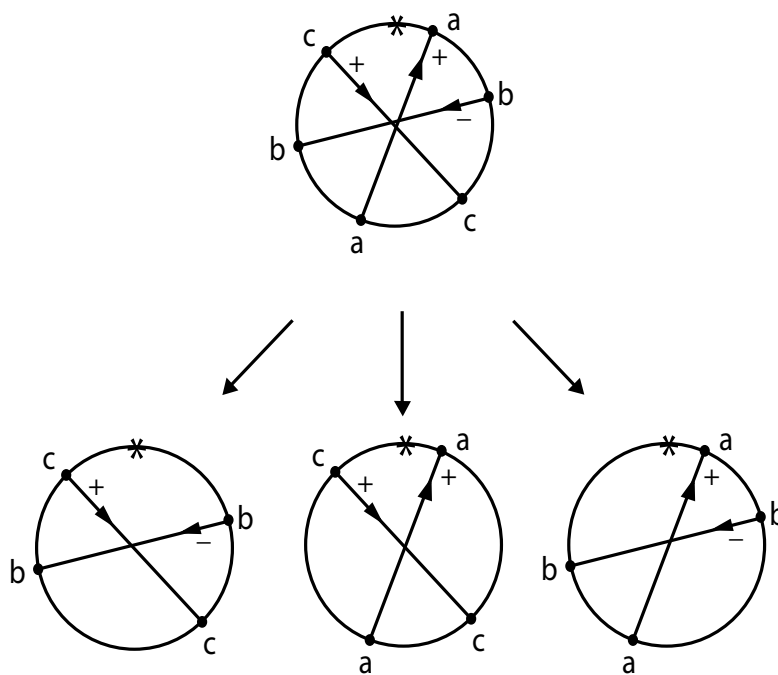


Figura 3.54: Subdiagramas envolvidos no cruzamento do caso 3.

Assim, temos as mesmas mudanças nos valores de $\langle B_2, G \rangle$, $\langle B_3, G \rangle$ e $\langle B_4, G \rangle$ como

nos casos anteriores.

Como nos casos anteriores, se a curva Γ possui n pontos duplos, G é o diagrama de Gauss de Γ , com subdiagramas B_2 , B_3 e B_4 , e Γ' denota a curva Γ após este cruzamento de ponto triplo, então:

$$(i) J^+(\Gamma') = J^+(\Gamma).$$

$$(ii) J^-(\Gamma') = J^-(\Gamma).$$

$$(iii) St(\Gamma') = St(\Gamma) + 1.$$

Logo, os invariantes J^\pm não se alteram quando atravessamos o discriminante de ponto triplo. Apenas o valor de St sofre modificação: ele é acrescido por 1, conforme Arnold determinou para um cruzamento positivo do discriminante St .

Agora resta provar que as fórmulas de Polyak não dependem do ponto base escolhido.

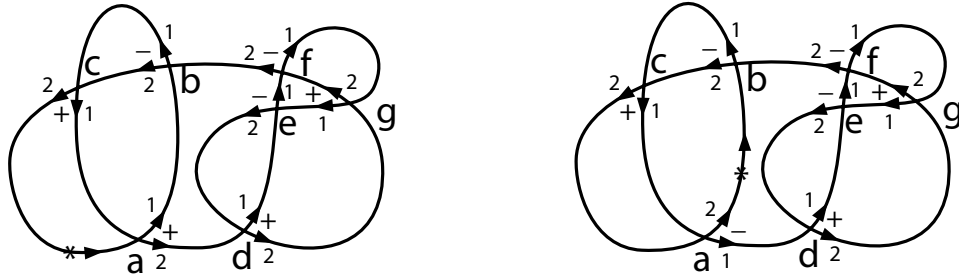


Figura 3.55: Curva Γ e escolhas do ponto base.

Quando um ponto base se move passando por um ponto duplo p de uma curva plana fechada Γ , as únicas mudanças que ocorrem com as fórmulas de Polyak são nos termos correspondentes às representações B_i onde uma das cordas é a corda correspondente ao ponto duplo p . Os termos correspondentes às representações de B_2 e B_3 trocam: os diagramas do tipo B_2 se tornam do tipo B_3 e os diagramas do tipo B_3 se tornam do tipo B_2 . Além desta troca, ainda ocorre uma mudança no sinal da corda referente ao ponto p . No entanto, com esta mudança de sinal e as trocas das representações, $\langle B_2 - B_3, G \rangle$ é preservado.

Podemos observar isto no exemplo da figura 3.55:

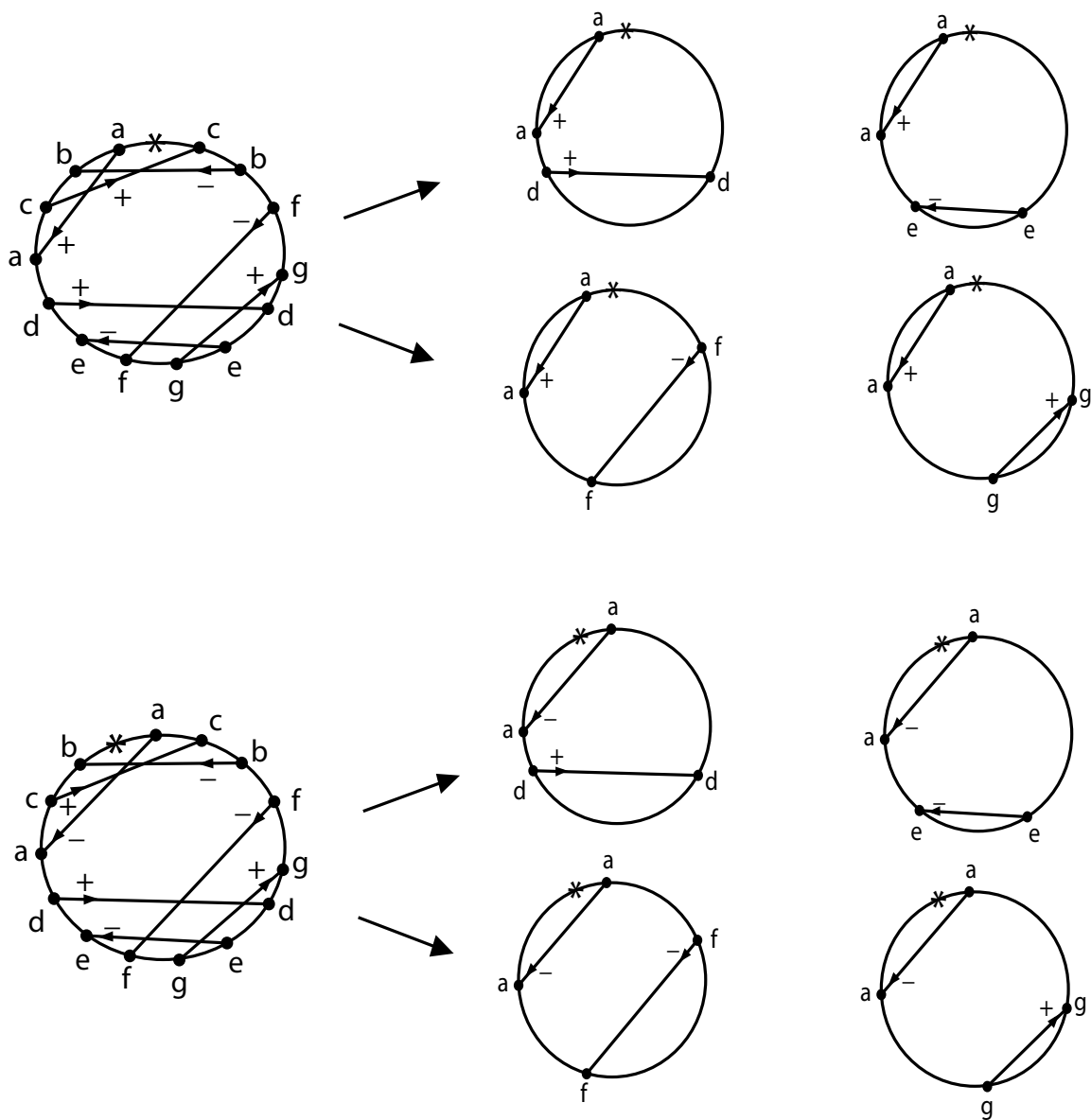


Figura 3.56: Representações de B_2 e B_3 para Γ antes e após mudança no ponto base.

Vimos que quando o ponto base se move passando ao longo de um ponto duplo p a corda correspondente a este ponto muda de sinal. Isto também acarreta mudanças nas representações de B_4 que envolvem esta corda. Observemos que a soma dos sinais das novas representações de B_4 que envolvem a corda que mudou de sinal com os sinais das mesmas representações antes da mudança do ponto base é igual a zero. Logo, o valor de $\langle B_4, G \rangle$ também é preservado.

Isto também pode ser observado no exemplo da figura 3.55:

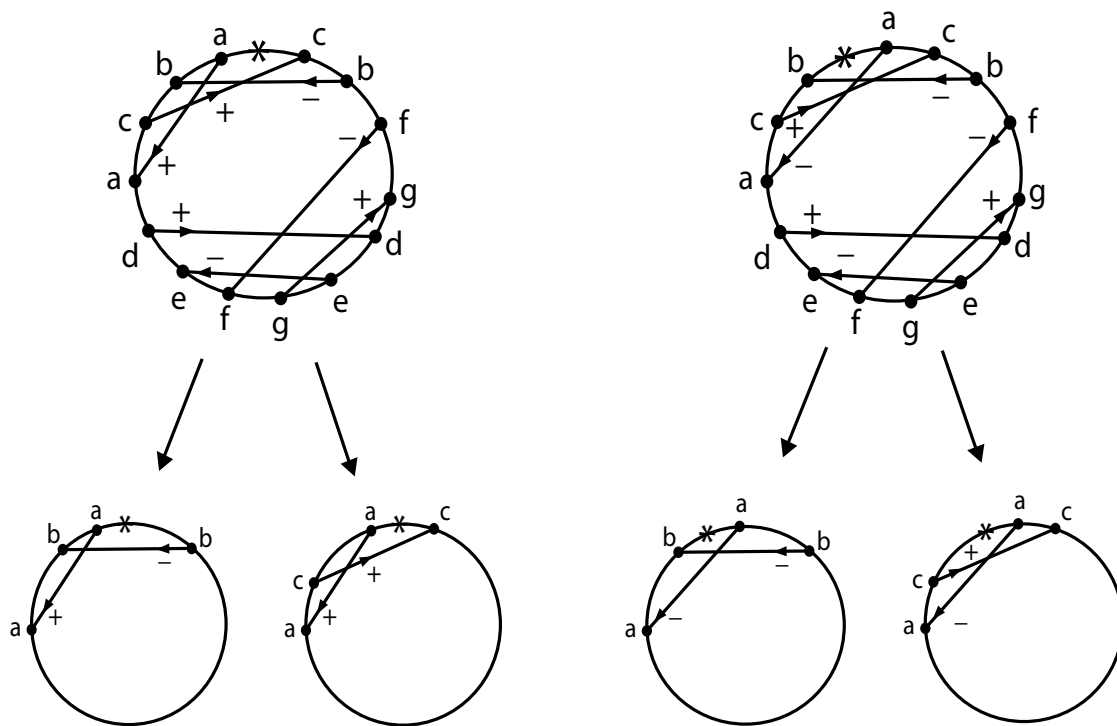


Figura 3.57: Representações de B_4 para Γ antes e após mudança no ponto base.

Dessa forma, fica provado que as fórmulas de Polyak para os invariantes J^\pm e St não dependem da escolha do ponto base.

□

Observação 3.18 Para obter o invariante J^- na demonstração acima, consideramos as fórmulas de Polyak. No entanto, tendo em mãos o valor do invariante J^+ também poderíamos ter utilizado o corolário 2.27 ($J^+ - J^- = n$) para obter o invariante J^- .

Exemplo:

A curva Γ da figura 3.34 possui os seguintes subdiagramas dos tipos B_2 e B_3 :

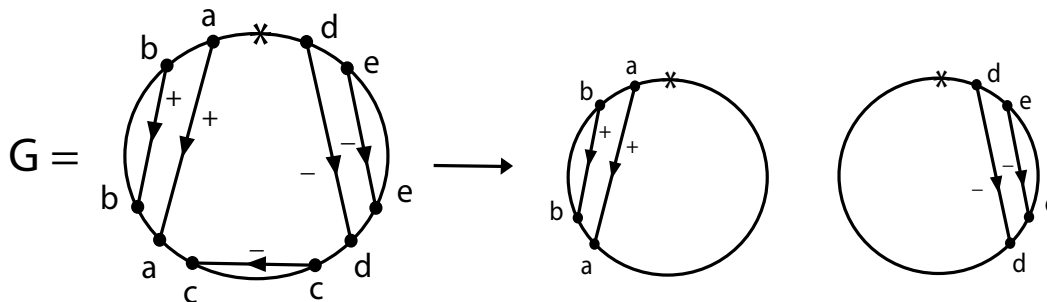
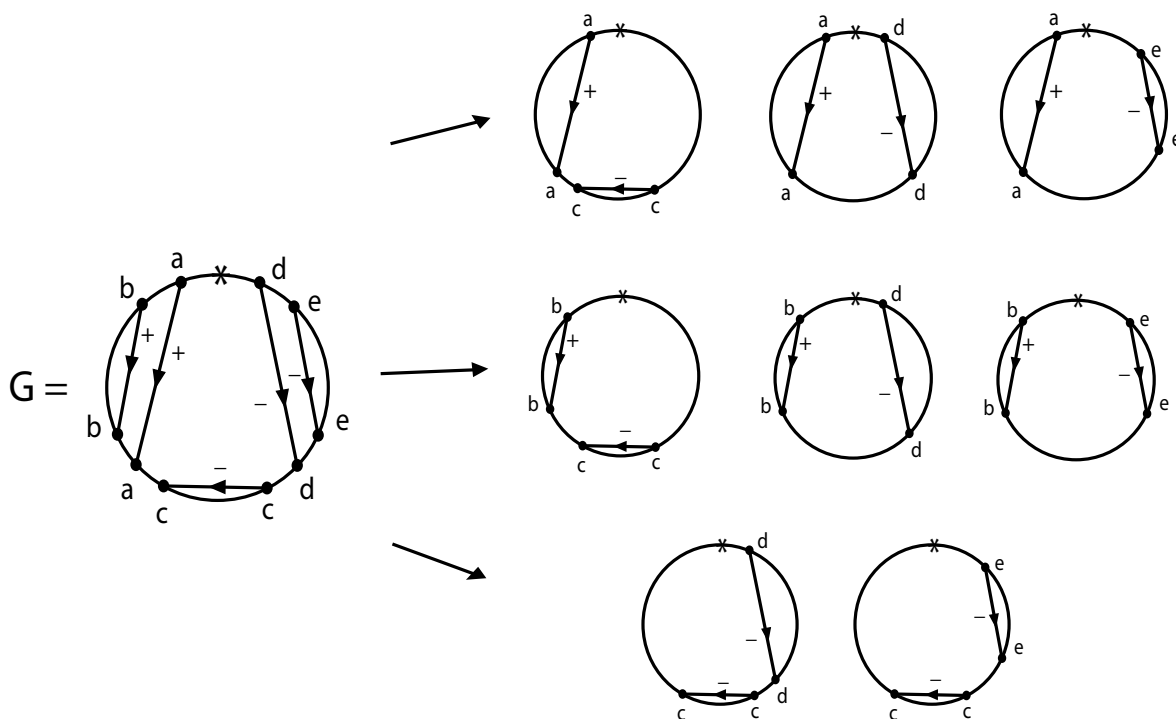


Figura 3.58: Subdiagramas do tipo B_3 .

Figura 3.59: Subdiagramas do tipo B_2 .

Temos:

- (a) $\langle B_2, G \rangle = (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) = -4$.
- (b) $\langle B_3, G \rangle = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 2$.
- (c) $\langle B_4, G \rangle = 0$.
- (d) $I_w(\Gamma) = 0$ e $n = 5$.

Assim, aplicando as fórmulas de Polyak à curva Γ , obtemos:

- (i) $J^+(\Gamma) = -4 - 2 - \frac{5-1}{2} = -8$,
- (ii) $J^-(\Gamma) = -4 - 2 - \frac{15-1}{2} = -13$,
- (iii) $St(\Gamma) = -\frac{1}{2} \cdot (-4) + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{5-1}{4} = 4$.

Conclusão

O objetivo deste trabalho foi apresentar e estudar os invariantes de Arnold de curvas planas genéricas, suas propriedades e definições axiomáticas, apresentando também algoritmos alternativos para calculá-los.

Após a publicação dos trabalhos de Arnold ([Ar1] e [Ar2]) outros matemáticos seguiram sua linha de estudo e obtiveram invariantes usando a Teoria de Vassiliev ([Va1] e [Va2]), em [Ai2] Aicardi obteve invariantes para frentes de ondas planas, já em [Ai1] estudou os invariantes de Arnold para o caso de curvas arborescentes, que são aquelas em que quaisquer de seus pontos duplos divide a curva em dois laços disjuntos. Goryunov em [Gor2] analisou as curvas planas imersas orientadas sem auto-tangência direta e obteve uma descrição dos invariantes tipo Vassiliev de ordem finita desse tipo de curvas. Ochiai obteve a integral de Kontsevich utilizando fórmulas do diagrama de Gauss e relacionando com os invariantes de curvas.

Como vimos no capítulo 3 existem outros algoritmos para calcular os invariantes de Arnold. Lembramos que o método de Arnold pode ser muito trabalhoso, já que para uma determinada curva plana fechada Γ a primeira coisa a se fazer é encontrar o índice de Whitney desta curva, $I_w(\Gamma)$, e depois encontrar um caminho genérico até a curva básica de mesmo índice que a curva Γ , para então considerarmos a normalização dada para as curvas básicas e os incrementos dados por cruzamentos de eventos não genéricos que acontecem neste caminho. Muitas vezes, determinar este caminho genérico pode ser um trabalho muito extenso e nem sempre é fácil encontrá-lo.

Neste sentido, utilizar as fórmulas de cálculo dos invariantes de Arnold dadas por Viro e Shumakovich pode ser interessante. A utilização destes métodos requer a introdução de novos conceitos, tais como o índice de uma componente conexa do complemento de uma curva, a suavização de um ponto duplo, a característica de Euler, a regra de Alexander (que facilita o cálculo do índice das componentes de uma curva em torno de um ponto duplo), o índice e o sinal de um ponto duplo, entre outros. No entanto, como estes conceitos são de fácil entendimento vale a pena introduzi-los para que as fórmulas possam ser utilizadas. Observamos também que as fórmulas de cada um destes autores isoladamente não nos dão os cálculos dos três invariantes introduzidos por Arnold e assim o conhecimento de apenas uma delas pode apenas simplificar parcialmente nossos cálculos.

Já no caso do algoritmo de Polyak o conceito essencial é o de diagrama de Gauss com ponto base fixado, que embora em casos de curvas planas com muitos pontos duplos seja

muito trabalhoso, pois teremos um grande número de subdiagramas dos tipos B_2 , B_3 e B_4 , ele nos fornece um invariante completo no caso de curvas esféricas, conforme mostrado em [Ch-Du].

Além dos métodos de Arnold e dos apresentados neste trabalho existem outros como por exemplo:

1. Aicardi apresenta em [Ai2] o método para o cálculo de invariantes de frentes de ondas, como caso particular das frentes de ondas sem cúspides saem os invariantes de curvas planas fechadas.
2. Em [MJ-RF] Mendes de Jesus e Romero-Fuster apresentam uma forma alternativa para o cálculo dos invariantes de Arnold utilizando pontes e canais.
3. Já N. Ito, utilizando a teoria de palavras (palavra é um objeto universal de nós, curvas, etc.) introduzida por V. Turaevi, reconstrói os invariantes básicos de Arnold e obtém outros invariantes para curvas (longas e frentes de ondas).

Como já comentamos na introdução através da Teoria de Vassiliev foram obtidos resultados acerca de invariantes de aplicações de superfícies no plano, de variedades, entre outras, com as técnicas estudadas nesta dissertação podemos passar ao estudo destes outros invariantes e buscar novas caracterizações.

Referências Bibliográficas

- [Ai1] AICARDI, F. , *Tree-like Curves. In: Singularities and Bifurcations*. Advances in Soviet Mathematics, 21, AMS, Providence, 1-36, (1994).
- [Ai2] AICARDI, F., *Discriminants and local invariants of planar fronts*. The Arnold-Gelfant seminars: geometry and singularity theory, edited bi V. I. Arnold, Birkhäuser, 1-76, (1997).
- [Ar1] ARNOLD, V. I., *Topological Invariants of Plane Curves and Caustics*. University lecture series, Vol. 5, AMS Providence (1994).
- [Ar2] ARNOLD, V. I., *Plane Curves, Their Invariants, Perestroikas and Classifications*. Advances in Soviet Mathematics, Vol. 21, (1994). American Mathematical Society. (1994).
- [Ch-Du] CHMUTOV, S.; DUZHIN, S., *Explicit Formulas for Arnold's Generic Curve Invariants*, <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.41.1814>, 1-16, (1995).
- [Gib] GIBSON, C. G., *Singular Points of Smooth Mappings*. Reasearch Notes in Mathematics, Pitman, London, (1978).
- [Go-Gu] GOLUBITSKY, M. and GUILLEMIN, V., *Stables Mappings and Their Singularities* . GTM 14, Springer-Verlag, New York, (1973).
- [Gor1] GORYUNOV, V. V., *Local invariants of mappings of surfaces into three space*. The Arnol'd-Gelfand mathematical seminars 223-225. Birkhauser, Boston, (1997).
- [Gor2] GORYUNOV, V. V., *Vassiliev type invariants in Arnold's J^+ - theory of plane curves without direct self-tangencies*. University of Liverpool, (1995).

- [HMR] HACON, D.; MENDES DE JESUS, C.; ROMERO-FUSTER, M. C., *Global aspects of the classification of stable maps of compact surfaces in the plane*. Rev. Semin. Iberoam. Mat. Singul. Tordesillas, Vol.3, 3-23, (2005).
- [Ha] HATCHER, A., *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, (2001).
- [It] ITO, N., *Invariants via word for curve and fronts*, arXiv: 0705.0412v2 [math.GT] 8 may 2007.
- [Ma] MASSEY, WILLIAM S., *Introducción a la topología algebraica*. Editorial Reverté, S.A., (1972).
- [MJ] MENDES DE JESUS, C., *Invariantes Topológicos de Aplicações Genéricas de Superfícies Compactas Orientáveis no Plano*. Tese de doutorado, PUC-Rio, Rio de Janeiro, (2001).
- [MJ-RF] MENDES DE JESUS, C.; ROMERO-FUSTER, M. C., *Bridges, channels ans Arnold's invariants for generic plane curves*. Topology and its Applications 125, 505-524 (2002).
- [Mu] MUNKRES, J. R. , *Topología*. 2ª edição. Prentice Hall, Madrid, (2002).
- [NB] NUÑO-BALLESTEROS, J. J. , *Sobre la funcion de bitangencia asociada a una curva generica en \mathbb{R}^3* . Tese de doutorado, Universidad de Valencia, (1991).
- [NB-RF] NUÑO-BALLESTEROS, J. J. ; ROMERO-FUSTER, M. C., *Singularidades de aplicaciones diferenciables*. Texto Didático, Universidad de Valencia, (2008).
- [Oc] OCHIAI, T., *Invariants of plane curves and Polyak-Viro type formulas for Vassiliev Invariants*. J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 11, 155-175 (2004).
- [Oh-Ai] OHMOTO, T.; AICARDI, F., *First order local invariants of apparent Contours*. Topology 45, 27-45(2006) .
- [Po] POLYAK, M., *Invariants of Curves and Fronts via Gauss Diagrams*. Preprint, (Max Planck Inst. fur Math., Bonn), (1994) .

- [Sh] SHUMAKOVICH, A., *Formulas for strangeness of plane curves*. Preprint Uppsala University (1994).
- [Va1] VASSILIEV, V., *Complements of discriminants of smooth maps: topology and applications*. AMS, Providence (1992).
- [Va2] VASSILIEV, V., *Cohomology of knot spaces*. Advances in Soviet Math. 1, 23-69 (1990).
- [Vi] VIRO, OLEG, *First degree invariants of generic curves on surfaces*. Preprint Uppsala University (1994).
- [Whi] WHITNEY, H., *On regular closed curves in the plane*. Compositio Math., 4 pp. 276-284 (1937).
- [Ya] YAMAMOTO, M., *First order semi-local invariants of stable maps of 3-manifolds*. Proc. London Math. Soc., 3 pp. 471-504 (2006).