

TIAGO RODRIGO PERDIGÃO

**SEMIUMBILICIDADE E UMBILICIDADE EM SUPERFÍCIES IMERSAS
EM \mathbb{R}^n , $n \geq 4$**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

**VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2011**

Tiago Rodrigo Perdigão

Semiumbolicidade e Umbilicidade em Superfícies Imersas em $\mathbb{R}^n, n \geq 4$.

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 23 de fevereiro de 2011.

Ezequiel Rodrigues Barbosa

Rosivaldo Antonio Gonçalves

Catarina Mendes de Jesus
(Co-orientadora)

Mercio Botelho Faria
(Co-orientador)

Simone Maria de Moraes
(Orientadora)

Agradecimentos

A Deus, por ter me concedido força, determinação e coragem na busca deste sonho.

Aos meus pais João Perdigão e Maria do Carmo Perdigão, que não mediram esforços e sacrifícios para que hoje eu estivesse diante deste momento tão alegre, a vocês a minha eterna gratidão.

À minha irmã Any Marry Perdigão por ter sido tão amiga e trazer conforto com suas palavras em momentos tão difíceis e ao meu irmão Marco Perdigão por toda ajuda durante esta caminhada.

À minha orientadora Simone Maria de Moraes por acreditar em meu trabalho, pela atenção e paciência, pelo exemplo profissional e por sua amizade ao longo de todo o mestrado.

Aos professores da UFV que contribuíram no meu crescimento profissional através de suas aulas e diálogos.

Aos meus amigos Gheyza, Jane e Luiz, pelo grupo de estudos, pelos diálogos do dia-a-dia, pelas discussões que valeram tanto e pela amizade durante todo este tempo. À Gheyza por estarmos juntos nesta caminhada desde a graduação e por ser uma pessoa tão querida em minha vida.

Aos meus amigos distantes, mas sempre presentes Thiago Mello e Fernando Freitas pelas palavras sempre motivadoras e aos amigos recentes que me deram todo suporte para viver melhor em Viçosa: Wanderley, Sidenir, Rodrigo, Rafael, Lucas, entre outros que embora não cite aqui, contribuíram de alguma forma.

À banca da dissertação pelas sugestões e correções.

À Capes-Reuni pelo apoio financeiro, sem o qual dificultaria minhas atividades acadêmicas.

Os sonhos não terminam aqui, continuam.....

Sumário

Lista de Figuras	v
Resumo	vi
Abstract	vii
Introdução	1
1 Elipse de Curvatura em Superfícies Imersas em $\mathbb{R}^n, n \geq 4$.	5
1.1 A Elipse de Curvatura	5
1.2 A Elipse de Curvatura Via a Forma de Monge	7
1.3 Conexões Riemannianas	9
1.4 A Expressão Geral da Elipse de Curvatura	13
1.5 Alguns Exemplos no Estudo da Elipse de Curvatura	23
2 Semiumbilicidade e Umbilicidade em Superfícies Imersas em \mathbb{R}^4.	34
2.1 ν -Umbilicidade e ν -Linhas de Curvatura	34
2.2 Umbilicidade e Semiumbilicidade	40
2.3 Fórmulas de Estrutura do $\mathbb{R}^n, n \geq 4$	45
2.4 ν -Umbilicidade e Hiperesfericidade	48
3 Superfícies Semiumbílicas e Hiperesféricas em \mathbb{R}^5.	58
3.1 Classificação de Pontos em Superfícies Imersas em \mathbb{R}^5	58
3.2 Função Altura	65
3.3 Função Distância ao Quadrado	67
3.4 Curvatura Umbílica e Superfícies Hiperesféricas em \mathbb{R}^5	71
3.5 Superfícies Semiumbílicas e Hiperesféricas em \mathbb{R}^5	75
Apêndice	78
3.6 O p -ésimo Produto Tensorial	78
3.7 A Aplicação de Veronese de Ordem p	79
3.8 A Variedade de Veronese Padrão de Ordem p e Dimensão n	80
Conclusão	83

Sumário

iv

Referências Bibliográficas

84

Lista de Figuras

1.1	Elipse de curvatura.	6
1.2	Disposição dos vetores da elipse de curvatura.	7
1.3	Ponto de inflexão.	15
1.4	Vetor curvatura média.	16
1.5	Elipse de curvatura em superfícies em \mathbb{R}^3	17
1.6	Ponto hiperbólico.	18
1.7	Ponto elíptico.	18
1.8	Ponto parabólico.	19
1.9	Ponto de inflexão.	19
1.10	Ponto de inflexão imaginário.	20
1.11	Ponto de inflexão real.	20
1.12	Ponto de inflexão “flat”.	21
1.13	Ponto mínimo.	22
1.14	Ponto axiumbílico.	23
3.1	$p \in M_3$	61
3.2	$p \in M_2$	61
3.3	$p \in M_2$	62
3.4	$p \in M_1$	63
3.5	$p \in M_1$	63
3.6	$p \in M_0$	64

Resumo

PERDIGÃO, Tiago Rodrigo, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2011. **Semiumbilicidade e umbilicidade em superfícies imersas em $\mathbb{R}^n, n \geq 4$.** Orientadora: Simone Maria de Moraes. Co-orientadores: Catarina Mendes de Jesus e Mercio Botelho Faria.

Neste trabalho introduzimos o conceito de *elipse de curvatura* em um ponto de uma superfície imersa em $\mathbb{R}^n, n \geq 4$ com o objetivo de estudar as relações entre *pontos semi-umbílicos* (pontos onde a elipse de curvatura se degenera em um segmento de reta), a existência de direções normais de umbilicidade à superfície e superfícies hiperesféricas. Para obter tais objetivos baseamos nossos resultados principalmente nos artigos “Umbilicity of surfaces with orthogonal asymptotic lines in \mathbb{R}^4 ” de M. C. Romero-Fuster e F. Sánchez-Bringas [24] e “Geometric Contacts of Surfaces Immersed in $\mathbb{R}^n, n \geq 5$ ” de S. I. R. Costa, S. M. Moraes e M. C. Romero-Fuster [5] .

Abstract

PERDIGÃO, Tiago Rodrigo, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2011. **Semiumbilicity and Umbilicity in Surfaces Immersed in $\mathbb{R}^n, n \geq 4$.** Advisor: Simone Maria de Moraes. Co-advisers: Catarina Mendes de Jesus and Mercio Botelho Faria.

In this work we introduce the concept of *curvature ellipse* at one point of a surface immersed in $\mathbb{R}^n, n \geq 4$ to study the relationship between *semiumbilics points* (points that the curvature ellipse degenerated in a segment line), the existence of umbilic normal directions to the surface and hyperspherical surfaces. To achieve these goals we base our results especially in the articles “Umbilicity of surfaces with orthogonal asymptotic lines in \mathbb{R}^4 ” of M. C. Romero-Fuster and F. Sánchez-Bringas [24] and “Geometric Contacts of Surfaces Immersed in $\mathbb{R}^n, n \geq 5$ ” of S. I. R. Costa, S. M. Moraes and M. C. Romero-Fuster [5].

Introdução

No estudo de superfícies imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, há um conceito relevante associado ao 2-jato da imersão, a saber, a *elipse de curvatura*. Trata-se do lugar geométrico dos extremos dos vetores curvaturas das seções normais ao longo das direções tangentes à superfície em um ponto dela considerado. No caso de superfícies imersas em \mathbb{R}^3 tal elipse em um dado ponto, coincide com o segmento descrito pelos extremos dos vetores curvatura normal.

Este conceito foi introduzido em 1905 por K. Kommerell [10] e aparece no texto de C. L. E. Moore e E. B. Wilson [18], de 1916, em que fazem um estudo da geometria de superfícies em hiperespaços. Posteriormente, em 1969, J. Little [11] utiliza a elipse de curvatura para estudar a geometria de superfícies em \mathbb{R}^4 . Em [11], encontramos resultados importantes tais como:

- 1) Em qualquer superfície compacta com característica de Euler não nula existe ao menos um ponto em que o vetor curvatura média é nulo ou então este ponto é um ponto de inflexão (ponto onde a elipse de curvatura se degenera em um segmento de reta radial) da superfície.
- 2) Em imersões de subvariedades de dimensões superiores, a elipse de curvatura é sempre uma variedade de Veronese.

Por outro lado, I. V. Guadalupe e L. Rodrigues [8], em 1983, usam a noção de elipse de curvatura no estudo de superfícies compactas em espaços de formas de dimensões maiores, obtendo algumas inequações relativamente à área da superfície e a integral do quadrado da norma do vetor curvatura média com invariantes topológicos. Em certos casos a elipse de curvatura é um círculo, quando isso ocorre perante a algumas restrições das curvaturas normais e gaussianas, essas inequações tornam-se resultados rígidos.

Em sua tese de doutorado [14], em 1993, D. K. H. Mochida faz um estudo de contatos genéricos de m -variedades com hiperplanos através da análise das singularidades das funções altura sobre ela. Neste contexto, ela mostra que genericamente toda 2-esfera convexamente mergulhada em \mathbb{R}^4 tem pelo menos 1 ponto de inflexão. Mais tarde, em 2000, D. K. H. Mochida com a colaboração dos autores R. A. Garcia, M. C. Romero-Fuster e M. A. S. Ruas em [6], associa a elipse de curvatura à existência de linhas assintóticas para superfícies em \mathbb{R}^4 , mostrando que elas são globalmente definidas em superfícies localmente convexas, e que suas singularidades são pontos de inflexão da superfície. Além disso melhora o resultado antes obtido em sua tese provando que qualquer 2-esfera mergulhada

genericamente como uma superfície localmente convexa em \mathbb{R}^4 tem no mínimo 4 pontos de inflexão.

Em 2001 [9], C. Gutierrez, I. Guadalupe, R. Tribuzy, V. Guínez estabelecem as equações diferenciais das linhas de curvatura para superfícies imersas em \mathbb{R}^4 , relacionando os coeficientes dessas equações com os pontos onde a elipse de curvatura é um círculo ou é degenerada em um ponto.

S. M. Moraes [19], em 2002, utiliza a elipse de curvatura como ferramenta básica, associada a técnicas da Teoria de Singularidades, para obter informações sobre a geometria local de superfícies imersas em $\mathbb{R}^n, n \geq 5$, obtendo uma expressão geral da elipse de curvatura para um ponto qualquer de superfície imersa em $\mathbb{R}^n, n \geq 5$. Além disso, a autora caracteriza os pontos semiumbólicos, umbólicos e não degenerados em termos da classificação através do tipo $M_i, i = 0, 1, 2, 3$, com isso relaciona um ponto p da superfície com a configuração do espaço afim de menor dimensão que contém a elipse de curvatura. Neste mesmo trabalho relacionam-se superfícies totalmente semiumbólicas com as direções normais de umbilicidade.

Em 2003, L. F. Mello [12] faz um estudo da configuração das linhas de curvatura média direcional sobre superfícies imersas em \mathbb{R}^4 estendendo o estudo até então existente para superfícies em \mathbb{R}^3 ; em tal artigo L. F. Mello analisa as H -singularidades, isto é, as singularidades dos H -campos de direções, que são os pontos mínimos (pontos em que o vetor curvatura média é nulo) ou os pontos de inflexão da superfície.

Generalizando os conceitos de direções de curvatura média estudados por L. F. Mello [12], R. A. Gonçalves, J. A. Martínez Alfaro, A. Montesinos-Amilibia e M. C. Romero-Fuster [7], em 2007, definem as direções de curvatura média relativa em um ponto p de uma superfície imersa em $\mathbb{R}^n, n > 4$ as quais definem globalmente duas folheações ortogonais na superfície cujos pontos críticos são pontos semiumbólicos ou pontos pseudo-umbólicos (pontos da superfície onde o vetor curvatura média é ortogonal ao plano que contém a elipse de curvatura).

Nesta dissertação, baseando-nos em trabalhos de M. C. Romero-Fuster e de F. Sánchez-Bringas [24], S. I. R. Costa, S. M. Moraes e M. C. Romero-Fuster [5], utilizamos a elipse de curvatura para estudar as direções normais de umbilicidade, relacionando-as com os pontos semiumbólicos da superfície (pontos em que a elipse de curvatura se degenera em um segmento de reta) e também caracterizamos as superfícies hiperesféricas em termos da degeneracidade ou não da elipse de curvatura.

Este trabalho está organizado em três capítulos, como descrevemos a seguir:

Iniciamos o primeiro capítulo definindo a elipse de curvatura associada a um ponto de uma superfície imersa em \mathbb{R}^n . A partir daí, fornecemos algumas de suas expressões, dentre as quais, na segunda seção, destacamos a obtida pela parametrização local de uma superfície na forma de Monge.

Na terceira seção, apresentamos os estudos das conexões riemannianas e a aplicação segunda forma fundamental e aplicamos a mesma a um referencial ortonormal tangente adequado, afim de obter uma expressão geral para a elipse de curvatura.

Na quarta seção, apresentamos uma expressão geral da elipse de curvatura em um ponto qualquer da superfície, que nos será bastante útil nos exemplos propostos da última seção. Ainda nesta seção destinamos nosso estudo a elipse de curvatura associada a superfícies em \mathbb{R}^4 do ponto de vista de alguns autores como J. Little em [11], L. F. Mello em [13] D. K. H. Mochida em [14]. Apresentamos algumas relações entre um ponto da superfície e sua posição relativa quanto a elipse de curvatura (pontos hiperbólicos, elípticos e parabólicos), associamos também um ponto da superfície e sua degeneracidade, ou não, em relação à elipse de curvatura.

Por fim, na última seção construímos alguns exemplos de superfícies imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$ e calculamos a elipse de curvatura associada a essas imersões; destacamos os estudos das seguintes imersões: imersões de superfícies em hiperplanos, projeção estereográfica de superfícies imersas em \mathbb{R}^4 , as superfícies produto de curvas, com os casos particulares produto da cardióide e do círculo, produto da elipse e círculo e o caso do toro de Clifford, que é o produto de dois círculos, a superfície de Veronese e superfícies de translação.

A bibliografia básica utilizada no primeiro capítulo é [11], [13], [14] e [19].

No segundo capítulo, nossos estudos estão focados na questão das superfícies imersas em \mathbb{R}^4 , baseamos nosso trabalho principalmente no artigo “Umbilicity of surfaces with orthogonal asymptotic lines in \mathbb{R}^4 ” [24] e estendemos alguns conceitos de superfícies imersas em \mathbb{R}^3 , tais como: a aplicação segunda forma fundamental, as direções assintóticas, as ν -direções principais e as ν - linhas de curvatura para superfícies em \mathbb{R}^4 .

Introduzimos o referido capítulo definindo a segunda forma fundamental para superfícies em \mathbb{R}^4 , de forma análoga a superfícies em \mathbb{R}^3 ; no caso de superfícies imersas em \mathbb{R}^3 , definimos uma única aplicação segunda forma fundamental da superfície, devido a única direção normal presente, mas no caso de superfícies imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$ para cada direção normal ν , há uma aplicação.

Com isso, a partir da segunda forma fundamental segundo um campo normal ν , estamos em condições de definir um ponto ν -umbílico da superfície. Este ponto é um ponto onde a aplicação segunda forma fundamental máxima e mínima coincidem. Analisando toda a região de não umbilicidade, definimos as ν -linhas de curvatura e escrevemos a equação diferencial das mesmas, a qual será utilizada ao longo de todo o capítulo.

Na primeira seção, apresentamos um importante resultado que nos diz que se um ponto p de uma superfície M é ν - umbílico, então a direção ν de umbilicidade considerada é uma direção específica no plano normal, isto é, ν é uma direção que pertence ao espaço ortogonal ao subespaço linear que contém a elipse de curvatura.

Na segunda seção definimos as direções binormais, direções normais onde o *Hess* da função altura é degenerada e as direções assintóticas, direções tangentes que pertencem ao núcleo do *Hess* da função altura na direção do vetor binormal correspondente. A partir mostramos que se a as linhas assintóticas são ortogonais então a superfícies é ν -umbílica, com o campo ν escrito em termos das curvaturas principais e dos vetores binormais correspondentes.

Um importante conceito que surge no nosso trabalho é dos pontos *semiumblicos*,

estes pontos são os pontos da superfície em que a elipse de curvatura se degenera em um segmento de reta. Ainda na segunda seção apresentamos um dos principais resultados para superfícies imersas em \mathbb{R}^4 que nos diz que:

Uma superfície M é ν -umbílica se, e somente se, é uma superfície semiumbíllica.

Na terceira seção estudamos o método do referencial móvel abordado por M. P. Carmo em [1] e apresentamos os conceitos de correferencial e formas de conexão do \mathbb{R}^n em um referencial adotado, em seguida relacionamos esses conceitos através das chamadas equações de estrutura do \mathbb{R}^n .

Na última seção, relacionamos os conceitos de ν campos paralelos com a função curvatura associada a uma superfície M ν -umbílica, cujos pontos de inflexão são isolados. Para superfícies imersas em \mathbb{R}^3 conhecemos um resultado clássico que diz que uma superfície umbílica está contida em uma esfera ou em um plano. Neste trabalho apresentamos um resultado análogo para superfícies em \mathbb{R}^4 , abordado por M. C. Romero-Fuster e F. Sanches-Bringas em [24] o qual apresentamos a seguir:

Seja M uma superfície imersa em \mathbb{R}^4 tal que M é ν -umbílica para algum campo normal unitário ν , com função curvatura λ constante, se $\lambda \neq 0$, então M está imersa em S^3 e se $\lambda = 0$, então M está imersa em um 3-plano.

No último capítulo, dedicamos nosso estudo a superfícies imersas em \mathbb{R}^5 , baseamos nossos resultados em [5], através de estudos recentes feitos por S. I. R. Costa, S. M. Moraes e M. C. Romero-Fuster no artigo “Geometry contacts of surfaces immersed in $\mathbb{R}^n, n \geq 5$ ”. Mais precisamente:

- 1) Estudamos uma equivalência dos pontos de M através da classificação em tipo $M_i, i = 0, 1, 2, 3$, conforme [19], semiumbilocidade (ou não) e da posição relativa do ponto ao espaço afim que contém a elipse de curvatura no ponto considerado.
- 2) Relacionamos o coposto da função altura degenerada com as direções normais que estão tanto no subespaço linear gerado pela elipse de curvatura quanto no seu espaço ortogonal.
- 3) Apresentamos a existência de um único foco umbílico em superfícies do tipo M_3 , além disso, vemos que esse foco umbílico encontra-se no espaço ortogonal ao subespaço linear gerado pela elipse de curvatura.
- 4) Caracterizamos superfícies hiperesféricas em termos da elipse de curvatura e finalmente, na última seção, relacionamos superfícies semiumbílicas e hiperesféricas, assim como superfícies semiumbílicas e hiperplanas.

Capítulo 1

Elipse de Curvatura em Superfícies Imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$.

Iniciamos o capítulo definindo a elipse de curvatura em um ponto de uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$ e escrevemos uma expressão para a elipse de curvatura, afim de justificar o seu nome. Este conceito será utilizado nos capítulos subsequentes para estabelecer os resultados sobre estas imersões.

Na seção 1.3 definimos a aplicação segunda fundamental e fazemos o cálculo da mesma em relação a um referencial ortonormal tangente adequado que nos dará boas condições de encontrarmos na seção 1.4 uma expressão geral para a elipse de curvatura em um ponto arbitrário da superfície associada a uma parametrização qualquer da imersão.

Ainda na seção 1.4 fazemos um estudo da elipse de curvatura sob o ponto de vista de alguns autores tais como J. Little em [11], L. F. Mello em [13] e D. K. H. Mochida em [14].

Por fim, construímos alguns exemplos de imersões de superfícies em \mathbb{R}^n e obtemos a elipse de curvatura em cada ponto da superfície associada a imersão dada.

A bibliografia utilizada neste capítulo é [11], [13] e [19].

1.1 A Elipse de Curvatura

O estudo da elipse de curvatura pode ser encontrado em alguns trabalhos tais como J. Little em [11] e S. M. Moraes em [19]; apresentamos aqui a definição da elipse de curvatura e em seguida mostramos que a curva descrita pelo vetor curvatura normal é, de fato, uma elipse no espaço normal a uma superfície M .

Definição 1.1 *Sejam M uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$ e $p \in M$; consideremos $S_p^1 \subset T_pM$, o círculo unitário em T_pM , centrado em p . Para cada direção $\theta \in S_p^1$, consideremos $H_\theta = N_pM \oplus \langle \theta \rangle$, o hiperplano gerado por N_pM e a direção θ . Denotemos por $\gamma_\theta = H_\theta \cap M$ a curva obtida pela interseção de M com o hiperplano H_θ , a seção normal de M em p na direção θ . A **elipse de curvatura** de M em p , denotada por $\eta_p(\theta)$, é a projeção do vetor γ_θ'' no espaço normal N_pM .*

Assim para cada $p \in M$ podemos considerar a aplicação η_p , dada por:

$$\eta_p : S_p^1 \longrightarrow N_p M \\ \theta \longmapsto \eta_p(\theta) = (\gamma''_\theta)^N.$$

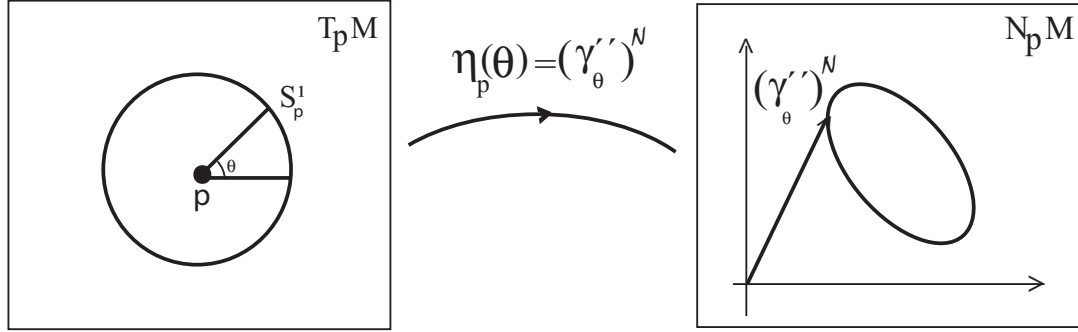


Figura 1.1: Elipse de curvatura.

Seja M uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, dado $p \in M$, consideremos $\gamma_\theta : I \longrightarrow M$ a seção normal de M em p na direção θ , que vamos supor parametrizada pelo comprimento de arco e $\gamma_\theta(t_0) = p$. O vetor curvatura normal de γ_θ em t_0 é a projeção do vetor $\gamma''_\theta(t_0)$ no espaço normal $N_p M$. Além disso, este vetor depende apenas da direção tangente $\gamma'_\theta(t_0)$. Suponhamos que M localmente em p está parametrizada por:

$$\phi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, y) \longmapsto \phi(x, y) \quad ,$$

então podemos parametrizar γ_θ , localmente em p , por:

$$\gamma_\theta : I \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t \longmapsto \gamma_\theta(t) = \phi(x(t), y(t)).$$

Assim,

$$\gamma'_\theta(t) = x'(t)\phi_x(x(t), y(t)) + y'(t)\phi_y(x(t), y(t))$$

e

$$\gamma''_\theta(t) = x''(t)\phi_{xx}(x(t), y(t)) + x'(t)\phi_{xy}(x(t), y(t)) + x'(t)^2\phi_{xx}(x(t), y(t)) + \\ y''(t)\phi_{yy}(x(t), y(t)) + y'(t)\phi_{xy}(x(t), y(t)) + 2x'(t)y'(t)\phi_{xy}(x(t), y(t)).$$

Logo,

$$(\gamma''_\theta(t))^N = x'(t)^2\phi_{xx}^N(x(t), y(t)) + 2x'(t)y'(t)\phi_{xy}^N(x(t), y(t)) + y'(t)^2\phi_{yy}^N(x(t), y(t)). \quad (1.1)$$

Se $\{\phi_x(p), \phi_y(p)\}$ é uma base ortonormal para T_pM , então como γ_θ está parametrizada pelo comprimento de arco, segue que $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 1$, então podemos tomar θ tal que

$$\begin{cases} x'(t_0) = \cos \theta \\ y'(t_0) = \sin \theta \end{cases},$$

em 1.1 teremos:

$$(\gamma_\theta''(t_0))^N = \cos^2 \theta \phi_{xx}^N(p) + 2 \cos \theta \sin \theta \phi_{xy}^N(p) + \sin^2 \theta \phi_{yy}^N(p).$$

Portanto,

$$\eta_p(\theta) = (\gamma_\theta''(t_0))^N = \frac{1}{2}(\phi_{xx}^N(p) + \phi_{yy}^N(p)) + \frac{1}{2}(\phi_{xx}^N(p) - \phi_{yy}^N(p)) \cos(2\theta) + \phi_{xy}^N(p) \sin(2\theta),$$

ou ainda

$$\eta_p(\theta) = H + B \cos(2\theta) + C \sin(2\theta),$$

onde $H = \frac{1}{2}(\phi_{xx}^N(p) + \phi_{yy}^N(p))$, $B = \frac{1}{2}(\phi_{xx}^N(p) - \phi_{yy}^N(p))$ e $C = \phi_{xy}^N(p)$.

O vetor H é chamado vetor **curvatura média** que vamos considerar com origem no ponto p e extremo no centro da elipse de curvatura e os vetores B e C geram a elipse de curvatura.

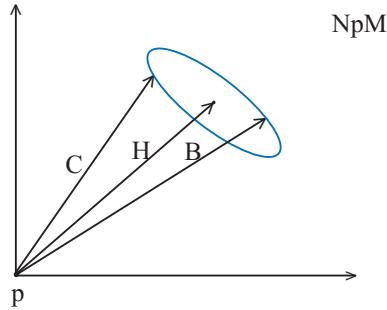


Figura 1.2: Disposição dos vetores da elipse de curvatura.

Na próxima seção fornecemos uma parametrização local para a elipse de curvatura, na forma de Monge.

1.2 A Elipse de Curvatura Via a Forma de Monge

Seja M uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, dado $p \in M$ dizemos que uma imersão $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ está dada localmente na **forma de Monge**, se ϕ está escrita, localmente em $p \equiv (0, 0)$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \phi : \left(\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2, (0, 0) \right) &\longrightarrow \left(\mathbb{R}^n, (0, 0, \dots, 0) \right) \\ (x, y) &\longmapsto \phi(x, y) = \left(x, y, \phi_1(x, y), \phi_2(x, y), \dots, \phi_{n-2}(x, y) \right) \end{aligned},$$

onde $\phi_i : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; para $i = 1, 2, \dots, n - 2$, são funções diferenciáveis com

$$\phi(0, 0) = (0, 0, \dots, 0)$$

e

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(0, 0) = 0; i = 1, 2, \dots, n - 2.$$

Como $\frac{\partial \phi}{\partial x}(0, 0) = (1, 0, \dots, 0)$ e $\frac{\partial \phi}{\partial y}(0, 0) = (0, 1, \dots, 0)$ então

$$E = \phi_x(p) \cdot \phi_x(p) = 1, \quad G = \phi_y(p) \cdot \phi_y(p) = 1 \quad \text{e} \quad F = \phi_x(p) \cdot \phi_y(p) = 0,$$

onde E, F e G são os **coeficientes da primeira forma fundamental** de M em p .

Se uma imersão de M em \mathbb{R}^n é dada localmente em p na forma de Monge, então

$$\phi_{xx}^N(p) = \phi_{xx}(p), \quad \phi_{xy}^N(p) = \phi_{xy}(p) \quad \text{e} \quad \phi_{yy}^N(p) = \phi_{yy}(p).$$

Observe que $\{\phi_{xx}(p) = (1, 0, 0, 0, 0), \phi_{yy}(p) = (0, 1, 0, 0, 0)\}$ é uma base para $T_p M$, se além disso consideramos a seção normal γ_θ parametrizada pelo comprimento de arco como na definição 1.1, utilizando os resultados da seção anterior 1.1, o vetor curvatura normal é dado por:

$$(\gamma_\theta''(t_0))^N = \cos^2 \theta \phi_{xx}^N(p) + 2 \cos \theta \sin \theta \phi_{xy}^N(p) + \sin^2 \theta \phi_{yy}^N(p).$$

Portanto, a elipse de curvatura no ponto p , associada à imersão ϕ de M em \mathbb{R}^n , dada localmente em p na forma de Monge é:

$$\eta_p(\theta) = (\gamma_\theta''(t_0))^N = \frac{1}{2} \left(\phi_{xx}(p) + \phi_{yy}(p) \right) + \frac{1}{2} \left(\phi_{xx}(p) - \phi_{yy}(p) \right) \cos(2\theta) + \phi_{xy}(p) \sin(2\theta).$$

Logo,

$$\eta_p(\theta) = H + B \cos(2\theta) + C \sin(2\theta),$$

onde $H = \frac{1}{2} \left(\phi_{xx}(p) + \phi_{yy}(p) \right)$; $B = \frac{1}{2} \left(\phi_{xx}(p) - \phi_{yy}(p) \right)$ e $C = \phi_{xy}(p)$.

Exemplos:

1. Seja M uma superfície imersa em \mathbb{R}^5 dada localmente em $p \equiv (0, 0)$ na forma de Monge por:

$$\begin{aligned} \phi : \left(\mathbb{R}^2, (0, 0) \right) &\longrightarrow \left(\mathbb{R}^5, (0, \dots, 0) \right) \\ (x, y) &\longmapsto \phi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2, 0, 0). \end{aligned}$$

Temos que:

$$\phi_{xx}(0,0) = (0,0,2,0,0), \quad \phi_{yy}(0,0) = (0,0,2,0,0) \quad \text{e} \quad \phi_{xy}(0,0) = 0.$$

Conseqüentemente, teremos

$H = \frac{1}{2}(\phi_{xx}(p) + \phi_{yy}(p)) = (0,0,2,0,0)$, $B = \frac{1}{2}(\phi_{xx}(p) - \phi_{yy}(p)) = (0,0,0,0,0)$
e $C = (0,0,0,0,0)$. Portanto, a elipse de curvatura em $p \equiv 0$ se degenera no ponto $(0,0,2,0,0)$, que é distinto da origem de N_pM .

2. Seja M uma superfície imersa em \mathbb{R}^5 dada localmente em $p \equiv (0,0)$ na forma de Monge por:

$$\begin{aligned} \phi : (\mathbb{R}^2, (0,0)) &\longrightarrow (\mathbb{R}^5, (0, \dots, 0)) \\ (x, y) &\longmapsto \phi(x, y) = (x, y, x^2, xy, y^2). \end{aligned}$$

Observemos que

$$\phi_{xx}(0,0) = (0,0,2,0,0), \quad \phi_{yy}(0,0) = (0,0,0,0,2) \quad \text{e} \quad \phi_{xy}(0,0) = (0,0,0,1,0).$$

Logo,

$$H = \frac{1}{2}(\phi_{xx}(p) + \phi_{yy}(p)) = (0,0,1,0,1), \quad B = \frac{1}{2}(\phi_{xx}(p) - \phi_{yy}(p)) = (0,0,1,0,-1)$$

e $C = (0,0,1,0,0)$.

Portanto, a elipse de curvatura é uma elipse não degenerada que não passa pela origem.

1.3 Conexões Riemannianas

Nesta seção apresentamos a aplicação segunda fundamental e aplicamos a mesma a campos de vetores tangentes adequados que serão utilizados na próxima seção para obtenção de uma expressão geral da elipse de curvatura. Apresentamos também as derivadas covariantes, que dão uma interpretação geométrica no estudo das conexões riemannianas.

Definição 1.2 *Sejam M uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, e X um campo de vetores tangentes em M . Dados um ponto $p \in M$ e $Y \in T_pM$, existe uma curva*

$$\begin{aligned} \alpha : I &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \alpha(t), \end{aligned} \quad \text{tal que } \alpha(t_0) = p \text{ e } \alpha'(t_0) = Y. \text{ A } \mathbf{derivada covariante} \text{ do campo}$$

X segundo o vetor Y no ponto p por:

$$\nabla_Y X = \left(\frac{dX}{dt} \right)_{t=t_0}^\top.$$

De forma análoga se tomarmos ν um campo de vetores normais a M , temos:

$$\nabla_Y^\perp \nu = \left(\frac{d\nu}{dt} \right)_{t=t_0}^\perp.$$

O vetor $\nabla_Y^\perp \nu$ é chamado a **derivada covariante normal** de X em relação a Y no ponto p .

Exemplo:

1. Seja $X : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a aplicação diferenciável definida por

$$X(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u, \sin u, \cos v, \sin v),$$

onde $\mathcal{U} = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$, a imersão X descreve o chamado **toro de Clifford**, denotado \mathcal{T} .

Consideremos uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathcal{T}$, a imersão de α em \mathbb{R}^4 é dada da seguinte forma:

$$\alpha : I \xrightarrow{\beta} \mathcal{T} \xrightarrow{X} \mathbb{R}^4 \\ t \longmapsto \beta(t) = (u(t), v(t)) \longmapsto X(u(t), v(t)) \quad ,$$

onde $\beta : I \rightarrow \mathcal{T}$ é uma curva diferenciável no toro de Clifford.

Assim, a imersão da curva α em \mathbb{R}^4 pela imersão X tem a seguinte expressão:

$$\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos u(t), \sin u(t), \cos v(t), \sin v(t) \right).$$

Se além disso consideramos $\beta(t) = (t, t^2)$, temos

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, \cos t^2, \sin t^2).$$

Logo,

$$\alpha'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t, \cos t, -2t \sin t^2, 2t \cos t^2).$$

Consideremos um ponto $p \in \mathcal{T}$ e um vetor $Y \in T_p \mathcal{T}$ tais que

$$\begin{cases} \alpha(t_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t_0, \sin t_0, \cos t_0^2, \sin t_0^2) = p \\ \alpha'(t_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t_0, \cos t_0, -2t_0 \sin t_0^2, 2t_0 \cos t_0^2) = Y. \end{cases}$$

Afim de encontramos a derivada covariante de um campo tangente a superfície \mathcal{T} em relação ao parâmetro da curva t , consideremos o referencial ortonormal $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ tal que:

$$\begin{aligned}
X_1 &= (-\sin u, \cos u, 0, 0), \\
X_2 &= (0, 0, -\sin v, \cos v), \\
X_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u, \sin u, \cos v, \sin v), \\
X_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos u, -\sin u, \cos v, \sin v).
\end{aligned}$$

Seja

$$X(u(t), v(t)) = X(t, t^2) = X_1(t, t^2) + X_2(t, t^2) = (-\sin t, \cos t, -\sin t^2, \cos t^2),$$

um campo tangente a superfície no instante t qualquer. A derivada covariante do campo X segundo o vetor Y no ponto p , no instante t é dado por:

$$\nabla_Y X = \left(\frac{dX}{dt} \right)_{t=t_0}^\top.$$

Mas,

$$\frac{dX}{dt} = (-\cos t, -\sin t, -2t \cos t^2, 2t \sin t^2).$$

Portanto,

$$\left(\frac{dX}{dt} \right)^\top = \left(\frac{dX}{dt} \cdot X_1 \right) X_1 + \left(\frac{dX}{dt} \cdot X_2 \right) X_2 = (0, 0, 0, 0).$$

Concluimos que

$$\nabla_Y X = \left(\frac{dX}{dt} \right)_{t=t_0}^\top = (0, 0, 0, 0).$$

Observemos que para cada ponto p em M :

1. A imersão de M em \mathbb{R}^n pode ser dada como a imagem de um mergulho

$$\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

com $\phi(\mathbb{R}^2) = M \cap V_p$, onde V_p é uma vizinhança de p em \mathbb{R}^n .

2. Podemos considerar a decomposição $\mathbb{R}^n = T_p M \oplus N_p M$, onde $T_p M$ é o plano tangente a M em p e $N_p M$ seu complemento ortogonal em \mathbb{R}^n , é o subespaço normal a M em p , $N_p M = (T_p M)^\perp$.

Seja $\bar{\nabla}$ a conexão Riemanniana euclidiana de \mathbb{R}^n . Dados campos de vetores X, Y localmente definidos ao longo de M , podemos escolher extensões locais \bar{X}, \bar{Y} em \mathbb{R}^n e definir a conexão Riemanniana de M como $\nabla_Y X = (\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X})^\top$.

Sejam $\mathcal{X}(M)$ e $\mathcal{N}(M)$ os espaços dos campos tangentes e normais a M , respectivamente. A aplicação segunda fundamental em M é definida por:

$$\begin{aligned} \alpha : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \mathcal{N}(M) \\ (X, Y) &\mapsto \alpha(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^N. \end{aligned}$$

Esta aplicação está bem definida, é simétrica e bilinear.

Dada M uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$ para cada $p \in M$, podemos obter uma parametrização local $\phi(x, y)$ e assim tomar um referencial ortonormal em $\mathcal{X}(M)$, definido localmente em p , dado por:

$$w_1(x, y) = \frac{\phi(x, y)}{\sqrt{E(x, y)}} \quad \text{e} \quad w_2(x, y) = \frac{E(x, y)\phi_y(x, y) - F(x, y)\phi_x(x, y)}{\sqrt{E(x, y)(E(x, y)G(x, y) - F(x, y)^2)}}.$$

Assim, se $w(x, y) \in \mathcal{X}(M)$, temos que $w(x, y) = \lambda_1 w_1(x, y) + \lambda_2 w_2(x, y)$, logo para determinarmos uma forma local de α em M basta calcular:

$$\alpha(w_i(x, y), w_j(x, y)), \quad \text{com } 1 \leq i, j \leq 2,$$

omitiremos nos cálculos abaixo o ponto arbitrário (x, y) em M .

$$\begin{aligned} \alpha(w_1, w_1) &= (\nabla_{w_1} w_1)^N = \left(\nabla_{\frac{\phi_x}{\sqrt{E}}} \frac{\phi_x}{\sqrt{E}} \right)^N = \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \nabla_{\phi_x} \phi_x + \phi_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \right) \right)^N = \frac{1}{E} \phi_{xx}^N, \\ \alpha(w_2, w_1) &= \left(\nabla_{\frac{\phi_x}{\sqrt{E}}} \frac{E\phi_y - F\phi_x}{\sqrt{E(EG - F^2)}} \right)^N = \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\frac{E}{\sqrt{E(EG - F^2)}} \nabla_{\phi_x} \phi_y + \right. \\ &\quad \left. \phi_y \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E}{\sqrt{E(EG - F^2)}} \right) - \frac{F}{\sqrt{E(EG - F^2)}} \nabla_{\phi_x} \phi_x - \phi_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F}{\sqrt{E(EG - F^2)}} \right) \right)^N \\ &= \frac{1}{E\sqrt{EG - F^2}} (E\phi_{xy}^N - F\phi_{xx}^N) = \alpha(w_1, w_2), \\ \alpha(w_2, w_2) &= (\nabla_{w_2} w_2)^N = \left(\nabla_{\frac{E\phi_y - F\phi_x}{\sqrt{E(EG - F^2)}}} \frac{E\phi_y - F\phi_x}{\sqrt{E(EG - F^2)}} \right)^N \\ &= \frac{1}{\sqrt{E(EG - F^2)}} \left(E \nabla_{\phi_y} \frac{E\phi_y - F\phi_x}{\sqrt{E(EG - F^2)}} - F \nabla_{\phi_x} \left(\frac{E\phi_y - F\phi_x}{\sqrt{E(EG - F^2)}} \right) \right)^N \\ &= \frac{1}{E(EG - F^2)} (E^2 \phi_{yy}^N - 2EF\phi_{xy}^N + F^2 \phi_{xx}^N), \end{aligned}$$

onde E, F e G são os coeficientes da primeira forma fundamental de M em (x, y) .

Na seção 1.5 a maioria das parametrizações que estaremos trabalhando nos exemplos propostos não estão na forma de Monge, como é o caso do toro de Clifford, da superfície obtida pelo produto de curvas e da superfície de Veronese. Assim buscamos na próxima seção uma expressão geral para a elipse de curvatura em um ponto qualquer da superfície.

1.4 A Expressão Geral da Elipse de Curvatura

Agora, obteremos uma expressão geral para a elipse de curvatura em um ponto p de M , uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, para qualquer parametrização da imersão.

Seja M uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, com a conexão riemanniana ∇ . Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, como na seção 1.1. O vetor curvatura de γ é dado por $\nabla_{\gamma'}\gamma' : I \rightarrow T\mathbb{R}^n$.

Dado um ponto qualquer $p \in M$, através da decomposição $\mathbb{R}^n \equiv T\mathbb{R}^n = T_pM \oplus N_pM$, podemos considerar a projeção ortogonal $\pi^N : T_p\mathbb{R}^n \rightarrow N_pM$. Assim, segue da seção 1.1 que o vetor curvatura normal é dado por

$$\pi^N(\nabla_{\gamma'}\gamma'(t)) = (\gamma''_{\theta}(t))^N = x'(t)^2\phi_{xx}^N(t) + 2x'(t)y'(t)\phi_{xy}^N(t) + y'(t)^2\phi_{yy}^N(t).$$

Portanto, para cada curva passando por p no instante t_0 podemos descrever o vetor curvatura normal através de uma aplicação que associa cada vetor unitário do plano tangente um vetor do espaço normal correspondente. Isto significa dizer que para cada $p \in M$ podemos definir uma aplicação de $S_p^1 \subset T_pM$ em N_pM da seguinte forma

$$\begin{aligned} \eta : S_p^1 &\longrightarrow N_pM \\ \theta &\mapsto \eta(\theta) = \pi^N(\nabla_{\gamma'}\gamma')(t_0). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Vimos na seção 1.1 que o vetor curvatura normal de uma curva qualquer depende apenas da direção tangente considerada. Seja γ a seção normal como na definição 1.1; considerando γ parametrizada pelo comprimento de arco e $\{w_1, w_2\}$ um referencial ortonormal tangente a M em p , temos que $\gamma'(t_0) = w_1 \cos \theta + w_2 \sin \theta$, onde o vetor curvatura normal de γ é dado por $\eta(\theta) = \pi^N(\nabla_{\gamma'}\gamma')(t_0)$. Variando θ entre 0 a 2π temos a aplicação que descreve a elipse de curvatura $\eta : S_p^1 \rightarrow N_pM$, que expressaremos a seguir:

$$\begin{aligned} \eta(\theta) &= \pi^N(\nabla_{\gamma'}\gamma')(t_0) \\ &= \pi \left(\cos^2 \theta \nabla_{w_1} w_1 + \sin \theta \cos \theta (\nabla_{w_1} w_2 + \nabla_{w_2} w_1) + \sin^2 \theta \nabla_{w_2} w_2 \right) \\ &= \left[\cos^2 \theta (\nabla_{w_1} w_1)^N + \sin \theta \cos \theta ((\nabla_{w_1} w_2)^N + (\nabla_{w_2} w_1)^N) + \sin^2 \theta (\nabla_{w_2} w_2)^N \right] \\ &= \frac{1}{2} [(\nabla_{w_1} w_1)^N + (\nabla_{w_2} w_2)^N] + \frac{1}{2} \cos 2\theta [(\nabla_{w_1} w_1)^N - (\nabla_{w_2} w_2)^N] + \\ &\quad \frac{1}{2} \sin 2\theta [(\nabla_{w_1} w_2)^N + (\nabla_{w_2} w_1)^N]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\eta(\theta) = H + \cos 2\theta B + \sin 2\theta C,$$

onde $H = \frac{1}{2} [(\nabla_{w_1} w_1)^N + (\nabla_{w_2} w_2)^N]$ é o **vetor curvatura média**

$$B = \frac{1}{2} \left[(\nabla_{w_1} w_1)^N - (\nabla_{w_2} w_2)^N \right] \quad \text{e} \quad C = (\nabla_{w_1} w_2)^N,$$

pois $(\nabla_{w_1} w_2)^N = (\nabla_{w_2} w_1)^N$.

Observemos que a imersão de M em \mathbb{R}^n é parametrizada localmente em p por $\phi(x, y)$, como já havíamos abordado na seção 1.3. Além disso, podemos considerar $\{w_1, w_2\}$ um referencial ortonormal tangente a M em p dado por:

$$w_1(x, y) = \frac{\phi(x, y)}{\sqrt{E(x, y)}} \quad \text{e} \quad w_2(x, y) = \frac{E(x, y)\phi_y(x, y) - F(x, y)\phi_x(x, y)}{\sqrt{E(x, y)(E(x, y)G(x, y) - F(x, y)^2)}}.$$

Considerando também os cálculos da aplicação segunda fundamental

$$\begin{aligned} (\nabla_{w_1} w_1)^N &= \frac{1}{E} \phi_{xx}^N, \\ (\nabla_{w_2} w_1)^N &= \frac{1}{E\sqrt{EG - F^2}} (E\phi_{xy}^N - F\phi_{xx}^N), \\ (\nabla_{w_2} w_2)^N &= \frac{1}{E(EG - F^2)} (E^2\phi_{yy}^N - 2EF\phi_{xy}^N + F^2\phi_{xx}^N). \end{aligned}$$

Temos que a elipse de curvatura pode ser expressa por :

$$\begin{aligned} \eta(\theta) &= \frac{1}{2E} \left(\phi_{xx}^N + \frac{1}{EG - F^2} (E^2\phi_{yy}^N - 2EF\phi_{xy}^N + F^2\phi_{xx}^N) \right) + \\ &\quad \frac{1}{2E} \left(\phi_{xx}^N - \frac{1}{EG - F^2} (E^2\phi_{yy}^N - 2EF\phi_{xy}^N + F^2\phi_{xx}^N) \right) \cos 2\theta + \\ &\quad \frac{1}{E\sqrt{EG - F^2}} (E\phi_{xy}^N - F\phi_{xx}^N) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Observação 1.3 Dado um ponto $p \in M$ podemos ter 3 casos para a elipse de curvatura neste ponto:

- 1) A elipse é não degenerada, sendo de fato uma elipse.
- 2) A elipse de curvatura se degenera em um segmento de reta.
- 3) A elipse de curvatura se degenera em um ponto.

Definição 1.4 Seja $p \in M$, p é um **ponto de inflexão** se, e somente se, a elipse de curvatura em p se degenera em um segmento de reta radial de p .

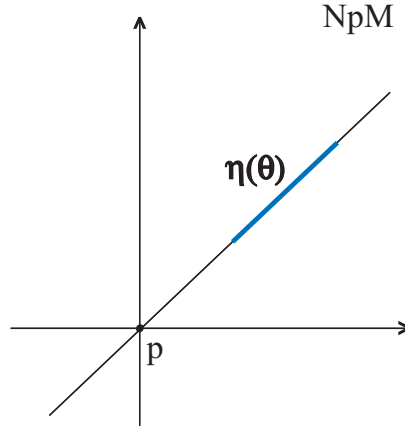


Figura 1.3: Ponto de inflexão.

Exemplo: Superfície de translação

Seja ϕ uma imersão de uma superfície M em \mathbb{R}^5 , a **superfície de translação** é definida por

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^5 \\ (s, t) &\longmapsto \phi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t) \end{aligned} \quad ,$$

onde α e β são curvas em \mathbb{R}^5 .

Consideremos a superfície de translação:

$$\begin{aligned} \phi : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^5 \\ (s, t) &\longmapsto \phi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t) = (\cos s, \sin s, a \cos t, a \sin t, 1 - a^2) \end{aligned} \quad ,$$

onde α e β são dois círculos e $0 < a < 1$.

Através da expressão da elipse de curvatura em 1.3 para uma parametrização qualquer de uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , vamos encontrar a elipse de curvatura em um ponto qualquer da superfície de translação dada. Observemos que :

$$\phi_s(s, t) = (-\sin s, \cos s, 0, 0, 0) \quad \text{e} \quad \phi_t(s, t) = (0, 0, -a \sin t, -a \cos t, 0).$$

Assim, os coeficientes da primeira forma fundamental da superfície de translação são:

$$E = 1, \quad F = 0 \quad \text{e} \quad G = a^2.$$

Sejam p um ponto na superfície de translação e $\left\{ \phi_s, \frac{1}{a} \phi_t \right\}$ um referencial ortonormal tangente a essa superfície.

Logo,

$$\phi_{ss}^N = \phi_{ss} = (-\cos s, -\sin s, 0, 0, 0), \quad \phi_{tt}^N = \phi_{tt} = (0, 0, -a \cos t, -a \sin t, 0) \quad \text{e}$$

$$\phi_{st} = (0, 0, 0, 0, 0).$$

Segue da expressão da elipse de curvatura para uma expressão qualquer em 1.3 que

$$C = (0, 0, 0, 0, 0).$$

Portanto, a elipse de curvatura se degenera em um segmento de reta ou em um ponto. Como

$$B = \frac{1}{2} \left(-\cos s, -\sin s, \frac{\cos t}{a}, \frac{\sin t}{a}, 0 \right),$$

a elipse de curvatura se degenera em um segmento de reta.

A pergunta que surge é:

Os pontos desta superfície de translação são pontos de inflexão?

Para respondermos tal pergunta, observamos que o vetor H é dado por:

$$H = -\frac{1}{2} \left(\cos s, \sin s, \frac{\cos t}{a}, \frac{\sin t}{a}, 0 \right).$$

Como os vetores B e H são linearmente independentes, segue que os pontos da superfície **não são pontos de inflexão**, e assim a elipse de curvatura se degenera em **segmento de reta não radial**.

Observação 1.5 *i) Geometricamente, o vetor curvatura média H da expressão acima da elipse de curvatura, representa o vetor com extremos em p e no centro de $n_p(\theta)$.*

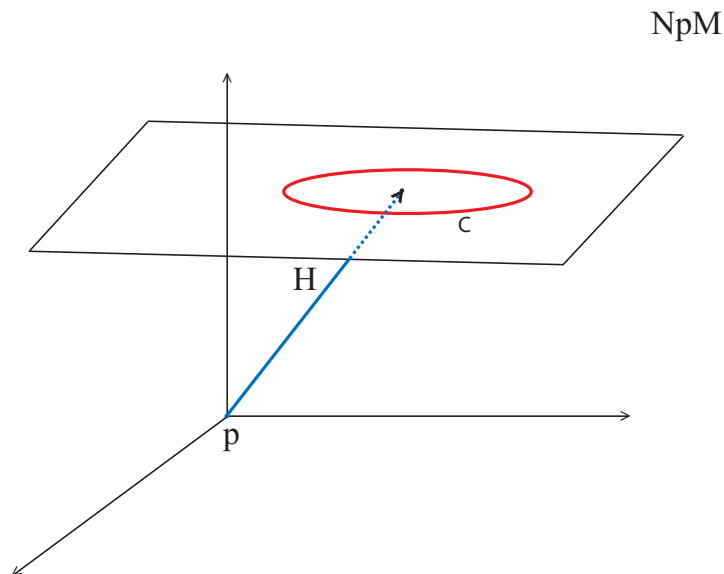


Figura 1.4: Vetor curvatura média.

- ii) Se M é uma superfície imersa em \mathbb{R}^3 , dado $p \in M$, o espaço normal a M em p , N_pM , é uma reta. Portanto, neste caso a elipse de curvatura é um segmento de reta ou é apenas um ponto.

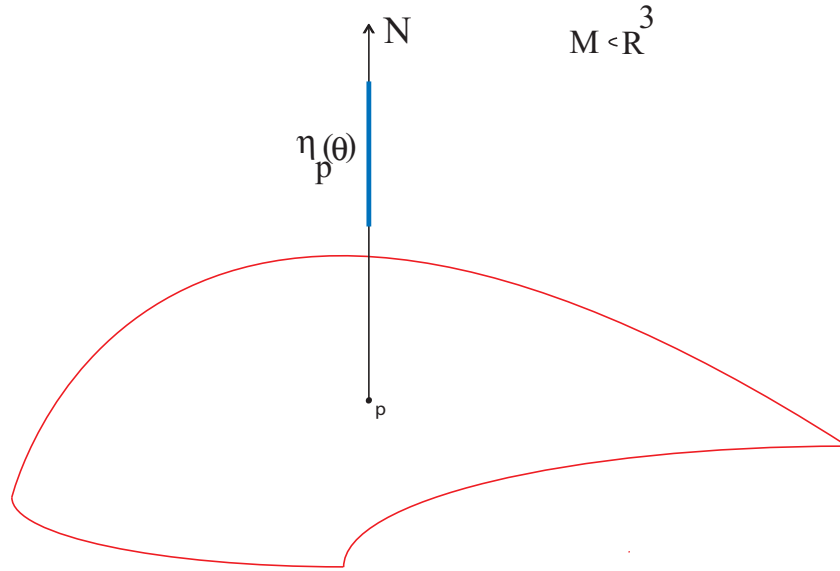


Figura 1.5: Elipse de curvatura em superfícies em \mathbb{R}^3 .

- iii) Se M é uma superfície imersa em \mathbb{R}^4 e se a elipse de curvatura é uma elipse não degenerada, então o plano que contém a elipse de curvatura coincide com o plano normal N_pM , já que o espaço normal neste caso tem dimensão 2.
- iv) A aplicação η restrita a S^1 é um duplo recobrimento da elipse de curvatura. Assim, todo ponto da elipse de curvatura corresponde a dois pontos diametralmente opostos no círculo S^1 .

Destacamos alguns conceitos importantes estudados por alguns autores tais como D.K.H. Mochida em [14], J. Little em [11] e L. F. Mello em [13], que estão diretamente ligados ao estudo da elipse de curvatura em superfícies imersas em \mathbb{R}^4 .

Observação 1.6 1) D.K.H. Mochida, em sua tese [14] faz uma interessante relação entre um ponto da superfície e sua posição quanto a elipse de curvatura nesse ponto, isto é:

- i) Se $p \in M$ está fora da elipse de curvatura tal ponto é chamado de ponto **hiperbólico** de M .

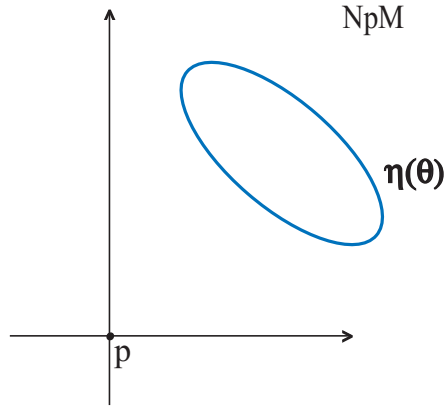


Figura 1.6: Ponto hiperbólico.

ii) Se $p \in M$ está dentro da elipse de curvatura tal ponto é denominado ponto **elíptico** de M .

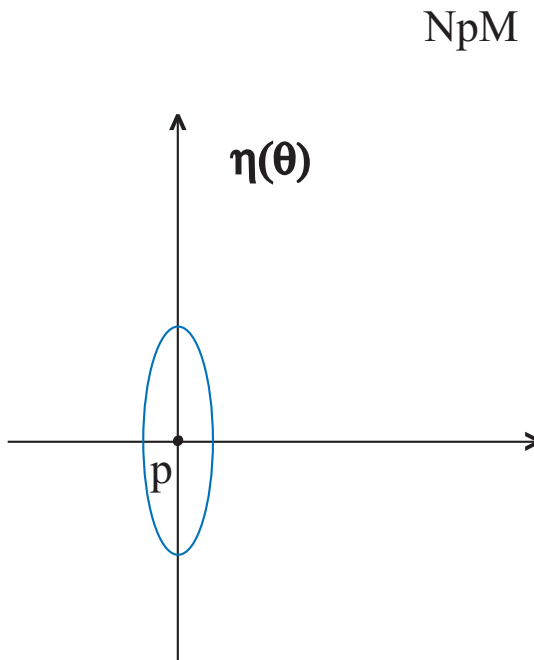


Figura 1.7: Ponto elíptico.

iii) Se $p \in M$ está sobre a elipse de curvatura tal ponto é denominado ponto **parabólico** de M .

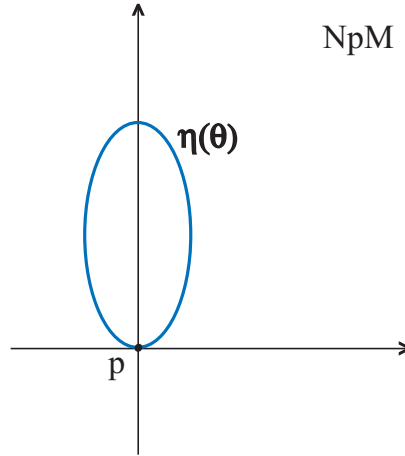


Figura 1.8: Ponto parabólico.

2) Ainda em [14], Mochida faz uma associação entre os pontos da superfície e a degeneracidade em relação a elipse de curvatura nestes pontos:

- i) Podemos associar ponto $p \in M$ a elipse de curvatura que se degenera em um segmento de reta radial deste ponto, ou seja, p é um ponto de **inflexão** de M .

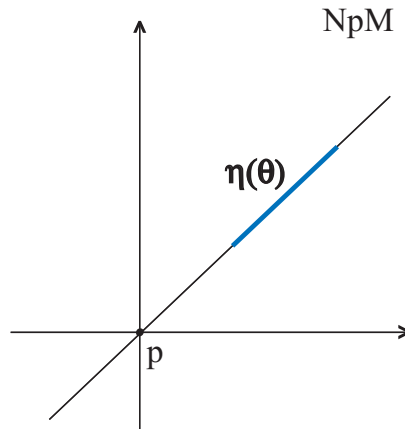


Figura 1.9: Ponto de inflexão.

- ii) No caso em que p é um ponto de inflexão que não pertence a elipse de curvatura, p é chamado de **inflexão imaginária**. Quando p é um ponto de inflexão que pertence a elipse de curvatura, p é chamado de **inflexão real**.

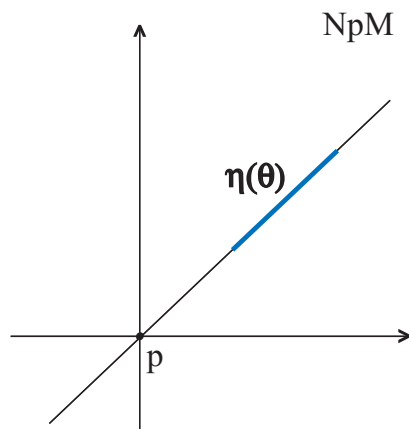


Figura 1.10: Ponto de inflexão imaginário.

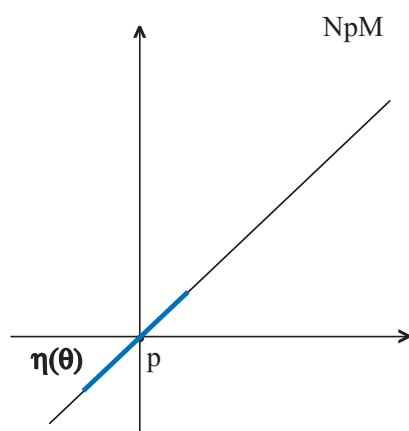


Figura 1.11: Ponto de inflexão real.

iii) Um ponto $p \in M$ é um ponto de **inflexão “flat” ou degenerado** se p é um ponto de extremidade da elipse de curvatura.

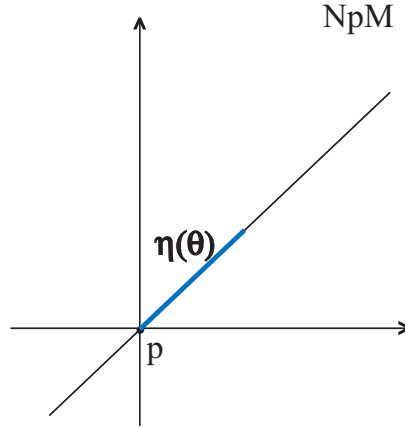


Figura 1.12: Ponto de inflexão “flat”.

3) Em [11] J.Little, faz um estudo de funções associadas a imersões de superfícies em \mathbb{R}^4 . Estas funções estão diretamente ligadas ao estudo da elipse de curvatura. Tais funções podem ser relacionadas à posição relativa do ponto considerado e a elipse de curvatura e sua degeneracidade ou não.

Definição 1.7 Seja M uma superfície imersa em \mathbb{R}^4 , dados $\nu \in N_pM$ e $\nu^\perp \in N_pM$, a curvatura normal segundo o vetor normal ν , denotada k_N , é dada por:

$$k_N = \frac{E(f_\nu g_{\nu^\perp} - f_{\nu^\perp} g_\nu) - F(e_\nu g_{\nu^\perp} - e_{\nu^\perp} g_\nu) + G(e_\nu f_{\nu^\perp} - e_{\nu^\perp} f_\nu)}{2(EG - F^2)}.$$

Definição 1.8 Seja M uma superfície imersa em \mathbb{R}^4 , dados $\nu \in N_pM$ e $\nu^\perp \in N_pM$, a resultante segundo o vetor normal ν , denotada Δ_ν , é dada por:

$$\Delta_\nu = \frac{1}{4(EG - F^2)} \begin{vmatrix} e_\nu & 2f_\nu & g_\nu & 0 \\ e_{\nu^\perp} & 2f_{\nu^\perp} & g_{\nu^\perp} & 0 \\ 0 & e_\nu & 2f_\nu & g_\nu \\ 0 & e_{\nu^\perp} & 2f_{\nu^\perp} & g_{\nu^\perp} \end{vmatrix}.$$

Algumas consequências imediatas dessas definições são:

- i) Podemos encontrar a área da elipse de curvatura em um ponto $p \in M$ através da curvatura normal nesse ponto, ou seja, a área da elipse de curvatura em um ponto $p \in M$ é calculada através da área de S^1 multiplicada pelo valor absoluto da $k_N(p)$, isto é:

$$\text{Área}(\eta_p(\theta)) = \frac{\pi}{2} |k_N(p)|.$$

- ii) Dado um ponto $p \in M$ podemos relacionar este ponto com a sua posição relativa a elipse de curvatura, de acordo com o valor da resultante no ponto considerado, isto é, $\Delta_\nu(p) > 0, = 0$ ou < 0 implicam que p é elíptico, parabólico ou hiperbólico respectivamente. Os pontos de inflexão são os pontos em que a resultante Δ_ν se anula.

iii) Se $k_N(p) = 0$ concluimos de i) que a elipse de curvatura se degenera em um segmento de reta radial ou não, ou em um ponto.

iv) Se $k_N(p) = \Delta_\nu(p) = 0$, então o ponto p é um ponto de inflexão da superfície.

4) Em [13] L. F. Mello, descreve a elipse de curvatura de forma similar ao nosso caso, através do vetor curvatura normal, associada a uma imersão

$$\begin{aligned} \phi : M &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (u, v) &\longmapsto \phi(u, v), \end{aligned}$$

de uma superfície M em \mathbb{R}^4 , isto é, a curva obtida pela aplicação

$$\eta(p, w) = \frac{II(p, w)}{I(p, w)},$$

onde $II = II_1 N_1 + II_2 N_2$, $\{N_1, N_2\}$ é um referencial ortonormal para $N_p M$, $w \in T_p M$ e os $II_i = e_i du^2 + 2f_i dudv + g_i dv^2$, com $e_i = \phi_{uu} \cdot N_i$, $f_i = \phi_{uv} \cdot N_i$ e $g_i = \phi_{vv} \cdot N_i$.

Destacamos algumas idéias encontradas em [13], relacionadas ao estudo da elipse de curvatura.

i) Um ponto p em que o vetor curvatura média é nulo naquele ponto é dito ser um **ponto mínimo** da superfície.

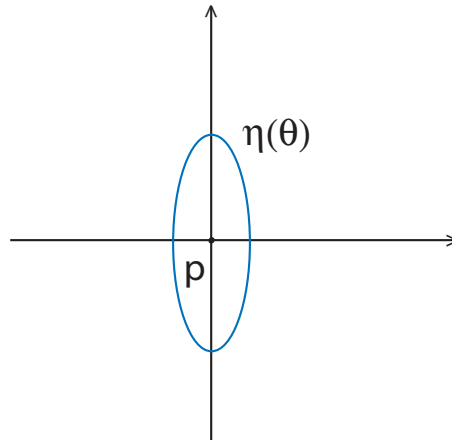


Figura 1.13: Ponto mínimo.

iii) Um ponto p é chamado de **axiumbílico** se a elipse de curvatura é um círculo naquele ponto ou se degenera em um ponto.

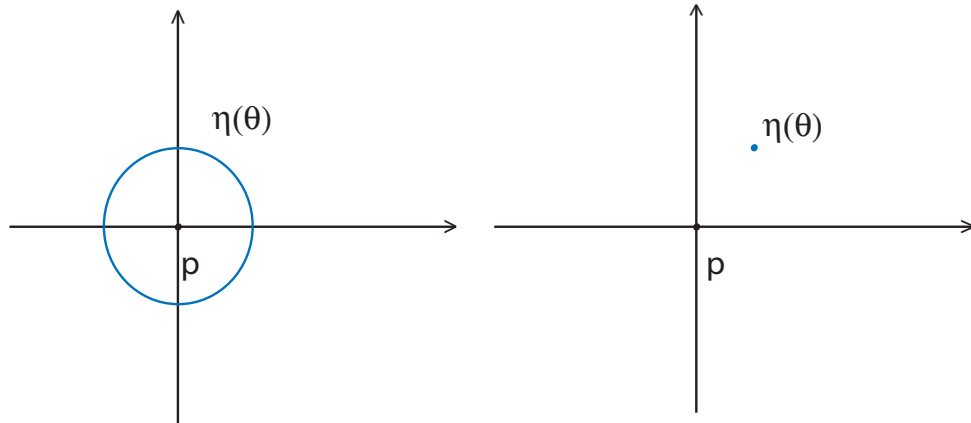


Figura 1.14: Ponto axiumbílico.

1.5 Alguns Exemplos no Estudo da Elipse de Curvatura

Nesta seção estudamos exemplos de imersões de superfícies em $\mathbb{R}^n, n \geq 4$ e em cada caso encontramos a elipse de curvatura associada a imersão dada.

1. Imersões de superfícies contidas em hiperplanos.

Suponhamos que $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^4$ esteja contida em um hiperplano, então esse hiperplano é homeomorfo ao \mathbb{R}^3 . Assim considerando $\{N_1, N_2\}$ uma base ortonormal para $N_p M$, podemos escolher N_1 tangente a este hiperplano e N_2 normal a este hiperplano, de forma que para todo ponto $p \in M$, temos

$$\begin{cases} e_2 = \phi_{xx}(p) \cdot N_2 = 0 \\ f_2 = \phi_{xx}(p) \cdot N_2 = 0 \\ g_2 = \phi_{xx}(p) \cdot N_2 = 0. \end{cases}$$

Logo, analisando a curvatura normal em um ponto qualquer da superfície M , temos:

$$k_N = \frac{E(f_1 g_2 - f_2 g_1) - F(e_1 g_2 - e_2 g_1) + G(e_1 f_2 - e_2 f_1)}{2(EG - F^2)} = 0.$$

Além disso, a resultante em cada ponto da superfície é

$$\Delta_\nu = \frac{1}{4(EG - F^2)} \begin{vmatrix} e_1 & 2f_1 & g_1 & 0 \\ e_2 & 2f_2 & g_2 & 0 \\ 0 & e_1 & 2f_1 & g_1 \\ 0 & e_2 & 2f_2 & g_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Segue da observação 1.6 item 3), *iv*) que cada ponto da superfície M é um ponto de **inflexão**. Portanto concluímos que a elipse de curvatura em um ponto $p \in M$ é um **segmento de reta radial**.

2. A projeção estereográfica.

Consideremos a projeção estereográfica $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow S^3 \subset \mathbb{R}^4$ dada por

$$\phi : (x, y, z) = \frac{1}{1+w}(x, y, z, w),$$

onde $w = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$. Seja $\psi : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão de uma superfície regular e orientada M em \mathbb{R}^3 . Suponhamos que (u, v) seja uma carta positiva de M e que $\{\psi_u, \psi_v, N\}$ seja um referencial positivo de \mathbb{R}^3 , tal que

$$N = \frac{\psi_u \wedge \psi_v}{\|\psi_u \wedge \psi_v\|}$$

é um campo de vetores normais a ψ . Denotemos por $\bar{\psi} = \phi \circ \psi$ a projeção estereográfica de M em S^3 e por $\bar{\psi} = i \circ \bar{\psi}$ a imersão de M em \mathbb{R}^4 . Consideremos $\{\bar{\psi}_u, \bar{\psi}_v, N_1, N_2\}$ um referencial positivo de \mathbb{R}^4 , com

$$N_1 = \frac{d\phi(N)}{\|d\phi(N)\|}$$

e N_2 é a normal unitária interior a S^3 .

Através de alguns cálculos da primeira e da segunda forma fundamentais, em termos de $\bar{\psi}$, temos:

$$\begin{aligned} \bar{E} &= (1+w)^2 E, \\ \bar{F} &= (1+w)^2 F, \\ \bar{G} &= (1+w)^2 G, \\ \bar{e}_1 &= (1+w)^{-2}[(1+w)e_1 + Et], \\ \bar{f}_1 &= (1+w)^{-2}[(1+w)f_1 + Ft], \\ \bar{g}_1 &= (1+w)^{-2}[(1+w)g_1 + Gt], \\ \bar{e}_2 &= \bar{E}, \bar{f}_2 = \bar{F}, \bar{g}_2 = \bar{G}, \end{aligned}$$

em que $t = \psi \cdot N$ é chamada de função suporte de ψ . Observemos que

$$\eta_p = \frac{\bar{II}_1}{I} N_1 + \frac{\bar{II}_2}{I} N_2.$$

Mas $\bar{II}_2 = \bar{e}_2 \bar{du}^2 + 2\bar{f}_2 \bar{dudv} + \bar{g}_2 \bar{dv}^2$, então $\bar{II}_2 = \bar{E} \bar{du}^2 + 2\bar{F} \bar{dudv} + \bar{G} \bar{dv}^2 = I$.

Voltando a expressão da elipse de curvatura temos:

$$\eta_p = \frac{\bar{II}_1}{I} N_1 + 1 N_2.$$

Portanto, a elipse de curvatura está degenerada em um segmento de reta sobre a reta $N_2 = 1$ para todo ponto da imersão.

Vamos agora adotar uma parametrização local, de modo que a primeira forma fundamental seja $E = G = 1$ e $F = 0$. Nesta parametrização local os coeficientes da primeira forma fundamental de $\bar{\psi}$ são:

$$\bar{E} = \bar{G} = \bar{e}_2 = \bar{g}_2 = (1 + w)^{-2},$$

$$\bar{F} = \bar{f}_2 = 0,$$

$$\bar{e}_1 = (1 + w)^{-2}[(1 + w)e_1 + t],$$

$$\bar{f}_1 = (1 + w)^{-1}f,$$

$$\bar{g}_1 = (1 + w)^{-2}[(1 + w)g_1 + t].$$

Como esperávamos,

$$k_N = \frac{(1 + w)^{-2}[(1 + w)^{-1}f(1 + w)^{-2}] - (1 + w)^{-2}[(1 + w)^{-1}f(1 + w)^{-2}]}{2(\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2)} = 0,$$

pois a elipse de curvatura se degenera em um **segmento de reta**.

3. Superfície produto de duas curvas.

No exemplo 1 e 2 dessa seção, vimos que a imersão estava contido em um hiperplano e em uma hipersfera, respectivamente. A pergunta que naturalmente poderia surgir é:

Sempre que $k_N \equiv 0$, podemos “enxergar” a superfície em um subespaço de dimensão menor?

Imersões que não estejam contidas em hiperplanos e hipersferas, podem ser obtidas da seguinte maneira:

Sejam

$$\begin{aligned} \beta: I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \gamma: I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t)) & e & & t &\longmapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \end{aligned} ,$$

duas curvas simples, fechadas e regulares. A **superfície produto de curvas** é definida por

$$\begin{aligned} \alpha: I \times J &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (u, v) &\longmapsto (\beta \times \gamma)(u, v) = (\beta_1(u), \beta_2(u), \gamma_1(v), \gamma_2(v)). \end{aligned}$$

Claramente α é diferenciável, pois as funções coordenadas as são. Além disso, temos

$$\alpha_u = (\beta'_1(u), \beta'_2(u), 0, 0) \quad \text{e} \quad \alpha_v = (0, 0, \gamma'_1(v), \gamma'_2(v)).$$

Portanto, α é uma imersão. Observe que:

$$F = \alpha_u \cdot \alpha_v = (\beta'_1(u), \beta'_2(u), 0, 0) \cdot (0, 0, \gamma'_1(v), \gamma'_2(v)) = 0 \quad \text{e} \quad \alpha_{uv} = (0, 0, 0, 0).$$

Logo,

$$f_1 = \alpha_{uv} \cdot N_1 = 0 \quad \text{e} \quad f_2 = \alpha_{uv} \cdot N_2 = 0.$$

Assim,

$$k_N = \frac{E(f_1g_2 - f_2g_1) - F(e_1g_2 - e_2g_1) + G(e_1f_2 - e_2f_1)}{2(EG - F^2)} = 0.$$

3.1) A superfície produto de uma cardióide e de um círculo.

Neste exemplo construímos o produto de duas curvas específicas e a partir daí encontramos a elipse de curvatura associada a imersão definida pelo produto.

Sejam

$$\begin{aligned} \beta_1 : [0, \pi) \cup (\pi, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \beta_1(t) = (2 \cos t + \cos 2t, 2 \sin t + \sin 2t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \beta_2 : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \beta_2(t) = (\sin t, \cos t), \end{aligned}$$

as curvas no plano que descrevem uma cardióide e um círculo, respectivamente. Seja

$$\begin{aligned} X : ([0, \pi) \cup (\pi, 2\pi]) \times [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (u, v) &\longmapsto X(u, v) = (2 \cos u + \cos 2u, 2 \sin u + \sin 2u, \sin v, \cos v). \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} X_u &= (-2 \sin u - 2 \sin 2u, 2 \cos u + 2 \cos 2u, 0, 0), \\ X_v &= (0, 0, \cos v, -\sin v), \\ X_{uu} &= (-2 \cos u - 4 \cos 2u, -2 \sin u - 4 \sin 2u, 0, 0), \\ X_{vv} &= (0, 0, -\sin v, -\cos v), \\ X_{uv} &= (0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental de M em (u, v) , são:

$$\begin{aligned} E &= X_u \cdot X_u \\ &= (-2 \sin u - 2 \sin 2u)^2 + (2 \cos u + 2 \cos 2u)^2 \\ &= 4 \sin^2 u + 8 \sin u \sin 2u + 4 \sin^2 2u + 4 \cos^2 u + 8 \cos u \cos 2u + 4 \cos^2 2u \\ &= 8 + 16 \sin^2 u \cos u + 8 \cos u \cos 2u \\ &= 8 + 8 \cos u (2 \sin^2 u + \cos^2 u - \sin^2 u) \\ &= 8 + 8(\sin^2 u + \cos^2 u) \\ &= 8 + 8 \cos u, \end{aligned}$$

$F = X_u \cdot X_v = 0$ e $G = X_v \cdot X_v = \cos^2 v + \sin^2 v = 1$. Observemos que dados $p \in M$ e $\left\{ \frac{X_u}{\|X_u\|}, X_v \right\}$ um referencial ortonormal de $T_p M$, temos :

$$\begin{cases} X_{uu} = \left(X_{uu} \cdot \frac{X_u}{\|X_u\|} \right) \frac{X_u}{\|X_u\|} + (X_{uu} \cdot X_v) X_v + (X_{uu})^N \\ X_{vv} = \left(X_{vv} \cdot \frac{X_u}{\|X_u\|} \right) \frac{X_u}{\|X_u\|} + (X_{vv} \cdot X_v) X_v + (X_{vv})^N. \end{cases}$$

Logo,

$$(X_{uu})^N = X_{uu} + \frac{4 \sin u}{8 + 8 \cos u} X_u, \quad (X_{vv})^N = X_{vv} \quad \text{e} \quad (X_{uv})^N = X_{uv} = 0.$$

Sabemos que dada uma superfície M imersa em $R^n; n \geq 4$ podemos calcular a expressão da elipse de curvatura em qualquer ponto de M e sua expressão é dada por:

$$\begin{aligned} \eta(\theta) = & \frac{1}{2E} \left(X_{uu}^N + \frac{1}{EG-F^2} (E^2 X_{vv}^N - 2EF X_{uv}^N + F^2 X_{uu}^N) \right) + \\ & \frac{1}{2E} \left(X_{uu}^N - \frac{1}{EG-F^2} (E^2 X_{vv}^N - 2EF X_{uv}^N + F^2 X_{uu}^N) \right) \cos 2\theta + \\ & \frac{1}{E\sqrt{EG-F^2}} (E X_{uv}^N - F X_{uu}^N) \sin 2\theta. \end{aligned}$$

Então,

$$C = (0, 0, 0, 0),$$

segue da expressão da elipse de curvatura, que em todo ponto da superfície a elipse de curvatura se degenera em um segmento de reta ou em um ponto.

Além disso,

$$\begin{aligned} B = & \frac{1}{16(1 + \cos u)} \left(-1 - 32 \cos 2u - 8 \cos^2 u(1 + 6 \cos u), -4 \sin 2u(9 + \cos u), 0, 0 \right) \\ & + \frac{1}{2} (0, 0, \sin v, \cos v) \neq 0, \end{aligned}$$

logo, a elipse de curvatura se degenera em segmento de reta.

Surge a seguinte pergunta:

Os pontos da superfície gerada pelo produto de uma cardióide e de um círculo são pontos inflexão ?

Afim de respondermos tal pergunta, analisamos os vetores H e B

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{128(1 + \cos u)^2} \left(-1 - 32 \cos 2u - 8 \cos^2 u(1 + 6 \cos u), -4 \sin 2u(9 + \cos u), 0, 0 \right) + \\ & \frac{1}{2} (0, 0, -\sin v, -\cos v). \end{aligned}$$

Observe que: $H = U + V$ e $B = U - V$, onde

$$U = \frac{1}{128(1 + \cos u)^2} \left(-1 - 32 \cos 2u - 8 \cos^2 u(1 + 6 \cos u), -4 \sin 2u(9 + \cos u), 0, 0 \right),$$

$$V = \frac{1}{2}(0, 0, -\sin v, -\cos v),$$

são vetores linearmente independentes, então H e B o são. Assim, todos os pontos da superfície **não são pontos de inflexão**, porém todos os seus pontos se degeneram em um **segmento de reta**.

3.2) O produto de um círculo e uma elipse.

Sejam

$$\begin{aligned} \beta_1 : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \beta_1(t) = (\cos t, \sin t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \beta_2 : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \beta_2(t) = (a \cos t, b \sin t), \end{aligned}$$

curvas no plano, com $a > b > 0$. Seja produto das curvas β_1 e β_2 dado por:

$$\begin{aligned} X : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (u, v) &\longmapsto X(u, v) = (\cos u, \sin u, a \cos v, b \sin v). \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} X_u &= (-\sin u, \cos u, 0, 0), \\ X_v &= (0, 0, -a \sin v, b \cos v), \\ X_{uu} &= (-\cos u, -\sin u, 0, 0), \\ X_{vv} &= (0, 0, -a \cos v, -b \sin v), \\ X_{uv} &= (0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental de M em (u, v) são dados por:

$$E = 1, \quad F = 0 \quad \text{e} \quad G = a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v.$$

Utilizando os mesmos argumentos do exemplo anterior temos:

$$(X_{uu})^N = X_{uu}, \quad (X_{vv})^N = X_{vv} + \frac{(a^2 - b^2) \sin 2v}{2(a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v)} X_v \quad \text{e} \quad X_{uv} = (0, 0, 0, 0).$$

Logo,

$$C = (0, 0, 0, 0)$$

e a elipse de curvatura em cada ponto da superfície é degenerada. Além disso

$$H = -\frac{1}{2} \left[(\cos u, \sin u, 0, 0) - \frac{ab}{2(a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v)^2} (0, 0, b, a \sin v) \right]$$

e

$$B = -\frac{1}{2} \left[(\cos u, \sin u, 0, 0) + \frac{ab}{2(a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v)^2} (0, 0, b, a \sin v) \right].$$

De forma análoga ao exemplo anterior, $H = U + V$ e $B = U - V$, onde

$$U = -\frac{1}{2}(\cos u, \sin u, 0, 0) \quad \text{e} \quad V = \frac{-ab}{2(a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v)^2} (0, 0, b, a \sin v),$$

são vetores linearmente independentes, o que mostra que H e B também o são. Portanto, os pontos da superfície **não são pontos de inflexão**, porém a elipse de curvatura se degenera em um **segmento de reta**.

3.3) Toro de Clifford - Produto de dois círculos.

Consideremos o toro de Clifford descrito na seção 1.3, dado pela imersão

$$X(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u, \sin u, \cos v, \sin v).$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental do toro de Clifford, denotado por \mathcal{T} , em $p = (u, v)$ são:

$$E = X_u \cdot X_u = \frac{1}{2}, \quad F = X_u \cdot X_v = 0 \quad \text{e} \quad G = X_v \cdot X_v = \frac{1}{2}.$$

Além disso,

$$X_{uu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos u, -\sin u, 0, 0) \quad \text{e} \quad X_{vv} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, -\cos v, -\sin v).$$

Dados $p \in \mathcal{T}$ e $\{\sqrt{2}X_u, \sqrt{2}X_v\}$ um referencial ortonormal para $T_p\mathcal{T}$ temos:

$$\begin{aligned} (X_{uu})^N &= X_{uu} - 2(X_{uu} \cdot X_u)X_u - 2(X_{uu} \cdot X_v)X_v, \\ (X_{vv})^N &= X_{vv} - 2(X_{vv} \cdot X_u)X_u - 2(X_{vv} \cdot X_v)X_v. \end{aligned}$$

Portanto,

$$(X_{uu})^N = X_{uu} \quad (X_{vv})^N = X_{vv}, \quad \text{e} \quad (X_{uv})^N = 0.$$

Analisando os vetores H , B e C da elipse de curvatura, temos inicialmente que

$$C = (0, 0, 0, 0),$$

o que garante que a elipse de curvatura se degenera num segmento de reta ou em um ponto. Como

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos u, -\sin u, \cos v, \sin v),$$

então a elipse de curvatura não se degenera em um ponto e

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos u, -\sin u, -\cos v, -\sin v).$$

Claramente H e B são linearmente independentes, com isso concluímos que os pontos do toro de Clifford **não são pontos de inflexão**. Contudo a elipse de curvatura em um ponto qualquer, associado a imersão X que descreve o chamado toro de Clifford, é um **segmento de reta não radial**.

4) A superfície de Veronese.

Seja a aplicação de Veronese de ordem 2 (veja Apêndice):

$$\begin{aligned} \xi : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^6 \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto (x_1^2, x_2^2, x_3^2, \sqrt{2}x_1x_2, \sqrt{2}x_1x_3, \sqrt{2}x_2x_3). \end{aligned}$$

A imagem $\xi(S^2)$ é chamada **superfície de Veronese** e é uma superfície esférica em \mathbb{R}^5 .

De fato,

$$\begin{aligned} \xi : \quad S^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^6 \\ (x, y, z(x, y)) &\longmapsto \left(x^2, y^2, (z(x, y))^2, \sqrt{2}xy, \sqrt{2}xz(x, y), \sqrt{2}yz(x, y) \right), \end{aligned}$$

onde $z(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Notemos que:

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 &= x^2(x^2 + y^2 + z^2) + y^2(x^2 + y^2 + z^2) + \\ &\quad z^2(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Logo, $\xi(S^2) \subset S^5$.

Além disso, $\xi(S^2)$ está contida no hiperplano \mathbb{H} , onde

$$\mathbb{H} = \{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) \in \mathbb{R}^6; u_1 + u_2 + u_3 = 1\}.$$

Portanto, $\xi(S^2) \subset \mathbb{H} \cap (S^2) = S^4(a, r) \subset \mathbb{R}^5$.

A expressão da superfície de Veronese em \mathbb{R}^5 é dada por:

$$\begin{aligned} \bar{\xi} = RT_v \xi : \quad S^2 &\longrightarrow S^4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \\ (x, y, z) &\longmapsto \left(3y^2 - 1, -\sqrt{3}(x^2 + z^2 - \frac{2}{3}), \sqrt{2}xy, \sqrt{2}xz, \sqrt{2}yz \right). \end{aligned}$$

Vamos obter a elipse de curvatura em pontos da superfície de Veronese $\xi(S^2)$. Observemos que para quaisquer dois pontos $p, q \in S^2$, distintos, existe uma isometria

linear que leva p em q .

Além disso, sabemos por [19] que uma isometria linear $i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ induz uma isometria em $\mathbb{R}^n \circ \mathbb{R}^n$, o produto simétrico de \mathbb{R}^n .

Assim, utilizando esses fatos, concluímos que na superfície de Veronese a elipse de curvatura coincide em todos os seus pontos.

Determinaremos a elipse de curvatura no ponto $(0, 0, 1) \in S^2$. Notemos que

$$\begin{aligned}\xi_x(x, y, z) &= \left(0, -2\sqrt{2}x, \sqrt{2}z(x, y) + \sqrt{2}xz_x(x, y), \sqrt{2}yz_x(x, y)\right), \\ \xi_y(x, y, z) &= \left(\sqrt{6}y, -\sqrt{2}y, \sqrt{2}x, \sqrt{2}xz_y(x, y), \sqrt{2}z(x, y) + \sqrt{2}yz_y(x, y)\right).\end{aligned}$$

Logo,

$$\xi_x(0, 0, 1) = (0, 0, \sqrt{2}, 0) \quad \text{e} \quad \xi_y(0, 0, 1) = (0, 0, 0, \sqrt{2}).$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental da superfície de Veronese em $(0, 0, 1)$ são

$$E = G = 2 \quad \text{e} \quad F = 0.$$

Observe ainda que:

$$\begin{aligned}\xi_{xx}(x, y, z) &= \left(0, -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}z_x(x, y) + \sqrt{2}xz_{xx}(x, y), \sqrt{2}yz_{xx}(x, y)\right), \\ \xi_{yy}(x, y, z) &= \left(\sqrt{6}, -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}xz_{yy}(x, y), 2\sqrt{2}z_y(x, y) + \sqrt{2}yz_{yy}(x, y)\right), \\ \xi_{xy}(x, y, z) &= \left(0, 0, \sqrt{2}, \sqrt{2}z(x, y) + \sqrt{2}xz_{xy}(x, y), \sqrt{2}z_y(x, y) + \sqrt{2}yz_y(x, y)\right).\end{aligned}$$

Então,

$$\xi_{xx}(0, 0, 1) = (0, -2\sqrt{2}, 0, 0, 0), \quad \xi_{yy}(0, 0, 1) = (\sqrt{6}, -\sqrt{2}, 0, 0, 0)$$

e $\xi_{xy}(0, 0, 1) = (0, 0, \sqrt{2}, 0, 0)$.

Podemos escolher o referencial ortonormal $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\xi_x(0, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_y(0, 0, 1)\right\}$ tangente de tal forma que:

$$\begin{aligned}(\xi_{xx}(0, 0, 1))^N &= \xi_{xx}(0, 0, 1) = (0, -2\sqrt{2}, 0, 0, 0), \\ (\xi_{yy}(0, 0, 1))^N &= \xi_{yy}(0, 0, 1) = (\sqrt{6}, -\sqrt{2}, 0, 0, 0), \\ (\xi_{xy}(0, 0, 1))^N &= \xi_{xy}(0, 0, 1) = (0, 0, \sqrt{2}, 0, 0).\end{aligned}$$

Segue que a elipse de curvatura é dada por:

$$\eta(\theta) = \frac{1}{4}(\sqrt{6}, -3\sqrt{2}, 0, 0, 0) + \frac{1}{4}(-\sqrt{6}, \sqrt{2}, 0, 0, 0) \cos 2\theta + \frac{1}{2}(0, 0, \sqrt{2}, 0, 0) \sin 2\theta.$$

Os vetores $\frac{1}{4}(-\sqrt{6}, \sqrt{2}, 0, 0, 0)$ e $\frac{1}{2}(0, 0, \sqrt{2}, 0, 0)$ são vetores linearmente independentes e têm o mesmo comprimento. Portanto, a elipse de curvatura em $(0, 0, 1)$ é uma **circunferência**, com centro $H = \frac{1}{4}(\sqrt{6}, -3\sqrt{2}, 0, 0, 0)$ e raio $r = \sqrt{2}$.

5) **Superfície de translação.**

Seja a superfície de translação dada por:

$$X : \left((0, 2\pi) - \{\bar{s}\} \right) \times (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$$(s, t) \longmapsto X(s, t) = \alpha(s) + \beta(t) = (\cos s + 3t, \sin s, \cos t, \sin t),$$

onde \bar{s} é tal que $\sin^2 \bar{s} < \frac{4}{9}$ e

$$\alpha : \begin{array}{l} (0, 2\pi) - \{\bar{s}\} \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ s \longmapsto \alpha(s) = (\cos s, \sin s, 0, 0) \end{array} ,$$

$$\beta : \begin{array}{l} (0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ t \longmapsto \beta(t) = (3t, 0, \cos t, \sin t). \end{array}$$

Temos que:

$$X_s = (-\sin s, \cos s, 0, 0) \text{ e } X_t = (3, 0, -\sin t, \cos t).$$

Portanto,

$$X_{ss} = (-\cos s, -\sin s, 0, 0) \text{ e } X_{tt} = (0, 0, -\cos t, -\sin t).$$

Dados $p \in M$ e $\{X_s, \frac{1}{2}X_t\}$ um referencial ortonormal para $T_p M$ temos:

$$(X_{ss})^N = \left(-\sin s + \frac{9}{4} \cos s, \cos s, -\frac{3}{4} \cos s \sin t, \frac{3}{4} \cos s \cos t \right), \quad (X_{tt})^N = X_{tt}$$

e $(X_{st})^N = (0, 0, 0, 0)$. Analisando a fórmula 1.3 para a elipse de curvatura em um ponto $p \in M$ associada a imersão X , temos

$$C = -\frac{-3 \sin s}{\sqrt{4 - 9 \sin^2 s}} \left(-\sin s + \frac{9}{4} \cos s, \cos s, -\frac{3}{4} \cos s \sin t, \frac{3}{4} \cos s \cos t \right),$$

$$B = \frac{1}{(4 - 9 \sin^2 s)} \left(-2 \sin s + \frac{9}{2} \cos s, 2 \cos s, -\cos t(3 \sin t + 1), \frac{3}{4} \cos s \cos t \right).$$

Observemos que para $(s, t) = (0, 0)$ temos:

$$B = \frac{1}{4} \left(\frac{9}{2}, 2, -1, \frac{3}{4} \right) \text{ e } C = 0,$$

o que mostra que a elipse de curvatura em $(0, 0)$ associada a superfície de translação é um **segmento de reta**.

Por outro lado, considerando o ponto $(s, t) = \left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ temos:

$$B = \frac{1}{4} \left(\frac{9}{2}, 2, -1, \frac{3}{4} \right) \text{ e } C = \left(\frac{-4 + 9\sqrt{3}}{8}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{3\sqrt{3}}{8} \right).$$

Como B e C são linearmente independentes e tem comprimentos distintos, então a elipse de curvatura em $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ é uma **elipse**.

Capítulo 2

Semiumbilicidade e Umbilicidade em Superfícies Imersas em \mathbb{R}^4 .

Neste capítulo, com base nos trabalhos de S. M. Moraes em [19], M. C. Romero-Fuster e F. Sánchez-Bringas em [24], estendemos alguns conceitos da geometria de superfícies em \mathbb{R}^3 para imersões de superfícies em \mathbb{R}^4 .

Considerando uma superfície M imersa em \mathbb{R}^4 , p um ponto em M e ν uma direção normal a M em p , na primeira seção definimos as ν -direções principais, ν -direções assintóticas, ν -curvaturas principais e as ν -linhas de curvatura.

Na segunda seção mostramos que em superfícies imersas em \mathbb{R}^4 os conceitos de ν -umbilicidade e semiumbilicidade são equivalentes.

Na terceira seção relacionamos os conceitos de campos paralelos com a função curvatura associada a superfície e mostramos uma relação importante entre superfícies ν -umbílicas e superfícies hiperesféricas.

2.1 ν -Umbilicidade e ν -Linhas de Curvatura

Seja M uma superfície imersa em \mathbb{R}^4 , no capítulo 1 definimos a aplicação segunda fundamental, denotada por α . Dados $p \in M$ e ν uma direção normal a M em p , α define uma forma bilinear e simétrica, denotada por H_ν , dada por:

$$\begin{aligned} H_\nu : T_p M \times T_p M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X(p), Y(p)) &\mapsto H_\nu = \alpha(X, Y)(p) \cdot \nu. \end{aligned}$$

No caso de superfícies imersas em \mathbb{R}^3 , definimos uma única aplicação segunda forma fundamental da superfície devido a única direção normal presente, mas no caso de superfícies imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$ para cada direção normal ν temos uma aplicação.

Definição 2.1 *Seja M uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, dados p em M e ν um vetor normal em $N_p M$, a **segunda forma fundamental de M em p segundo o vetor***

normal ν , denotada por II_ν , é a seguinte forma quadrática:

$$\begin{aligned} II_\nu : T_p M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X(p) &\longrightarrow II_\nu(X(p)) = H_\nu = \alpha(X, Y)(p) \cdot \nu. \end{aligned}$$

Dados $p \in M$ e $\nu \in N_p M$, podemos considerar o operador de forma S_ν que é uma aplicação linear auto adjunta, que satisfaz

$$S_\nu(X(p)) \cdot Y = H_\nu(X, Y)(p),$$

onde X, Y são campos de vetores tangentes a M .

Em [2] temos a seguinte igualdade: $S_\nu(X) = -(\overline{\nabla_{\overline{X}} \overline{\nu}})^\top$, onde \overline{X} e $\overline{\nu}$ são respectivamente as extensões de X e ν , sobre uma vizinhança de p em \mathbb{R}^4 .

A partir disso, podemos expressar a segunda forma fundamental em $X \in T_p M$, em termos do operador de forma, do seguinte modo:

$$II_\nu(X) = S_\nu(X) \cdot X.$$

Analogamente ao caso de superfícies imersas em \mathbb{R}^3 , consideremos $II_\nu|_{S^1}$, como II_ν é contínua e S^1 é compacto, segue que $II_\nu|_{S^1}$ atinge seu máximo e mínimo em S^1 , isto é, existem θ_1 e θ_2 direções em S^1 , tais que:

$$k_1 = II_\nu(\theta_1) \leq II_\nu(\theta) \leq II_\nu(\theta_2) = k_2, \quad \forall \theta \in S^1.$$

Assim temos a seguinte definição:

Definição 2.2 *Sejam M uma superfície imersa em \mathbb{R}^4 , p um ponto em M e ν um vetor não nulo em $N_p M$. Dizemos que uma direção θ não nula em $T_p M$ é uma ν -direção principal se, e somente se, a aplicação II_ν atinge seu máximo ou mínimo em θ . Os correspondentes valores k_1 máximo e k_2 mínimo são chamados, respectivamente, ν -curvatura principal máxima e ν -curvatura principal mínima.*

Definição 2.3 *Um ponto p em M é ν -umbílico se, e somente se, a ν -curvatura máxima coincide com a ν -curvatura mínima. Neste caso, ν é uma direção de umbilicidade para M em p . Dizemos que uma superfície M é ν -umbílica se todos os seus pontos são ν -umbílicos.*

Observação 2.4 *Analogamente ao caso de superfícies imersas em \mathbb{R}^3 , dado p um ponto em M , superfície imersa em \mathbb{R}^4 , se p não é ν -umbílico, então as direções principais θ_1 e θ_2 em $T_p M^*$ são ortogonais.*

De fato, o operador de forma $S_\nu = -\nabla_Y \nu$ é uma aplicação linear auto-adjunta e $\alpha(X, Y) \cdot \nu = S_\nu(X) \cdot Y$, $X, Y \in T_p M$. Então existe uma base $\{w_1, w_2\}$ ortonormal constituída de autovetores de S_ν e os respectivos autovalores são o máximo e mínimo do operador de forma.

Assim,

$$\begin{aligned}
II_\nu(w) &= \alpha(w, w) \cdot \nu \\
&= \cos^2 \theta II_\nu(w_1) + 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \alpha(w_1, w_2) \cdot \nu + \sin^2(\theta) II_\nu(w_2) \\
&= \cos^2(\theta) k_1 + 2 \sin(\theta) \cos(\theta) S_\nu(w_1) \cdot w_2 + \sin^2(\theta) k_2 \\
&= \cos^2(\theta) k_1 + \sin^2(\theta) k_2,
\end{aligned}$$

com $w \in T_p M$.

Se θ_1 e θ_2 são direções principais e p é um ponto não ν -umbílico temos:

$$II_\nu(w) = \cos^2(\theta) k_1 + \sin^2(\theta) k_2, \forall w \in T_p M,$$

onde θ é o ângulo entre w_1 e w_2 .

Portanto,

$$k_2 = \cos^2(\theta) k_1 + \sin^2(\theta) k_2.$$

Logo,

$$(k_1 - k_2) \cos^2 \theta = 0$$

e daí que $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Assim, se considerarmos \mathcal{U}_ν o conjunto de todos os pontos ν -umbílicos de M as ν -direções principais definem dois campos tangentes mutuamente ortogonais em toda a região $M \setminus \mathcal{U}_\nu$. Com isto, temos a seguinte definição:

Definição 2.5 *As curvas em M correspondentes aos dois campos tangentes mutuamente ortogonais em toda a região $M \setminus \mathcal{U}_\nu$ são chamadas as ν -linhas de curvatura principal. As duas folheações ortogonais juntamente com os pontos críticos (ν -umbílicos) formam o que chamamos de ν -configuração principal de M .*

A equação diferencial das ν -linhas de curvatura é expressa em [24] e dada da seguinte forma:

$$S_\nu(X(p)) = \lambda(p)X(p),$$

onde

$$\begin{aligned}
\lambda : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\
p &\longmapsto \lambda(p),
\end{aligned}$$

é uma função diferenciável chamada **função curvatura associada** a M .

Suponhamos que $\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}^4$ é uma imersão de uma superfície M em \mathbb{R}^4 e $\mathcal{U} \subset M$ é uma vizinhança com coordenadas locais (u, v) . Sejam E, F e G os coeficientes da primeira forma fundamental nesta carta coordenada.

Definição 2.6 *Seja M uma superfície imersa em $\mathbb{R}^n, n \geq 4$, os coeficientes da segunda forma fundamental segundo o vetor normal ν , são dados por:*

$$\begin{aligned}
e_\nu &= II(w_1) = -\alpha(w_1, w_1) \cdot \nu, \\
f_\nu &= -\alpha(w_1, w_2) \cdot \nu = -\alpha(w_2, w_1) \cdot \nu, \\
g_\nu &= II(w_2) = -\alpha(w_2, w_2) \cdot \nu,
\end{aligned}$$

em que $\{w_1, w_2\}$ é um referencial ortonormal adequado para o conjunto de todos os campos de vetores tangentes $\mathcal{X}(M)$.

Considerando os coeficientes da segunda forma fundamental a equação diferencial das ν -linhas de curvatura em um sistema de coordenadas locais é dado por:

$$(f_\nu E - e_\nu F)du^2 + (g_\nu E - e_\nu G)dudv + (g_\nu F - f_\nu G)dv^2 = 0. \quad (2.1)$$

Se o sistema de coordenadas considerado é isotérmico (por exemplo a forma de Monge), ou seja, $E = G > 0$ e $F = 0$, a equação das ν -linhas de curvatura é dada por:

$$f_\nu du^2 + (g_\nu - e_\nu)dudv - f_\nu dv^2 = 0. \quad (2.2)$$

No que segue, vamos denotar por E_p o subespaço vetorial de $N_p M$ paralelo ao espaço afim que contém a elipse de curvatura η_p . Se η_p é uma elipse não degenerada, então $E_p = N_p M$. Se η_p se degenera em um segmento, então E_p é uma reta que passa pela origem de $N_p M$, e quando η_p se degenera em um ponto, temos que $E_p = \{0_{N_p M}\}$.

Além disso, da construção da elipse de curvatura, se η_p é não degenerada, então B e C são linearmente independentes e portanto, geram o plano E_p . Se η_p se degenera em um segmento, os vetores B e C são linearmente dependentes, e daí E_p é gerado por B (se $B \neq 0$) ou E_p é gerado por C (se $C \neq 0$).

Agora já estamos em condições de enunciar o teorema que nos comprova que quando um ponto p é ν -umbílico, as ν direções normais encontram-se no espaço ortogonal ao subespaço linear E_p que contém a elipse de curvatura.

Teorema 2.7 *Sejam M uma superfície imersa em \mathbb{R}^4 , $p \in M$ e ν um campo de vetores normais a M em p . Um ponto p é ν -umbílico se e, somente se, $\nu(p) \in E_p^\perp$.*

Demonstração: Seja M uma superfície imersa em \mathbb{R}^4 , assumiremos que a imersão é dada localmente em p na forma de Monge, isto é

$$\begin{aligned} \phi : (\mathbb{R}^2, (0, 0)) &\longrightarrow (\mathbb{R}^4, (0, 0, 0, 0)) \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, \phi_1(x, y), \phi_2(x, y)). \end{aligned}$$

A equação das ν -linhas de curvatura é dada por:

$$f_\nu du^2 + (g_\nu - e_\nu)dudv - f_\nu dv^2 = 0.$$

Observando as ν -linhas de curvatura temos que p é ν -umbílico se, e somente se,

$$f_\nu = 0 \quad \text{e} \quad g_\nu - e_\nu = 0.$$

Mas, sabemos que

$$e_\nu = \phi_{xx}(p) \cdot \nu, \quad f_\nu = \phi_{xy}(p) \cdot \nu \quad \text{e} \quad g_\nu = \phi_{yy}(p) \cdot \nu.$$

Por outro lado, analisando a expressão da elipse de curvatura, temos:

$$H = \frac{1}{2}(\phi_{xx}(p) + \phi_{yy}(p)), \quad B = \frac{1}{2}(\phi_{xx}(p) - \phi_{yy}(p)) \quad \text{e} \quad C = \phi_{xy}(p).$$

Assim, $f_\nu = 0$ e $g_\nu - e_\nu = 0 \iff \phi_{xy}(p) \cdot \nu = 0$ e $(\phi_{xx}(p) - \phi_{yy}(p)) \cdot \nu = 0 \iff C \cdot \nu = 0$ e $B \cdot \nu = 0 \iff \nu \perp E_p$, pois $E_p = \langle B, C \rangle$. \square

Lema 2.8 *Seja M uma superfície ν -umbílica para algum campo normal ν . A configuração principal de qualquer campo de vetor normal ρ linearmente independente a ν é univocamente determinado.*

Demonstração: Seja ϕ a imersão de uma superfície M em \mathbb{R}^4 , para cada ponto $p \in M$ consideremos um sistema de coordenadas locais isotérmicas, isto é, $E = G = 1$ e $F = 0$. Definimos $\nu^\perp = \phi_u \wedge \phi_v \wedge \nu \in \mathcal{N}(M)$, o produto vetorial dos campos de vetores ϕ_u, ϕ_v, ν .

Para cada $p \in M$ o conjunto $\{\phi_u(p), \phi_v(p), \nu(p), \nu(p)^\perp\}$ é uma base ortogonal para $T_p\mathbb{R}^4$, então para qualquer campo de vetor normal ρ , existem $a, b : U \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\rho = a\nu + b\nu^\perp$ e os coeficientes da segunda forma fundamental podem ser expressos por:

$$\begin{aligned} e_\rho &= -\phi_{uu} \cdot \rho = -\phi_{uu} \cdot (a\nu + b\nu^\perp) = ae_\nu + be_{\nu^\perp}, \\ f_\rho &= -\phi_{uv} \cdot \rho = -\phi_{uv} \cdot (a\nu + b\nu^\perp) = af_\nu + bf_{\nu^\perp}, \\ g_\rho &= -\phi_{vv} \cdot \rho = -\phi_{vv} \cdot (a\nu + b\nu^\perp) = ag_\nu + bg_{\nu^\perp}. \end{aligned}$$

Portanto, a equação das ν -linhas de curvatura nestas coordenadas é:

$$\begin{aligned} (af_\nu + bf_{\nu^\perp})du^2 + (ag_\nu + bg_{\nu^\perp} - ae_\nu + be_{\nu^\perp})dudv - (af_\nu + bf_{\nu^\perp})dv^2 &= 0 \iff \\ a(f_\nu du^2 + (g_\nu - e_\nu)dudv - f_\nu dv^2) + b(f_{\nu^\perp} du^2 + (g_{\nu^\perp} - e_{\nu^\perp})dudv - f_{\nu^\perp} dv^2) &= 0. \end{aligned}$$

Como M é ν -umbílica, temos $f_\nu = 0$ e $g_\nu - e_\nu = 0$, daí que

$$b(f_{\nu^\perp} du^2 + (g_{\nu^\perp} - e_{\nu^\perp})dudv - f_{\nu^\perp} dv^2) = 0,$$

com $b \neq 0$, pois caso contrário $\rho = a\nu$, uma contradição com a hipótese de que ρ e ν são linearmente independentes.

Logo,

$$f_{\nu^\perp} du^2 + (g_{\nu^\perp} - e_{\nu^\perp})dudv - f_{\nu^\perp} dv^2 = 0,$$

o que mostra que as configurações principais de ρ e ν^\perp coincidem. \square

Lema 2.9 *Sejam M uma superfície imersa em \mathbb{R}^4 e ρ um campo de vetores normais a M , então:*

- i) *As linhas coordenadas da parametrização de M coincidem com as ρ -linhas de curvatura se, e somente se, $F = 0$ e $f_\rho = 0$.*
- ii) *Neste sistema de coordenadas as curvaturas principais têm a seguinte expressão:*

$$k_1 = \frac{e_\rho}{E} \quad e \quad k_2 = \frac{g_\rho}{G}.$$

Demonstração: *i)* Se as linhas coordenadas coincidem com as ρ -linhas de curvatura, então devem ser ortogonais. As linhas coordenadas são dadas por $\alpha(u) = \phi(u, v_0)$ e $\beta(v) = \phi(u_0, v)$. Como α e β são ortogonais, então em qualquer instante t_0 , temos que $\alpha'(t_0) \cdot \beta'(t_0) = 0$, o que mostra que $F = \phi(u) \cdot \phi(v) = \alpha'(u) \cdot \beta'(v) = 0$.

A equação das ρ -linhas de curvatura em coordenadas locais (u, v) é dada por :

$$f_\rho E du^2 + (g_\rho E - e_\rho) G dudv - (g_\rho F - f_\rho G) dv^2 = 0.$$

Como as linhas coordenadas coincidem com as ρ -linhas de curvatura, a linha coordenada $\alpha(u) = \phi(u, v_0)$ verifica a equação das linhas de curvatura, e ainda $\alpha_v = 0$.

Logo,

$$f_\rho E \frac{\partial \alpha^2}{\partial u} = 0,$$

então $f_\rho E = 0$. Utilizando o fato que ϕ é uma imersão, então $\{\phi_u, \phi_v\}$ é uma base ortonormal tangente em cada ponto da superfície, daí que $\phi_u \neq 0$, então $E = \phi_u \cdot \phi_u \neq 0$, concluímos que $f_\rho = 0$.

Reciprocamente, se $F = 0$ e $f_\rho = 0$, temos da equação 2.1 que

$$(g_\rho E - e_\rho G) dudv = 0,$$

mas se $\alpha(u) = \phi(u, v_0)$ e $\beta(v) = \phi(u_0, v)$ então $\frac{\partial \alpha}{\partial v} = 0$ e $\frac{\partial \beta}{\partial u} = 0$. Portanto, as curvas coordenadas satisfazem a equação diferencial das ρ -linhas de curvatura.

ii) Seja X um campo de vetores tangentes a M , então $X = X^1 \phi_u + X^2 \phi_v$. Escrevendo em coordenadas a expressão do operador forma, temos:

$$S_\rho(X) = -\nabla_X \rho = -(X^1 \rho_u + X^2 \rho_v)^\top = X^1 (a_{11} \phi_u + a_{21} \phi_v) + X^2 (a_{12} \phi_u + a_{22} \phi_v).$$

Por outro lado, como a componente tangente de $\rho_u = -\bar{\nabla}_{\partial_u} \rho$ é $-S_\rho(\partial_u)$, calculamos os coeficientes da segunda forma fundamental com respeito a ρ nestes termos. Utilizando o fato de que $\rho \cdot \phi_u = 0$ e $\rho \cdot \phi_v = 0$ e derivando essas igualdades, obtemos:

$$\begin{aligned} \rho_u \cdot \phi_u &= -\phi_{uu} \cdot \rho, \\ \rho_v \cdot \phi_u &= -\phi_{uv} \cdot \rho, \\ \rho_v \cdot \phi_v &= -\phi_{vv} \cdot \rho. \end{aligned}$$

Os coeficientes da segunda forma são:

$$\begin{aligned} e_\rho &= \phi_{uu} \cdot \rho = -\rho_u \cdot \phi_u = a_{11} E + a_{21} F, \\ f_\rho &= \phi_{uv} \cdot \rho = -\rho_v \cdot \phi_u = a_{11} F + a_{21} G, \\ g_\rho &= \phi_{vv} \cdot \rho = -\rho_v \cdot \phi_v = a_{12} F + a_{22} G. \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema para a_{ij} com as condições $F = 0 = f_\rho$, obtemos: $a_{11} = \frac{e_\rho}{E}$, $a_{21} = \frac{f_\rho}{G} = 0 = \frac{f_\rho}{E} = a_{12}$ e $a_{22} = \frac{g_\rho}{G}$. Portanto, $k_1 = \frac{e_\rho}{E}$, $k_2 = \frac{g_\rho}{G}$. \square

2.2 Umbilicidade e Semiumbilicidade

Definição 2.10 *Seja $\phi : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma imersão local de M em \mathbb{R}^4 , dada v uma direção em \mathbb{R}^4 , a **função altura** de ϕ na direção $v \in \mathbb{R}^4$, denotada por h_v , é a seguinte função*

$$\begin{aligned} h_v : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto h_v(x, y) = \phi(x, y) \cdot v. \end{aligned}$$

A função h_v tem uma singularidade em $p \in M$ se, e somente se, $v \in N_pM$. De fato

$$h_v \text{ tem singularidade em } p \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial h_v}{\partial x}(p) = 0 \\ \frac{\partial h_v}{\partial y}(p) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x}(p) \cdot v = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y}(p) \cdot v = 0 \end{cases}$$

se e, somente se, v é ortogonal ao plano tangente T_pM , o que equivale dizer que $v \in N_pM$.

A próxima proposição, envolvendo função altura, será útil em alguns desenvolvimentos.

Proposição 2.11 *Seja M uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$. Dados p um ponto em M e v um vetor não nulo em N_pM as formas quadráticas $II_v(p)$ e $Hess(h_v)(p)$ coincidem.*

Demonstração: Dado $p \equiv (0, 0)$ em M , tomemos um referencial ortonormal $\{w_1, w_2\}$ para T_pM e $\{w_3, \dots, w_n\}$ para N_pM . Suponhamos que a imersão de ϕ de M em \mathbb{R}^n é dada localmente em p na forma de Monge, isto é:

$$\begin{aligned} \phi : (\mathbb{R}^2, (0, 0)) &\longrightarrow (\mathbb{R}^n, (0, \dots, 0)) \\ (x, y) &\longmapsto xw_1 + yw_2 + \phi_1(x, y)w_3 + \dots + \phi_{n-2}(x, y)w_n, \end{aligned}$$

com $\frac{\partial \phi_i}{\partial x}(p) = \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(p) = 0$ para $i = 1, \dots, n-2$.

Para qualquer vetor normal $v \in N_pM$, podemos escrever $v = v_1w_3 + \dots + v_{n-2}w_n$, logo a função altura na direção v é dada por:

$$\begin{aligned} h_v : (\mathbb{R}^2, 0) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto h_v(x, y) = \phi(x, y) \cdot v = v_1\phi_1(x, y) + \dots + v_{n-2}\phi_{n-2}(x, y). \end{aligned}$$

Temos então

$$\frac{\partial^2 h_v}{\partial x^2}(p) = \sum_{i=1}^{n-2} a_i v_i, \quad \frac{\partial^2 h_v}{\partial x \partial y}(p) = \sum_{i=1}^{n-2} b_i v_i \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 h_v}{\partial y^2}(p) = \sum_{i=1}^{n-2} c_i v_i,$$

onde

$$a_i = \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2}(p), \quad b_i = \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y}(p) \quad \text{e} \quad c_i = \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2}(p),$$

para $i = 1, \dots, n - 2$.

Os coeficientes da segunda forma fundamental segundo o vetor $v \in N_pM$ são dados por

$$e_v = \phi_{xx}(p) \cdot v, \quad f_v = \phi_{xy}(p) \cdot v \quad \text{e} \quad g_v = \phi_{yy}(p) \cdot v.$$

Logo,

$$e_v = \sum_{i=i}^{n-2} a_i v_i, \quad f_v = \sum_{i=i}^{n-2} b_i v_i \quad \text{e} \quad g_v = \sum_{i=i}^{n-2} c_i v_i.$$

Portanto,

$$II_v(p) = \begin{bmatrix} \sum_{i=i}^{n-2} a_i v_i & \sum_{i=i}^{n-2} b_i v_i \\ \sum_{i=i}^{n-2} b_i v_i & \sum_{i=i}^{n-2} c_i v_i \end{bmatrix} = Hess(h_v(p)).$$

□

A partir da função altura podemos definir uma direção binormal:

Definição 2.12 *Sejam M uma superfície imersa em \mathbb{R}^4 , $p \in M$ e $v \in N_pM$, dizemos que um vetor $v \in N_pM$ é uma **direção binormal** se a forma quadrática $Hess(h_v(p))$ é degenerada, ou seja, $\det(Hess(h_v(p))) = 0$.*

Através da função altura associada a um vetor binormal b , podemos definir as direções tangentes assintóticas:

Definição 2.13 *Sejam M uma superfície imersa em \mathbb{R}^4 , $b \in N_pM$ uma direção binormal em um ponto $p \in M$. Dizemos que θ não trivial em T_pM é uma **direção assintótica** se $\theta \in \ker(Hess(h_b(p)))$.*

Observação 2.14 *Segue da proposição 2.11 que se $\theta \in T_pM$ é uma direção assintótica e b é a direção binormal associado a direção θ , então θ é uma direção na qual $II_b(\theta) = 0$.*

Exemplo:

Consideremos o toro de Clifford, descrito no capítulo 1 na seção 1.5 exemplo 3.3, através da imersão:

$$X(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u, \sin u, \cos v, \sin v).$$

É claro que $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, onde

$$\begin{aligned} X_1 &= (-\sin u, \cos u, 0, 0), \\ X_2 &= (0, 0, -\sin v, \cos v), \\ X_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u, \sin u, \cos v, \sin v), \\ X_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos u, -\sin u, \cos v, \sin v), \end{aligned}$$

é uma referencial ortonormal de \mathbb{R}^4 tal que X_1 e X_2 são tangentes a X e X_3 e X_4 são normais a X . Vamos encontrar um vetor binormal unitário no toro de Clifford. Para isto, consideremos um vetor $\rho = aX_3 + bX_4$, onde $a, b : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis, tais que $a^2 + b^2 = 1$.

Os coeficientes da segunda forma fundamental segundo o vetor ρ são:

$$e_\rho = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b, \quad f_\rho = 0 \quad \text{e} \quad g_\rho = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b.$$

Afim de que ρ seja um vetor binormal, devemos ter $\det(\text{Hess}(h_\rho)) = 0$. Como

$$\text{Hess}(h_\rho) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \end{bmatrix},$$

segue que $\det(\text{Hess}(h_\rho)) = 0$ se, e somente se, $a^2 - b^2 = 0$, ou seja, se, e somente se, $a = b$ ou $a = -b$.

Como desejamos um vetor binormal unitário, devemos ter $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lema 2.15 *Suponhamos que $\{b_i\}$, para $i = 1, 2$, são dois campos de vetores binormais em M e as correspondentes linhas assintóticas são mutuamente ortogonais, então*

- i) As linhas assintóticas são as linhas de curvatura para ambos campos binormais.*
- ii) M é ν umbílica para $\nu = k_2b_1 + k_1b_2$.*
- iii) Dado um campo de vetores normais ρ linearmente independentes a ν , as ρ -linhas de curvatura coincidem com as linhas assintóticas de M .*

Demonstração: Considere b_i um campo de vetores binormais qualquer, e seja $u \in T_pM$ um vetor que define uma direção assintótica.

Assim, $u \in \text{Hess}(h_{b_i})$, onde h_{b_i} é a função altura associada ao campo binormal b_i .

Como o hessiano coincide com o operador de forma S_{b_i} em p , o vetor u é um autovalor de S_{b_i} correspondente ao autovalor 0. O outro autovetor deve ser ortogonal a este, pois por hipótese ele está associado a uma outra direção assintótica em um ponto não b_i -umbílico.

Então, as linhas assintóticas associadas aos binormais b_i são linhas de curvatura nestes campos.

ii) Segue de *i)* que a equação das linhas de curvatura com respeito a b_1 e b_2 coincidem. Assumindo uma carta de coordenadas locais isotérmica, isto é $E = G > 0$ e $F = 0$, as equações das b_i , $i = 1, 2$, linhas de curvatura são dadas por:

$$f_{b_i} du^2 + (g_{b_i} - e_{b_i}) dudv - f_{b_i} dv^2 = 0, \quad \text{para } i = 1, 2.$$

Assim, existe $r : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f_{b_1} = r f_{b_2} \quad \text{e} \quad g_{b_1} - e_{b_1} = r(g_{b_2} - e_{b_2}),$$

então

$$f_{b_1} - rf_{b_2} = 0 \text{ e } g_{b_1} - rg_{b_2} - (e_{b_1} - re_{b_2}) = 0.$$

Utilizando o fato que b_1 e b_2 são vetores binormais, então $\det(\text{hess}(h_{b_i}(p))) = 0$, podemos assumir que $e_{b_1} = g_{b_2} = 0$, assim $r = -\frac{g_{b_1}}{e_{b_2}}$.

Portanto, M é ν -umbílica para $\nu = b_1 + \frac{g_{b_1}}{e_{b_2}}b_2$, pois:

$$f_\nu = \phi_{xy}(p) \cdot \left(b_1 + \frac{g_{b_1}}{e_{b_2}}b_2\right) = f_{b_1} - rf_{b_2} = 0$$

$$\begin{aligned} g_\nu - e_\nu &= \phi_{yy}(p) \cdot \left(b_1 + \frac{g_{b_1}}{e_{b_2}}b_2\right) + \phi_{xx}(p) \cdot \left(b_1 + \frac{g_{b_1}}{e_{b_2}}b_2\right) \\ &= g_{b_1} - rg_{b_2} - (e_{b_1} - re_{b_2}) = 0. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, M é $\frac{1}{E}\nu$ -umbílica, ou seja, é umbílica para $\frac{e_{b_2}}{E}b_1 + \frac{g_{b_1}}{E}b_2$. Segue do lema 2.9 que M é $(k_2b_1 + k_1b_2)$ -umbílica.

iii) Seja ρ um campo de vetores normais a M linearmente independente a ν . Como M é ν -umbílica, de acordo com o lema 2.9 as configurações principais de ρ e b_1 coincidem. Assim, as ρ -linhas de curvatura coincidem com as b_i -linhas de curvatura e pelo item *i)* as ρ -linhas de curvatura coincidem com as com as linhas assintóticas. \square

Lema 2.16 *Nas hipótese do lema 2.15 a curvatura associada ao campo ν é dado por $\lambda_\nu = k_1k_2E$.*

Demonstração: Sabemos que M é ν -umbílica, logo $k_1 = k_2$, daí a curvatura associada ao campo ν é dada pelo lema 2.9 por:

$$\lambda_\nu = \frac{e_\nu}{E}.$$

Mas,

$$\begin{aligned} e_\nu &= \phi_{uu} \cdot \left(\frac{e_{b_2}}{E}b_1 + \frac{g_{b_1}}{E}b_2\right) \\ &= \frac{e_{b_2}e_{b_1}}{E} + \frac{g_{b_1}e_{b_2}}{E}. \end{aligned}$$

Como b_1 é um vetor binormal, $\det(\text{Hess}(h_{b_1})) = 0$, podemos assumir que $e_{b_1} = 0$, então

$$\lambda_\nu = \frac{g_{b_1}e_{b_2}}{E} = k_1e_{b_2} = k_1k_2E,$$

já que $k_2 = \frac{e_{b_2}}{E}$. \square

Observação 2.17 Dado um campo ν de vetores normais em M , seja $\bar{\nu} = \frac{\nu}{\|\nu\|}$. Se M é ν -umbílica, a equação das ν -linhas de curvatura em um sistema de coordenadas locais isotérmicas é dada por:

$$f_\nu du^2 + (g_\nu - e_\nu)dudv - f_\nu dv^2 = 0$$

\iff

$$\frac{1}{\|\nu\|} (f_\nu du^2 + (g_\nu - e_\nu)dudv - f_\nu dv^2) = 0$$

\iff

$$f_{\bar{\nu}} du^2 + (g_{\bar{\nu}} - e_{\bar{\nu}})dudv - f_{\bar{\nu}} dv^2 = 0.$$

Logo, M é ν -umbílica se, e somente se, é $\bar{\nu}$ -umbílica.

No que segue, trabalharemos com vetores normais unitários, o que nos é garantido pela observação acima.

Definição 2.18 Um ponto $p \in M$ é **semiumbílico** se, e somente se, a elipse de curvatura em p se degenera em um segmento de reta.

Teorema 2.19 Seja M uma superfície imersa em \mathbb{R}^4 . As seguintes condições são equivalentes em M :

- i) M tem dois campos ortogonais de linhas assintóticas definidos globalmente em M .
- ii) M é ν -umbílica para algum campo normal ν definido globalmente em M .
- iii) A curvatura normal de M é nula em todo ponto.
- iv) Todos os pontos de M são semiumbólicos.

Demonstração: i) \implies ii) Pelo lema 2.15.

ii) \implies iii) Suponhamos que M é ν -umbílica para algum campo normal ν definido globalmente em M . Consideremos um sistema de coordenadas locais e um referencial ortonormal $\{X_1(p), X_2(p), \nu(p), \nu(p)^\perp\}$ para o $T_p\mathbb{R}^4$. A área da elipse de curvatura pode ser dada em termos dos coeficientes da segunda forma fundamental nas direções de ν e ν^\perp e em termos da curvatura normal k_N por:

$$\Delta(\eta_p(\theta)) = \frac{\pi}{2} |(e_\nu - g_\nu)f_{\nu^\perp} - (e_{\nu^\perp} - g_{\nu^\perp})f_\nu| = \frac{\pi}{2} |k_N|,$$

onde $\Delta(\eta_p(\theta))$ é a área da elipse de curvatura.

Como M é ν -umbílica, então todo ponto p é ν -umbílico, pela equação das ν -linhas de curvatura temos que: $f_\nu = 0$ e $g_\nu = e_\nu$.

Segue da expressão da curvatura normal que $k_N = 0$.

iii) \iff iv) Sabemos que

$$\Delta(\eta_p(\theta)) = \frac{\pi}{2} |(e_\nu - g_\nu)f_{\nu^\perp} - (e_{\nu^\perp} - g_{\nu^\perp})f_\nu| = \frac{\pi}{2} |k_N|.$$

Se $k_N = 0$, a área da elipse de curvatura pela expressão acima é nula, então a elipse de curvatura se degenera em um segmento de reta ou em um ponto se, e somente se, a curvatura normal é nula.

iii) \implies i) Se todos os pontos de M são semiumbílicos, pelo que foi feito no item anterior temos $k_N = 0$. Por Little em [11] vemos que $\tan^2(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\Delta}{k_N^2}$, onde Δ é a função resultante e θ_1 e θ_2 representam os ângulos em $T_p M$ correspondentes as direções assintóticas no ponto $p \in M$. Quando $k_N \equiv 0$, temos que $\tan^2(\theta_1 - \theta_2)$ não existe, isto é, $(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\pi}{2}$, o que mostra que M tem dois campos ortogonais de direções assintóticas em M . \square

Exemplo:

A imersão

$$\begin{aligned} X : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (u, v) &\longmapsto X(u, v) = (\cos u, \sin u, a \cos v, b \sin v), \end{aligned}$$

dada pelo produto de curvas é ν -umbílica para algum campo normal ν .

Pelo exemplo 3.2 da seção 1.5 a elipse de curvatura em cada ponto p da superfície dada pelo produto das curvas acima é segmento de reta não radial, assim todos pontos da superfície são semiumbílicos, pelo teorema 2.19 temos a superfície dada é ν -umbílica para algum campo normal ν .

2.3 Fórmulas de Estrutura do \mathbb{R}^n , $n \geq 4$.

Sejam M uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, $\mathcal{U} \subset M$ um aberto em M e X_1, X_2, \dots, X_n campos de vetores em \mathcal{U} de tal modo que, para todo $p \in \mathcal{U}$, se tenha

$$X_i \cdot X_j = \delta_{ij},$$

onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & , \text{ se } i \neq j \\ 1 & , \text{ se } i = j \end{cases},$$

com $i, j = 1, \dots, n$. Um tal conjunto de campos de vetores é chamado um **referencial ortonormal móvel** em \mathcal{U} .

A partir do referencial $\{X_i\}_{i=1}^n$ podemos definir formas diferenciais lineares w_1, \dots, w_n pela condição

$$w_i(X_j) = \delta_{ij}.$$

O conjunto das formas diferenciais $\{w_i\}$ é chamado o **correferencial associado** ao referencial $\{X_i\}_{i=1}^n$.

Cada campo X_i pode ser visto como uma aplicação diferenciável

$$\begin{aligned} X_i : \mathcal{U} \subset M &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ p &\longmapsto X_i(p). \end{aligned}$$

A diferencial $(dX_i)_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ em $p \in M$ é uma aplicação linear. Portanto, para todo $v \in \mathbb{R}^n$, podemos escrever

$$(dX_i)_p(v) = \sum_{j=1}^n (w_{ij})(v) X_j.$$

Notamos que as expressões $(w_{ij})(v)$ acima definidas, dependem linearmente de v . Portanto, $(w_{ij})_p$ é uma forma linear em \mathbb{R}^n . Como X_i é um campo diferenciável, w_{ij} é uma forma diferenciável linear. Com estes significados, escrevemos

$$(dX_i)_p = \sum_{j=1}^n (w_{ij}) X_j, \quad (2.3)$$

onde as formas w_{ij} , são chamadas **formas de conexão** do \mathbb{R}^n no referencial $\{X_i\}_{i=1}^n$.

Observação 2.20 A forma de conexão $w_{ij} = -w_{ji}$, para todo $i, j = 1, \dots, n$.

De fato, derivando a expressão $X_i \cdot X_j$, obtemos

$$0 = (dX_i \cdot X_j) + (X_i \cdot dX_j) = w_{ij} + w_{ji},$$

as formas de conexão $w_{ij} = -w_{ji}$ são antisimétricas nos índices i, j . O ponto fundamental no método do referencial móvel é que as formas w_i, w_j satisfazem as chamadas equações de estrutura de Elie Cartan.

Exemplo:

Seja $X : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ a aplicação diferenciável, definida por

$$X(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u, \sin u, \cos v, \sin v),$$

onde $\mathcal{U} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; (u, v) \in [0, 2\pi]\}$.

Temos:

$$dX = (-\sin u du, \cos u du, -\sin v dv, \cos v dv).$$

Consideremos um referencial ortonormal $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ tal que :

$$\begin{aligned} X_1 &= (-\sin u, \cos u, 0, 0), \\ X_2 &= (0, 0, -\sin v, \cos v), \\ X_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u, \sin u, \cos v, \sin v), \\ X_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos u, -\sin u, \cos v, \sin v). \end{aligned}$$

Como $dX = \sum_{i=1}^n w_i X_i$, concluímos que:

$$w_1 = dX \cdot X_1 = du, \quad w_2 = dv, \quad w_3 = 0, \quad \text{e} \quad w_4 = 0.$$

Para cálculo das formas de conexão w_{ij} , calcularemos primeiro:

$$dX_1 = (-\cos udu, -\sin udu, 0, 0), \quad dX_2 = (0, 0, -\cos vdv, -\sin vdv)$$

$$\text{e } dX_3 = \frac{1}{2}(-\sin udu, \cos udu, -\sin vdv, \cos vdv).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} w_{12} &= dX_1 \cdot X_2 = 0, \\ w_{13} &= dX_1 \cdot X_3 = -du, \\ w_{14} &= dX_1 \cdot X_4 = du, \\ w_{23} &= dX_2 \cdot X_3 = -dv, \\ w_{24} &= dX_2 \cdot X_4 = -dv, \\ w_{34} &= dX_3 \cdot X_4 = 0. \end{aligned}$$

Teorema 2.21 (*Equações de Estrutura do \mathbb{R}^n*) Sejam $\{X_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal móvel em um aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, $\{w_i\}_{i=1}^n$ o coreferencial associado a $\{X_i\}_{i=1}^n$ e $\{w_{ij}\}_{i,j=1}^n$ as formas de conexão de \mathcal{U} no referencial $\{X_i\}_{i=1}^n$, então

$$dw_i = \sum_k w_k \wedge w_{ki} \quad (2.4)$$

e

$$dw_{ij} = \sum_k w_{ik} \wedge w_{kj}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.5)$$

Demonstração: Sejam $\{e_1, \dots, e_n\}$ a base canônica do \mathbb{R}^n e

$$\begin{aligned} x_i : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto x_i(p) = x_i, \end{aligned}$$

então a dx_i é uma forma diferenciável em \mathcal{U} e como $dx_i(e_i) = \delta_{ij}$, concluímos que $\{dx_i\}$ é um coreferencial associado ao referencial $\{e_i\}$.

O referencial dado se exprime em termos dos e_i por:

$$X_i = \sum_j \beta_{ij} e_j, \quad (2.6)$$

onde os β_{ij} são funções diferenciáveis em \mathcal{U} e para cada $p \in \mathcal{U}$, a matriz (β_{ij}) é uma matriz ortogonal. Como $w(X_i) = \delta_{ij}$, temos

$$w_i = \sum_j \beta_{ij} dx_j. \quad (2.7)$$

Diferenciando 2.6, obtemos

$$dX_i = \sum_k d\beta_{ik} e_k = \sum_k d\beta_{ik} \sum_j \beta_{jk} X_j.$$

Como $dX_i = \sum_j w_{ij} X_j$, concluímos que

$$w_{ij} = \sum_k \beta_{ik} \beta_{jk}, \quad (2.8)$$

ou seja,

$$\sum_j w_{ij} \beta_{js} = \sum_{jk} \beta_{ik} \beta_{jk} \beta_{js} = d\beta_{is}, \quad s = 1, \dots, n. \quad (2.9)$$

Finalmente, diferenciando exteriormente 2.7 e usando 2.9, obtemos

$$dw_i = \sum_j d\beta_{ij} \wedge dx_j = \sum_{jk} w_{ik} \beta_{kj} \wedge dx_j = \sum_k w_k \wedge w_{ki},$$

que é a primeira equação de estrutura 2.4.

Diferenciando 2.8 e usando 2.9 temos que

$$\begin{aligned} dw_{ij} &= - \sum_k d\beta_{ik} \wedge d\beta_{jk} = - \sum_k \left[\left(\sum_{l=1} w_{il} \beta_{lk} \right) \wedge \left(\sum_s w_{js} \beta_{sk} \right) \right] \\ &= - \sum_s w_{is} \wedge w_{js} = \sum_k w_{ik} \wedge w_{kj}, \end{aligned}$$

que é a segunda equação de estrutura desejada. \square

Considere um referencial ortonormal $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ em uma superfície M e seja $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ o coreferencial associado ao referencial dado. Utilizando as fórmulas de estruturas temos que:

$$\begin{aligned} w_{13} &= e_{X_3} w_1 + f_{X_3} w_2, \\ w_{23} &= f_{X_3} w_1 + g_{X_3} w_2, \\ w_{14} &= e_{X_4} w_1 + f_{X_4} w_2, \\ w_{24} &= f_{X_4} w_1 + g_{X_4} w_2. \end{aligned}$$

Uma observação importante é que a derivação covariante permite interpretar geometricamente as formas de conexão, ou seja, se $\bar{\nabla}$ é a conexão riemanniana do \mathbb{R}^4 e X é um campo de vetores tangente a superfície, então

$$w_{ij}(X) = \bar{\nabla}_X X_i \cdot X_j.$$

2.4 ν -Umbilicidade e Hiperesfericidade

Nesta seção relacionamos os conceitos de ν campos paralelos e a função curvatura associada a uma superfície M imersa em \mathbb{R}^4 . Em seguida apresentamos um resultado análogo a superfícies em \mathbb{R}^3 , o qual diz que uma superfície totalmente umbílica com curvatura constante, está contida numa esfera ou num plano.

Lema 2.22 *Suponha que M é ν -umbílica e λ é a função curvatura associada a M , onde ν é um campo normal unitário em M , então:*

- i) $w_{34} \equiv 0$ implica que λ é constante;*
- ii) Se λ é constante para cada ponto $p \in M$, temos ou, que $w_{34} = 0$ ou $w_{14} = w_{24} = 0$;*
- iii) Se λ é constante não nula, então $w_{34} \equiv 0$.*

Demonstração: *i)* Suponhamos que M é ν -umbílica, para algum campo normal unitário ν . Consideremos $\{X_1(p), X_2(p), X_3(p) = \nu(p), X_4(p) = \nu^\perp(p)\}$ um referencial ortonormal para o $T_p\mathbb{R}^4$. Como M é X_3 -umbílica, então todo ponto $p \in M$ é X_3 -umbílico, a equação das X_3 -linhas de curvatura é dada por:

$$S_{X_3}(X(p)) = \lambda(p)X(p),$$

para todo ponto p em M , e X um campo tangente em M .

Por outro lado, o operador de forma é tal que

$$S_{X_3}(X) = -\nabla_X X_3.$$

Logo,

$$-\nabla_X X_3 = \lambda(p)X(p)$$

Utilizando as formas de conexão, temos

$$w_{j3} = -w_{3j}(X) = -(\nabla_X X_3 \cdot X_j) = -(-\lambda X \cdot X_j) = (\lambda w_j(X)). \quad (2.10)$$

Tomando a derivada exterior, temos:

$$dw_{13} = d\lambda \wedge w_1 + \lambda dw_j.$$

Para $j = 1$, temos:

$$dw_{13} = d\lambda \wedge w_1 + \lambda dw_1.$$

Além disso, pelas equações de estrutura, temos

$$\begin{aligned} dw_{13} &= \sum_{k=1}^4 w_{1k} \wedge w_{k3} \\ &= w_{11} \wedge w_{13} + w_{12} \wedge w_{23} + w_{13} \wedge w_{33} + w_{14} \wedge w_{43}, \end{aligned}$$

segue que

$$dw_{13} = w_{12} \wedge w_{23} + w_{14} \wedge w_{43}.$$

Logo,

$$w_{12} \wedge w_{23} + w_{14} \wedge w_{43} = d\lambda \wedge w_1 + \lambda dw_1. \quad (2.11)$$

Agora por 2.10 temos que

$$w_{23} = \lambda w_2,$$

então das equações 2.10 e 2.11

$$d\lambda \wedge w_1 + \lambda dw_1 = (w_{12} \wedge \lambda w_2) + w_{14} \wedge w_{43}. \quad (2.12)$$

Novamente pelas equações de estrutura temos

$$dw_1 = \sum_{k=1}^4 w_k \wedge w_{1k} = w_2 \wedge w_{12}. \quad (2.13)$$

Das igualdades em 2.12 e 2.13

$$d\lambda \wedge w_1 = w_{14} \wedge w_{43}.$$

De forma análoga, para $j = 2$,

$$d\lambda \wedge w_2 = w_{24} \wedge w_{43}.$$

Como por hipótese a forma de conexão $w_{34} = -w_{43} = 0$, vemos que

$$\begin{cases} d\lambda \wedge w_1 = 0 \\ d\lambda \wedge w_2 = 0. \end{cases}$$

Assim, $d\lambda = 0$, o que mostra que λ é constante.

ii) Sabemos pela seção anterior que

$$\begin{aligned} w_{14} &= e_{X_4} w_1 + f_{X_4} w_2 \\ w_{24} &= f_{X_4} w_1 + g_{X_4} w_2. \end{aligned}$$

Pelo teorema 2.14 M tem dois campos ortogonais de linhas assintóticas, pois ν está globalmente definido sobre este. Então as linhas coordenadas da parametrização de M coincide com as linhas X_4 -linhas de curvatura, logo pelo lema 2.9 $f_{X_4} = 0$ e

$$\begin{aligned} w_{14} &= e_{X_4} w_1 \\ w_{24} &= g_{X_4} w_2. \end{aligned}$$

Se w_{14} e w_{24} são colineares, $w_{14} = w_{24} = 0$, pois w_1 e w_2 são formas independentes. Como λ é constante, $d\lambda = 0$. Utilizando os resultados do item anterior

$$\begin{cases} w_{14} \wedge w_1 = 0 \\ w_{24} \wedge w_2 = 0. \end{cases}$$

Logo, $w_{34} = -w_{43} = 0$ ou w_{14} e w_{24} são colineares, o que mostra que $w_{14} = w_{24} = 0$.

iii) Se λ é constante, não nula, suponhamos que $w_{34} \neq 0$, então existe algum aberto \mathcal{U} em M , tal que w_{14} , w_{24} são colineares em \mathcal{U} se, e somente se, $w_{14} = w_{24} = 0$ em \mathcal{U} . Utilizando o fato de M ser ν -umbílica, sabemos da demonstração do item anterior que $f_{X_4} = 0$. Portanto, \mathcal{U} é X_4 -umbílica.

Consideremos um campo tangente X tal que em cada ponto $p \in \mathcal{U}$, se $X(p) \in S^1 \subset T_p\mathcal{U}$, então $X(p) = \cos\theta X_1(p) + \sin\theta X_2(p)$, daí

$$\begin{aligned} II_{X_4}(X(p)) &= \alpha(X(p), X(p)) \cdot X_4 \\ &= \alpha\left(\cos(\theta)X_1(p) + \sin(\theta)X_2(p), \cos(\theta)X_1(p) + \sin(\theta)X_2(p)\right) \cdot X_4 \\ &= \cos^2(\theta)e_{X_4} + 2\cos(\theta)\sin(\theta)f_{X_4} + \sin^2(\theta)g_{X_4} \\ &= e_{X_4} = g_{X_4}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$II_{X_4}(X(p)) = S_{X_4}(X(p)) \cdot X(p) = -\lambda.$$

Como $w_{14} = w_{24} = 0$, $\lambda = e_{X_4} = g_{X_4} = 0$, isto é, \mathcal{U} é X_4 -umbílica com função curvatura associada nula.

Como $f_{X_4} = e_{X_4} = g_{X_4} = 0$, temos X_4 é um campo binormal sobre \mathcal{U} .

Utilizando o fato que M é ν -umbílica, temos que $k_N = \Delta_\nu = 0$, segue da observação 1.6 item 3.iv) que todos os pontos em \mathcal{U} são pontos de inflexão. Observemos que \mathcal{U} é X_3 -umbílica, pois M é X_3 -umbílica com $\lambda \neq 0$.

Temos que

$$w_{13} = e_{x_3}w_1 + f_{X_3}w_2 = e_{X_3}w_1 = \lambda w_1 \quad (2.14)$$

$$w_{23} = f_{X_3}w_1 + g_{X_3}w_2 = g_{X_3}w_2 = \lambda w_2.$$

Utilizando a equação de estrutura e o fato que $w_{14} = w_{24} = 0$ segue que

$$0 = dw_{14} = w_{13} \wedge w_{34}. \quad (2.15)$$

Das equações 2.14 e 2.15, temos que

$$\lambda w_1 \wedge w_{34} = 0.$$

Analogamente,

$$\lambda w_2 \wedge w_{34} = 0.$$

Logo, $w_{34} = 0$ ou w_1 é colinear a w_2 , mas w_1 e w_2 são independentes, o que mostra que $w_{34} \equiv 0$ em \mathcal{U} , uma contradição com o suposto no início do item. Portanto, $w_{34} \equiv 0$ sobre toda a superfície M . \square

Definição 2.23 *Seja ν uma campo de vetores normais definidos em M , dizemos que ν é um **campo paralelo** ao longo de M se $\nabla_Y^\perp \nu = 0$ para qualquer campo tangente Y em M .*

Proposição 2.24 *Se M é ν -umbílica para algum campo normal unitário ν e tem pontos de inflexão isolados, então a ν função curvatura λ é constante se, e somente se, ν é paralelo.*

Demonstração: Suponhamos que ν é um campo normal unitário paralelo ao longo de M , então $\nabla_X^\perp \nu = 0$ para qualquer campo tangente em M .

Como M é ν -umbílica para algum campo normal ν , então p é ν -umbílico para todo p em M . Assim, em termos da ν -linhas de curvatura temos

$$S_\nu(X(p)) = \lambda(p)X(p), \quad \forall p \in M.$$

Por outro lado, o operador forma é tal que

$$S_\nu(X) = -\nabla_X \nu.$$

Das duas últimas igualdades, podemos escrever

$$-\nabla_X \nu = \lambda X.$$

Vamos considerar $\{X_1(p), X_2(p), X_3(p), X_4(p)\}$ um referencial ortonormal para $T_p \mathbb{R}^4$, utilizando as formas de conexão temos

$$\begin{aligned} w_{34} &= \bar{\nabla}_X X_3 \cdot X_4 \\ &= (\nabla_X \nu + \nabla_X^\perp \nu) \cdot \nu^\perp \\ &= \nabla_X \nu \cdot \nu^\perp \\ &= -\lambda X \cdot \nu^\perp \\ &= 0. \end{aligned}$$

Segue do item *i*) do lema 2.22 que a função curvatura λ associada a superfície M é constante.

Reciprocamente, se λ é constante segue pelo item *ii*) do lema 2.22 que para cada ponto $p \in M$, ou $w_{34} = 0$ ou $w_{14} = w_{24} = 0$.

Suponhamos $w_{14} = w_{24} = 0$, então pela equações de estrutura, temos

$$0 = w_{14} = e_{X_4} w_1 + f_{X_4} w_2 \tag{2.16}$$

$$0 = w_{24} = f_{X_4} w_1 + g_{X_4} w_2.$$

Como M é ν -umbílica, então M tem dois campos de linhas assintóticas ortogonais, assim podemos tomar coordenadas isotérmicas determinadas pelos campos de direção assintótica e $f_{X_4} = 0$. Das equações em 2.16 temos que $e_{X_4} = g_{X_4} = 0$.

Analisando a curvatura normal e a resultante, temos

$$k_N = \frac{E(f_{X_3} g_{X_4} - f_{X_4} g_{X_3}) - F(e_{X_3} g_{X_4} - e_{X_4} g_{X_3}) + G(e_{X_3} f_{X_4} - e_{X_4} f_{X_3})}{2(EG - F^2)} = 0$$

e

$$\Delta = \frac{1}{4(EG - F^2)} \begin{vmatrix} e_{X_3} & 2f_{X_3} & g_{X_3} & 0 \\ e_{X_4} & 2f_{X_4} & g_{X_4} & 0 \\ 0 & e_{X_3} & 2f_{X_3} & g_{X_3} \\ 0 & e_{X_4} & 2f_{X_4} & g_{X_4} \end{vmatrix} = 0.$$

Segue daí que todos os pontos em M são pontos de inflexão, uma contradição com a hipótese.

Logo, devemos ter $w_{34} = 0$. Observemos que

$$dX_3 = \sum_{j=1}^4 w_{3j} X_j.$$

Portanto,

$$(dX_3)^N = w_{33} X_3 + w_{34} X_4.$$

Como $w_{33} = dX_3 \cdot X_3 = 0$ e $w_{34} = 0$, então $(dX_3)^N = 0$.

Portanto, $X_3 = \nu$ é um campo paralelo ao longo de M . \square

Agora apresentamos uma generalização de um importante resultado para superfícies imersas em \mathbb{R}^3 , que diz que uma superfície totalmente umbílica, com curvatura constante, está contida numa esfera ou num plano.

Teorema 2.25 *Seja M uma superfície imersa em \mathbb{R}^4 tal que é ν -umbílica para algum campo normal unitário ν , com função curvatura λ constante, então se $\lambda \neq 0$ M está imersa em S^3 e se $\lambda = 0$ M está imersa num 3-plano.*

Demonstração: Seja M uma superfície ν -umbílica para algum campo normal unitário ν , com curvatura λ constante. Suponhamos que $\lambda \neq 0$, segue pelo item *iii*) do lema 2.22 que a forma de conexão $w_{34} = 0$, usando os mesmos argumentos da proposição anterior, temos que ν é um campo normal paralelo ao longo da superfície M , logo $\nabla_X^\perp \nu = 0$ para qualquer campo tangente em M . Observemos que

$$\bar{\nabla}_X \nu = (\nabla_X \nu + \nabla_X^\perp \nu),$$

onde X é um campo tangente a superfície. Assim,

$$\bar{\nabla}_X \nu = -\lambda X.$$

Tomemos o campo identidade

$$\begin{aligned} \rho : M &\longrightarrow M \subset \mathbb{R}^4 \\ p &\longmapsto \rho(p) = p, \end{aligned}$$

segue que $\bar{\nabla}_X \rho = X$, onde X é um campo tangente em M .

Consideremos também o campo dado por:

$$\begin{aligned} \phi : M &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ p &\longmapsto \phi(p) = \nu(p) + \lambda(p)\rho(p). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \phi &= \bar{\nabla}_X \nu + \lambda \bar{\nabla}_X \rho \\ &= -\lambda X + \lambda X \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\bar{\nabla}_X \phi = \bar{\nabla}_X (\nu + \lambda \rho) = 0,$$

o que mostra que $\nu + \lambda \rho$ é um campo paralelo ao longo de M e com isso $\nu + \lambda \rho$ é um campo constante.

Logo, $\nu + \lambda \rho = X_0$, com X_0 constante, então

$$\nu(p) + \lambda(p)\rho(p) = X_0(p),$$

daí $\nu(p) + \lambda p = X_0$, $\forall p \in M$.

Como $\lambda \neq 0$, temos

$$p = \frac{X_0}{\lambda} - \frac{\nu(p)}{\lambda}, \quad \forall p \in M.$$

Assim,

$$p - \frac{X_0}{\lambda} = -\frac{\nu(p)}{\lambda}, \quad \forall p \in M.$$

Portanto,

$$\left\| p - \frac{X_0}{\lambda} \right\| = \left\| \frac{\nu(p)}{\lambda} \right\| = \frac{1}{|\lambda|}, \quad \forall p \in M.$$

Concluimos que $M \subset S^3 \left(\frac{1}{|\lambda|}, \frac{X_0}{\lambda} \right)$, a hipersfera de centro $\frac{X_0}{\lambda}$ e raio $\frac{1}{|\lambda|}$.

Agora, se $\lambda = 0$ temos

$$\nabla_X \nu = -\lambda X = 0.$$

Logo,

$$w_{3j} = \nabla_X X_3 \cdot X_j = \nabla X \nu \cdot X_j = 0.$$

Portanto,

$$dX_3 = \sum_{j=1}^4 w_{3j} \cdot X_j = 0.$$

Para mostrar que M está imerso num hiperplano, consideremos a aplicação:

$$\begin{aligned} f : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto f(p) = \left(\phi(p) - \phi(p_0) \right) \cdot X_3, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \phi : M &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (u, v) &\longmapsto \phi(u, v), \end{aligned}$$

é uma imersão da superfície M em \mathbb{R}^4 .

Mostremos que a aplicação f é identicamente nula.

$$\begin{aligned} f'(p) &= (\phi'(p)) \cdot X_3 + (\phi(p) - \phi(p_0)) \cdot dX_3 \\ &= (u' \phi_u(p) + v' \phi_v) \cdot X_3 \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $p \in M$.

Logo, $f \equiv cte$, mas $f(p_0) = 0$, assim

$$f \equiv 0.$$

Portanto,

$$(\phi(p) - \phi(p_0)) \cdot X_3 \equiv 0,$$

o que mostra que $\phi(M) \subset H$, onde H é um 3-plano passando por $\phi(p_0)$ com vetor normal X_3 . \square

Nas hipóteses do teorema acima se $\lambda = 0$, então M está imersa num hiperplano, mas sabemos pelo exemplo 1 da seção 1.5, que superfícies imersas em hiperplanos têm todos os seus pontos de inflexão. Assim podemos enunciar o seguinte resultado:

Corolário 2.26 *Se M é uma superfície em \mathbb{R}^4 cujo os pontos de inflexão são isolados e é ν -umbílica para algum campo normal unitário ν com curvatura constante, então M está imersa em S^3 .*

Chen, em [3], provou que se uma superfície M em \mathbb{R}^4 é hiperesférica então existe algum campo normal paralelo ν definido em M tal que M é ν -umbílica. Como em superfícies imersas em \mathbb{R}^4 os conceitos de ν -umbilicidade e semiumbilicidade são equivalentes, temos o seguinte resultado:

Corolário 2.27 *Uma superfície M contida em S^3 é semiumbílica.*

A pergunta natural que surge é a seguinte:

“Superfícies imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$ que são hiperesféricas, são sempre semiumbílicas?”

Mostremos através de um exemplo que a resposta é negativa.

Exemplo:

Seja a aplicação de Veronese de ordem 2 dada por:

$$\begin{aligned} \xi : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^6 \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto (x_1^2, x_2^2, x_3^2, \sqrt{2}x_1x_2, \sqrt{2}x_1x_3, \sqrt{2}x_2x_3). \end{aligned}$$

A imagem $\xi(S^2)$ é chamada **superfície de Veronese** e por construção temos :

$$\xi(S^2) \subset S^5 \quad \text{e} \quad \xi(S^2) \subset \mathbb{H},$$

onde \mathbb{H} é o hiperplano dado por:

$$\mathbb{H} = \left\{ (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) \in \mathbb{R}^6; u_1 + u_2 + u_3 = 1 \right\}.$$

Portanto, $\xi(S^2) \subset \mathbb{H} \cap S^5 = S^4(a, r) \subset \mathbb{R}^5$.

A expressão da superfície de Veronese em \mathbb{R}^5 é dada em [4] por:

$$\begin{aligned} \xi : S^2 &\longrightarrow S^4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \\ (x, y, z) &\longmapsto \left(\frac{1}{\sqrt{6}}(3y^2 - 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - 2x^2 - y^2), \sqrt{2}xy, \sqrt{2}xz, \sqrt{2}yz\right), \end{aligned}$$

onde $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Logo, a superfície de Veronese $\xi(S^2) \subset S^4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Por outro lado, no exemplo 5 da seção 1.5 mostramos que a elipse de curvatura em qualquer ponto da superfície de Veronese é um círculo.

Portanto, a superfície de Veronese é uma **superfície hiperesférica que não é semi-umbílica**.

O corolário acima é uma consequência do lema 2.15, do teorema 2.19 e do teorema 2.25.

Corolário 2.28 *Suponha que M é uma superfície com pontos de inflexão isolados em \mathbb{R}^4 . M é hiperesférica se, e somente se, suas linhas assintóticas globalmente definidas são ortogonais e as curvaturas binormais $\{k_i\}_{i=1,2}$ satisfazem a seguinte relação*

$$\left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} + 2 \cos \alpha\right)E = \text{constante},$$

onde α é o ângulo entre os dois binormais em cada ponto.

Demonstração: Suponhamos que M é hiperesférica, segue por [3] que existe algum campo normal paralelo ν definido em M tal que M é ν -umbílica.

Assim pelo teorema 2.19 temos que M possui linhas assintóticas ortogonais globalmente definidas.

Do lema 2.15 $\nu = k_2b_1 + k_1b_2$ e tem curvatura associada $\lambda_\nu = k_1k_2E$.

$\frac{\nu}{\|\nu\|}$ é constante, já que ν é um campo paralelo, assim, chegamos na relação acima.

Reciprocamente, se M tem dois campos ortogonais globalmente definidos, segue pelo lema 2.15 que M é ν umbílica para algum campo normal ν , com curvatura associada constante não nula.

Concluimos pelo teorema 2.25 que M é hiperesférica. □

Exemplo: O toro de Clifford possui linhas assintóticas ortogonais e suas curvaturas binormais satisfazem a seguinte relação:

$$\left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} + 2 \cos \alpha\right)E = \frac{5}{4}.$$

De fato, seja o toro de Clifford descrito pela imersão

$$X(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u, \sin u, \cos v, \sin v).$$

Logo, o toro de Clifford está contido numa 3-esfera. Segue pelo corolário 2.28 que os campos de linhas assintóticas do toro de Clifford são ortogonais e pelo teorema 2.15 que o toro de Clifford é ν umbílico para $\nu = k_2 b_1 + k_1 b_2$, onde $k_1 = \frac{e_{b_2}}{E}$ e $k_2 = \frac{g_{b_1}}{E}$.

Consideremos o referencial ortonormal $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ tal que :

$$\begin{aligned} X_1 &= (-\sin u, \cos u, 0, 0), \\ X_2 &= (0, 0, -\sin v, \cos v), \\ X_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos u, \sin u, \cos v, \sin v), \\ X_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos u, -\sin u, \cos v, \sin v). \end{aligned}$$

Segue dos cálculos do exemplo da seção 2.2 que podemos tomar os binormais b_1 e b_2 como

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}X_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_4 = (0, 0, \cos v, \sin v), \\ b_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}X_3 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_4 = (-\cos u, -\sin u, 0, 0). \end{aligned}$$

Assim,

$$k_2 = \frac{e_{b_2}}{E} = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad k_1 = \frac{g_{b_1}}{E} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Utilizando o fato que $\cos \alpha = 0$, pois os vetores binormais são ortogonais, temos a seguinte relação:

$$\left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1} + 2 \cos \alpha \right) E = \left(\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \right) \frac{1}{2} = \frac{5}{4}.$$

Além disso, o toro de Clifford é ν -umbílica para:

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}b_1 + \sqrt{2}b_2 = \sqrt{2} \left(-\cos u, -\sin u, \frac{1}{2} \cos v, \frac{1}{2} \sin v \right).$$

O último corolário 2.28, da seção que caracteriza uma equivalência entre superfícies hiperesféricas e a existência de linhas assintóticas ortogonais, é um dos principais resultados da seção, já que nos deu condições de verificar que o toro de Clifford possui linhas assintóticas ortogonais.

Capítulo 3

Superfícies Semiumbólicas e Hiperesféricas em \mathbb{R}^5 .

Neste capítulo, dedicamos nossos estudos a superfícies imersas em \mathbb{R}^5 . Apresentamos alguns recentes resultados estudados por S. I. R. Costa, S. M. Moraes e M. C. Romero Fuster em [5] no artigo “Geometry contacts of surfaces immersed in $\mathbb{R}^n, n \geq 5$.”

Na primeira seção estudamos uma equivalência dos pontos de M através da classificação em tipo M_i , semiumbolicidade (ou não) e da posição relativa do ponto ao espaço afim que contém a elipse de curvatura no ponto considerado.

Na segunda seção relacionamos o coposto da função altura degenerada com as direções normais que estão tanto no subespaço linear gerado pela elipse de curvatura quanto no seu espaço ortogonal.

Na terceira seção mostramos a existência de um único foco umbílico em superfícies do tipo M_3 , além disso que esse foco umbílico encontra-se no espaço ortogonal ao subespaço linear gerado pela elipse de curvatura.

Na quarta seção caracterizamos superfícies hiperesféricas em termos da elipse de curvatura e finalmente na última seção relacionamos superfícies semiumbólicas e hiperesféricas, assim como superfícies semiumbólicas e hiperplanas.

3.1 Classificação de Pontos em Superfícies Imersas em \mathbb{R}^5 .

Seja M uma superfície imersa em \mathbb{R}^5 , em cada ponto p em M a imersão de M em \mathbb{R}^5 pode ser dada como a imagem de um mergulho $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$, $\phi(\mathbb{R}^2) = M \cap V_p$, onde V_p é uma vizinhança de p em \mathbb{R}^5 . Suponhamos que M é dada localmente em $p \equiv (0, 0)$ pela imersão ϕ na forma de Monge, isto é:

$$\begin{aligned} \phi : \left(U \subset \mathbb{R}^2, (0, 0) \right) &\longrightarrow \left(\mathbb{R}^5, (0, \dots, 0) \right) \\ (x, y) &\longmapsto \phi(x, y) = xe_1 + ye_2 + \phi_1(x, y)e_3 + \phi_2(x, y)e_4 + \phi_5(x, y)e_5, \end{aligned}$$

onde $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ é um referencial ortonormal em uma vizinhança de $p \equiv (0, 0) \in M$.

Afim de encontrarmos a matriz da aplicação segunda fundamental descrita no capítulo 1, observamos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(0, 0) &= \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x^2}(0, 0)e_3 + \frac{\partial^2 \phi_4}{\partial x^2}(0, 0)e_4 + \frac{\partial^2 \phi_5}{\partial x^2}(0, 0)e_5, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(0, 0) &= \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial x \partial y}(0, 0)e_3 + \frac{\partial^2 \phi_4}{\partial x \partial y}(0, 0)e_4 + \frac{\partial^2 \phi_5}{\partial x \partial y}(0, 0)e_5, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(0, 0) &= \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial y^2}(0, 0)e_3 + \frac{\partial^2 \phi_4}{\partial y^2}(0, 0)e_4 + \frac{\partial^2 \phi_5}{\partial y^2}(0, 0)e_5.\end{aligned}$$

Portanto, a matriz da aplicação segunda fundamental no ponto $p \in M$ é dada por:

$$\alpha_\phi(p) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix},$$

onde

$$a_i = \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2}(0, 0) \cdot e_{i+2}, \quad b_i = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(0, 0) \cdot e_{i+2} \quad \text{e} \quad c_i = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(0, 0) \cdot e_{i+2}, \quad i = 1, 2, 3,$$

são os coeficientes da aplicação segunda fundamental no referencial normal $\{e_3, e_4, e_5\}$.

Assim, se a superfície M é dada localmente em $p \in M$ na forma de Monge, a elipse de curvatura associada a essa imersão no ponto $p \in M$ é dada por :

$$\eta(\theta) = H + B \cos 2\theta + C \sin 2\theta$$

e teremos

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (a_i + c_i) e_{i+2} \quad B = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (a_i - c_i) e_{i+2} \quad \text{e} \quad C = \sum_{i=1}^3 b_i e_{i+2},$$

Definição 3.1 Um ponto $p \in M$ é **umbílico** se, e somente se, a elipse de curvatura de degenera em um ponto. No caso em que a elipse de curvatura se degenera exatamente no ponto p , este ponto é chamado **umbílico “flat”**.

Definição 3.2 Seja ϕ uma imersão de M em \mathbb{R}^5 , dada localmente em $p \in M$ na forma de Monge, definimos o **primeiro espaço normal**, denotado por $N_p^1 M$, como sendo o subespaço de $N_p M$ gerado por $\{\phi_{xx}(p), \phi_{xy}(p), \phi_{yy}(p)\}$.

Observação 3.3 $N_p^1 M = \langle \phi_{xx}(p), \phi_{xy}(p), \phi_{yy}(p) \rangle = \langle H, B, C \rangle$.

De fato, se $v \in N_p^1 M$, então v se escreve de forma única como:

$$v = a\phi_{xx}(p) + b\phi_{xy}(p) + c\phi_{yy}(p).$$

Observemos que

$$\begin{cases} H + B = \phi_{xx}(p) \\ H - B = \phi_{xx}(p) \\ C = \phi_{xy} \end{cases}$$

Logo,

$$v = (a + b)H + (a - b)B + cC.$$

Como a, b e c são únicos, temos que $(a + b)$ e $(a - b)$ também são. Portanto,

$$N_p^1M = \langle H, B, C \rangle.$$

Observamos que o subespaço linear E_p de N_pM descrito na seção 2.2 do capítulo 2, que é um subespaço paralelo ao espaço afim que contém a elipse de curvatura, denotado por Aff_p , é também um subespaço linear de N_p^1M .

Definição 3.4 *Seja M uma superfície imersa em \mathbb{R}^5 , $p \in M_i$ ou p é do tipo M_i se, e somente se, $\dim N_p^1M = i$.*

Observação 3.5 *De forma equivalente se M é uma superfície imersa em \mathbb{R}^5 , p é do tipo M_i , se e somente se, $\text{posto}(\alpha_\phi(p)) = i$. Esta definição foi introduzida em [15] para o caso de superfícies imersas em \mathbb{R}^5 , estabelecendo que $M = M_0 \cup M_1 \cup M_2 \cup M_3$, relação que também se estende ao caso de superfícies imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 6$.*

Teorema 3.6 *Dada uma superfície M imersa em \mathbb{R}^5 , temos:*

- i) $p \in M_3$ se, e somente se, Aff_p é um plano que não passa pela origem p .*
- ii) $p \in M_2$ em que a elipse de curvatura não se degenera se, e somente se, Aff_p é um plano que passa pela origem p de N_pM .*
- iii) $p \in M_2$ é um ponto semiumbílico se, e somente se, Aff_p é uma reta que não passa pela origem p de N_pM .*
- iv) $p \in M_1$ é um ponto de inflexão se, e somente se, Aff_p é uma reta que passa pela origem p de N_pM .*
- v) $p \in M_1$ é um ponto umbílico se, e somente se, Aff_p é um ponto distinto de p .*
- vi) $p \in M_0$ é um ponto umbílico flat se, e somente se, $Aff_p = \{p\}$.*

Demonstração: *i) Se $p \in M_3$ então $\dim N_p^1M = 3$, como $N_p^1M = \langle H, B, C \rangle$, segue que os vetores H, B e C são linearmente independentes. Agora como o espaço Aff_p é o espaço de menor dimensão que contém a elipse de curvatura, gerado pelos vetores B e C , então Aff_p é um plano que contém a elipse não degenerada. Além disso, o vetor H é o vetor com extremos na origem e no centro da elipse de curvatura, como H, B e C são L.I, então $H \notin Aff_p$ e $p \notin Aff_p$.*

Reciprocamente, se Aff_p é um plano tal que $p \notin Aff_p$, temos que a elipse de curvatura é não degenerada já que Aff_p é o espaço de menor dimensão que contém a elipse de curvatura

e $H \notin \text{Aff}_p$, logo os vetores H, B e C são linearmente independentes, o que mostra que $\dim N_p^1 M = 3$, então $p \in M_3$.

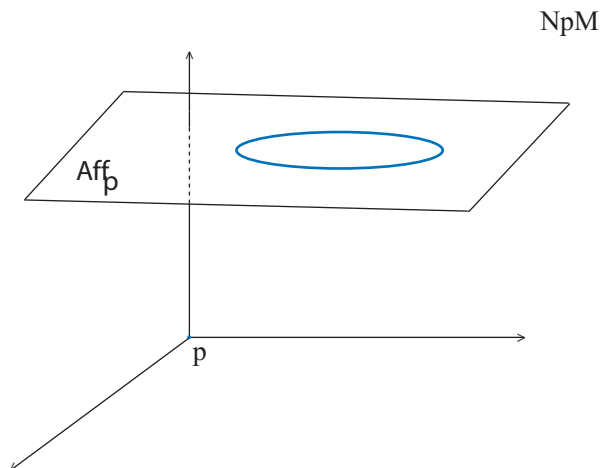


Figura 3.1: $p \in M_3$

ii) Se $p \in M_2$ em que a elipse de curvatura é não degenerada, temos $\dim N_p^1 M = 2$, como $N_p^1 M = \langle H, B, C \rangle$ os vetores H, B e C são linearmente dependentes, $H \in \text{Aff}_p$, e $p \in \text{Aff}_p$.

Reciprocamente, se Aff_p é um plano e passa pela origem, temos que B e C são L.I, e como $p \in \text{Aff}_p$, $H \in \text{Aff}_p$, logo H, B e C são linearmente dependentes, por i) $p \notin M_3$, portanto $p \in M_2$, pois se $p \in M_1$ ou $p \in M_0$ teríamos B e C linearmente dependentes, uma contradição.

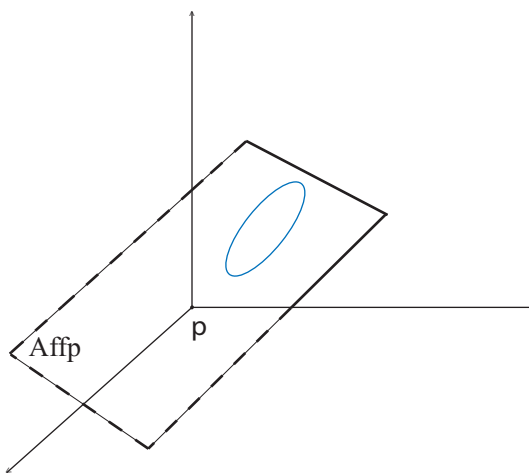


Figura 3.2: $p \in M_2$

iii) Se $p \in M_2$ é um ponto semiumbílico, temos $\dim N_p^1 M = 2$ e Aff_p é uma reta que

contém a elipse de curvatura degenerada num segmento de reta, além disso este segmento é não radial, pois caso contrário, os vetores H, B e C seriam dois a dois L.D, e daí $\dim N_p^1 M \leq 1$, o que contradiz a hipótese.

Reciprocamente, se Aff_p é uma reta que não passa pela origem p , como Aff_p é o espaço de menor dimensão que contém a elipse de curvatura, temos que p é um ponto semiumbílico não radial, ou seja os vetores H, B são linearmente independentes se $C = 0$, ou vice e versa, assim $\dim N_p^1 M \geq 2$, mas $\dim N_p^1 M \neq 3$, pois caso contrário a elipse seria não degenerada, logo $\dim N_p M = 2$, assim $p \in M_2$.

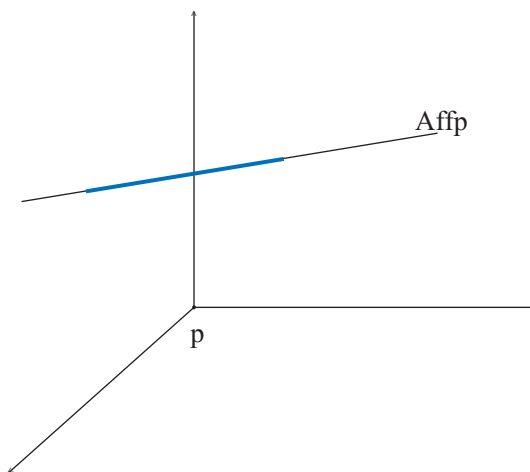


Figura 3.3: $p \in M_2$

iv) Se $p \in M_1$ é um ponto de inflexão, então claramente Aff_p é uma reta que passa pela origem p de $N_p M$, assim H, B e C são dois a dois linearmente dependentes, logo $H \in Aff_p$, portanto $p \in Aff_p$.

Reciprocamente, se Aff_p é uma reta que passa pela origem p , então a elipse é um segmento de reta radial, daí que p é um ponto de inflexão, e ainda H, B e C são dois a dois L.D, logo $\dim N_p^1 M \geq 1$. Se $\dim N_p^1 M = 2$ com p semiumbílico, segue por *iii)* $p \notin Aff_p$, uma contradição. Se $\dim N_p^1 M = 3$, Aff_p é uma plano, contradição com a hipótese. Portanto, $\dim N_p^1 M = 1$, o que mostra que $p \in M_1$.

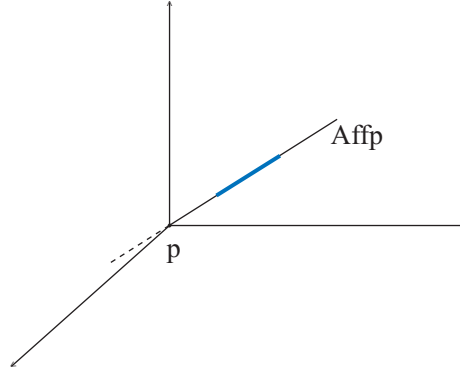


Figura 3.4: $p \in M_1$

v) Se $p \in M_1$ é um ponto umbílico, então $\dim N_p^1 M = 1$ e a elipse de curvatura se degenera em um ponto, suponhamos que $Aff_p = \{p\}$, então $H = B = C = 0$, o que mostra que $\dim N_p^1 M = 0$, contradição.

Reciprocamente, se Aff_p é um ponto fora da origem, então a elipse de curvatura se degenera num ponto, daí $H \neq 0$ e $B = C = 0$, o que mostra que $\dim N_p^1 M = 1$, então $p \in M_1$.

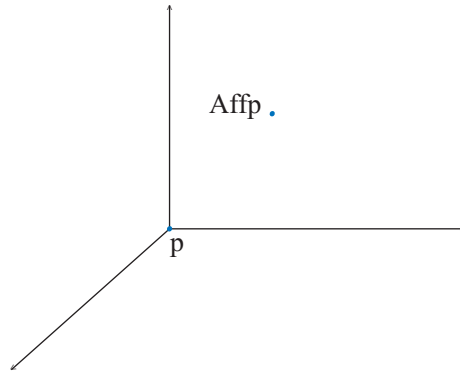


Figura 3.5: $p \in M_1$

vi) Se $p \in M_0$ é um ponto umbílico flat, temos $H = B = C = 0$, mas então a elipse de curvatura se degenera na origem, portanto $Aff_p = \{p\}$.

Reciprocamente, se $Aff_p = \{p\}$, então a elipse de curvatura se degenera na origem do espaço normal, daí p é um ponto umbílico flat e como $H = B = C = 0$, segue que $\dim N_p^1 M = 0$, daí $p \in M_0$.

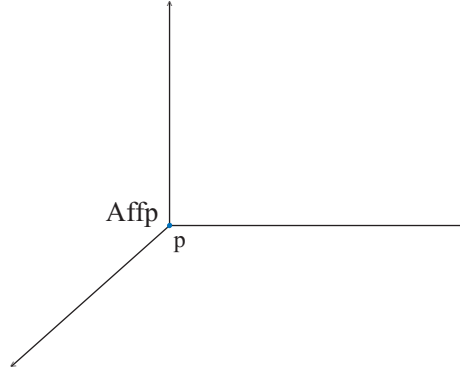


Figura 3.6: $p \in M_0$

□

Exemplos:

- 1) Seja M uma superfície imersa em \mathbb{R}^5 , dada localmente em $p \equiv (0, 0)$ na forma de Monge por:

$$\begin{aligned} \phi : \left(\mathbb{R}^2, (0, 0) \right) &\longrightarrow \left(\mathbb{R}^5, (0, \dots, 0) \right) \\ (x, y) &\longmapsto \phi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2, 0, 0), \end{aligned}$$

Logo,

$$\phi_{xx}(0, 0) = (0, 0, 2, 0, 0), \quad \phi_{yy}(0, 0) = (0, 0, 2, 0, 0) \quad \text{e} \quad \phi_{xy}(0, 0) = 0$$

Consequentemente, temos:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(\phi_{xx}(p) + \phi_{yy}(p)) = (0, 0, 2, 0, 0), \\ B &= \frac{1}{2}(\phi_{xx}(p) - \phi_{yy}(p)) = (0, 0, 0, 0, 0), \\ C &= 0, \end{aligned}$$

O que mostra que a elipse de curvatura em $p \equiv 0$ se degenera no ponto $(0, 0, 2, 0, 0)$, que é distinto da origem de $N_p M$. Portanto, $p \in M_1$.

- 2) Consideremos a superfície de translação descrita no capítulo 1, seção 1.4 dada por

$$\begin{aligned} \phi : (0, 2\pi) \times (0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^5 \\ (s, t) &\longmapsto \phi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t) = (\cos s, \sin s, a \cos t, a \sin t, 1 - a^2) \end{aligned}$$

Vimos que a elipse de curvatura em um ponto qualquer da superfície de translação é degenerada em um **segmento de reta não radial**. Portanto, todos os pontos da superfície de translação dada são do tipo M_2 .

3) Todos os pontos da superfície de Veronese são do tipo M_3 .

De fato, sabemos do exemplo 4 da seção 1.5 que a elipse de curvatura em cada ponto da superfície de Veronese é um círculo, dado por:

$$\eta(\theta) = H + \cos 2\theta B + \sin 2\theta C,$$

onde

$$H = \frac{1}{4}(\sqrt{6}, -3\sqrt{2}, 0, 0, 0), \quad B = \frac{1}{4}(-\sqrt{6}, \sqrt{2}, 0, 0, 0) \quad \text{e} \quad C = \frac{1}{2}(0, 0, \sqrt{2}, 0, 0).$$

Como os vetores H, B e C são linearmente independentes, segue que **todos os pontos da superfície de Veronese são de tipo M_3** .

3.2 Função Altura

Consideremos uma família de funções altura associada a uma imersão de uma superfície M em \mathbb{R}^5 , localmente dada por $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$. A imersão ϕ define para cada $v \in \mathbb{R}^5$ uma função altura, dada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \phi_v : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \phi_v(x, y) = \phi(x, y) \cdot v. \end{aligned}$$

Notemos que ϕ_v tem uma singularidade em $p \in M$ se, e somente se, $v \in N_p M$. De fato

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi_v}{\partial x}(p) = 0 \\ \frac{\partial \phi_v}{\partial y}(p) = 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi}{\partial x}(p) \cdot v = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y}(p) \cdot v = 0, \end{array} \right.$$

se e, somente se, v é ortogonal ao plano tangente $T_p M$, o que equivale dizer que $v \in N_p M$.

Definição 3.7 *Seja M uma superfície imersa em \mathbb{R}^5 . Dado um ponto $p \in M$, dizemos que uma direção $v \in N_p M$ é uma **binormal** em p se, e somente se, $\det(\text{Hess}(\phi_v(p))) = 0$. O **coposto da função altura** ϕ_v é a dimensão do núcleo da forma quadrática $\text{Hess}(\phi_v(p))$, isto é, $\text{coposto } \phi_v(p) = \dim \ker(\text{Hess}(\phi_v(p)))$.*

No capítulo 2 seção 2.2 na proposição 2.11 demonstramos que dado um ponto $p \in M$ e $v \in N_p M$, então as formas quadráticas $II_v(p)$ e $\text{Hess}(\phi_v)$ coincidem, este resultado será utilizado nas próximas seções.

Agora vamos relacionar o coposto da função altura degenerada com as direções normais que estão no subespaço linear gerado pela elipse de curvatura no ponto considerado:

Proposição 3.8 *Dados um ponto p em uma superfície M imersa em \mathbb{R}^5 e uma direção binormal não trivial $v \in E_p$, o ponto p é uma singularidade de coposto 1 de ϕ_v . Além disso, se $v \in E_p^\perp$ é um vetor binormal, então p tem singularidade de coposto 2.*

Demonstração: Seja ϕ a imersão da superfície M em \mathbb{R}^5 , dada localmente em p na forma de Monge. Dados $v \in N_p M$, temos que p é uma singularidade de coposto 2 se, e somente se

$$Hess(\phi_v(p)) = \begin{bmatrix} \phi_{xx}(p) \cdot v & \phi_{xy}(p) \cdot v \\ \phi_{xy}(p) \cdot v & \phi_{yy}(p) \cdot v \end{bmatrix},$$

tem entradas todas nulas. Como $E_p = \langle B, C \rangle$, temos que $v \in E_p^\perp$. Portanto, se $v \in E_p$ é uma direção binormal, então p é uma singularidade de coposto 1.

Se $v \in E_p^\perp$, então $v \cdot B = v \cdot C = 0$, então

$$\begin{cases} \phi_{xx}(p) \cdot v = \phi_{yy}(p) \cdot v \\ \phi_{xy}(p) \cdot v = 0 \end{cases},$$

se, além disso, v é uma direção binormal então $\det(Hess(\phi_v(p))) = 0$, as entradas da matriz $Hess(\phi_v(p))$ são todas nulas. \square

Apresentamos agora um importante lema que será preciso nas próximas seções:

Lema 3.9 *Sejam M uma superfície imersa em \mathbb{R}^5 , $p \in M$ e $v \in N_p M$, temos :*

$$Hess(\phi_v(p)) = \begin{bmatrix} \lambda_p(v) \cdot v & 0 \\ 0 & \lambda_p(v) \cdot v \end{bmatrix} \\ \iff v \in E_p^\perp(\lambda_p(v) = v \cdot H).$$

Demonstração: Suponhamos que a imersão ϕ de M em \mathbb{R}^5 é dada localmente em p na forma de Monge. Se $v \in E_p^\perp$, como $E_p = \langle B, C \rangle$, tem-se:

$$\begin{cases} v \cdot B = 0 \\ v \cdot C = 0 \end{cases},$$

então

$$\begin{cases} v \cdot \phi_{xx}(p) = v \cdot \phi_{yy}(p) \\ v \cdot \phi_{xy}(p) = 0. \end{cases}$$

Assim,

$$Hess(\phi_v(p)) = \begin{bmatrix} \phi_{xx}(p) \cdot v & \phi_{xy}(p) \cdot v \\ \phi_{xy}(p) \cdot v & \phi_{yy}(p) \cdot v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cdot H & 0 \\ 0 & v \cdot H \end{bmatrix}.$$

Reciprocamente, se

$$Hess(\phi_v(p)) = \begin{bmatrix} v \cdot H & 0 \\ 0 & v \cdot H \end{bmatrix},$$

temos que $\phi_{xx}(p) = \phi_{yy}(p)$, então $B \cdot v = 0$. Além disso $\phi_{xy} \cdot v = 0$, logo $C \cdot v = 0$. Portanto, $v \in E_p^\perp$. \square

Corolário 3.10 *O conjunto das direções em $E_p^\perp \cap H^\perp$ está associado aos pontos p que tem singularidade de coposto 2 da função altura.*

Demonstração: De fato se $v \in E_p^\perp \cap H^\perp$, então $v \cdot H = 0$, segue do lema acima que:

$$Hess(\phi_v(p)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

\square

3.3 Função Distância ao Quadrado

Seja ϕ uma imersão de uma superfície M em \mathbb{R}^5 dada localmente em p na forma de Monge. A imersão ϕ define para cada $a \in \mathbb{R}^5$ uma função distância ao quadrado:

$$d_a : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto d_a(x, y) = \|\phi(x, y) - a\|^2.$$

Observamos que d_a tem uma singularidade em um ponto $p \in M$ se, e somente se,

$$\begin{cases} \frac{\partial d_a}{\partial x}(p) = 0 \\ \frac{\partial d_a}{\partial y}(p) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x}(p) \cdot (\phi(p) - a) = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y}(p) \cdot (\phi(p) - a) = 0 \end{cases},$$

se, e somente se, o $v = (\phi(p) - a) \in N_p M$.

Definição 3.11 *Seja M uma superfície imersa em \mathbb{R}^5 . Dizemos que um ponto $a \in \mathbb{R}^5$ é um **centro focal em $p \in M$** se, e somente se, a função distância ao quadrado d_a , associada a a , tem singularidade degenerada em p .*

*O subconjunto de \mathbb{R}^5 constituído de centros focais para pontos em M é denominado **conjunto focal de M em \mathbb{R}^5** e denotado por \mathfrak{F}_p .*

*As hiperesferas centradas em centros focais são chamadas **hiperesferas focais**.*

Definição 3.12 *Seja M uma superfície imersa em \mathbb{R}^5 . Dado um ponto $p \in M$ o centro focal de uma hiperesfera focal em p é chamado **foco umbílico de M em p** se, e somente se, a função distância ao quadrado associada tem singularidade de coposto 2 em p .*

O caso de superfícies imersas em \mathbb{R}^4 foi analisado por Montaldi em sua tese [17] onde estuda os contatos de superfícies com hiperesferas em \mathbb{R}^4 e conclui que:

Um ponto $p \in M$ é semiumbílico (não radial) se, e somente se, é um ponto de contato (a definição de contato pode ser encontrada em [19]) de M com uma hiperesfera focal centrada em um foco umbílico.

Observação 3.13 *Os pontos semiumbílicos radiais são os pontos de inflexão, no caso de superfícies imersas em \mathbb{R}^4 . Para estes pontos o centro umbílico vai para o infinito e a hiperesfera focal torna-se um hiperplano osculador cujo contato é determinado por uma função altura apropriada [16].*

Se a imersão ϕ de M em \mathbb{R}^5 , está dada localmente na forma de Monge, para $v = a - p \in N_p M$

$$\text{Hess}(d_a(0,0)) = -2 \begin{bmatrix} \phi_{xx}(0,0) \cdot v - 1 & \phi_x(0,0) \\ \phi_{xy}(0,0) \cdot v & \phi_{yy}(0,0) \cdot v - 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, o conjunto focal desta imersão em $p = \phi(0,0)$ pode ser descrito como $\mathfrak{F}_p = p + \mathfrak{W}_p$, onde

$$\mathfrak{W}_p = \{v \in N_p M; (\phi_{xx}(0,0) \cdot v - 1)(\phi_{yy}(0,0) \cdot v - 1) - (\phi_{xy}(0,0) \cdot v)^2 = 0\},$$

que pode ser reescrito como:

$$\mathfrak{W}_p = \{v \in N_p M; (H \cdot v - 1)^2 = (B \cdot v)^2 + (C \cdot v)^2 = 0\}.$$

Proposição 3.14 *Se $\text{Hess}(d_a(0,0))$ tem coposto 2 em um ponto $p = a - v$ é equivalente dizer que a matriz da segunda forma fundamental é a identidade.*

Demonstração: De fato, se $\text{Hess}(d_a(0,0))$ tem coposto 2, então as entradas da matriz $\text{Hess}(d_a(0,0))$ são todas nulas, mas isso garante que:

$$\text{Hess}(\phi_v(0,0)) = \begin{bmatrix} \phi_{xx}(0,0) \cdot v & \phi_{xy}(0,0) \cdot v \\ \phi_{xy}(0,0) \cdot v & \phi_{yy}(0,0) \cdot v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

mas pela proposição 2.11 as matrizes da $II_v(0,0)$ e $\text{Hess}(\phi_v(0,0))$ coincidem, logo:

$$\text{Hess}(\phi_v(0,0)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Proposição 3.15 *Sejam M uma superfície imersa em \mathbb{R}^5 , $p \in M$ e ν uma direção degenerada em E_p^\perp . $q(\nu) = \phi(p) + \mu\nu$ é um foco umbílico para M em p se, e somente se,*

$$\mu = \frac{1}{\sum_{i=1}^3 a_i \nu_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^3 c_i \nu_i} \text{ e } \sum_{i=1}^3 b_i \nu_i = 0.$$

Demonstração: Seja ϕ uma imersão de M em \mathbb{R}^5 , dada localmente em $p \equiv (0,0)$ na forma de Monge, a imersão define para cada $q(\nu) \in \mathbb{R}^5$ uma função distância ao quadrado dada por:

$$d_{q(\nu)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto d_{q(\nu)}(x, y) = \|\phi(x, y) - q(\nu)\|^2.$$

Temos que :

$$\frac{\partial^2 d_{q(\nu)}}{\partial x^2}(x, y) = 2[\phi_{xx}(x, y) \cdot (\phi(x, y) - q(\nu)) + \phi_x(x, y) \cdot \phi_x(x, y)];$$

$$\frac{\partial^2 d_{q(\nu)}}{\partial x \partial y}(x, y) = 2[\phi_{xy}(x, y) \cdot (\phi(x, y) - q(\nu)) + \phi_x(x, y) \cdot \phi_y(x, y)];$$

$$\frac{\partial^2 d_{q(\nu)}}{\partial y^2}(x, y) = 2[\phi_{yy}(x, y) \cdot (\phi(x, y) - q(\nu)) + \phi_y(x, y) \cdot \phi_y(x, y)].$$

Portanto,

$$\text{Hess}(d_{q_\nu}(p)) = 2 \begin{bmatrix} -\mu \sum_{i=1}^3 a_i \nu_i + 1 & -\mu \sum_{i=1}^3 b_i \nu_i \\ -\mu \sum_{i=1}^3 b_i \nu_i & -\mu \sum_{i=1}^3 c_i \nu_i + 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, $q(\nu)$ é um foco umbílico para M em p se, e somente se

$$\begin{cases} \mu = \frac{1}{\sum_{i=1}^3 a_i \nu_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^3 c_i \nu_i} \\ \sum_{i=1}^3 b_i \nu_i = 0. \end{cases}$$

□

Corolário 3.16 *Sejam M uma superfície imersa em \mathbb{R}^5 e $p \in M$, dada uma direção degenerada $\nu \in E_p^\perp$, o centro focal $q(\nu)$ é um foco umbílico para M em p se, e somente se,*

$$\text{Hess}(d_{q_\nu}(p)) = 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{bmatrix},$$

$$\text{onde } \mu = \frac{1}{\sum_{i=1}^3 a_i \nu_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^3 c_i \nu_i} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^3 b_i \nu_i = 0.$$

Demonstração: Basta observar que

$$\text{Hess}(\phi_\nu(p)) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 a_i \nu_i & \sum_{i=1}^3 b_i \nu_i \\ \sum_{i=1}^3 b_i \nu_i & \sum_{i=1}^3 c_i \nu_i \end{bmatrix}.$$

Portanto, $q(\nu)$ é foco umbílico se, e somente se,

$$\sum_{i=1}^3 a_i \nu_i = \frac{1}{\mu} = \sum_{i=1}^3 c_i \nu_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^3 b_i \nu_i = 0.$$

□

Proposição 3.17 *Sejam M uma superfície imersa em \mathbb{R}^5 , $p \in M$ e $\nu \in E_p^\perp$ tal que $\lambda_p(\nu) \neq 0$, então $q(\nu) = p + \frac{1}{\lambda_p(\nu)}\nu$ é um foco umbílico para M em p .*

Demonstração: Como $\nu \in E_p^\perp$, segue pelo lema 3.9 que :

$$Hess(\phi_\nu(p)) = \begin{bmatrix} \lambda_p(\nu) & 0 \\ 0 & \lambda_p(\nu) \end{bmatrix}.$$

Dado $\nu \in E_p^\perp$, tal que $\lambda_p(\nu) \neq 0$, segue do corolário 3.16 que :

$$Hess(\phi_\nu(p)) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 a_i \nu_i & \sum_{i=1}^3 b_i \nu_i \\ \sum_{i=1}^3 b_i \nu_i & \sum_{i=1}^3 c_i \nu_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{bmatrix},$$

onde $\mu = \frac{1}{\sum_{i=1}^3 a_i \nu_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^3 c_i \nu_i}$ e $\sum_{i=1}^3 b_i \nu_i = 0$.

Por outro lado temos:

$$Hess(d_{q_\nu}(p)) = 2 \begin{bmatrix} -\mu \sum_{i=1}^3 a_i \nu_i + 1 & -\mu \sum_{i=1}^3 b_i \nu_i \\ -\mu \sum_{i=1}^3 b_i \nu_i & -\mu \sum_{i=1}^3 c_i \nu_i + 1 \end{bmatrix},$$

então

$$Hess(d_{q_\nu}(p)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, p é uma singularidade de coposto 2 de $d_{q(\nu)}$ e $q(\nu)$ é um foco umbílico para M em p . \square

Utilizando o corolário 3.16 e o lema 3.9, para cada ponto da imersão, podemos dizer se este admite ou não foco umbílico. Mostramos este fato para superfícies imersas em \mathbb{R}^5 :

Teorema 3.18 *Seja M uma superfície imersa em \mathbb{R}^5 . Então:*

- i) Dado $p \in M_3$ existe um único foco umbílico para M em p e este está na única direção contida em E_p^\perp .*
- ii) Para um ponto semiumbílico $p \in M_2$ os focos umbílicos formam uma reta contida no plano E_p^\perp .*

Demonstração: *i)* Se $p \in M_3$ a elipse de curvatura é não degenerada, então $\dim E_p = 2$, pois $E_p = \langle B, C \rangle$. Portanto, $\dim E_p^\perp = 1$.

Para cada $p \in M$, através da matriz $\alpha_\phi(p)$ podemos definir uma transformação linear de $N_p M \cong \mathbb{R}^3$ em \mathbb{R}^3 , que denotaremos por A_p , como segue:

$$A_p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(v_1, v_2, v_3) \longmapsto A_p(v_1, v_2, v_3) = [\alpha_\phi(p)]^T \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Assim, $p \in M_3$ se, e somente se, o posto $\alpha_\phi(p) = 3$, se, e somente se, $\dim \ker A_p = 0$.

Pelo lema 3.9 $\nu \in E_p^\perp$ tal que $\lambda_p(\nu) = 0$ se, e somente se, $Hess\phi_\nu(p) = 0$ se, e somente se, $\nu \in \ker A_p$ (pois $\ker A_p \subset E_p^\perp$). Portanto, coposto $\lambda_p = \dim \ker A_p$.

Logo, se $p \in M_3$, temos que coposto $\lambda_p = \dim \ker A_p = 0$ e o posto $\lambda_p = 1$.

Portanto, existe uma única direção $\nu \in E_p^\perp$, $\lambda_p(\nu) \neq 0$ e $q(v) = \phi(p) + \frac{1}{\lambda_p(\nu)}(\nu)$ é o único foco umbílico para M em p .

(ii) Se $p \in M_2$, $\dim E_p^\perp = 2$ e posto $\lambda_p = 1$, logo existe algum $\nu \in E_p^\perp$ tal que $\lambda_p(\nu) \neq 0$ e $q(v) = \phi(p) + \frac{1}{\lambda_p(\nu)}$ é um foco umbílico para M em p .

Como posto $\lambda_p = 1$, existe u vetor unitário ortogonal a ν com $\ker(\lambda_p) = \langle u \rangle$. Dado w um vetor qualquer em $E_p^\perp \setminus \ker(\lambda_p)$ podemos escrever $w = \nu \cos \theta + u \sin \theta$, onde θ varia de 0 a 2π .

Logo, $\lambda_p(w) \neq 0$, assim temos que $q(w) = \phi(p) + \frac{1}{\lambda_p(w)}(w)$ é um foco umbílico para M em p .

Mostremos que variando θ de 0 a 2π os focos umbílicos

$$q(w) = \frac{1}{\lambda_p(w)}(\nu \cos \theta + u \sin \theta),$$

descrevem uma reta. Notemos que:

$$\phi_{xx} \cdot w = \phi_{xx} \cdot \nu \cos \theta + \phi_{xx} \cdot u \sin \theta,$$

como $\ker(\lambda_p) = \langle u \rangle$, segue que a ultima igualdade acima pode se simplificar em :

$$\phi_{xx} \cdot w = \phi_{xx} \cdot \nu \cos \theta.$$

Portanto,

$$\cos \theta = \frac{\phi_{xx} \cdot w}{\phi_{xx} \cdot \nu} \quad \text{e} \quad q(w) = \frac{1}{\phi_{xx} \cdot \nu}(\nu + u \tan \theta),$$

variando θ temos uma reta de focos umbílicos no plano gerado por ν e u . □

3.4 Curvatura Umbílica e Superfícies Hiperesféricas em \mathbb{R}^5

Nesta seção faremos uma importante relação entre um ponto $p \in M$ e o espaço afim Aff_p de menor dimensão que contém a elipse de curvatura. Além disso, caracterizamos superfícies hiperesféricas em termos da sua elipse de curvatura.

No que segue denotaremos por $H_{E_p^{\perp*}}$ a projeção do vetor curvatura média em $E_p^{\perp*} = E_p^\perp \cap N_p^1 M$.

Definição 3.19 *Sejam M uma superfície imersa em \mathbb{R}^5 , que não está contida em um 4-subespaço dimensional e $p \in M$. Definimos a **curvatura umbílica** de M em p como $k_u(p) = d(p, Aff_p) = \| H_{E_p^{\perp*}} \|$.*

Observação 3.20 Se M é uma superfície imersa em \mathbb{R}^5 e $p \in M$ é um ponto onde a elipse de curvatura é não degenerada, podemos considerar a curvatura umbílica sem sinal. Como $N_p M \cong \mathbb{R}^3$, podemos definir a curvatura umbílica da seguinte forma:

$$k_u(p) = H \cdot \frac{B \times C}{\|B \times C\|}.$$

Observação 3.21 Se M é uma superfície imersa em \mathbb{R}^5 , temos:

i) Se $p \in M_2$ é um ponto não semiumbílico, então $k_u(p) = 0$.

ii) Se $p \in M_1$ é um ponto semiumbílico radial, então $k_u(p) = 0$.

iii) Se $p \in M_0$ é um ponto umbílico flat, então $k_u(p) = 0$.

De fato, basta observar que em todos os casos o espaço afim Aff_p contém a origem do espaço normal p , e portanto

$$k_u(p) = d(p, Aff_p) = 0.$$

Observação 3.22 No caso de superfícies imersas em \mathbb{R}^4 o plano definido pela elipse de curvatura em um ponto p não semiumbílico coincide com o plano normal $N_p M$ a superfície M neste ponto. Neste sentido, podemos estender o conceito de curvatura umbílica para superfícies em \mathbb{R}^4 dizendo que a mesma é nula nos pontos não semiumbólicos, isto é, é nula nos pontos onde a elipse de curvatura é não degenerada.

Definição 3.23 Sejam M uma superfície imersa em \mathbb{R}^5 , $p \in M$ e $\nu \in N_p M$, o **operador de forma** S_ν segundo o vetor normal $\nu \in N_p M$ é dado por:

$$\begin{aligned} S_\nu : T_p M &\longrightarrow T_p M \\ X &\longmapsto S_\nu(X) = -(\overline{\nabla_X \nu})^\top. \end{aligned}$$

A segunda forma fundamental pode ser expressa por $II_\nu(X) = S_\nu \cdot X$, assim a matriz da segunda forma fundamental $II_{\nu(p)}$ em um ponto qualquer $p \in M$ coincide com a matriz do operador S_ν .

Consideremos $II_\nu|_{S^1}$, como II_ν é contínua e S^1 é compacto, segue que $II_\nu|_{S^1}$ atinge seu máximo e mínimo em S^1 , isto é, existem θ_1 e θ_2 direções em S^1 , tais que:

$$k_1 = II_\nu(\theta_1) \leq II_\nu(\theta) \leq II_\nu(\theta_2) = k_2, \forall \theta \in S^1.$$

Assim, temos de forma análoga a definição 2.2 para superfícies em \mathbb{R}^5 , que os valores k_1 e k_2 são as ν -**curvaturas principais máxima e mínima** da segunda forma fundamental. Além disso lembremos através da definição 2.3 que um ponto $p \in M$ é ν -umbílico se, e somente se as ν -curvaturas máxima e mínima coincidem neste ponto.

O teorema 2.7 é válida para superfícies \mathbb{R}^5 , a qual nos diz que se p é ν -umbílico, então a direção ν no espaço normal $N_p M$ encontra-se no subespaço ortogonal ao subespaço linear E_p da elipse de curvatura.

Observação 3.24 No caso em que M é ν -umbílica, então para todo ponto $p \in M$, p é ν -umbílico. Neste caso, o valor de $II_\nu(\theta)$, $\theta \in S^1 \subset T_p M$ não depende da escolha da direção θ considerada, mas apenas do ponto p .

No que segue denotamos por k_ν a função curvatura associada ao campo umbílico ν .

Observação 3.25 Dado um campo normal ν em M , pela proposição 2.11 segue que a matriz da segunda forma fundamental em um ponto qualquer $p \in M$ coincide com a forma quadrática $Hess(\phi_\nu(p))$. Então o lema 3.9 nos garante que ν é um campo umbílico normal em M se, e somente se, $\nu \in E_p^\perp$. Neste caso $k_\nu(p) = \nu \cdot H_{E_p^\perp}$.

Agora definiremos a noção de fibrados paralelos associados a campos paralelos definido no capítulo 2 definição 2.23:

Definição 3.26 Um fibrado normal E é **paralelo** se, e somente se, admite algum referencial ortonormal local de campos de vetores **paralelos** em todo ponto.

Enunciamos nosso principal resultado da seção que caracterizam a hiperesfericidade de superfícies em \mathbb{R}^5 em termos da elipse de curvatura associada:

Teorema 3.27 Seja M uma superfície imersa em \mathbb{R}^5 , cujo todos os pontos são do tipo M_3 . M está contida numa 4-esfera se, e somente se, o sub-fibrado normal $E = \{E_p \subset N_p M; E_p = \langle B, C \rangle\}$ é um sub-fibrado paralelo. Além disso, k_u é constante sobre toda a superfície M e coincide com a curvatura da 4-esfera.

Demonstração:

Seja M imersa em \mathbb{R}^5 tal que todos os pontos são do tipo M_3 , então $\dim N_p^1 M = 3$ o que equivale a dizer que a elipse é não degenerada e os vetores H, B e C são linearmente independentes. Logo, $\dim E_p = 2$, e daí que $\dim E_p^\perp = 1$. Portanto, podemos tomar $\nu \in N_p M$ um campo normal unitário de tal forma que $\nu \in E_p^\perp$, então pelo teorema 2.7, segue que ν é um campo umbílico sobre M .

Mostremos agora que o campo ν é um campo paralelo sobre M .

Para isto suponhamos que E é um fibrado paralelo, assim temos que E_p admite um referencial ortonormal $\{X_3(p), X_4(p)\}$ de campos paralelos ao longo de M .

Consideremos um referencial ortonormal $\{X_1(p), X_2(p), X_3(p), X_4(p), X_5(p) = \nu(p)\}$ para $T_p \mathbb{R}^5$.

Utilizando os resultados da seção 2.3, temos:

$$dX_5 = \sum_{j=1}^5 w_{5j} X_j,$$

logo,

$$(dX_5)^N = w_{53} X_3 + w_{54} X_4 + w_{55} X_5.$$

Observemos que os campos X_3 e X_4 são campos paralelos, daí:

$$w_{53} = -w_{35} = -\bar{\nabla}_X X_3 \cdot \nu = -(\nabla_X X_3 + \nabla_X^\perp X_3) \cdot \nu = 0$$

$$w_{54} = -w_{45} = -\overline{\nabla}_X X_4 \cdot \nu = -(\nabla_X X_4 + \nabla_X^\perp X_4) \cdot \nu = 0.$$

Como, além disso, $w_{55} = dX_5 \cdot X_5$ e $\|X_5\| = 1$, segue que $w_{55} = 0$.
Portanto,

$$(dX_5)^N = 0,$$

o que mostra que o campo $X_5 = \nu$ é um campo paralelo sobre M .

Por Chen, em [3] uma superfície $M \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 4$ encontra-se em uma 4-esfera se, e somente se, admite um campo paralelo umbílico.

Para provarmos nosso ultima afirmação, notamos pela observação 3.25 que:

$$k_\nu = \nu \cdot H.$$

Utilizando o fato que $N_p M \equiv \mathbb{R}^3$, temos

$$\begin{cases} \nu \in E_p^\perp \\ B \times C \in E_p^\perp \end{cases},$$

daí podemos tomar

$$\nu = \frac{B \times C}{\|B \times C\|}.$$

Portanto, para um ponto qualquer $p \in M$

$$k_\nu(p) = H \cdot \nu = H \cdot \frac{B \times C}{\|B \times C\|} = k_u(p).$$

Como $k_\nu(p)$ é constante, pois as curvaturas principais coincidem, temos que k_u é constante. □

Exemplo: A curvatura umbílica da superfície de Veronese é constante $k_u = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

De fato a superfície de Veronese é dada pela aplicação de veronese de ordem 2, dada por:

$$\begin{aligned} \xi : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^6 \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto (x_1^2, x_2^2, x_3^2, \sqrt{2}x_1x_2, \sqrt{2}x_1x_3, \sqrt{2}x_2x_3) \end{aligned}$$

A imagem $\xi(S^2)$ é chamada **superfície de Veronese**.

Sabemos que $\xi(S^2) \subset S^4(a, r) \subset \mathbb{R}^5$.

A expressão da superfície de Veronese em \mathbb{R}^5 é:

$$\begin{aligned} \xi : \quad S^2 &\longrightarrow S^4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \\ (x, y, z) &\longmapsto \left(\frac{1}{\sqrt{6}}(3y^2 - 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - 2x^2 - y^2), \sqrt{2}xy, \sqrt{2}xz, \sqrt{2}yz\right) \end{aligned}$$

onde $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Sabemos que todos os pontos da superfície de Veronese são do tipo M_3 , como além disso a superfície de Veronese $\xi(S^2) \subset S^4$, segue do teorema 3.27 que a curvatura umbílica k_u em cada ponto da superfície de Veronese coincide com a curvatura da $S^4\left(a, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Portanto $k_u(p) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, para todo ponto p da superfície de Veronese.

3.5 Superfícies Semiumbólicas e Hiperesféricas em \mathbb{R}^5

Nesta seção relacionamos os conceitos de superfícies semiumbólicas e superfície hiperesféricas. Afim de chegarmos nosso principal resultado, apresentamos alguns conceitos de Topologia Algébrica e Geometria Riemanniana.

Definição 3.28 *Sejam X, Y espaços topológicos, duas aplicações $f, g : X \rightarrow Y$ são ditas **homotópicas** se existe uma aplicação contínua:*

$$\begin{aligned} H : X \times I &\longrightarrow Y \\ (s, t) &\longmapsto H(s, t), \quad \text{onde } I = [0, 1] \end{aligned} \quad ,$$

tal que

$$H(s, 0) = f(s) \quad \text{e} \quad H(s, 1) = g(s), \quad \forall s \in X.$$

Definição 3.29 *Um **caminho** em X é uma aplicação $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$, contínua.*

Agora, definimos o produto de caminhos essencial no estudo de grupos fundamentais:

Definição 3.30 *Sejam $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ caminhos contínuos tais que $\alpha(1) = \beta(0)$. O **produto de caminhos** de α e β , denotado por $\alpha * \beta$, é dado por:*

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Definição 3.31 *Seja $\alpha : I \rightarrow X$, onde $I = [0, 1]$, um caminho ligando x_0 e x_1 , o **caminho inverso** de α , denotado por α^{-1} , é dado por:*

$$\begin{aligned} \alpha^{-1} : I &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \alpha^{-1}(t) = \alpha(1 - t). \end{aligned}$$

Consideremos a classe de caminhos homotópicos com mesmo ponto final e inicial, denotada por $[\alpha]$, isto é:

$$[\alpha] = \{ \beta : I \rightarrow X; \alpha(0) = \beta(0), \alpha(1) = \beta(1) \text{ e } \alpha \simeq \beta \}.$$

Se $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ são caminhos fechados com ponto base x_0 , o produto das classes $[\alpha]$ e $[\beta]$ é definido por $[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$.

O **grupo fundamental** de X com ponto base x_0 , denotado por $\pi_1(X, x_0)$, é conjunto das classes de homotopias de caminhos fechados, com ponto base x_0 , isto é,

$$\pi_1(X, x_0) = \left\{ [\alpha]; \alpha : I \rightarrow X, \alpha(0) = \alpha(1) = x_0 \right\}.$$

Definição 3.32 *Uma superfície M é **simplesmente conexa** se, e somente se, M é **conexa por caminhos** e o seu grupo fundamental é o **trivial**, isto é, $\pi_1(M, x_0) = \{[e_{x_0}]\}$.*

Observação 3.33 Dizer que uma superfície M é simplesmente conexa é equivalente a dizer que para todo caminho $\alpha : I \rightarrow M$ caminho fechado temos $\alpha \simeq e_{x_0}$, onde e_{x_0} é o caminho constante x_0 .

Exemplos:

- 1) $\mathbb{R}^n \setminus \{p\}$, para $n > 2$, é simplesmente conexo.
- 2) S^n , $n > 1$ é simplesmente conexo, mas S^1 não é simplesmente conexo.

Definição 3.34 Seja M um espaço topológico não vazio, dizemos que M é uma **variedade diferenciável** de dimensão n se, e somente se, para qualquer $p \in M$ existem abertos V_p em M contendo p , \mathcal{U}_p um aberto de \mathbb{R}^n e $\psi_p : V_p \rightarrow \mathcal{U}_p$ um difeomorfismo.

Definição 3.35 Seja $f : M \rightarrow \overline{M}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M de dimensão n em uma variedade Riemanniana \overline{M} de dimensão $k = n + m$. Se dados $v_1, v_2 \in T_p M$ tais que

$$v_1 \cdot v_2 = df_p(v_1) \cdot df_p(v_2),$$

dizemos que f é uma **imersão isométrica** de M em \overline{M} .

A seguinte proposição pode ser encontrada em [23] e nos dará condições para demonstrarmos nosso principal resultado dessa seção:

Proposição 3.36 Seja M uma n -subvariedade simplesmente conexa de \mathbb{R}^{n+k} e suponha que $N^1 M$ tem posto constante $r < k$, existe uma imersão isométrica ψ de M em \mathbb{R}^{n+r} que estende a um isomorfismo entre o fibrado de vetores $N^1 M$ e o fibrado normal de $\psi(M)$ em \mathbb{R}^{n+r} .

Assim podemos interpretar o resultado acima de acordo com nosso contexto:

Corolário 3.37 Seja M uma superfície simplesmente conexa imersa em \mathbb{R}^5 :

Se o primeiro fibrado normal $N^1 M$ tem posto constante igual a $r = 2, 1$, então existe uma imersão isométrica ψ de M em \mathbb{R}^{2+r} que estende a um isomorfismo entre o fibrado de vetores em $N^1 M$ e o fibrado normal de $\psi(M)$ em \mathbb{R}^{2+r} . Este isomorfismo leva elipses de curvaturas de M em \mathbb{R}^5 em elipses de curvatura de $\psi(M)$ em \mathbb{R}^{2+r} .

O teorema abaixo nos dá condições de caracterizar as superfícies hiperesféricas e hiperplanas em termos da elipse de curvatura, através da sua degeneracidade ou não.

Teorema 3.38 *i) Seja M uma superfície simplesmente conexa em \mathbb{R}^5 , com curvatura umbílica constante nula, cujo todos os pontos são não semiumbólicos. M admite uma imersão isométrica em um 4-plano.*

ii) Seja M uma superfície simplesmente conexa em \mathbb{R}^5 , com curvatura umbílica constante não nula, onde todos seus pontos são semiumbólicos. M admite uma imersão isométrica em uma 3-esfera.

iii) Seja M uma superfície simplesmente conexa em \mathbb{R}^5 , com curvatura umbílica constante nula, onde todos os seus pontos são semiumbílicos. M admite uma imersão isométrica em um 3-plano.

Demonstração:

i) Observamos que $k_u(p) = (p, Aff_p) = 0$, com $p \in M$ um ponto arbitrário da superfície, além disso qualquer p é não semiumbílico, logo a elipse de curvatura é não degenerada e o espaço afim de menor dimensão Aff_p que contém a elipse de curvatura é um plano que passa pela origem do espaço normal.

Portanto, pelo teorema 3.6 item ii) que $p \in M_2$, isto é, $\dim N_p^1 M = 2$ para todo ponto $p \in M$, isso significa que o fibrado de vetores $N^1 M$ é tal que $\dim N^1 M = 2$, então pelo corolário 3.37 existe uma imersão isométrica ψ de M em um 4-plano.

ii) Temos $k_u(p) = d(p, Aff_p) \neq 0$ é constante, por hipótese dado $p \in M$ arbitrário, p é um ponto semiumbílico. Assim, $p \notin Aff_p$ e Aff_p é uma reta, segue pelo teorema 3.6 item iii) que $p \in M_2, \forall p \in M$, logo $\dim N^1 M = 2$, então pelo corolário 3.37 existe uma imersão isométrica ψ de M em \mathbb{R}^4 .

Como todos os pontos são semiumbílicos, segue pelo mesmo corolário 3.37 que $\psi(M)$ é uma superfície semiumbílica em \mathbb{R}^4 , cuja curvatura umbílica é constante.

Pelo teorema 2.19 existe um campo normal ν o qual é umbílico sobre $\psi(M)$ com curvatura $k_\nu \neq 0$ constante. Portanto, pelo teorema 2.25 temos que $\psi(M)$ esta imersa numa S^3 .

iii) Se $k_u(p) = 0$, $p \in M$ é um ponto semiumbílico, então $p \in Aff_p$ e Aff_p é uma reta, assim pelo teorema 3.6 item iv) $p \in M_1$, e daí que $\dim N^1 M = 1$, logo pelo corolário 3.37 existe uma imersão isométrica ψ de M em um 3-plano. □

O teorema acima é o principal resultado da seção e um dos principais resultados do capítulo, ele é “quase” uma generalização do resultado famoso de superfícies em \mathbb{R}^3 que diz que se uma superfície é totalmente umbílica com curvatura constante, então essa superfície é um “pedaço” de uma esfera ou de um plano, e só não tratamos como generalização devido ao fato que as imersões presentes no teorema são isométricas.

Apêndice: Aplicação de Veronese de ordem p

Afim de apresentarmos a aplicação de Veronese de ordem 2, essencial no estudo da superfície de Veronese, analisamos neste apêndice a aplicação de Veronese de ordem p .

3.6 O p -ésimo Produto Tensorial

Consideremos o p -ésimo produto tensorial $\otimes^p \mathbb{R}^{n+1} = \underbrace{\mathbb{R}^{n+1} \otimes \dots \otimes \mathbb{R}^{n+1}}_{p \text{ vezes}}$. Para cada permutação σ de p letras, definimos

$$\begin{aligned} \sigma : \quad \otimes^p \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \otimes^p \mathbb{R}^{n+1} \\ v_1 \otimes \dots \otimes v_p &\longmapsto v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(p)}. \end{aligned}$$

Agora, do operador simetrização $S_p = \frac{1}{p!} \sum \sigma$, temos que $O^p \mathbb{R}^{n+1} = \frac{\otimes}{\ker(S_p)}$ é chamado o p -ésimo produto simétrico de \mathbb{R}^{n+1} . S_p induz a projeção canônica $S_p : \otimes^p \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow O^p \mathbb{R}^{n+1}$.

A imagem em $O^p \mathbb{R}^{n+1}$ de $v_1 \otimes \dots \otimes v_p$ será denotada por $v_1 \circ \dots \circ v_p$, que por sua vez será identificado com $\frac{1}{p!} \sum \sigma(v_1 \otimes \dots \otimes v_p)$. $O^p \mathbb{R}^{n+1}$ é isomorfo ao módulo dos polinômios homogêneos de grau p em $n + 1$ variáveis.

Dada uma base canônica $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ de \mathbb{R}^{n+1} , uma base natural para $O^p \mathbb{R}^{n+1}$ é dada por vetores da forma $u_r = e_{i_1} \circ \dots \circ e_{i_p}$, onde $e_{i_j} \in \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ e os multi-índices $I = (i_1, \dots, i_p)$, $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_p$, são dados por combinações p a p de $\{1, \dots, n + 1\}$, permitindo repetição. A dimensão de $O^p \mathbb{R}^{n+1}$ é portanto o número destas combinações:

$$\tau(n + 1, p) = \text{dimensão de } O^p \mathbb{R}^{n+1} = \binom{n + p}{p}. \quad (3.1)$$

A partir do produto tensorial interno do p -ésimo produto tensorial, que é dado por:

$$\begin{aligned} (v_i \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_p) \cdot (w_1 \otimes w_2 \otimes \dots \otimes w_p) &= \\ &= (v_1 \cdot w_1) \cdot (v_2 \cdot w_2) \cdot \dots \cdot (v_p \cdot w_p), \end{aligned}$$

induzimos um produto em $O^p\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\begin{aligned}(v_1 \circ \dots \circ v_p) \cdot (w_1 \circ \dots \circ w_p) &= \left(\frac{1}{p!} \sum \sigma(v_1 \otimes \dots \otimes v_p) \cdot \frac{1}{p!} \sum \sigma(w_1 \otimes \dots \otimes w_p) \right) \\ &= \frac{1}{p!} \sum (v_1 \cdot w_{j_1}) \cdot \dots \cdot (v_p \cdot w_{j_p})\end{aligned}\quad (3.2)$$

É claro que em relação a este produto interno, a base $\{u_i\}$ de $O^p\mathbb{R}^{n+1}$ é ortogonal, precisamos agora, normalizá-la.

Para $i = 1, \dots, n+1$, $I = (i, i, \dots, i)$,

$$\begin{aligned}(u_i \cdot u_i) &= (e_i \circ \dots \circ e_i) \cdot (e_i \circ \dots \circ e_i) \\ &= \frac{1}{p!} \sum (e_i \cdot e_i)^p = 1.\end{aligned}$$

Para $i = n+2$, $I = (1, 1, \dots, 1, 2)$,

$$\begin{aligned}(u_{n+2} \cdot u_{n+2}) &= (e_1 \circ \dots \circ e_1 \circ e_2) \cdot (e_1 \circ \dots \circ e_1 \circ e_2) \\ &= \frac{1}{p!} \sum (e_1 \cdot e_{j_1}) \dots (e_1 \cdot e_{j_{p-1}}) \cdot (e_2 \cdot e_{j_p}),\end{aligned}\quad (3.3)$$

onde (j_1, \dots, j_p) é uma permutação de $(1, 1, \dots, 1, 2)$.

Portanto, $(u_{n+2} \cdot u_{n+2}) = \frac{1}{p!} \cdot (p-1)! = \frac{1}{p}$.

Para i genérico, $I = (i_1, \dots, i_p)$, teremos

$$(u_i \cdot u_i) = \frac{1}{p!} p_1! \dots p_{n+1}!,$$

onde p_k , $1 \leq k \leq n+1$, é o número de fatores e_k que comparecem em u_i .

Portanto uma base ortonormal de $O^p\mathbb{R}^{n+1}$, é dada por w_i , $i = 1, \dots, \tau(n+1, p)$,

$$w_i = \sqrt{M_i} u_i, \quad \text{onde} \quad M_i = \frac{p!}{p_1! \dots p_{n+1}!}\quad (3.4)$$

Com isso definimos um isomorfismo isométrico:

$$J : O^p\mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{\tau(n+1, p)},$$

definido por $J(w_i) = \varepsilon_i$, onde ε_i é a base canônica de $\mathbb{R}^{\tau(n+1, p)}$.

Observamos que $\tau(n+1, p) = \text{dimensão de } O^p\mathbb{R}^{n+1}$, é igual ao número de derivadas de ordem p de uma função polinomial de $n+1$ variáveis.

3.7 A Aplicação de Veronese de Ordem p

Consideremos $\underbrace{\mathbb{R}^{n+1} \circ \mathbb{R}^{n+1} \circ \dots \circ \mathbb{R}^{n+1}}_{p \text{ vezes}}$ o p -ésimo produto tensorial simétrico e a aplicação

$$\begin{aligned}\xi : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \circ \mathbb{R}^{n+1} \dots \circ \mathbb{R}^{n+1} \equiv O^p\mathbb{R}^{n+1} \\ \bar{x} &\longmapsto \bar{x}^p = \bar{x} \circ \bar{x} \dots \circ \bar{x}.\end{aligned}$$

A aplicação ξ é chamada **aplicação de Veronese de ordem p** .

Consideremos a identificação $O^p\mathbb{R}^{n+1} \equiv \mathbb{R}^{\tau(p,n+1)}$, dada pelo isomorfismo isométrico obtida na seção 3.6 e $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ uma base ortonormal do \mathbb{R}^{n+1} . Assim podemos expressar $\xi(\bar{x})$ em função das coordenadas $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ de \bar{x} :

$$\begin{aligned}
\xi(\bar{x}) &= \xi(x_1e_1 + \dots + x_{n+1}e_{n+1}) \\
&= (x_1e_1 + \dots + x_{n+1}e_{n+1})^p \\
&= x_1^pe_1^p + x_2^pe_2^p + \dots + x_{n+1}^pe_{n+1}^p + \\
&\quad + \frac{p!}{(p-1)!1!}x_1^px_2e_1^pe_2 + \dots + \\
&\quad + \frac{p!}{p_1! \dots p_{n+1}!}x_1^{p_1} \dots x_{n+1}^{p_{n+1}}e_1^{p_1} \circ \dots \circ e_{n+1}^{p_{n+1}} + \dots + \\
&\quad + \frac{p!}{1!(p+1)!}x_nx_{n+1}^{p-1}e_n \circ e_{n+1}^{i-1} = \\
&= \sum_{p_1+\dots+p_{n+1}=p} \frac{p!}{p_1! \dots p_{n+1}!}x_1^{p_1} \dots x_{n+1}^{p_{n+1}}e_1^{p_1} \circ \dots \circ e_{n+1}^{p_{n+1}},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\xi(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{\tau(p,n+1)} \sqrt{M_i}x_1^{i_1} \dots x_{n+1}^{i_{n+1}}w_i,$$

onde $\{w_i\}$ é uma base ortonormal de $O^p\mathbb{R}^{n+1}$.

Portanto, a expressão da aplicação de Veronese de ordem p é:

$$\begin{aligned}
\xi : \quad \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \circ \mathbb{R}^{n+1} \dots \circ \mathbb{R}^{n+1} \equiv O^p\mathbb{R}^{n+1} \\
\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto \left(x_1^p, \dots, x_{n+1}^p, \sqrt{p}x_1^{p-1}x_2, \dots, \sqrt{2}x_nx_{n+1}, \dots, \right. \\
&\quad \left. \sqrt{M_i}x_1^{i_1} \dots x_{n+1}^{i_{n+1}}, \dots, \sqrt{p}x_nx_{n+1}^{p-1} \right),
\end{aligned}$$

onde $M_i = \frac{p!}{i_1! \dots i_{n+1}!}$, $i_1 + \dots + i_{n+1} = p$.

3.8 A Variedade de Veronese Padrão de Ordem p e Dimensão n

Consideremos a restrição de ξ a S^n . Sua imagem $\xi(S^n)$ é chamada variedade de Veronese padrão de ordem p e dimensão n . Vamos estabelecer alguns resultados envolvendo a aplicação $\xi : S^n \longrightarrow O^p\mathbb{R}^{n+1}$.

Proposição 3.39 $\xi(S^n) \subset S^{n-1}$, para todo p . Para p ímpar $\xi : S^n \longrightarrow O^p\mathbb{R}^{n+1}$ é injetiva e para p par ξ , induz uma aplicação injetiva no espaço projetivo real, $\bar{\xi} : P^n \longrightarrow S^{n-1}$.

Demonstração: Dado $v \in S^n$, segue da igualdade 3.2 que:

$$\xi(v) \cdot \xi(v) = (v)^p \cdot (v)^p = (v \cdot v)^p = 1.$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} \xi(v) = \xi(w) &\iff v^p = w^p \iff (v^p - w^p) \cdot (v^p - w^p) = 0 \\ &\iff (v \cdot v)^p - 2(v \cdot w) + (w \cdot w)^p = 0 \iff \\ &2(1 - (v \cdot w)^p) = 0 \iff (v \cdot w)^p = 1. \end{aligned}$$

Portanto, para p ímpar, temos a injetividade da aplicação ξ .

Para p par, temos $\xi(v) = \xi(w) \iff (v \cdot w) = \pm 1 \iff v = \pm w$, o que permite passar o quociente a aplicação ξ e torná-la injetiva. \square

Proposição 3.40 Para p par, $\xi(S^n)$ está contida num hiperplano H^{N-1} de R^N , onde $N = \tau(p, n+1)$ e ainda $S^{N-2}(\varepsilon) = S^N \cap H^{N-1}$.

Demonstração:

$$\text{De fato, } x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1 \iff (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2)^{\frac{p}{2}} = 1$$

$$\begin{aligned} \iff 1 = x_1^p + \dots + x_{n+1}^p + \frac{p}{2}x_1^{p-2}x_2^2 + \dots + \frac{\frac{p!}{2!}}{k_1! + \dots + k_{n+1}!}x_1^{2k_1} + \dots + x_{n+1}^{2k_{n+1}} + \dots + \\ + \frac{p}{2}x_n^2x_{n+1}^{p-2} \cdot 2k_1 + \dots + 2k_{n+1} = p. \end{aligned}$$

Sendo $\xi(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_N)$, juntando esta última igualdade com a expressão da aplicação da Veronese de ordem p dada na seção 3.7, existe uma combinação linear $\sum_{i=1}^N k_i y_i = 1$, o que significa que $\xi(S^n)$ está contido no hiperplano H de R^N definido por esta última igualdade. \square

Observação 3.41 Para calcular o raio ε , de $S^{N-2}(\varepsilon)$, notamos que o hiperplano H é dado por $\sum_{i=1}^N a_i u_i = 1$, o vetor $u = \frac{1}{\sum a_i} (a_1, \dots, a_N)$ é normal a H e $u \in H$.

Temos que $\varepsilon^2 = (v^p - u) \cdot (v^p - u)$, $v \in S^n$. Por exemplo, para $p = 2$, $u = \frac{1}{n+1} (\underbrace{1, \dots, 1}_{n+1 \text{ vezes}}, 0, \dots, 0)$ e $\varepsilon = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$.

Exemplo: A superfície de Veronese

Seja a aplicação de Veronese de ordem 2:

$$\begin{aligned} \xi : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \circ \mathbb{R}^3 \\ \bar{x} &\longmapsto \bar{x} \circ \bar{x}. \end{aligned}$$

Sabemos pelo isomorfismo isométrico dado na seção 3.6 que $\mathbb{R}^3 \circ \mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{R}^6$, com essa identificação e utilizando a expressão geral da aplicação de Veronese de ordem p , temos:

$$\begin{aligned} \xi : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^6 \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto (x_1^2, x_2^2, x_3^2, \sqrt{2}x_1x_2, \sqrt{2}x_1x_3, \sqrt{2}x_2x_3). \end{aligned}$$

A imagem $\xi(S^2)$ é chamada **superfície de Veronese** e é uma superfície esférica em \mathbb{R}^6 .

De fato,

$$\begin{aligned} \xi : \quad S^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^6 \\ (x, y, z(x, y)) &\longmapsto \left(x^2, y^2, (z(x, y))^2, \sqrt{2}xy, \sqrt{2}xz(x, y), \sqrt{2}yz(x, y) \right), \end{aligned}$$

onde $z(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Notemos que:

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 &= x^2(x^2 + y^2 + z^2) + y^2(x^2 + y^2 + z^2) + \\ &\quad z^2(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Além disso, $\xi(S^2)$ está contida no hiperplano \mathbb{H} , onde

$$\mathbb{H} = \{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) \in \mathbb{R}^6; u_1 + u_2 + u_3 = 1\}.$$

Portanto, $\xi(S^2) \subset \mathbb{H} \cap (S^2) = S^4(a, r) \subset \mathbb{R}^6$.

Segue da proposição 3.39 que $\xi : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^6$ induz uma aplicação injetiva no espaço projetivo, $\bar{\xi} : P^2 \longrightarrow S^4(\varepsilon)$ e ainda mais, pela observação 3.41 temos que $\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{2+1}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

A expressão da superfície de Veronese em \mathbb{R}^6 pode ser obtida através da translação $T_v : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^6$ do vetor $v = -\frac{1}{3}(1, 1, 1, 0, 0)$ e da rotação $R : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^6$ dada por:

$$[R] = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & \\ -\sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} & & & \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, a expressão da superfície de Veronese em \mathbb{R}^6 é dada por:

$$\begin{aligned} \bar{\xi} = RT_v\xi : \quad S^2 &\longrightarrow S^4\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \\ (x, y, z) &\longmapsto \left(3y^2 - 1, -\sqrt{3}(x^2 + z^2 - \frac{2}{3}), \sqrt{2}xy, \sqrt{2}xz, \sqrt{2}yz \right). \end{aligned}$$

Conclusão

O objetivo deste trabalho foi estudar as relações existentes entre os pontos semiumbólicos da superfície, as direções de umbilicidade da imersão e as superfícies hiperesféricas. Com isso apresentamos relevantes resultados a cerca destes conceitos.

Além destes resultados, podemos através de futuras pesquisas, abordar alguns caminhos a serem seguidos, que podem ser relacionados com o trabalho presente. A seguir levantamos algumas questões a serem pesquisadas:

i) **Análise computacional das configurações principais.**

No capítulo 1, apresentamos algumas imersões relevantes no nosso trabalho, tais como: o toro de Clifford, a superfície de Veronese e superfícies de translação. Uma interessante abordagem é a utilização de um programa computacional adequado que dê condições de explorar as configurações principais dessas superfícies, isto é, explorar e visualizar as ν -linhas de curvatura dessas superfícies e seus pontos críticos (os pontos ν -umbílicos da superfície).

ii) **Abordagem global dos resultados.**

Vários resultados e conceitos abordados nesta dissertação, como é o caso do estudo de superfícies imersas em \mathbb{R}^5 são de natureza local, já que as imersões presentes neste contexto são dadas localmente em um ponto p de uma superfície M . Sendo assim, a investigação de relações entre superfícies semiumblicas e superfícies hiperesféricas é relevante se abordado de forma global.

Referências Bibliográficas

- [1] M. P. CARMO, *O Método do Referencial Móvel*. Impa, Rio de Janeiro, (1976).
- [2] M. P. CARMO, *Geometria Riemanniana*. Impa, Rio de Janeiro, (2008).
- [3] B. Y. CHEN e K. YANOS, Integral formulas for submanifolds and their applications, *J. Differential Geom.* 5 (1971) 467 – 477.
- [4] S. I. R. COSTA, *Aplicações não singulares de Ordem p*. Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP. (1982).
- [5] S. I. R. COSTA, S. M. MORAES e M. C. ROMERO FUSTER, Geometric Contacts of Surfaces Immersed in \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, *Differential Geometry and its Applications* 27 (2009) 442 – 454.
- [6] R. A. GARCIA, D. K. H. MOCHIDA, M. C. ROMERO FUSTER e M. A. S. RUAS, Inflection points and topology of surfaces in 4-space, *Trans. Amer. Math. Soc.* 352 (7) (2000) 3029 – 3043.
- [7] R. A. GONCALVES, J. A. M. ALFARO, A. MONTESINOS-AMILIBIA e M. C. ROMERO-FUSTER Relative mean curvature configurations for surfaces in \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, 38, 1 – 22, (2007).
- [8] I. V. GUADALUPE e L. RODRIGUEZ, Normal Curvature os Surfaces in Spaces Forms, *Pacific Journal of Mathematics*, 106, n.1, (1983), 95 – 103.
- [9] C. GUTIERREZ, I. V. GUADALUPE, R. TRIBUZY e V. GUÍNEZ A Diferential Equation for Lines of Curvature on Surfaces Immersed in \mathbb{R}^4 , *Cadernos de Matemática 02*, artigo número SMA108, 189 – 200, (2001).
- [10] K. KOMMERELL, Riemannsche Flächen in ebenen Raum von vier Dimensionen. *Math. Ann.*, 60, 546 – 596, (1905).
- [11] J. LITTLE, On singularities of submanifolds of higher dimensional Euclidean space, *Annali Mat. Pura et Appl.*, (ser. 4A) 83 (1969) 261 – 336.
- [12] L. F. MELLO, Mean directionally curved lines on Surfaces Immersed in \mathbb{R}^4 , *Publicacions Matematiques* 47 (2003) 415 – 440.
- [13] L. F. MELLO, Campos de Direções e Singularidades em Superfícies Imersas em \mathbb{R}^4 , *I Semana de Matemática-São Mateus*, Universidade de são Mateus (2004).
- [14] D. K. H. MOCHIDA, *Geometria Genérica de Subvariedades em Codimensão Maior que Um em \mathbb{R}^n* . Tese de Doutorado. UFSCAR, (1993)

- [15] D. K. H. MOCHIDA, M. C. ROMERO FUSTER e M. A. S. RUAS, Inflection Points and Nonsingular Embeddings of Surfaces in \mathbb{R}^5 , em *Rocky Mountain Journal of Maths* 33 (3) (2003) 995 – 1010
- [16] D. K. H. MOCHIDA, M. C. ROMERO FUSTER e M. A. S. RUAS, The Geometry of Surfaces in 4-Space from a Contact Viewpoint, *Geometriae Dedicata* (1995) 323 – 332.
- [17] J. A. MONTALDI, *Contact with application to submanifolds*, PhD Thesis, University of Liverpool (1983).
- [18] C. L. E. MOORE e E. B. WILSON, Differential Geometry of Two-dimensional Surfaces in Hyperspaces. *Proceedings of the international Conference held to honour the 60th. Birthday of A. M. Naveira*. Universidad de Valência, (2001).
- [19] S. M. MORAES, *Elipses de Curvatura no Estudo de Superfícies Imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$* . Tese de Doutorado. IMECC-UNICAMP, (2002).
- [20] S. M. MORAES e M. C. ROMERO-FUSTER, Convexity and Semiumbilicity for Surfaces in \mathbb{R}^5 . *Differential geometry (Valencia, 2001)*, World Scientific Publ., River Edge, NJ, 222 – 234, (2002).
- [21] S. M. MORAES e M. C. ROMERO FUSTER, Semiumbilics and 2-regular Immersions of Surfaces in Euclidean Spaces. *Rocky Mountain Journal of Maths*, vol.35, n4, 1327 – 1346, (2005).
- [22] S. M. MORAES, M. C. ROMERO-FUSTER e F. SÁNCHEZ-BRINGAS, Principal Configurations and Umbilicity of Submanifolds in \mathbb{R}^n . *Bull. Belgian Math. Soc. Simon Stevin* 11, 227 – 245, (2004).
- [23] M. C. ROMERO-FUSTER e F. SÁNCHEZ- BRINGAS, Isometric reduction of the codimension and 2-regular immersions os submanifolds. *Preprint*.
- [24] M. C. ROMERO-FUSTER e F. SÁNCHEZ- BRINGAS, Umbilicity of surfaces with orthogonal asymptotic lines in \mathbb{R}^4 . *Differential Geom. Appl.*16 (2002), 213 – 224.
- [25] M. C. ROMERO-FUSTER, M. A. S. RUAS e F. TARI, Asymptotic curves on surfaces in \mathbb{R}^5 , *Communications in Contemporary Maths.*, vol.10, n.3, (2008), 1 – 27.