

JANE LAGE BRETAS

**SINGULARIDADES DE APLICAÇÕES ESTÁVEIS DE SUPERFÍCIES
FECHADAS E ORIENTADAS EM S^2**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

**VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2011**

JANE LAGE BRETAS

**SINGULARIDADES DE APLICAÇÕES ESTÁVEIS DE SUPERFÍCIES
FECHADAS E ORIENTADAS EM S^2**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 25 de fevereiro de 2011.

Natália Andrea Viana Bedoya

Raúl Ádrian Oset Sinha

Alexandre Miranda Alves
(Co-orientador)

Simone Maria de Moraes
(Co-orientadora)

Catarina Mendes de Jesus
(Orientadora)

Agradecimentos

Para a realização deste sonho, foram necessários muitos dias e noites de estudo, abdicação de momentos com a família, namorado e amigos, muita oração de todos aqueles que torcem por mim e de uma boa orientação. Por isso o meu muito abrigada a todos!

Começo agradecendo à Deus, pela oportunidade e força em todos os momentos. Por tornar-me capaz de concluir este curso tão importante.

À minha mãe Maria do Rosário, pelas orações e pelo colo nos momentos necessários. Ao meu pai José Hamilton, pela força e pelas palavras de confiança. Ao meu irmão Mauro, pelo apoio e torcida e à minha irmã Nádia por mesmo de longe, cuidar de mim. Agradeço imensamente à vocês, meus mestres, pelos sacrifícios que fizeram para que eu pudesse concluir os meus estudos.

À minha avó Rosária por dedicar seu precioso tempo em orações para imensa e maravilhosa família.

Ao meu namorado Adriano, por estar sempre do meu lado com muito amor e carinho. E à sua família também, por entender que as minhas visitas eram com a condição de ficar estudando.

Aos tios, primos e amigos, por entenderem a minha ausência durante esses dois anos e mesmo assim, continuarem torcendo por mim.

Aos colegas de curso, pelos grupos de estudos e aos que ingressaram antes e depois de mim, pelos bons e maus momentos. À Gheyza, Luís e Tiago, pela amizade, desabafos, discussões e por aturarem os meus estresses. Às meninas da república, pelos momentos de estudo e respeito, em especial, à Fernanda, a minha nova irmã.

Agradeço aos professores do Departamento de Matemática da UFV, pelas belas aulas e incentivo. Aos meus co-orientadores: professor Dr. Alexandre Miranda Alves, pela disponibilidade e professora Dra. Simone Maria de Moraes, por dividir sua experiência em duas disciplinas e pelas sugestões.

Em especial, agradeço à minha orientadora Dra. Catarina Mendes de Jesus, pelo apoio incondicional, incentivo, paciência, ensinamentos (que não foram poucos!), dicas, sugestões, disponibilidade mesmo em feriados prolongados e férias, passeios... e com

tantos momentos juntas, não é atoa que a considero uma grande amiga.

Agradeço ao REUNI pela bolsa, pois sem ela, não teria condições de realizar este sonho, extensivo às professoras orientadoras da atividade Reuni: Luciana, Margareth e Ariane pela paciência e oportunidade.

Sumário

Lista de Figuras	viii
Resumo	ix
Abstract	x
Introdução	1
1 Resultados Preliminares	4
1.1 Complexos Regulares e Característica de Euler	4
1.1.1 Complexos Regulares	4
1.1.2 Superfícies	6
1.1.3 Característica de Euler de Superfícies	8
1.2 Grafos	10
1.3 Aplicações Estáveis	11
1.3.1 Jatos	12
1.3.2 A Topologia C^∞ de Whitney	14
1.3.3 Conjunto Singular e Contorno Aparente	15
1.4 Grau de Aplicações	21
1.4.1 Curvas no Plano	21
1.4.2 Superfícies Fechadas na Esfera	22
2 Invariantes de Aplicações Estáveis de Superfícies na 2-esfera	25
2.1 Invariantes Locais de Aplicações Estáveis	25
2.2 Invariante Global de Aplicações Estáveis	29
2.2.1 Grafo Dual de Aplicações Estáveis	29
2.2.2 Realização de Grafos com Dois Vértices	32
2.3 Cirurgia de Aplicações Estáveis	33
2.3.1 Cirurgia Horizontal	33

2.3.2	Cirurgia Vertical	38
2.4	Realização de Grafos Bipartidos	40
2.4.1	Realização de Grafo Tipo Árvore	40
2.4.2	Grafos com Pesos Arbitrários	44
2.4.3	Algoritmo para a Realização de um Grafo	46
2.5	Aplicações Dobras	50
2.5.1	Teorema de Quine	51
2.5.2	Grau da Aplicação Dobra Associada a G	52
3	Contorno Minimal de Aplicações da Esfera na Esfera	57
3.1	Contornos Aparentes de Aplicações Estáveis	57
3.2	Aplicação de Grau dois	59
3.2.1	Número Mínimo de Cúspides	59
3.3	Contorno Minimal de Aplicações \mathcal{A} -Equivalentes	60
3.3.1	Família Normal de Curvas Planas	60
3.3.2	Radial de uma Família Normal	61
3.3.3	Emparelhamento Efetivo e Transitivo	63
3.3.4	Radial Suficiente	66
3.3.5	O Mínimo de Pares de um Emparelhamento em Cada Curva	69
3.3.6	Orientação do Complemento de Conjunto Singular	71
3.3.7	Decomposição do Complemento de um Conjunto singular Conexo	76
3.3.8	Aplicações \mathcal{A} -Equivalentes de Grau Dois	78
3.4	Aplicações entre 2-Esferas com Grau $d \geq 2$	82
3.4.1	$2d$ -ágono e Emparelhamento de um $2d$ -ágono	82
3.4.2	Mínimo de Cúspides de um Contorno Minimal	87
3.4.3	Decomposição do Complemento de um Conjunto Singular Geral	88
3.4.4	Mínimo de Cúspides de um Contorno Minimal Geral	90
3.5	Exemplos de Contorno Minimal	91
	Apêndice	92
	Conclusão e Perspectivas Futuras	100
	Referências Bibliográficas	101

Lista de Figuras

1.1	Construção de um 2-complexo.	5
1.2	Ponto do bordo e sua vizinhança.	6
1.3	Triangulação da 2-esfera.	7
1.4	Característica de Euler do disco D^2	8
1.5	Soma conexa do toro com o 2-toro.	8
1.6	Soma conexa de uma superfície com S^2	9
1.7	Exemplos de grafos.	10
1.8	Tipos de pontos do conjunto singular.	16
1.9	Pontos de dobra e de cúspide.	17
1.10	Contradizendo duas cúspides.	18
1.11	Sinal das Regiões	19
1.12	Sinal de Cúspide.	20
1.13	Vizinhança das quatro cúspides.	20
1.14	Algumas imersões do círculo no Plano.	21
1.15	Projeção estereográfica..	21
1.16	Projeções estereográficas distintas de uma mesma curva em S^2	22
1.17	Grau de uma aplicação no ponto p	23
2.1	Alguns tipos de transições.	26
2.2	Transições do tipo bicos.	27
2.3	Transições entre diferentes aplicações do toro.	28
2.4	Diferentes aplicações com mesmo contorno aparente.	28
2.5	Três aplicações diferentes do toro com grau zero.	30
2.6	Grafos associados às aplicações da figura 2.4.	30
2.7	O 3-toro obtido através de um grafo.	31
2.8	Grafo de aplicação dobra com dois vértices e k arestas.	32
2.9	Cirurgia Horizontal.	34
2.10	Exemplo de cirurgia horizontal.	35
2.11	Aplicação do bitoro na esfera, com grau zero.	36

2.12	Dois diferentes contornos aparente com única curva.	37
2.13	Construção de uma aplicação do toro com grau um.	38
2.14	Cirurgia Vertical.	38
2.15	Uma construção do contorno do toro com única componente.	39
2.16	Alterando o grau e o número de cúspides.	41
2.17	Projeção trivial da esfera na esfera (grau zero).	42
2.18	Alteração do grau com cirurgia horizontal.	42
2.19	Acrescentando aresta em um grafo.	43
2.20	Árvore maximal.	44
2.21	Esquema para a realização de um grafo arbitrário.	46
2.22	Diferentes decomposições de um grafo árvore.	46
2.23	Algumas aplicações básicas.	48
2.24	Exemplo de realização de um grafo.	49
2.25	Exemplos de Aplicações Dobra.	54
2.26	Aplicação do bitoro com grau zero.	55
2.27	Acrescentando peso um em dois vértices consecutivos.	56
3.1	Contornos de diferentes aplicações em S^2 : (a) redutível e (b) irredutível.	58
3.2	Homotopia entre aplicações estáveis entre duas esferas com grau dois.	59
3.3	Família Normal γ	61
3.4	Eliminação de pontos duplos.	61
3.5	Meridianos concorrentes ao infinito.	62
3.6	Radial e corte da família normal γ	62
3.7	Cruzamentos positivo e negativo.	63
3.8	Um radial para a família normal γ	64
3.9	Um radial para a família normal γ	65
3.10	Exemplo de decomposição cíclica de $R = SP$	66
3.11	Um emparelhamento P para a família normal γ	68
3.12	Regiões delimitadas pelos ciclos de $R = SP$	69
3.13	Pré-imagem de uma vizinhança.	71
3.14	Complemento do conjunto singular do contorno minimal.	72
3.15	Cruzamentos entre h e α	74
3.16	Emparelhamentos efetivos P_1, P_2, P_3 e P_4	74
3.17	Complemento do conjunto singular.	77
3.18	Radial para a família normal h	78
3.19	Contornos minimais com grau dois.	79
3.20	Divisão do domínio de f	80

3.21	Construção de aplicação com contorno minimal de grau dois.	81
3.22	$2d$ -ágono e emparelhamento.	83
3.23	$2d$ -ágono.	83
3.24	Conectando vértices de um $2d$ -ágono.	84
3.25	Permutação que gera mal-cruzamento.	85
3.26	Emparelhamentos sem mau-cruzamento.	86
3.27	Contorno minimal com $2deg(f)$ cúspides e nenhuma auto-interseção.	88
3.28	g e α	89
3.29	Sinal das cúspides.	92
3.30	Alterando a característica de Euler pelas transição B^+	93
3.31	Alterando a característica de Euler pelas transição B^-	94
3.32	Alterando a característica de Euler pelas transição L	94
3.33	Aplicação dobra do k -toro com grau d	95

Resumo

BRETAS, Jane Lage, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2011. **Singularidades de aplicações estáveis de superfícies fechadas e orientadas em S^2 .** Orientadora: Catarina Mendes de Jesus. Co-orientadores: Alexandre Miranda Alves e Simone Maria de Moraes.

Esta dissertação é dedicada ao estudo de aplicações estáveis de superfícies fechadas e orientadas na esfera. Vamos estudar grafos como invariantes de tais aplicações estáveis e de acordo com Hacon, Mendes de Jesus e Romero-Fuster [14], todo grafo bipartido é realizado por aplicações estáveis desse tipo, com grau arbitrário. Segundo Demoto [2], vamos mostrar que o contorno minimal de uma aplicação estável f entre duas esferas possui exatamente $2deg(f)$ cúspides e nenhuma auto-interseção.

Abstract

BRETAS, Jane Lage, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February of 2011. **Singularities of the stable maps to the closed and oriented surface on S^2 .** Advisor: Catarina Mendes de Jesus. Co-advisers: Alexandre Miranda Alves and Simone Maria de Moraes.

This dissertation is devoted to the study of stable maps from closed orientable surfaces to the sphere. We study graphs as invariants of such maps and according to Hacon, Mendes de Jesus and Romero-Fuster [14], every bipartite graph is realized by a stable map with arbitrary degree. According to Demoto [2], we show that the minimal contour of a stable map f between two spheres has exactly $2deg(f)$ cusps and no self-intersections.

Introdução

Em 1955, Whitney publicou o artigo *On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces. I. Mappings of the Plane into the Plane*, que se tornou um fundamento para uma nova teoria sobre aplicações estáveis do plano no plano. Whitney determinou que um germe de aplicação em cada ponto é equivalente a um ponto regular, ou ponto de dobra ou uma cúspide. No final dos anos 50, Thom [28] notou que esses resultados poderiam ser incorporados a uma nova teoria: a Teoria das Singularidades.

Um problema clássico da Teoria de Singularidades é a classificação de aplicações estáveis, a menos de equivalências, em particular, a \mathcal{A} -equivalência. Os rumos da pesquisa no sentido de resolver este problema se resumem, em muitos casos, na tentativa de encontrar invariantes que permitem classificar boa parte das aplicações.

No início da década de 90, Vassiliev [29] desenvolveu um método para a obtenção de invariantes de isotopia locais nos espaços das funções. Essa técnica se baseia no estudo da estrutura do subconjunto discriminante, formado pelas aplicações não estáveis.

Desde então, vários pesquisadores se interessaram em aplicar os invariantes tipo Vassiliev em diversas áreas, dentre eles: Arnold [1] nas imersões de curvas no plano, Goryunov [10] nas aplicações estáveis de superfícies em \mathbb{R}^3 e Aicardi e Ohmoto [26] no contorno aparente das aplicações estáveis do plano no plano.

No caso de aplicações estáveis no plano, os invariantes estudados por [26] e [15] não são suficientes para classificar todas tais aplicações. Isso acontece quando o contorno aparente de duas aplicações estáveis não \mathcal{A} -equivalentes possui o mesmo valor para esses invariantes.

Este fato motivou a busca de um novo invariante, do ponto de vista global, que depende da topologia do conjunto singular, sobre a superfície do domínio da aplicação.

Em [11], Hacon, Mendes de Jesus e Romero-Fuster apresentaram um invariante para o caso de superfícies orientadas no plano: o grafo, que é associado ao domínio da aplicação, juntamente com o seu conjunto singular. Neste caso, dizemos que o grafo é dual ao conjunto singular na superfície. Este invariante caracteriza completamente a superfície do domínio: gênero, tipo topológico do complemento do conjunto singular, assim como o

número de componentes singulares.

Surtem então algumas questões, tais como *Quais grafos podem ser associados a aplicações estáveis entre superfícies? E quais grafos estão associados às aplicações sem cúspides?*. Em [12] e [13], buscando responder estas questões, estes mesmos autores caracterizaram os grafos que podem ser realizados por aplicações estáveis de superfícies orientadas no plano e aplicações sem cúspides, conhecidas como aplicações dobras.

Essa técnica de associar grafos às aplicações estáveis foi também estendida para outras aplicações estáveis como: aplicações estáveis de superfícies fechadas e orientadas na esfera, por Hacon, Mendes de Jesus e Romero-Fuster em [14]; aplicações estáveis de 3-variedades orientadas e fechadas no \mathbb{R}^3 , por Mendes de Jesus, Oset e Romero-Fuster, em [23] e aplicações estáveis de Gauss de superfícies fechadas e orientadas imersas no 3-espaco, por Mendes de Jesus, Moraes e Romero-Fuster em [24].

Neste trabalho, o nosso objetivo é tratar especialmente das aplicações estáveis de superfícies fechadas e orientadas na esfera. Uma parte do trabalho, a que trata dos grafos associado a aplicações estáveis, está baseada na referência [14]. A outra parte, tratamos apenas das aplicações da esfera na esfera, onde estudamos o contorno minimal destas aplicações com grau arbitrário e está baseada no trabalho do Demoto, [2], publicado em 2005, onde ele utiliza alguns resultados do trabalho do Francis [6].

Os dois trabalhos, [14] e [2], usam o Teorema de Quine, do trabalho [27], para afirmar alguns dos resultados. Dado a importância deste resultado, apresentamos uma nova demonstração para este Teorema, que está no apêndice, via transições de codimensão um que altera o número de componentes do conjunto singular. Estas técnicas também são usadas para tratar dos grafos de aplicações, onde $f : M \rightarrow S^2$ é uma aplicação estável e M uma superfície fechada e orientada, o conjunto singular Σf é constituído por uma união finita e disjunta de curvas que separa M em componentes conexas e disjuntas. As regiões são associadas aos vértices do grafo e as componentes de Σf às arestas. Os grafos obtidos dessa maneira constituem um invariante global para as classes de \mathcal{A} -equivalência de aplicações estáveis de M na esfera, com o mesmo grau.

Utilizando a fórmula de Quine para aplicações estáveis da esfera na esfera, Demoto mostrou em [2], que:

1. Se duas aplicações estáveis da esfera na esfera, com grau dois, realizam o contorno minimal, então elas são \mathcal{A} -equivalentes.
2. Se uma aplicação $f : S^2 \rightarrow S^2$, realiza o contorno minimal, então o contorno irreduzível de f possui exatamente $2deg(f)$ cúspides e nenhuma auto-interseção.

Com isto, duas aplicações estáveis entre duas 2-esferas que realizam o contorno minimal, com graus distintos, podem ser diferenciadas pelo número de cúspides do contorno

aparente.

Assim, dividimos o presente trabalho da seguinte forma:

No capítulo 1, vemos alguns conceitos e resultados preliminares necessários para este trabalho. Começamos com os complexos regulares e a característica de Euler de uma superfície compacta, seguida de alguns conceitos relevantes da Teoria de Grafos.

Apresentamos também alguns conceitos da Teoria de Singularidades, do ponto de vista da Topologia Diferencial, tais como os k -jatos, a C^∞ -topologia de Whitney, alguns conceitos de aplicações estáveis e a noção de conjuntos singulares, considerando em particular, o caso de aplicações de superfícies na esfera. E para finalizar, definimos a noção de grau de uma aplicação. As referências utilizadas são [5], [7], [9], [18], [20], [30], [31] e [32].

No capítulo 2, apresentamos grafos com pesos nos vértices como um invariante global de aplicações estáveis, que serve para auxiliar outros invariantes já conhecidos na classificação dessas aplicações. Tomamos como principais referências os trabalhos de Aicardi e Ohmoto [26] e Hacon, Mendes de Jesus e Romero-Fuster [11], [13], [14].

Já no capítulo 3, estudamos o contorno aparente de aplicações estáveis da esfera na esfera, tomando como principal referência o trabalho de Demoto [2], de Francis [6] e Quine [27]. O nosso objetivo é estudar o contorno minimal de uma aplicação estável entre duas esferas, levando-se em consideração o grau da aplicação, o número de cúspides e o número de auto-interseção do seu contorno aparente.

Para finalizar, apresentamos no apêndice, uma demonstração para um caso particular do teorema de Quine, sobre aplicações estáveis na esfera, que está enunciado como o corolário 2.38. A técnica usada na demonstração é a relação dos sinais das cúspides nas transições de codimensão um, a característica de Euler do complemento do conjunto singular antes e após as transições e o grau da aplicação.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo veremos alguns conceitos e resultados preliminares necessários para este trabalho. Começaremos com os complexos regulares e a característica de Euler de uma superfície compacta, seguida de alguns conceitos relevantes da Teoria de Grafos.

Apresentamos também alguns conceitos da Teoria de Singularidades, do ponto de vista da Topologia Diferencial, tais como os k -jatos, a C^∞ -topologia de Whitney, alguns conceitos de aplicações estáveis e a noção de conjuntos singulares, considerando em particular, o caso de aplicações de superfícies na esfera. E para finalizar, definimos a noção de grau de uma aplicação. As referências utilizadas são [5], [7], [9], [18], [20], [30], [31] e [32].

1.1 Complexos Regulares e Característica de Euler

A classificação de espaços topológico é um problema clássico da Topologia. Se α é um invariante topológico e X e Y são topologicamente equivalentes, então $\alpha(X) = \alpha(Y)$. Em geral, um invariante topológico diferencia dois espaços não homeomorfos, ou seja, não topologicamente equivalentes.

Nesta seção, vamos introduzir um invariante topológico completo (ver [18]) para diferenciar superfícies compactas: a característica de Euler, tendo como pré-requisito, os simplexes.

As principais referências utilizadas são [7], [18], [20] e [30].

1.1.1 Complexos Regulares

Definição 1.1 1. Uma 0-célula dimensional é um *ponto* A .

2. Uma 1-célula dimensional é um **segmento de reta** $a = AB$, onde A e B são 0-células.
3. Uma 2-célula dimensional é um **polígono** $\sigma = ABC$, geralmente um triângulo, onde AB, AC, BC são 1-células.

Além disso, dados σ uma k -célula e τ uma l -célula, dizemos que $\tau < \sigma$ se τ é uma **face** de σ .

Definição 1.2 Uma n -célula é um conjunto cujo interior é homeomorfo a um disco n -dimensional $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ com a propriedade adicional de que sua fronteira deve ser dividida em um número finito de células com dimensões menores, chamadas faces da n -célula.

Exemplo 1.3 Uma célula 3-dimensional é um **poliedro sólido**, geralmente um tetraedro, com polígonos (face do poliedro), segmentos de reta (arestas do poliedro) e pontos (vértices do poliedro.)

De modo geral, as faces de uma n -célula são as células de dimensão menor: pontos finais de uma 1-célula são as 0-células, a fronteira de uma 2-célula consiste de 1-células e 0-células e as faces de uma n -célula consiste e 0-células, 1-células, ..., $n - 1$ -células.

Definição 1.4 Um n -complexo regular é a união de k -células, com $0 \leq k \leq n$, ou seja, $K = \bigcup_{k=0}^n k$ -células.

Observemos que se $i < j$, então i -complexo $\in j$ -complexo.

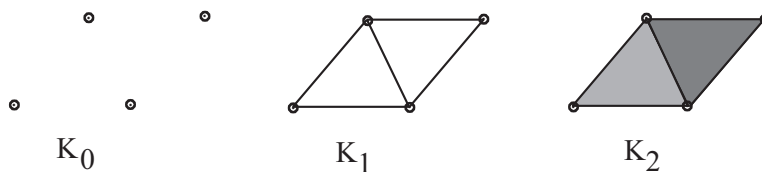


Figura 1.1: Construção de um 2-complexo.

Observação 1.5 O n -complexo regular K e o espaço original X são espaços distintos, pois X é um conjunto de pontos, enquanto K é um conjunto de células.

Definição 1.6 Seja K um n -complexo regular, o **espaço subjacente** X de K , denotado por $|K|$, é o conjunto:

$$X = |K| = \{x : x \in \gamma \in K; \gamma \text{ uma célula em } K\}.$$

Definição 1.7 A *característica de Euler* de um n -complexo regular K , denotada por $\mathcal{X}(K)$, é a soma alternada das células do complexo K , ou seja,

$$\mathcal{X}(K) = \#(0\text{-célula}) - \#(1\text{-célula}) + \#(2\text{-célula}) - \dots (-1)^n \#(n\text{-célula}),$$

onde $\#(r\text{-célula})$ denota o número de r -células do complexo K .

Exemplo 1.8 Para K um 2-complexo, denotando $F = \#\{\text{faces}\}$, $A = \#\{\text{arestas}\}$ e $V = \#\{\text{vértices}\}$, a característica de Euler é dada por:

$$\mathcal{X}(K) = V - A + F.$$

1.1.2 Superfícies

Nesta seção, vamos estudar uma classe importante de complexos: as superfícies.

Definição 1.9 Uma *variedade n -dimensional* é um espaço topológico tal que todo ponto possui uma vizinhança equivalente a um disco aberto n -dimensional, centrado em x e com raio r , $D^n(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r\}$.

Definição 1.10 Uma *superfície* é uma 2-variedade.

Exemplo 1.11 A esfera, o k -toro e o cilindro são exemplos de superfícies.

Definição 1.12 Uma *n -variedade com bordo* é um espaço topológico tal que todo ponto tem uma vizinhança topologicamente equivalente ou a um disco n -dimensional ou a meio disco $D_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r \text{ e } x_n \geq 0\}$.

Definição 1.13 *Pontos do bordo* de uma n -variedade são os pontos cuja vizinhança é meio disco.

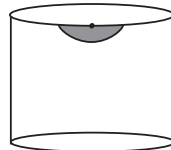


Figura 1.2: Ponto do bordo e sua vizinhança.

Exemplo 1.14 O bordo de um cilindro circular reto finito consiste de dois círculos, enquanto a esfera e o k -toro não possuem bordo, ou seja, são superfícies sem bordo.

Definição 1.15 Um espaço topológico 2-dimensional M é **triangulável** se o seu espaço subjacente K homeomorfo a M possui apenas células triangulares que satisfazem a condição de que dois triângulos são indentificados ao longo de uma aresta ou somente em um vértice ou são disjuntos.

Definição 1.16 Uma triangulação do complexo K é dito **complexo simplicial** ou uma **triangulação em M** . Uma célula de um complexo simplicial é dito **simplex**.

Definição 1.17 Uma **triangulação de uma superfície** (sem bordo) é um simplicial 2-complexo tal que :

1. cada aresta é identificada com exatamente uma outra aresta;
2. um dado vértice pode pertencer a n triângulos, denotados por T_1, \dots, T_n , de modo que nesta sequência, dois a dois triângulos são adjacentes e possuem uma aresta em comum e T_n identifica com T_1 ao longo de uma aresta.

Definição 1.18 Uma superfície é **compacta** se, e somente se, qualquer triangulação possui um número finito de triângulos.

Definição 1.19 Uma superfície é **conexa** se, e somente se, uma triangulação pode ser arranjada na ordem T_1, \dots, T_n , de modo que cada triângulo possui no mínimo uma aresta identificada com aresta de outro triângulo anterior.

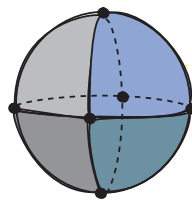


Figura 1.3: Triangulação da 2-esfera.

A figura 1.3 ilustra uma triangulação da 2-esfera. Como podemos ver, cada triângulo possui pelo menos uma aresta em comum com outro triângulo. Além disso, qualquer triangulação de uma esfera é finita. Portanto a esfera é compacta e conexa.

Seja M uma superfície compacta e conexa, como foi demonstrado em [18], se K é um 2-complexo regular, tal que seu espaço subjacente $|K|$ é homeomorfo a M , então K e M possuem a mesma característica de Euler. Este número comum a estes 2-complexos é então chamado de **característica de Euler da superfície** e utilizaremos a mesma notação.

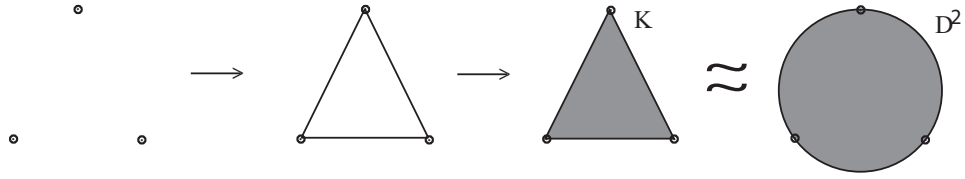


Figura 1.4: Característica de Euler do disco D^2 .

Exemplo 1.20 O disco fechado D^2 possui a mesma característica de Euler que uma região triangular. Com efeito, tome três pontos não colineares no plano. Una-os com arestas e considere uma face na região delimitada por esta figura. Temos então um 2-complexo K cujo o espaço subjacente é uma região triangular do plano, como ilustra a Figura 1.4. Como esta região pode ser deformada continuamente em um disco fechado, segue que $\chi(D^2) = \chi(K)$. Em K , $V = 3$, $A = 3$ e $F = 1$, logo, $\chi(D^2) = 1$.

1.1.3 Característica de Euler de Superfícies

Teorema 1.21 [18] A característica de Euler é um invariante topológico completo para superfícies compactas, orientadas, conexas e sem bordo.

Proposição 1.22 [18] Se M_1 e M_2 são superfícies compactas e conexas, então

$$\chi(M_1 \cup M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - \chi(M_1 \cap M_2).$$

Sejam M_1 e M_2 duas superfícies disjuntas. Em cada uma delas, removendo um pequeno disco, obtemos as superfícies M'_1 e M'_2 com uma nova componente de bordo cada, denotadas por c_1 e c_2 . Colando c_1 e c_2 , como exemplifica a Figura 1.5, formamos uma nova superfície.

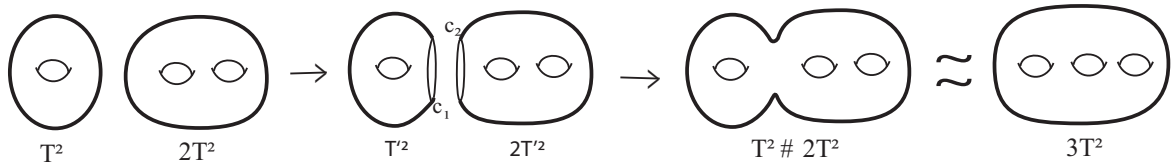


Figura 1.5: Soma conexa do toro com o 2-toro.

Definição 1.23 A **soma conexa** de M_1 e M_2 , denotada por $M_1 \# M_2$ é a nova superfície obtida na descrição acima.

Observação 1.24 Ao efetuarmos a soma conexa de uma superfície qualquer com a esfera, não alteramos (a menos de homeomorfismo) a superfície. Em outras palavras, $M \# S^2 = M$, seja qual for a superfície M .

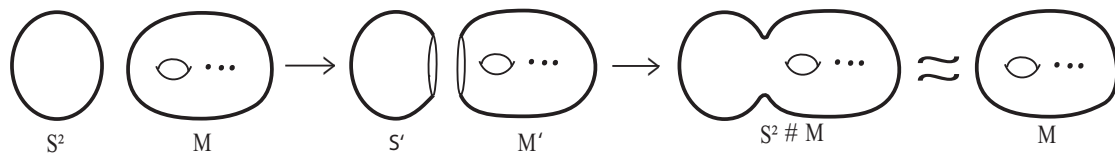


Figura 1.6: Soma conexa de uma superfície com S^2 .

Na Figura 1.6, a superfície M foi obtida pela soma conexa da esfera com a superfície M . Para realizarmos a soma, obtemos S' retirando um disco da esfera e obtemos M' retirando um disco de M . A superfície M obtida é a união de S' e M' , logo pela Proposição 1.22 e pelo Teorema 1.28, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(S' \cup M') &= \mathcal{X}(S') + \mathcal{X}(M') - \mathcal{X}(S' \cap M') \\ &= (2 - 1) + (\mathcal{X}(M) - 1) - 0 = \mathcal{X}(M), \end{aligned}$$

pois $\mathcal{X}(S' \cap M')$ é um círculo e portanto a sua característica é zero. Segue pelo teorema 1.21, que a soma conexa de uma superfície M com a esfera é topologicamente equivalente à M .

Teorema 1.25 [18] *Toda superfície compacta, orientável e sem bordo é homeomorfa à esfera ou a soma conexa de n toros.*

Definição 1.26 *O gênero de uma superfície M , $g(M)$, corresponde ao número de toros presentes nela.*

Teorema 1.27 [18] *Uma superfície compacta, orientável e com bordo é homeomorfa à esfera ou à soma conexa de n toros, com um número finito de discos removido.*

Teorema 1.28 [20] *Seja M uma superfície orientável com k componentes de bordo. A característica de Euler de M é dada por*

$$\mathcal{X}(M) = 2 - 2g(M) - k.$$

Corolário 1.29 *Se M é uma superfície orientável sem bordo, então*

$$\mathcal{X}(M) = 2 - 2g(M).$$

1.2 Grafos

Nesta seção vamos introduzir alguns conceitos da Teoria dos Grafos necessários para este trabalho. As referências são [30] e [18].

Definição 1.30 *Um grafo G é um 1-complexo regular conexo.*

Uma aresta em G conectando dois vértices u e w será denotada pelo par $[u, w]$ ou, simplesmente, por uw . Neste caso, dizemos que os vértices u e w são **adjacentes**. As arestas de um vértice u são aquelas que se conectam a este vértice, isto é, as arestas de G do tipo uw . Quando u possui apenas uma única aresta, u é chamado **vértice extremo**. Neste caso, a aresta de u é dita **aresta extrema**. Um **laço** em G é uma aresta da forma uu .

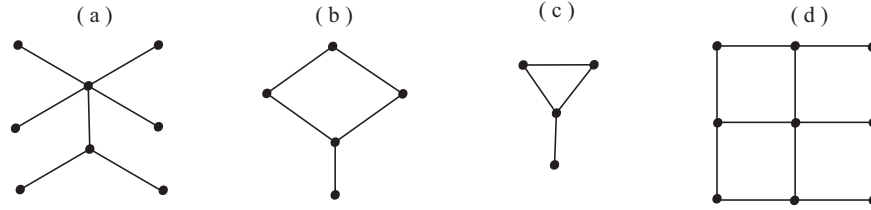


Figura 1.7: Exemplos de grafos.

Exemplo 1.31 *Na Figura 1.7, temos quatro exemplos de grafos. Em (a) não ocorrem ciclos, em (b) e (c) ocorrem um ciclo e em (d) ocorrem quatro ciclos.*

A seguinte definição é dada em [18].

Teorema 1.32 [18] *Seja G um grafo, o número de ciclos em G é dado por:*

$$1 - V + A,$$

onde V e A são, respectivamente, o número de vértices e arestas de G .

Definição 1.33 *Uma **árvore** é um grafo G que não possui ciclos.*

O grafo ilustrado em 1.7 (a) é um árvore.

Os teoremas 1.34 e 1.35 a seguir foram apresentados em [18].

Teorema 1.34 *Dado um grafo G , se G é uma árvore, então $\mathcal{X}(G) = 1$.*

Demonstração: Pela definição 1.30, G é um 1-complexo, logo pela definição 1.7, $\mathcal{X}(G) = V - A$. Por ser árvore, G não possui ciclos. Segue do Teorema 1.32 que $\mathcal{X}(G) = 1$.

□

Teorema 1.35 [18] *A característica de Euler é um invariante topológico para grafos.*

Definição 1.36 *Um grafo é dito **bipartido** se é possível atribuir sinais \pm a cada um de seus vértices de forma que cada aresta conecte vértices de sinais opostos.*

Teorema 1.37 [30] *Um grafo é bipartido se, e somente se, todos os seus ciclos têm tamanho par. Consequentemente, toda árvore é um grafo bipartido.*

Nos exemplos (b) e (d) da Figura 1.7, temos grafos com ciclos de tamanho quatro, ou seja, grafos bipartidos e em (c), o grafo com ciclo de tamanho três, logo não é bipartido.

Definição 1.38 *Dois grafos G_1 e G_2 são ditos **isomorfos** se existe uma bijeção $\rho : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ preservando adjacências; isto é, $uw \in A(G_1)$, se, e somente se, $\rho(u)\rho(w) \in A(G_2)$, onde $V(G_i)$ e $A(G_i)$ são respectivamente os vértices e arestas do grafo G_i , $i = 1, 2$.*

Definição 1.39 *Um **grafo com peso** é um grafo em que a cada um dos seus vértices está associado um número natural.*

Neste trabalho, os grafos que iremos considerar serão apenas grafos com peso. Para simplificar a partir de agora iremos chamá-los apenas de grafos.

1.3 Aplicações Estáveis

Apresentaremos alguns conceitos da Teoria de Singularidades do ponto de vista da Topologia Diferencial, tais como a topologia de Whitney, conceitos de aplicações estáveis e conjuntos singulares.

As principais referências são [9], [31] e [32].

Definição 1.40 *Seja M um espaço topológico não vazio, dizemos que M é uma variedade diferenciável de dimensão n se, e somente se, para qualquer $p \in M$, existem abertos V_p em M contendo p , U_p aberto em R^n e $\psi : V_p \rightarrow U_p$ um difeomorfismo.*

Dadas duas variedades diferenciáveis X e Y , denotamos por:

- i) $\mathcal{C}^r(X, Y) :=$ espaço de todas as aplicações de X em Y de classe \mathcal{C}^r . Se $X = Y$ escreveremos simplesmente $\mathcal{C}^r(X)$.
- ii) $\mathcal{C}^\infty(X, Y) :=$ espaço de todas as aplicações de classe \mathcal{C}^∞ de X em Y . Se $X = Y$ escreveremos simplesmente $\mathcal{C}^\infty(X)$.

Observação 1.41 *Sejam X e Y variedades diferenciáveis e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação diferenciável. Se f tem posto máximo, então:*

- i) f é uma **imersão** se, e somente se, $\dim X \leq \dim Y$.*
- ii) f é uma **submersão** se, e somente se, $\dim X \geq \dim Y$.*
- iii) f é um **mergulho** se, e somente se, f é uma imersão injetiva.*

1.3.1 Jatos

Definição 1.42 *Dadas X e Y duas variedades diferenciáveis e $x \in X$, dizemos que duas aplicações diferenciáveis $f, g : X \rightarrow Y$ com $f(x) = g(x) = y$ têm:*

- (1) **contato de primeira ordem** em x se, e somente se, $(df)_x = (dg)_x$, como aplicações de $T_x X \rightarrow T_y Y$. Notação: $f \sim_x g$.*
- (2) **contato de ordem k** , com $k \geq 1$ em x se, e somente se, $(df) : TX \rightarrow TY$ têm contato de ordem $k - 1$ com (dg) em todo ponto de $T_x X$. Notação: $f \sim_k g$.*

Observação 1.43 *Equivalentemente, sejam U um subconjunto aberto de \mathbb{R}^m e p um ponto de U . Sejam $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ aplicações diferenciáveis, então $f \sim_k g$ em x se, e somente se*

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f_i}{\partial x^\alpha}(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} g_i}{\partial x^\alpha}(x),$$

$\forall \alpha$ multi-índice tal que $|\alpha| \leq k$, onde f_i e g_i são as funções coordenadas de f e g com $1 \leq i \leq n$ e x_1, \dots, x_m as coordenadas de p em U . Isto quer dizer que $f \sim_k g$ se, e somente se, f e g possuem o mesmo desenvolvimento de Taylor de ordem k .

A relação “contato de ordem k ” definida acima é uma relação de equivalência sobre o conjunto $\mathcal{C}_{x,y}^r(X, Y)$ das aplicações r vezes diferenciáveis de X em Y , cuja imagem de x é y . Denotaremos por $J_{x,y}^{k,r}(X, Y) = \mathcal{C}_{x,y}^r / \sim_k$. Quando $r = \infty$, fazemos $J_{x,y}^k(X, Y)$. Sejam $J^{k,r}(X, Y) = \bigcup_{(x,y) \in (X \times Y)} J_{x,y}^{k,r}(X, Y)$ e $J^k(X, Y) = \bigcup_{(x,y) \in (X \times Y)} J_{x,y}^k(X, Y)$.

Definição 1.44 *Os k -jatos são os elementos de $J^k(X, Y)$.*

Definição 1.45 *Seja $\sigma = j^k f(x) \in J^k(X, Y)$ um k -jato, onde f é um representante da classe de equivalência de σ em $J_{x,f(x)}^k(X, Y)$. Chamaremos $x \in X$ de **fonte** de σ e $y = f(x)$ a **meta** de σ . Consequentemente temos a **aplicação fonte** $\alpha : J^k(X, Y) \rightarrow X$ e a **aplicação meta** $\beta : J^k(X, Y) \rightarrow Y$, dadas respectivamente por $\alpha(\sigma) = x$ e $\beta(\sigma) = f(x)$.*

Se denotamos por A_m^k o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a k em m variáveis com coeficientes em \mathbb{R} e que se anulam na origem, teremos o seguinte isomorfismo $A_m^k \approx \mathbb{R}^N$, onde $N = d(m, k) + d(m, k - 1) + \dots + d(m, 1)$ e $d(m, k) = \frac{(m+k-1)!}{(m-1)!k!}$. Consequentemente podemos considerar A_m^k uma variedade \mathcal{C}^∞ . De forma analoga, $B_{m,n}^k = \bigoplus_{i=1}^n A_m^k$ é também uma \mathcal{C}^∞ -variedade, cuja dimensão é $\dim B_{m,n}^k = n \cdot \dim A_m^k = n \cdot N$.

Teorema 1.46 ([9] p.40.) *Sejam X e Y \mathcal{C}^∞ -variedades tais que $\dim X = m$ e $\dim Y = n$. Então $J^k(X, Y)$ é uma \mathcal{C}^∞ -variedade de dimensão $m + n + \dim B_{m,n}^k$ e as aplicações α e β são submersões \mathcal{C}^∞ .*

Sejam X e Y variedades \mathcal{C}^∞ . Denotamos por $X^s = \underbrace{X \times X \times \dots \times X}_{s \text{ vezes}}$ e definimos:

$$X^{(s)} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in X^s; x_i \neq x_j \text{ para } 1 \leq i < j \leq s \right\}$$

Seja $\alpha : J^k(X, Y) \rightarrow X$ a aplicação fonte, definimos a aplicação

$$\begin{aligned} \alpha^s : (J^k(X, Y))^s &\longrightarrow X^s \\ (\sigma_1, \dots, \sigma_s) &\longmapsto \alpha^s(\sigma_1, \dots, \sigma_s) \end{aligned}$$

da seguinte forma $\alpha^s(\sigma_1, \dots, \sigma_s) = (\alpha(\sigma_1), \dots, \alpha(\sigma_s)) = (x_1, \dots, x_s)$.

Definição 1.47 *Seja $J^k(X, Y)$ a variedade dos k -jatos de X em Y , definimos o **espaço de multi-jatos de ordem k em s variáveis**, denotado por ${}_s J^k(X, Y)$, como sendo o seguinte subconjunto de $J^k(X, Y)^s$:*

$${}_s J^k(X, Y) = (\alpha^s)^{-1}(X^{(s)}), \text{ ou seja}$$

$${}_s J^k(X, Y) = \left\{ (\sigma_1, \dots, \sigma_s) \in J^k(X, Y)^s; \alpha(\sigma_i) \neq \alpha(\sigma_j), \text{ para todo } i \neq j \right\}.$$

Observação 1.48 *Como $X^{(s)}$ é aberto em X^s segue que ${}_s J^k(X, Y) = (\alpha^s)^{-1}(X^{(s)})$ é um aberto em $(J^k(X, Y))^s$, e portanto uma subvariedade diferenciável.*

Definição 1.49 *Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação \mathcal{C}^r , o **s -multi k -jato** de f é a aplicação ${}_s j^k f : X^{(s)} \rightarrow {}_s J^k(X, Y)$ dada por:*

$${}_s j^k f(x_1, \dots, x_s) = (j^k f(x_1), \dots, j^k f(x_s)).$$

1.3.2 A Topologia C^∞ de Whitney

Sejam X e Y variedades diferenciáveis. Consideremos k um inteiro não negativo e \mathcal{U} um subconjunto de $J^k(X, Y)$. Denotamos por $\mathcal{M}^k(\mathcal{U})$ o seguinte subconjunto de $C^\infty(X, Y)$:

$$\mathcal{M}^k(\mathcal{U}) = \{f \in C^\infty(X, Y); j^k f(\alpha(\mathcal{U})) \subseteq \mathcal{U}\}.$$

É fácil ver que $\mathcal{M}^k(\mathcal{U}) \cap \mathcal{M}^k(\mathcal{V}) = \mathcal{M}^k(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$.

Lema 1.50 *A família de subconjuntos $\{\mathcal{M}^k(\mathcal{U})\}$, onde U é um aberto de $J^k(X, Y)$, forma uma base para uma topologia em $C^\infty(X, Y)$.*

Definição 1.51 *A topologia induzida no Lema 1.50 é chamada C^k -topologia de Whitney em $C^\infty(X, Y)$, denotada por \mathcal{W}_k .*

Definição 1.52 *A C^∞ -topologia de Whitney em $C^\infty(X, Y)$ é aquela cuja base é dada por $\mathcal{W} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{W}_k$.*

Observação 1.53 *A definição dada acima utiliza a noção de k -jatos e está contextualizada com a seção anterior e com o que veremos a seguir. No entanto, para o nosso caso, podemos também utilizar a definição de C^∞ -topologia de Whitney dada por Hirsch [17].*

Sejam M e N variedades de dimensões m e n , respectivamente. Dado $f \in C^r(M, N)$, consideremos os parâmetros

1. $\Phi = \{(\phi_i, U_i)\}_{i \in \Lambda}$ um atlas localmente finito para M ;
2. $\Psi = \{(\psi_i, V_i)\}_{i \in \Lambda}$ um atlas de N ;
3. $\mathcal{K} = \{(K_i \subset U_i)\}_{i \in \Lambda}$ uma cobertura localmente finita de M por compactos, tais que $f(K_i) \subset V_i$;
4. $\mathcal{E} = \{(\epsilon_i)\}_{i \in \Lambda}$ uma família de números reais.

Consideremos agora o seguinte aberto:

$$\mathcal{U}(f) = \{g \in C^r(M, N); \|D^k(\psi_i f \phi_i^{-1})(x) - D^k(\psi_i g \phi_i^{-1})(x)\| < \epsilon_i(x)\},$$

onde D^k é a aplicação diferencial de até ordem k , $\epsilon_i : M \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ para todo i ,
 $x \mapsto \epsilon_i(x)$

Observação 1.54 Em outras palavras, a representação local de g e suas derivadas até ordem r estão ϵ -próximas da representação local de f e suas derivadas, dentro de cada compacto K_i , que cobrem M .

Definição 1.55 A topologia em $C^r(M, N)$ que tem por base os abertos como descritos acima é chamada **C^r -topologia forte** ou C^r -topologia de Whitney, denotada por $C_s^r(M, N)$.

Definição 1.56 Seja $f, g \in C^\infty(X, Y)$, com X e Y variedades diferenciáveis. Dizemos que f é **\mathcal{A} -equivalente** a g , e denotamos por $f \sim_{\mathcal{A}} g$, se existirem difeomorfismos $\phi : X \rightarrow X$ e $\psi : Y \rightarrow Y$ tais que $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$, ou seja, se o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \phi \downarrow & \searrow & \downarrow \psi \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Definição 1.57 Dizemos que $f \in C^\infty(X, Y)$ é **\mathcal{A} -estável** se existe uma vizinhança W de f , na topologia C^∞ -Whitney, tal que para toda aplicação $g \in W$, vale a relação $f \sim_{\mathcal{A}} g$.

Denotamos por $\mathcal{E}(X, Y) \subset C^\infty(X, Y)$ o conjunto das aplicações \mathcal{A} -estáveis de X em Y .

Para facilitar a notação, vamos considerar aplicações \mathcal{A} -estáveis e \mathcal{A} -equivalentes como aplicações estáveis e equivalentes.

Definição 1.58 Duas aplicações $f, g \in C^\infty(X, Y)$ são **isotopicamente estáveis** se existe uma aplicação de classe C^∞ , $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que

- (i) $F_t : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ é estável para cada $t \in [0, 1]$, sendo $F_t(p) = F(p, t)$;
- (ii) $F_0 = f$ e $F_1 = g$.

Note que duas aplicações isotopicamente estáveis são sempre \mathcal{A} -equivalentes, mas a recíproca não é verdadeira.

1.3.3 Conjunto Singular e Contorno Aparente

Neste trabalho, vamos estudar aplicações estáveis $f : M \rightarrow S^2$, onde M é uma superfície compacta, orientada e sem bordo. Vamos considerar a partir de agora, aplicações como esta, a menos que mencionemos o contrário.

Os teoremas e definições dessa subseção são devidos a Whitney e foram retirados de [9], [31] e [32].

Definição 1.59 Seja $f : M \rightarrow S^2$ uma aplicação estável, onde M é uma superfície compacta, orientada e sem bordo, o **conjunto singular** de f , denotado por Σf , é o conjunto de pontos de M nos quais o posto da diferencial df não é máximo. Um ponto $p \in M \setminus \Sigma f$ é dito **ponto regular** de f e um ponto $y \in S^2$ é dito **valor regular** de f , se $f^{-1}(y)$ contém somente pontos regulares. O **contorno aparente** de f , $f(\Sigma f)$, é a imagem do conjunto singular de f .

Teorema 1.60 Se $f : M \rightarrow S^2$ é uma aplicação estável, onde M é uma superfície compacta, orientada e sem bordo, então o conjunto singular de f , Σf , é uma subvariedade de codimensão 1 em M .

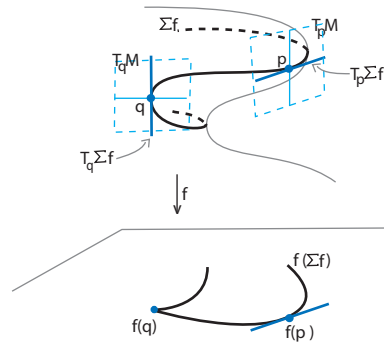


Figura 1.8: Tipos de pontos do conjunto singular.

Seja $p \in \Sigma f$ um ponto singular de uma aplicação estável $f : M \rightarrow S^2$, então uma das seguintes situações ocorre, como ilustra a Figura 1.8:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad T_p \Sigma f \oplus \ker(df)_p = T_p M \\ (b) \quad T_p \Sigma f = \ker(df)_p \end{array} \right. ,$$

onde $T_p \Sigma f$ é a reta tangente a Σf no ponto p e $\ker(df)_p$ é o núcleo da aplicação diferencial de f no ponto p .

Se p é um ponto singular satisfazendo (a), então p é chamado **ponto de dobra**. Caso contrário, se (b) ocorre, dizemos que p é um **ponto de cúspide**.

Na Figura 1.8, p é ponto de dobra e q ponto de cúspide. Observe que $T_p \Sigma f$ é levado por df_p na reta tangente a $f(q)$, enquanto que $T_q \Sigma f$ é levado sobre $f(q)$ por df_q .

Segundo Whitney, se $f : M \rightarrow S^2$ é uma aplicação estável, então para cada ponto $x \in M$, existem coordenadas locais (x_1, x_2) centradas em x e (y_1, y_2) , centradas em $f(x)$, tais que f é dada por uma das seguintes formas locais:

1. $(x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2) = (x_1, x_2)$ x é ponto regular;

2. $(x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2) = (x_1^2, x_2)$ x é ponto de dobra;
3. $(x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2) = (x_1x_2 - x_1^3, x_2)$ x é ponto de cúspide.

Neste caso Σf é dividido em $\Sigma f = D_f \cup C_f$, onde

$$D_f = \{p \in \Sigma f; p \text{ é ponto de dobra}\} \text{ e } C_f = \{p \in \Sigma f; p \text{ é ponto de cúspide}\},$$

sendo que os pontos de cúspides são isolados em M .

Definição 1.61 *Uma aplicação estável entre superfícies é também conhecida como **aplicação plana de Whitney** ou **aplicação excelente**.*

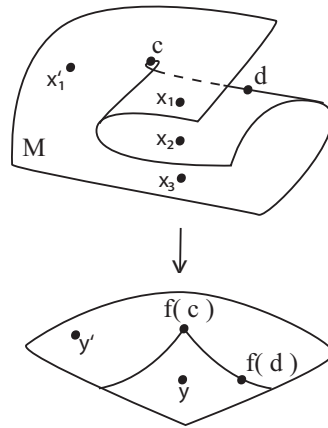


Figura 1.9: Pontos de dobra e de cúspide.

Como vemos na Figura 1.9, d é um ponto de dobra e a cúspide c é o ponto de encontro de duas curvas singulares. Notemos que uma curva singular separa regiões de M cuja orientação é invertida e preservada por f , e ainda, notemos que o ponto y possui três pré-imagens: x_1, x_2 e x_3 , enquanto o ponto y' possui apenas uma pré-imagem: x_1' .

Observação 1.62 *Observemos na Figura 1.9, que se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação estável, onde M e N são superfícies orientadas, então as curvas do conjunto singular Σf separam as regiões de M cuja orientação é invertida e preservada por f .*

Definição 1.63 *Seja $f : M \rightarrow S^2$ uma aplicação estável, a **orientação das curvas** do contorno aparente de f é dada da seguinte maneira: ao percorrer a curva de acordo com a sua orientação, o número de pré-imagens de f é sempre maior do lado esquerdo.*

Observação 1.64 *Observemos na Figura 1.9, que se dois pontos na imagem de uma aplicação estável estão separados por uma curva do contorno aparente, então a diferença do números de suas respectivas pré-imagens é dois. Neste exemplo, a região para a qual a cúspide aponta possui apenas uma pré-imagem, enquanto a outra região possui três pré-imagens.*

Observação 1.65 *Seja $f : M \rightarrow S^2$ uma aplicação estável, onde M é uma superfície orientada, compacta e sem bordo, cujo contorno aparente é formado por uma curva conexa contendo quatro cúspides e nenhuma auto-interseção. Pela estrutura das cúspides, a região para a qual ela aponta possui menor número de pré-imagens. E daí o contorno aparente como na Figura 1.10 (i) não ocorre. Logo, o contorno aparente de f deve ser como na Figura 1.10 (ii).*



Figura 1.10: Contradizendo duas cúspides.

De fato, na Figura 1.10 (i), supondo que a região a possui k pré-imagens, seguindo a seta, chegamos à região b , que possui $k + 2$ pré-imagens. Passando pela outra seta, novamente o número de pré-imagens é acrescentado por 2. Agora, podemos retornar à região a , sem passar por nenhuma curva, logo concluímos que a região a possui $k + 4$ pré-imagens. Absurdo! Por outro lado, em (ii), o número de pré-imagens é somado e subtraído por 2. Logo, o contorno aparente pode ser desse tipo. A região apontada pela seta possui mais duas pré-imagens que a região na qual seta começa.

Lema 1.66 *Se $f : M \rightarrow S^2$ é uma aplicação estável, onde M é uma superfície fechada e orientada, então as curvas que compõe o conjunto singular Σf são fechadas, simples e disjuntas.*

Demonstração: Seja $f : M \rightarrow S^2$ uma aplicação estável, se existe uma curva α_i do conjunto singular de f aberta, ou seja, que termina em um dado ponto, então os dois lados de $f(\alpha_i)$ possuem o mesmo número de pré-imagens, contradição! Se existe uma curva α_i do conjunto singular de f com auto-interseção, obtemos uma contradição quando analisamos as regiões cuja orientação é preservada e invertida por f , localmente no ponto

de auto-interseção. Análogo para o caso de curvas com ponto em comum. Portanto, o conjunto singular de f deve possuir somente curvas fechadas, simples e disjuntas. \square

Observação 1.67 *Seja $f : M \rightarrow S^2$ uma aplicação estável, onde M é uma superfície fechada e orientada. As componentes do complemento do conjunto singular de f são levadas por f com orientações opostas, logo Σf separa $M \setminus \Sigma f$ em componentes disjuntas.*

As curvas singulares de f separam M em regiões conexas, que são as componentes do complemento $M \setminus \Sigma f$. Isto se deve ao fato de Σf ser composta por um conjunto de curvas fechadas em M , de acordo com o Lema 1.66.

Segundo Whitney, o conjunto singular de uma aplicação estável é composto por pontos de dobra e cúspides e além disso, os pontos de cúspides são isolados. Segue, então, do Lema 1.66, que:

Proposição 1.68 *Seja $f : M \rightarrow S^2$ uma aplicação estável, onde M é uma superfície fechada e orientada. O contorno aparente de f , $f(\Sigma f)$, é uma coleção de curvas fechadas na 2-esfera, cujas singularidades são pontos duplos transversais, ou seja, sem tangências e pontos de cúspides isolados.*

Se $f : M \rightarrow S^2$ é uma aplicação estável, onde M é uma superfície orientada, então podemos atribuir, de maneira natural, sinais \pm a cada uma das componentes do complemento $M \setminus \Sigma f$.

Definição 1.69 *Seja $f : M \rightarrow S^2$ uma aplicação estável, onde M é uma superfície orientada, uma região conexa $R \in M \setminus \Sigma f$ é dita **positiva** se f preserva a sua orientação, caso contrário, R é dita **negativa**.*

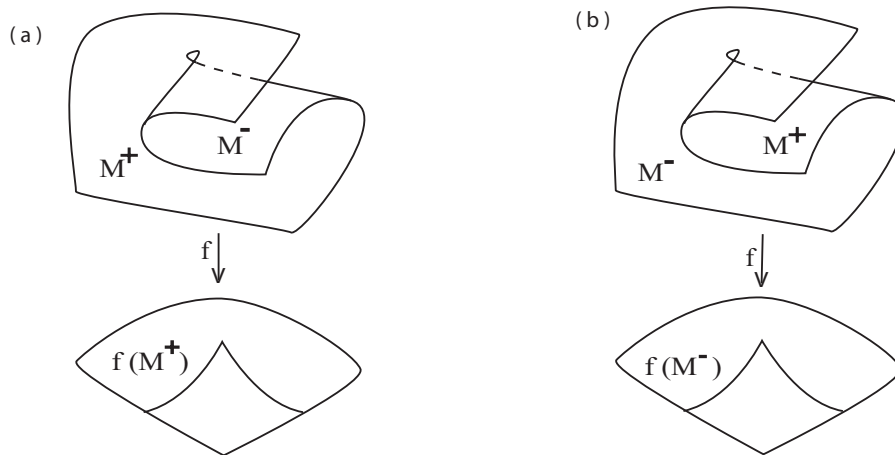


Figura 1.11: Sinal das Regiões

Definição 1.70 O fecho de cada componente conexa de $M \setminus \Sigma f$ cuja orientação é preservada por f é denotado por M_i^+ , enquanto o fecho de cada componente conexa de $M \setminus \Sigma f$ cuja orientação é invertida por f é denotado por M_j^- .

Para facilitar a notação, vamos considerar $M^+ = \bigcup_i M_i^+$ e $M^- = \bigcup_j M_j^-$. Segue daí que M^+ e M^- são superfícies compactas e com bordo, e além disso,

$$M = M^+ \cup M^- \quad \Sigma f = M^+ \cap M^-.$$

Podemos definir o sinal de qualquer cúspide de f , levando em consideração a orientação da região para a qual ela aponta, como mostra a Figura 1.12.

Definição 1.71 O sinal da cúspide C de uma aplicação estável $f : M \rightarrow S^2$ é $s(C) = +1$, se C aponta para a região positiva de f ou $s(C) = -1$, se C aponta para a região negativa de f .

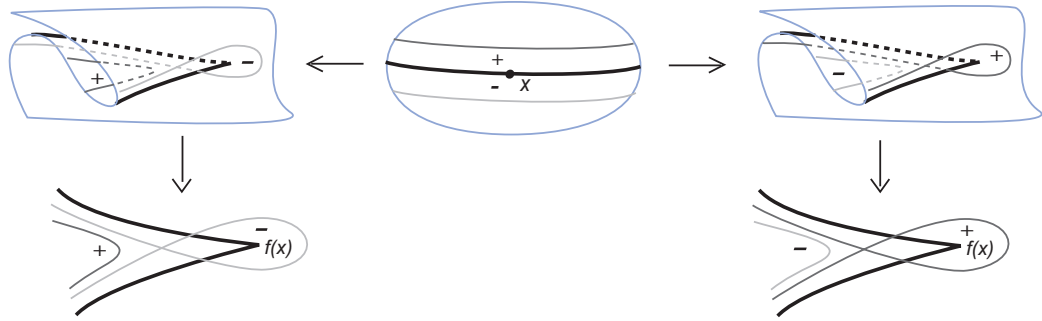


Figura 1.12: Sinal de Cúspide.

Observação 1.72 Seja $f : M \rightarrow S^2$ uma aplicação estável, como na Observação 1.65. A vizinhança do conjunto singular $V_{\Sigma f}$ é aplicada por f em uma vizinhança do seu contorno aparente γ . Como o contorno aparente que contém as quatro cúspides, é conexo, como ilustra a Figura 1.10(ii), o comportamento de f ao redor dessa vizinhança é dado pela Figura 1.13, onde $+$ representa a região cuja orientação é preservada por f e $-$ representa a região cuja orientação é invertida por f .

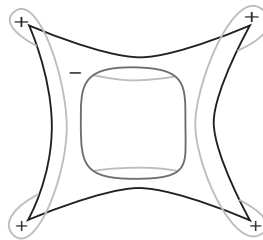


Figura 1.13: Vizinhança das quatro cúspides.

Logo as quatro cúspides ilustradas nesta figura 1.13, têm sinal +1.

1.4 Grau de Aplicações

1.4.1 Curvas no Plano

Definição 1.73 Seja $h : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma imersão do círculo no plano. O **grau de h** , denotado por $\tau(h)$, também conhecido como o índice de Whitney, é o número total de voltas (sentido anti-horário menos sentido horário) que os vetores unitários tangentes a h percorrem S^1 .

Exemplo 1.74 A Figura 1.14 ilustra quatro imersões do círculo no plano: h_1, h_2, h_3 e h_4 . O grau de cada uma delas é $\tau(h_1) = 1$, $\tau(h_2) = -2$, $\tau(h_3) = 3$ e $\tau(h_4) = -3$.

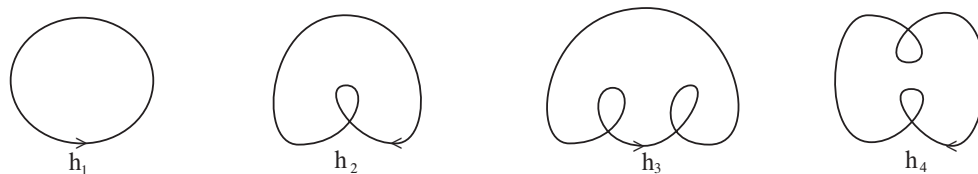


Figura 1.14: Algumas imersões do círculo no Plano.

Definição 1.75 Se h é uma união de círculos finitos S^1_i , então $\tau(h)$ é a soma do número de voltas da aplicação, restrita a cada um dos círculos $h|_{S^1_i}$.

Definição 1.76 A projeção estereográfica da esfera m -dimensional menos um ponto $p \in S^m$ é a aplicação Ψ que leva cada ponto $x = (x_1, \dots, x_m) \in S^m \setminus \{p\}$ no ponto $\Psi(x) = y = (y_1, \dots, y_m, 0) \in \mathbb{R}^m$, tal que $y = p\vec{x} \cap \mathbb{R}^m$, onde $p\vec{x}$ é a semi-reta que começa em p , passa em x e intersecta \mathbb{R}^m .

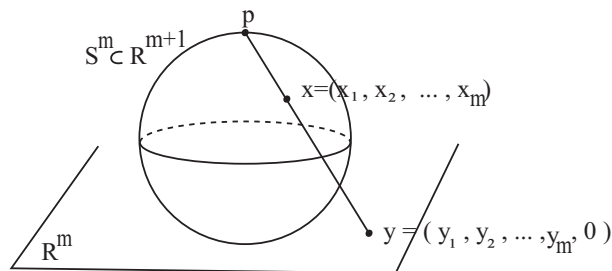


Figura 1.15: Projeção estereográfica..

Exemplo 1.77 Se $m = 2$ e $p = (0, 0, 1)$, então a projeção estereográfica é dada por

$$\Psi : S^2 \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x = (x_1, \dots, x_m) \mapsto \Psi(x) = \frac{1}{1 - x_{m+1}}(x_1, \dots, x_m).$$

Teorema 1.78 [5] Sejam $S^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1}; \|x\| = 1\}$, a esfera unitária m -dimensional e $p = (0, \dots, 0, 1) \in S^m$ seu pólo norte. A projeção estereográfica $\phi : S^m \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um homeomorfismo entre a esfera menos o pólo norte e o espaço euclidiano \mathbb{R}^m .

Corolário 1.79 Seja $P = (0, 0, 1)$ um ponto da esfera, a projeção estereográfica $\phi : S^2 \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um homeomorfismo.

Observação 1.80 A projeção estereográfica $\phi : S^m \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^m$ da m -esfera no plano depende da escolha do ponto p .

Exemplo 1.81 A Figura 1.16 ilustra duas projeções estereográficas de uma imersão h , de um círculo na esfera, nas quais o ponto p encontra-se em regiões distintas limitadas por h . Em (a), o grau da projeção de h no plano é zero, e em (b), o grau da projeção de h no plano é dois.

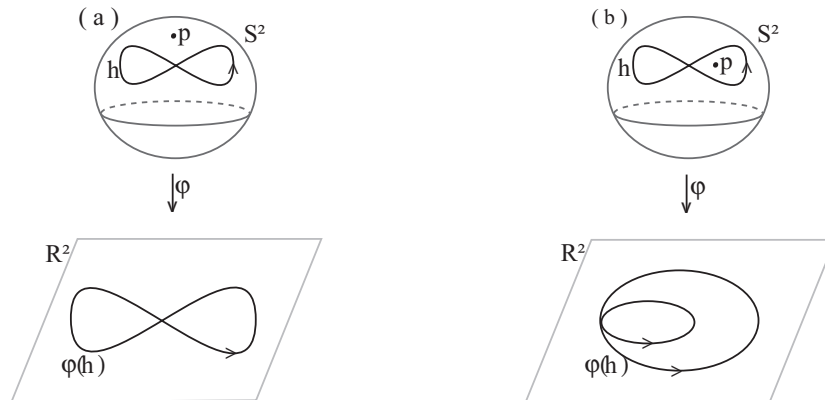


Figura 1.16: Projeções estereográficas distintas de uma mesma curva em S^2 .

1.4.2 Superfícies Fechadas na Esfera

Nesta seção, vamos obter o grau de uma aplicação examinando a imagem inversa de um valor regular de uma aplicação própria $f : M \rightarrow N$, de classe C^1 , onde M e N são superfícies orientadas de mesma dimensão. Os resultados e definições abaixo podem ser encontrados em [5].

Definição 1.82 Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é **própria** se a imagem inversa de um compacto é um compacto.

Proposição 1.83 As aplicações $f : M \rightarrow S^2$ contínuas, onde M é compacto, são próprias.

Demonstração: De fato, dado $K \subset S^2$ compacto, K é fechado, pois S^2 é Hausdorff. Por outro lado, f é contínua, logo $f^{-1}(K)$ é fechado em M , e como M é compacto, segue que $f^{-1}(K)$ é compacto. \square

Sejam M, N superfícies orientadas, sem bordo, de mesma dimensão m , e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação própria de classe C^1 . De acordo com [5], para todo valor regular $y \in N$, de f , $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$ é finito.

Definição 1.84 Dizemos que um ponto $x_k \in f^{-1}(y)$ é **positivo** se $x_k \in M_i^+$ ou **negativo** se $x_k \in M_j^-$, onde M^\pm estão definidos em 1.70.

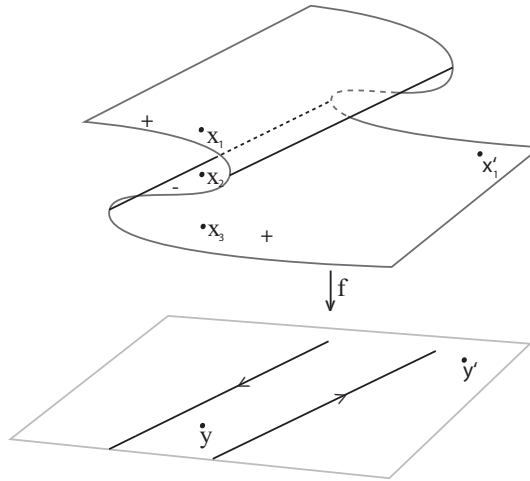


Figura 1.17: Grau de uma aplicação no ponto p .

Definição 1.85 Sejam M, N superfícies orientadas, sem bordo e de mesma dimensão m , e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação própria de classe C^1 . O **grau de f no ponto y** , indicado por $\deg_y f$ é a diferença entre o número de pontos positivos e o número de pontos negativos em $f^{-1}(y)$.

Exemplo 1.86 A Figura 1.17 ilustra localmente uma aplicação f . Temos que $f^{-1}(y) = x_1, x_2$ e x_3 , sendo que x_1 e x_3 pertencem a regiões cuja orientação é preservada por f , logo são positivos e x_2 pertence a uma região cuja orientação é invertida por f , logo é negativo. Segue que $\deg_y = 1$. Analogamente, como $f^{-1}(y') = x'_1$, que pertence

a uma região cuja orientação é preservada por f , segue que $\deg_y f = 1$. Observe que ao atravessar a imagem de um conjunto singular de uma aplicação estável, o número de pré-imagem sempre aumenta ou diminui por dois pontos, que são levados por f com orientações opostas.

Teorema 1.87 [5] *Seja M uma superfície compacta, m -dimensional, orientada e sem bordo. A toda aplicação $f : M \rightarrow S^m$, de classe C^2 , corresponde um inteiro r , tal que para todo valor regular y de f , tem-se que $\deg_y f = r$.*

Definição 1.88 *O número $r = \deg_y f$ do Teorema 1.87 é o grau da aplicação f , ou simplesmente, $\deg f$.*

Proposição 1.89 [5]

1. Se $f, g : M \rightarrow S^m$ são homotópicas em classe C^2 , então $\deg f = \deg g$;
2. Se $f : M \rightarrow S^m$ não é sobrejetiva, então $\deg f = 0$.
3. Se $f : S^m \rightarrow S^m$ é a aplicação identidade, então $\deg f = 1$.

Corolário 1.90 *Se o conjunto singular Σf de uma aplicação $f : S^2 \rightarrow S^2$ é vazio, então $\deg f = 1$.*

Demonstração: Se $\Sigma f = \emptyset$, então f é homotópica a $Id : S^2 \rightarrow S^2$, que pela Proposição 1.89 3, possui grau um. Então por 1, segue que $\deg f = \deg Id = 1$. □

Observação 1.91 *Desse corolário, temos que se $f : S^2 \rightarrow S^2$ é tal que $\deg f > 1$, então o conjunto singular $\Sigma f \neq \emptyset$.*

Capítulo 2

Invariantes de Aplicações Estáveis de Superfícies na 2-esfera

Neste capítulo, apresentaremos grafos com pesos nos vértices como um invariante global de aplicações estáveis, que serve para auxiliar outros invariantes já conhecidos na classificação dessas aplicações. Tomamos como principais referências os trabalhos de Aicardi e Ohmoto [26] e Hacon, Mendes de Jesus e Romero-Fuster [11], [13], [14].

2.1 Invariantes Locais de Aplicações Estáveis

Em [26], Ohmoto e Aicardi estudaram alguns invariantes, do ponto de vista local, relacionados com o contorno aparente de aplicações estáveis de superfícies no plano. Dentre estes invariantes, estão I_C e I_D , que correspondem ao número de cúspides e ao número de pontos duplos, respectivamente. Em [11], seguindo a mesma linha de trabalho, Hacon, Mendes de Jesus e Romero-Fuster apresentaram outro invariante, I_E , que corresponde ao número de componentes conexas do contorno aparente de uma aplicação estável de superfície no plano. De acordo com [14], podemos analisar esses invariantes para aplicações estáveis de superfícies na 2-esfera, pois esta é localmente um plano.

Durante uma homotopia entre duas aplicações estáveis, pode-se passar por uma aplicação não estável. Na Figura 2.1, encontram-se alguns tipos de transições (convenientes ao nosso estudo) que o contorno aparente de uma aplicação pode sofrer durante uma homotopia, de modo que possamos analisar o efeito das mesmas sobre as cúspides e as componentes conexas.

Em cada linha, representamos localmente, o contorno aparente de três aplicações em $C^\infty(M, R^2)$ durante uma homotopia. As aplicações da direita e da esquerda são estáveis, enquanto a aplicação do meio não é estável, ou seja, pertence ao conjunto

$C^\infty(M, R^2) \setminus \mathcal{E}(M, R^2)$. As setas nos arcos indicam o sentido em que o número de pré-imagens aumenta (por dois). O índice i em T^i e C^i é determinado pela metade do número de pré-imagem (zero, dois ou quatro) dentro da nova região criada após a tangência, em relação aos arcos de cúspides que se tangenciam.

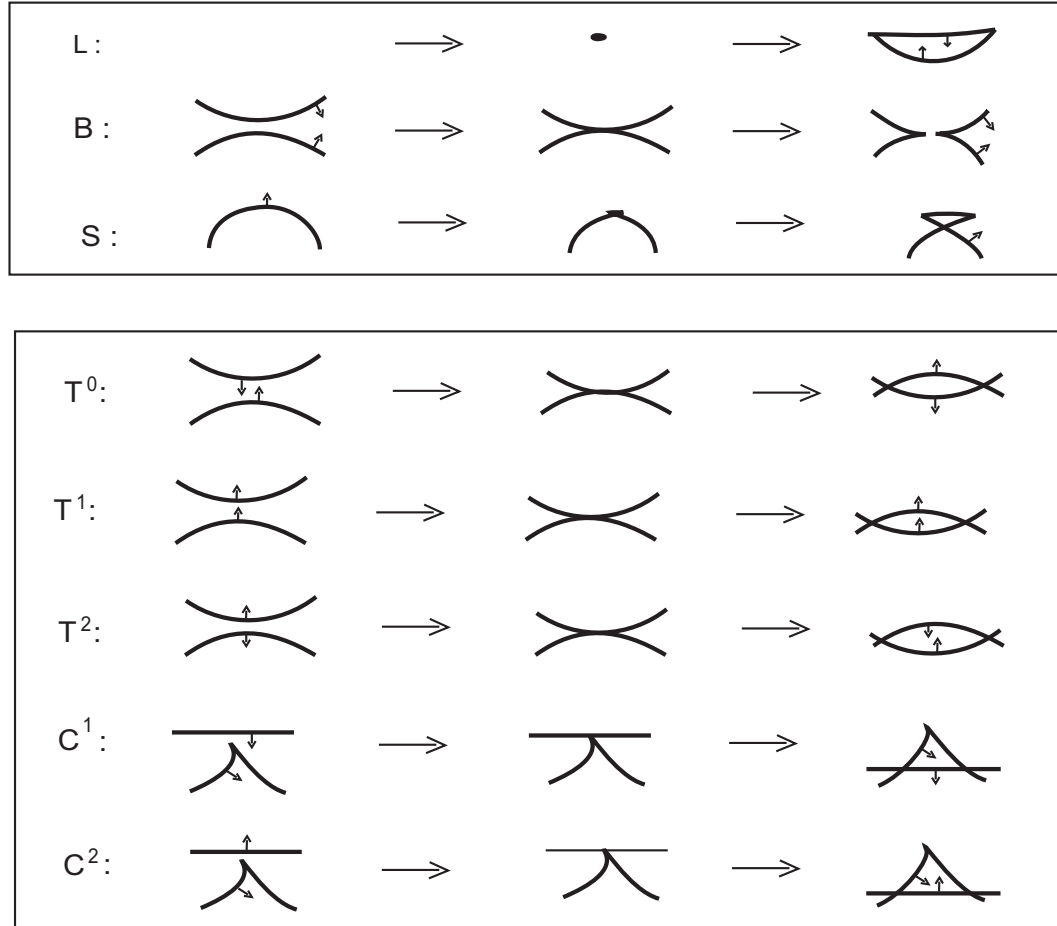


Figura 2.1: Alguns tipos de transições.

Estas transições são classificadas de acordo com o que elas alteram no contorno aparente de uma aplicação. As transições que alteram o número de cúspides, são denominadas de: **lábios** (L), **bicos** (B) e **rabo de andorinha** (S); as transições que alteram o número de pontos duplos são denominadas de: **tangência de dobras** (T^0, T^1 e T^2), **dobra com cúspides** (C^1 e C^2), e **rabo de andorinha** (S); enquanto que as transições que alteram o número de componentes do conjunto singular são denominadas de: **bicos** (B) ou **lábios** (L).

Podemos entender os índices de pontos de cúspides, pontos de dobra e de componentes conexas I_C, I_D e I_E , observando que as transições L, B e S alteram o número de cúspides

por ± 2 , de acordo com a orientação, as transições T^i e C^i alteram o número de pontos duplos por ± 2 , e S altera por ± 1 , de acordo com a orientação. O **ponto triplo** é um outro tipo de transição, mas não iremos considerá-lo.

Teorema 2.1 *A variação do número de cúspides e do número de pontos duplos durante uma homotopia entre as aplicações f_0 e f_1 , são dadas por:*

$$1. \Delta I_C = I_C(f_1) - I_C(f_0) = 2(\Delta L + \Delta B + \Delta S)$$

$$2. \Delta I_D = I_D(f_1) - I_D(f_0) = 2(\Delta T + \Delta C) + \Delta S,$$

onde $\Delta L, \Delta B, \Delta S, \Delta T$ e ΔC denotam, respectivamente, o número de transições do tipo lábios, bicos, rabo de andorinha, tangência de dobra e dobra com cúspide, com orientação positiva, sofridas durante a homotopia.

Definição 2.2 B_+ é a transição do tipo bicos, no sentido positivo, que acrescenta o número de cúspides por dois e, ao mesmo tempo, acrescenta o número de componentes do conjunto singular por um. Analogamente, B_- é a transição do tipo bicos, no sentido negativo, que acrescenta o número de cúspides por dois e, ao mesmo tempo, diminui por um o número de componentes singulares.

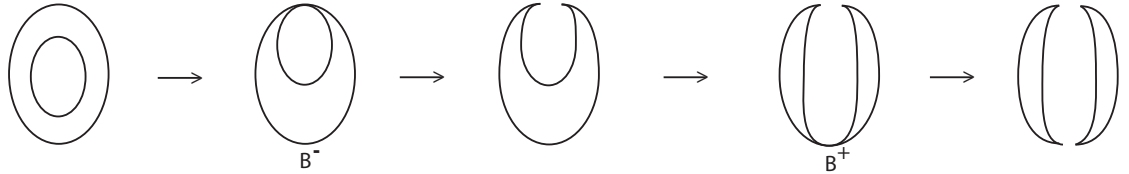


Figura 2.2: Transições do tipo bicos.

Teorema 2.3 $\Delta I_E = \Delta B_+ - \Delta B_- + \Delta L$, onde B_+, B_- e L são transições sofridas ao longo de uma homotopia entre f_0 e f_1 .

Observação 2.4 *Analisando o contorno aparente das aplicações, podemos calcular os invariantes I_C, I_D e I_E .*

Exemplo 2.5 *A Figura 2.3 ilustra a construção de uma aplicação estável $g : T^2 \rightarrow S^2$, onde T^2 é o toro, cujo contorno aparente $g(\Sigma g)$ possui uma componente, duas cúspides e duas auto-interseções. A aplicação g é obtida a partir da aplicação projeção do toro na esfera, cujo contorno aparente possui duas curvas simples, passando pelas transições do tipo rabo de andorinha e bicos. As variações dos índices $\Delta I_C, \Delta I_D$ e ΔI_E são, respectivamente, 2, 2 e -1 .*

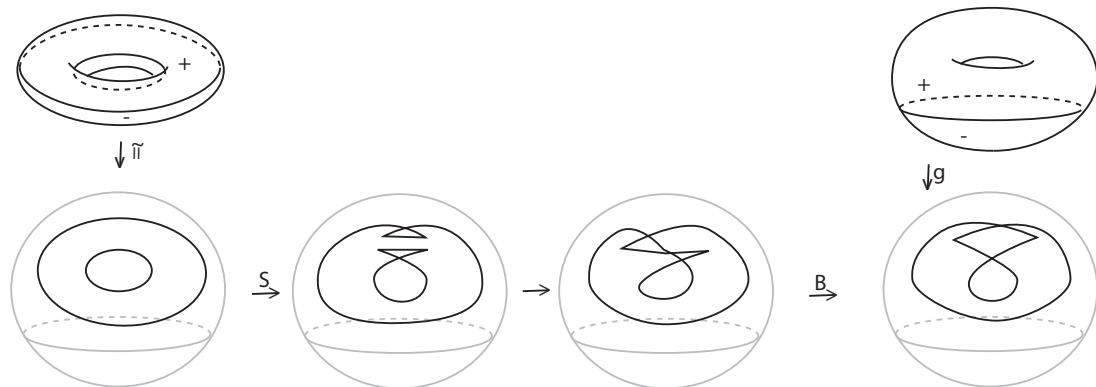


Figura 2.3: Transições entre diferentes aplicações do toro.

Quando o contorno aparente de duas aplicações são iguais, esses três invariantes não são suficientes para dizer se elas são ou não \mathcal{A} -equivalentes.

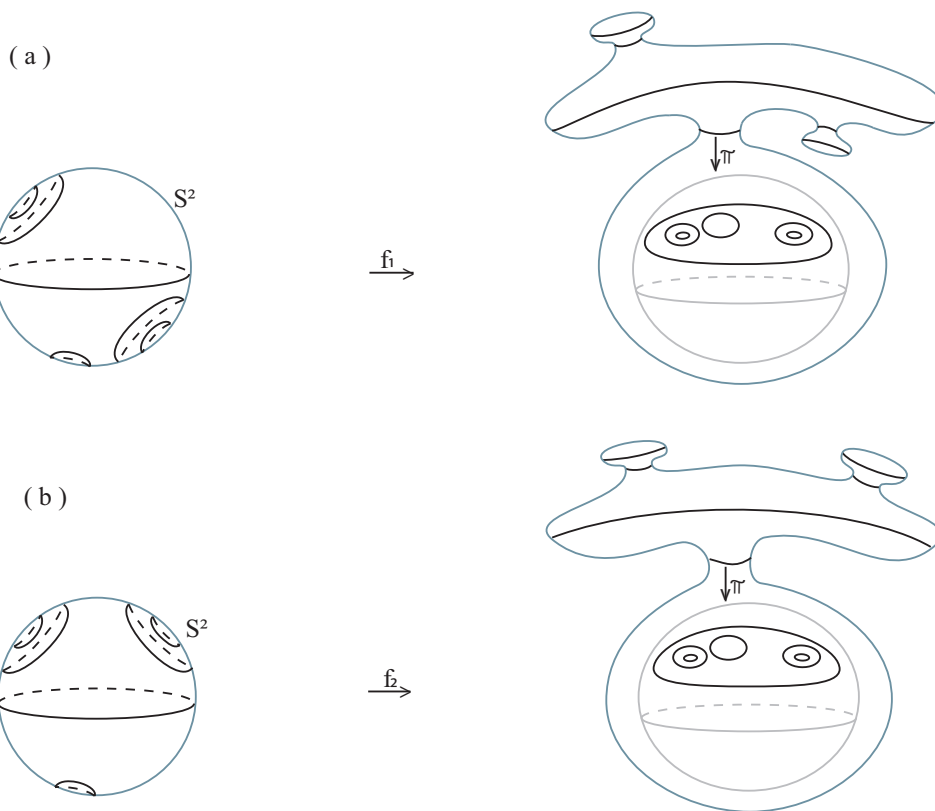


Figura 2.4: Diferentes aplicações com mesmo contorno aparente.

A Figura 2.4 ilustra duas aplicações estáveis distintas da esfera na esfera, com grau um, construídas pela composição $\pi \circ f_i$, onde f_i é um mergulho com deformação da esfera no \mathbb{R}^3 e π é a projeção da imagem de f_i na esfera. Ambas as aplicações possuem o mesmo

contorno aparente, o qual contém seis componentes conexas disjuntas e simples.

Uma maneira de diferenciar as aplicações da Figura 2.4, é pela disposição de suas curvas singulares na esfera do domínio. Vamos então, buscar um invariante que dependa da disposição das curvas do conjunto singular, Σf na superfície M do domínio da aplicação f .

2.2 Invariante Global de Aplicações Estáveis

Nesta seção vamos estudar os grafos como invariantes globais de aplicações estáveis e estabelecer condições para que um dado grafo seja associado a uma aplicação estável de uma superfície fechada e orientada na esfera. Para isto, vamos estudar as cirurgias horizontal e vertical e seus efeitos nos grafos.

2.2.1 Grafo Dual de Aplicações Estáveis

Sejam $f : M \rightarrow S^2$ uma aplicação estável, onde M é uma superfície fechada e orientada e Σf é o conjunto singular de f . Associamos um grafo G , com pesos (inteiros positivos) nos vértices à aplicação f do seguinte modo:

1. Cada vértice v_i corresponde a uma componente conexa do complemento $M \setminus \Sigma f$ e cada aresta a_i corresponde a uma curva α_i de Σf ;
2. Um vértice v_i e uma aresta a_i são **incidentes** se, e somente se, a curva representada por a_i encontra-se no bordo da região representada por v_i .
3. O peso do vértice v_i corresponde ao gênero g_i da região correspondente M_i .

Definição 2.6 *O grafo obtido acima, associado à uma aplicação estável $f : M \rightarrow S^2$ é dito **grafo dual** de Σf em M , denotado por G_f .*

Notação: Denotemos por $deg(f)$, o grau da aplicação f , V o número total de vértices, A o número total de arestas, W a soma dos pesos dos vértices.

Exemplo 2.7 *A Figura 2.5 ilustra os grafos de três aplicações diferentes do toro na esfera, onde uma delas possui duas curvas singulares que decompõe o toro em dois cilindros, cujo grafo tem duas arestas, dois vértices e um ciclo. As outras duas aplicações, tem uma única componente no conjunto singular, que separa um disco do toro menos um disco, as quais correspondem ao grafo com única aresta e peso um.*

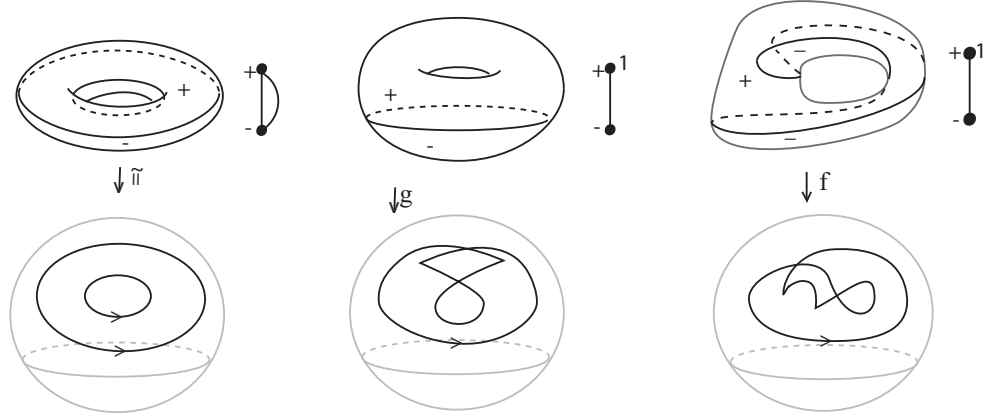


Figura 2.5: Três aplicações diferentes do toro com grau zero.

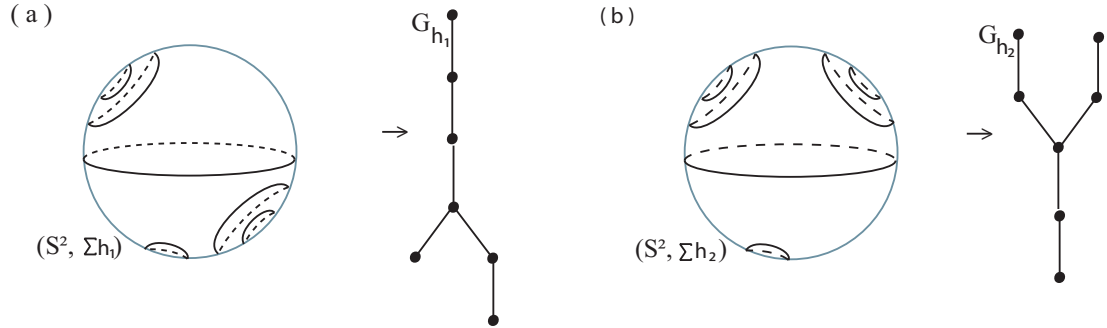


Figura 2.6: Grafos associados às aplicações da figura 2.4.

Como vemos na Figura 2.6, os grafos podem diferenciar aplicações não \mathcal{A} -equivalentes que possuem o mesmo contorno aparente.

Observação 2.8 *O grafo é um invariante por \mathcal{A} -equivalência. Em outras palavras, se duas aplicações são associadas a grafos distintos, então elas não são \mathcal{A} -equivalentes.*

Observação 2.9 *O grafo associado à aplicação estável $f : M \rightarrow S^2$, onde M é uma superfície orientada, é sempre bipartido. De fato, segue pela Definição 1.69, que as componentes de Σf separam as regiões de M com sinais opostos e com isso, as arestas dos grafos sempre separam vértices de sinais opostos.*

Podemos estender a associação de grafos para qualquer superfície com curvas. Neste caso, sendo M uma superfície fechada e orientada e \mathcal{C} um conjunto finito de curvas em M , associamos as arestas do grafo pelas componentes de \mathcal{C} e os vértices pelas componentes conexas de $M \setminus \mathcal{C}$. Vale a mesma relação de adjacência da construção do grafo associado ao par $(M, \Sigma f)$.

Proposição 2.10 *Todo grafo G com peso nos vértices está associado a uma superfície M com um conjunto de curvas fechadas, simples e disjuntas. O gênero de M é $g(M) = 1 - V + A + W$.*

A Figura 2.7 descreve essa proposição, como um exemplo. Dado um grafo G :

1. Considere-o mergulhado no R^3 , como em (a).
2. Retirando os pesos dos vértices de G , como em (b), obtemos G' .
3. Consideramos M_0 o bordo de uma vizinhança tubular (conveniente) de G' , como ilustrado em (c).
4. Criamos uma curva sobre M_0 , transversa à cada uma de suas arestas (ver (d)), de onde obtemos o par (M_0, \mathcal{C}) , associado ao grafo G' , como mostrado em (e). Notemos que cada vértice de G' , está associado a uma região do complemento $M_0 \setminus \mathcal{C}$ e além disso, o gênero $g(M_0)$ corresponde ao número de ciclos de G' .
5. Para obtermos a superfície M , associada ao grafo G , devemos fazer a soma conexa na região correspondente ao vértice de peso dois, com o bitoro, como mostrado em (f) e (g). Assim, o par (M, \mathcal{C}) está associado ao grafo G . Como vemos, o gênero da nova superfície corresponde ao gênero de M_0 adicionado ao número de pesos dos vértices de G . Pelo Teorema 1.32, o número de ciclos de G' é dado por $1 - V + A$, então $g(M) = 1 - V + A + W$.

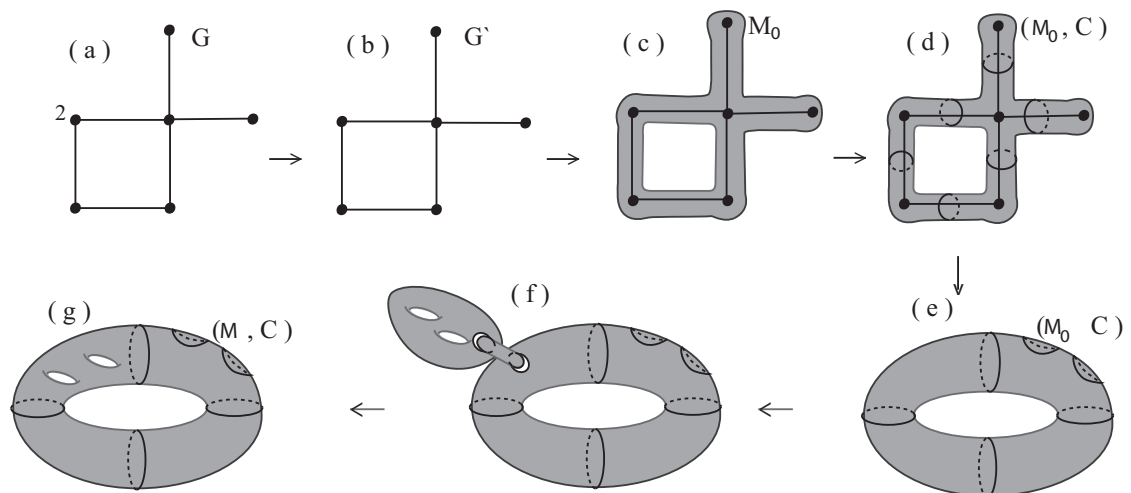


Figura 2.7: O 3-toro obtido através de um grafo.

Corolário 2.11 *Um grafo G está associado a uma esfera com curvas se, e somente se, G é uma árvore com todos os pesos iguais a zero.*

Demonstração: (\Rightarrow) Seja G um grafo associado a uma esfera. Claramente, $W = 0$, pois a esfera não possui gênero e portanto, nenhuma região da esfera pode ter. Pelo Teorema 1.32, o número de ciclos de G é dado por $1 - V + A$. Por outro lado, como $g(S^2) = 0$, então $0 = 1 - V + A + W$. Segue daí que G é uma árvore, pois não possui ciclos.
 (\Leftarrow) Seja G uma árvore com todos os pesos iguais a zero, ou seja, $W = 0$ e pelo Teorema 1.32, $1 = V - A$.
 Segue da Proposição 2.10 que $G(M) = 0$, ou seja, M é uma esfera. □

Uma vez que qualquer grafo está associado a uma superfície com curvas, podemos fazer a seguinte pergunta:

“Qualquer grafo pode estar associado a uma aplicação estável de uma superfície fechada e orientada na esfera?”

Da Observação 2.9, vimos que todo grafo associado a uma aplicação estável é bipartido. Vamos então, estabelecer condições para que um grafo seja associado a uma aplicação estável.

2.2.2 Realização de Grafos com Dois Vértices

Proposição 2.12 *Qualquer grafo bipartido com dois vértices, peso zero e k arestas podem ser realizados por uma aplicação dobra de uma superfície fechada, orientada e sem bordo na esfera, com grau zero.*

Demonstração: A aplicação projeção da esfera na esfera realiza o grafo com uma aresta e dois vértices. De modo geral, a aplicação projeção do $k - 1$ -toro na esfera realiza o grafo com k arestas e dois vértices, como ilustra a Figura . □

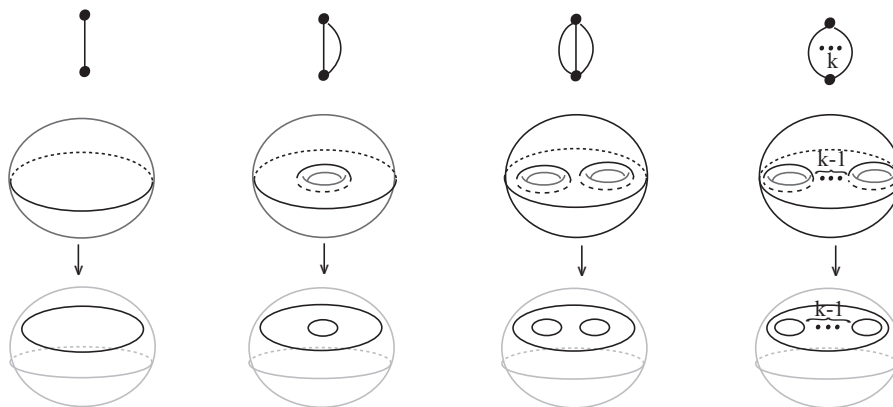


Figura 2.8: Grafo de aplicação dobra com dois vértices e k arestas.

Como uma ferramenta para a realização de grafos arbitrários por aplicações estáveis de superfícies fechadas, orientadas e sem bordo na esfera, vamos estudar as cirurgias de aplicações estáveis.

2.3 Cirurgia de Aplicações Estáveis

Uma maneira de construir uma aplicação estável é fazer a “soma conexa de aplicações ” estáveis já conhecidas. Os dois tipos de somas conexas que apresentaremos a seguir, chamadas cirurgias horizontais e verticais, foram introduzidas por Hacon, Mendes de Jesus e Romero-Fuster [13] para aplicações estáveis de superfícies fechadas e orientadas no plano e estendidas pelos mesmos em [14], para aplicações estáveis de superfícies na esfera.

As cirurgias, como veremos, também serão utilizadas como técnicas para mostrar como relizar um dado grafo, para alguma aplicação estável.

2.3.1 Cirurgia Horizontal

Definição 2.13 *Seja uma aplicação estável $h : M \rightarrow S^2$, onde M é uma superfície. Uma **ponte** β é um retângulo imerso em S^2 , que une os seus lados opostos no contorno aparente de h , respeitando as suas orientações.*

A Figura 2.9(b) ilustra uma ponte no contorno aparente de uma aplicação.

Sejam as aplicações estáveis $f_1 : M_1 \rightarrow S^2$ e $f_2 : M_2 \rightarrow S^2$, onde M_1 e M_2 são superfícies. Conectando, através de um tubo T limitado (homeomorfo a $S^1 \times [0, 1]$), dois discos, vizinhanças de pontos singulares de f_1 e f_2 , respectivamente, para dentro do qual as aplicações são estendidas, obtemos uma superfície homeomorfa à soma conexa $M_1 \# M_2$, como ilustrado na Figura 2.9 (a). Assim, obtemos uma nova aplicação estável $f_1 \oplus f_2 : M_1 \# M_2 \rightarrow S^2$, cujas restrições a M_1 e M_2 correspondem a f_1 e f_2 , respectivamente.

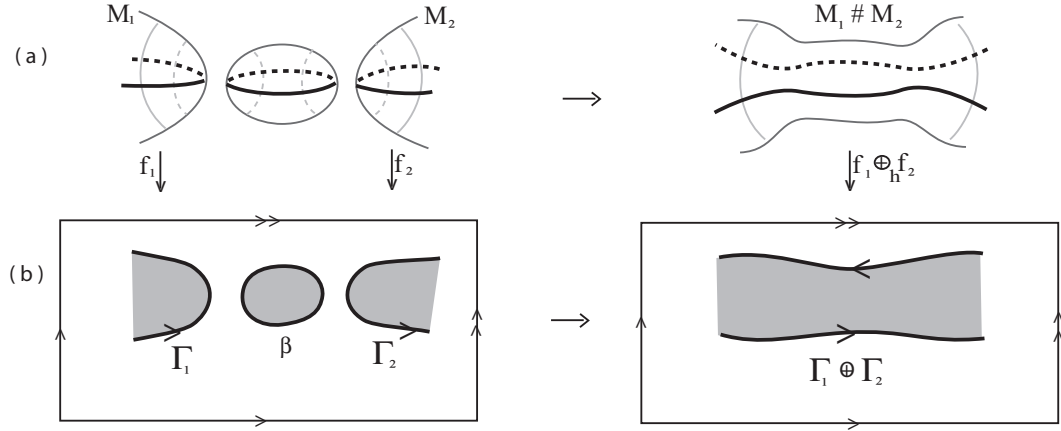


Figura 2.9: Cirurgia Horizontal.

Definição 2.14 A aplicação $f_1 \oplus f_2$, obtida na cirurgia acima, é dita **cirurgia horizontal** entre f_1 e f_2 e denotada por $f_1 \oplus_h f_2$.

A cirurgia horizontal restrita ao conjunto singular tem, por construção, o efeito de uma ponte.

Observação 2.15 Se G_i é o grafo associado à aplicação $f_i : M_i \rightarrow S^2$, com $i = 1, 2$ então realizando a cirurgia horizontal entre as duas aplicações f_1 e f_2 , obtemos:

1. $V(G_1 \oplus_h G_2) = V(G_1) + V(G_2) - 2$, pois duas regiões positivas e duas regiões negativas se unem, ou seja, dois vértices positivos e dois negativos são identificados.
2. $A(G_1 \oplus_h G_2) = A(G_1) + A(G_2) - 1$, pois duas curvas singulares se unem, ou seja, uma aresta é identificada com a outra.
3. $W(G_1 \oplus_h G_2) = W(G_1) + W(G_2)$, pois as regiões identificadas carregam os seus gêneros, com isso, o peso do vértice correspondente a essa nova região, é a soma dos pesos dos vértices que o geraram.

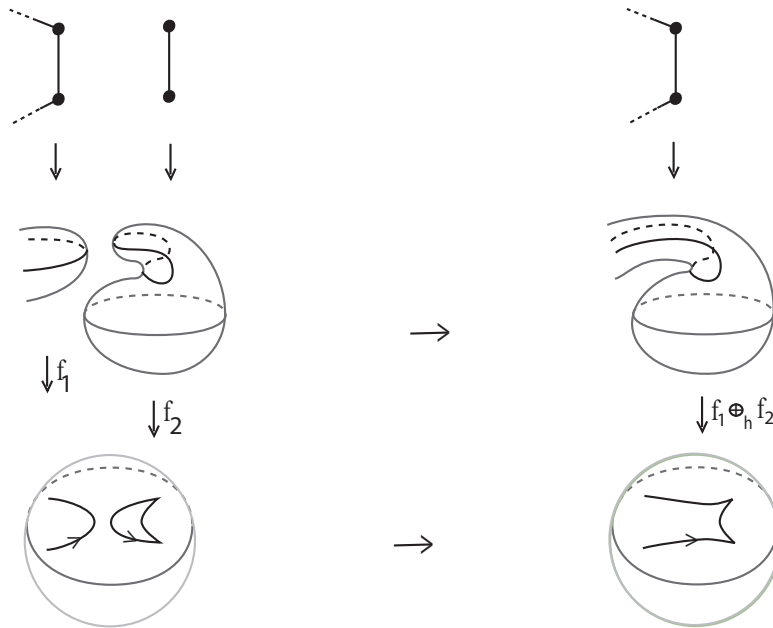


Figura 2.10: Exemplo de cirurgia horizontal.

Exemplo 2.16 A Figura 2.10 ilustra uma cirurgia horizontal $f_1 \oplus_h f_2$, sendo $f_1 : M \rightarrow S^2$, com M uma superfície fechada e orientada e $f_2 : S^2 \rightarrow S^2$. Neste caso, $\deg(f_1 \oplus_h f_2) = \deg(f_1) + 1$, pois $\deg(f_2) = 1$.

Observação 2.17 Para acrescentar o grau de uma aplicação f_1 por um, fazemos uma cirurgia horizontal desta com uma aplicação $f_2 : S^2 \rightarrow S^2$, obtida pela aplicação identidade, passando por uma transição do tipo lábios, como ilustrado na figura acima.

Como vemos na Figura 2.10, a cirurgia horizontal de uma aplicação $f_1 : M \rightarrow S^2$ com a aplicação $f_2 : S^2 \rightarrow S^2$ mantém o grafo associado à aplicação f_1 . Segue daí a seguinte proposição:

Proposição 2.18 Seja G um grafo realizável por uma aplicação estável de uma superfície fechada, orientada e sem bordo na esfera. Aumentando o grau desta aplicação por uma unidade, obtemos uma nova aplicação também associada ao grafo G .

Exemplo 2.19 A Figura 2.11 ilustra a construção de duas aplicações do bitoro na esfera, com grau zero, cujos grafos associados possuem uma aresta e peso dois. Em (a), a aplicação foi obtida pela cirurgia horizontal de duas aplicações $f : T^2 \rightarrow S^2$, onde T^2 é o toro, tal que a curva singular de f separa o toro em duas regiões, onde uma delas possui gênero um. O grafo associado a esta aplicação possui peso dois no vértice positivo. E em (b), a aplicação foi obtida pela cirurgia da aplicação f , com a aplicação $-f$, onde $-f$ tem

a orientação invertida de f . O grafo associado a esta aplicação possui peso um nos dois vértices.

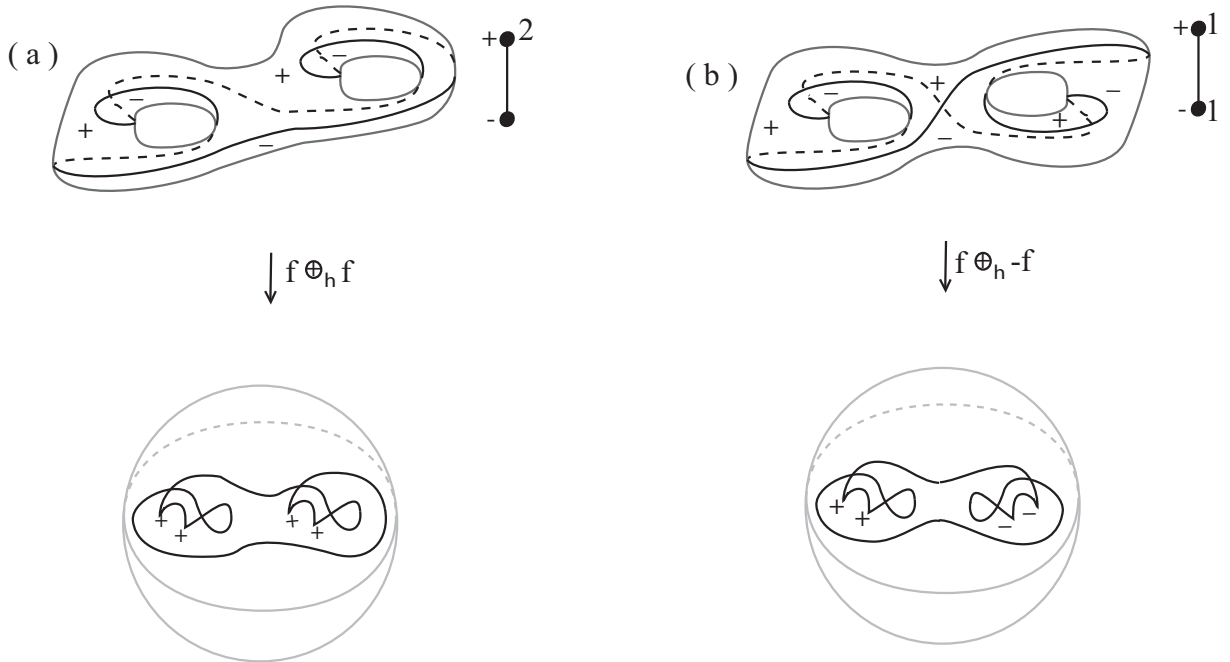


Figura 2.11: Aplicação do bitoro na esfera, com grau zero.

Observação 2.20 De modo geral, podemos construir uma aplicação do $k + l$ -toro na esfera, cujo grafo associado possui uma aresta e pesos k e l nos vértices. A Figura 2.12 ilustra dois diferentes contornos aparentes, ambos com $k + l$ pares de pontos duplos e de cúspides, correspondentes a uma aplicação do $k + l$ -toro na esfera, com grau zero, que pode realizar este grafo. A aplicação pode ser obtida por $k + l - 1$ cirurgias horizontais, como por exemplo, as ilustradas na figura 2.11.

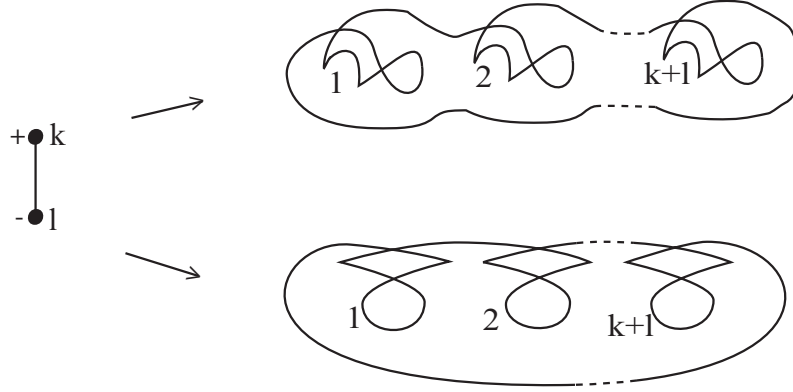


Figura 2.12: Dois diferentes contornos aparente com única curva.

Proposição 2.21 *Seja G um grafo com pesos arbitrários nos vértices realizável por uma aplicação estável de uma superfície fechada, orientada e sem bordo na esfera. Aumentando por uma unidade o peso de algum de seus vértices, obtemos um novo grafo realizável.*

Demonstração: Seja G um grafo com pesos arbitrários nos vértices realizável por uma aplicação estável f de uma superfície fechada, orientada e sem bordo na esfera. Fazendo a cirurgia horizontal de f com uma aplicação estável $g : T^2 \rightarrow S^2$, tal que o grafo associado à g possui uma aresta e um vértice com peso um, obtemos a aplicação estável $f \oplus_h g$ cujo grafo associado é o grafo G com o peso acrescentado por um em algum de seus vértices. \square

Acabamos de ver alguns casos de cirurgias horizontais de distintas aplicações. Analogamente, também podemos fazer cirurgias horizontais sobre uma mesma aplicação.

Exemplo 2.22 *A Figura 2.13 ilustra a cirurgia horizontal sobre uma mesma aplicação da esfera na esfera, obtendo uma aplicação do toro na esfera. Esta é uma forma de realizar um grafo com uma aresta e peso um, por uma aplicação de grau um, cujo contorno aparente possui quatro cúspides e nenhuma auto-interseção.*

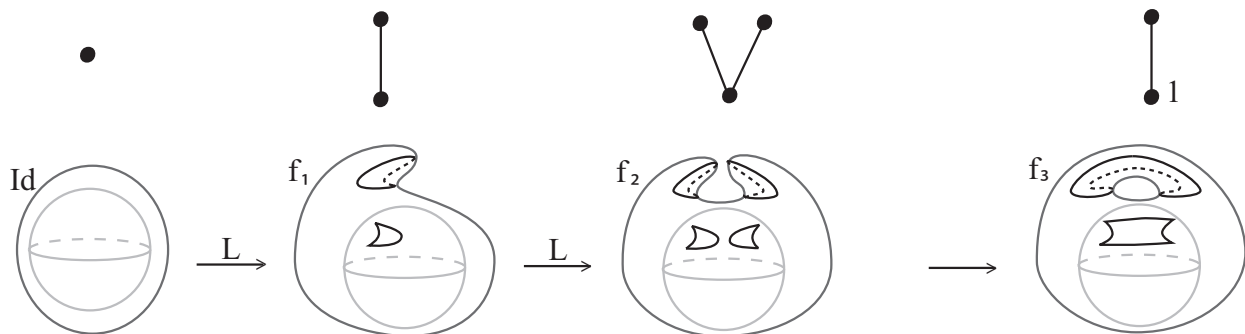


Figura 2.13: Construção de uma aplicação do toro com grau um.

2.3.2 Cirurgia Vertical

Sejam $f_1 : M_1 \rightarrow S^2$ e $f_2 : M_2 \rightarrow S^2$ duas aplicações estáveis. Dois discos não singulares de M_1 e M_2 respectivamente, pertencentes a regiões de sinais opostos, de modo que as suas imagens coincidam na esfera, são conectados por um tubo limitado. Assim obtemos uma nova superfície homeomorfa à soma conexa $M_1 \# M_2$. Podemos estender as aplicações f_1 e f_2 para o interior do tubo. Assim, obtemos uma nova aplicação $f_1 \oplus f_2 : M_1 \# M_2 \rightarrow S^2$, de modo que suas restrições à M_1 e M_2 , coincidam com f_1 e f_2 , respectivamente.

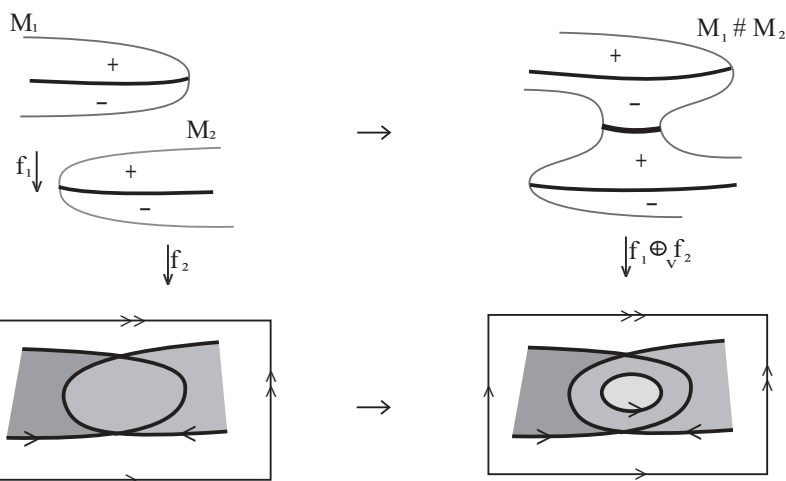


Figura 2.14: Cirurgia Vertical.

Definição 2.23 A aplicação $f_1 \oplus f_2$ obtida da cirurgia acima, é dita *cirurgia vertical* entre f_1 e f_2 , denotada por $f_1 \oplus_v f_2$.

A cirurgia vertical acrescenta, por construção, uma curva disjunta imersa no contorno aparente da aplicação.

Observação 2.24 Se G_i é o grafo associado à aplicação $f_i : M_i \rightarrow S^2$, com $i = 1, 2$, então realizando a cirurgia vertical de f_1 com f_2 , obtemos:

1. $V(G_1 \oplus_v G_2) = V(G_1) + V(G_2)$, pois nenhuma região é tirada ou colocada.
2. $A(G_1 \oplus_v G_2) = A(G_1) + A(G_2) + 1$, pois uma nova componente singular é criada.
3. $W(G_1 \oplus_v G_2) = W(G_1) + W(G_2)$, pois não é acrescentado ou retirado gênero das regiões.

Exemplo 2.25 Com a cirurgia vertical sobre a esfera imersa no R^3 , seguida de uma transição do tipo bicos, podemos construir uma aplicação do toro na esfera, com grau zero, associada ao grafo com uma aresta e peso um. Esta é a aplicação f utilizada no Exemplo 2.19.

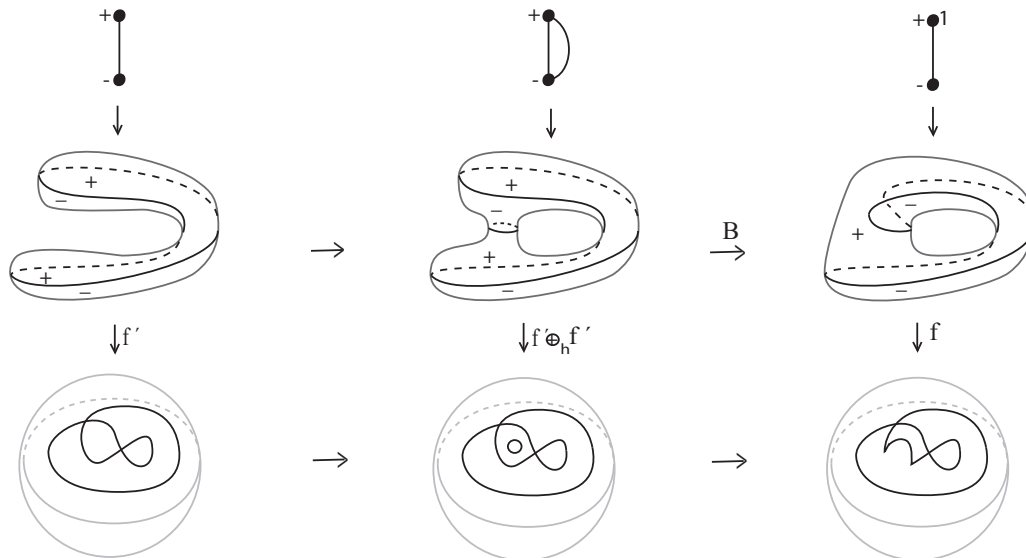


Figura 2.15: Uma construção do contorno do toro com única componente.

Observação 2.26 A cirurgia vertical sobre uma mesma aplicação, cria uma nova componente singular que fecha um ciclo em seu grafo G .

Proposição 2.27 Seja G um grafo com pesos arbitrários nos vértices realizável por uma aplicação estável de uma superfície fechada, orientada e sem bordo na esfera. Conectando por uma aresta, dois vértices de sinais opostos de G , obtemos um novo grafo realizável.

Demonstração: Seja G um grafo com pesos arbitrários nos vértices realizável por uma aplicação estável $f : M \rightarrow S^2$, onde M é uma superfície fechada, orientada e sem bordo. Fazendo a cirurgia vertical sobre a aplicação f , conectamos duas regiões com orientações opostas de M através de uma curva singular de f . O efeito dessa cirurgia no grafo associado à aplicação f é a criação de uma aresta que separa vértices de sinais opostos. Em outras palavras, a aplicação $f \oplus_v f$ resultante após esta cirurgia vertical realiza o grafo G adicionado por uma aresta que conecta vértices de sinais opostos. \square

Dados dois grafos bipartidos G_1 e G_2 , a soma destes, por cirurgia horizontal ou vertical será ainda um grafo bipartido. De fato, a cirurgia horizontal une duas regiões de sinais iguais e a cirurgia vertical cria uma nova componente singular que separa regiões de sinais opostos, mantendo as adjacências das outras regiões com as curvas singulares. Além disso, se esses grafos são realizáveis por aplicações estáveis, então a soma deles também o é, pelas cirurgias.

Com isto, podemos afirmar que qualquer grafo obtido através de cirurgias de outros grafos mais simples realizáveis por aplicações estáveis, é ainda realizável. Entretanto, nem todo grafo é fácil de ser decomposto em outros mais simples realizáveis por aplicações estáveis, como é o caso do grafo mostrado na Figura 1.7 (d).

Surtem então a pergunta:

“Quais as condições para que um grafo seja associado a uma aplicação estável de uma superfície fechada e orientada na esfera?”

2.4 Realização de Grafos Bipartidos

Nesta seção, estamos interessados em saber quais grafos são realizados por aplicações estáveis de superfícies fechadas e orientadas na esfera, com grau arbitrário. Primeiro, mostramos que toda árvore com peso zero nos vértices é realizada por uma aplicação da esfera na esfera, com grau arbitrário. A partir disso, fazendo as cirurgias horizontais e verticais, concluimos que todo grafo bipartido, com pesos arbitrários nos vértices, pode ser realizado por uma aplicação de uma superfície fechada e orientada na esfera, com grau arbitrário. E por último, relacionamos a fórmula de Quine com um dado grafo e daí estabelecemos condições necessárias para que este seja realizado por uma aplicação dobra, ou seja, sem cúspides.

2.4.1 Realização de Grafo Tipo Árvore

Lema 2.28 *Todo grafo com única aresta pode ser realizado por uma aplicação entre duas esferas, com grau arbitrário. Além disso, de acordo com o grau de cada uma dessas*

aplicações, obtemos o número de cúspides do conjunto singular.

Demonstração: A aplicação projeção $\pi : S^2 \rightarrow S^2$, é tal que $\deg(\pi) = 0$, seu conjunto singular não possui cúspides e o seu grafo associado possui uma aresta, como ilustra a Figura 2.17.

Faremos a construção por indução sobre $d = \deg(f)$.

A aplicação $f_1 : S^2 \rightarrow S^2$, obtida pela aplicação identidade, passando pela transição do tipo lábios, possui grau um e é tal que o seu conjunto singular é conexo, sem auto-interseções e com duas cúspides (ver Figura 2.18(a).)

Fazendo a cirurgia horizontal das aplicações entre duas esferas f_1 e f_2 , ambas obtidas pela aplicação identidade, passando pela transição do tipo lábios, obtemos a aplicação $f : S^2 \rightarrow S^2$, com grau dois e tal que o seu conjunto singular é conexo, sem auto-interseções e com quatro cúspides, como ilustrado na Figura 2.18(c).

Agora assumimos que o conjunto singular da aplicação estável $g : S^2 \rightarrow S^2$ possui uma curva conexa, ou seja, seu grafo possui uma única aresta, e além disso, g contém exatamente $2\deg(g)$ cúspides, para $d \leq m$. Vamos mostrar que existe uma aplicação estável $g' : S^2 \rightarrow S^2$, com $\deg(g') = m + 1$, tal que $\Sigma g'$ é conexo e possui $2\deg(g')$ cúspides.

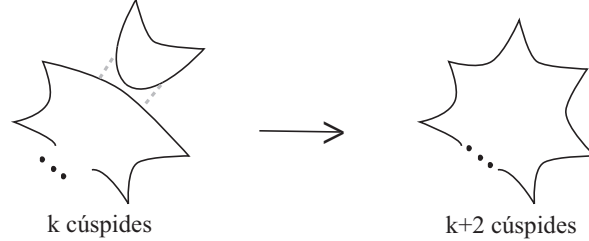


Figura 2.16: Alterando o grau e o número de cúspides.

Consideramos $g' = g \oplus_h f_2$, onde $g : S^2 \rightarrow S^2$ é tal que $\deg(g) = m$ e f_2 é a aplicação citada acima, que possui duas cúspides e nenhuma auto-interseção. Assim, $\deg(g') = \deg(g) + \deg(f_2) = m + 1$.

Pela hipótese de indução, o conjunto singular Σg possui exatamente $2\deg(g)$ cúspides e é conexo. Com a cirurgia horizontal, as curvas singulares de g e f_2 se conectam, formando uma única curva singular (ver Figura 2.16). Por construção, esta é a curva singular de g' , e com isso, o contorno aparente de g' possui $2\deg(g) + 2 = 2m + 2 = 2(m + 1) = 2\deg(g')$ cúspides e é conexo. Logo, o grafo associado a g' possui somente uma aresta.

Daí, podemos construir aplicações estáveis $g' : S^2 \rightarrow S^2$ com $\deg(g') > 0$ arbitrário, tal que o conjunto singular de f , Σf é conexo, possui $2\deg(g')$ cúspides e nenhuma auto-interseção, e então, o grafo associado a cada uma dessas aplicações possui uma única aresta.

Para obter o grau negativo arbitrário, consideramos $g' = g \oplus_h -f_2$, onde $-f_2$ é a aplicação f_2 com a orientação invertida. Neste caso, os grafos ainda possuem uma aresta, e as cúspides passam a ter sinais negativos. □

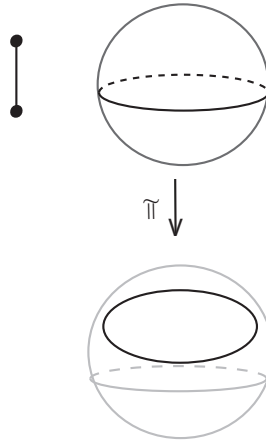


Figura 2.17: Projeção trivial da esfera na esfera (grau zero).

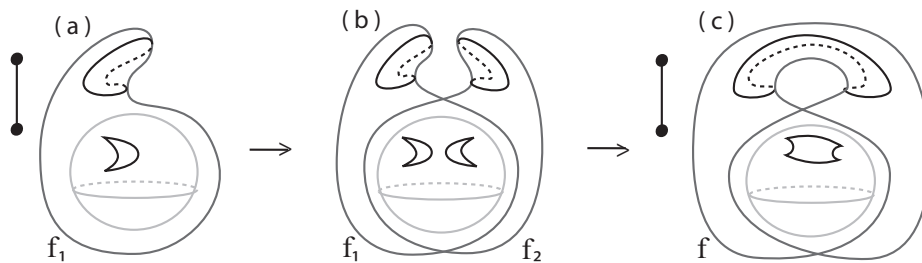


Figura 2.18: Alteração do grau com cirurgia horizontal.

Lema 2.29 *Podemos acrescentar um vértice a um grafo de uma aplicação qualquer, por uma transição do tipo lábios.*

Demonstração: Sejam $f : M \rightarrow S^2$ uma aplicação e G o grafo associado a f . Acrescentamos uma aresta extrema em G , fazendo uma pequena deformação em M . Com essa deformação, criamos uma curva singular, a qual divide uma região em duas partes e daí, obtemos uma nova aplicação g . Essa nova aplicação pode ser obtida por f , através da transição do tipo lábios. Com isso, construímos uma aplicação f que tem como grafo associado a árvore G acrescida de uma aresta, como ilustra a Figura 2.19. □

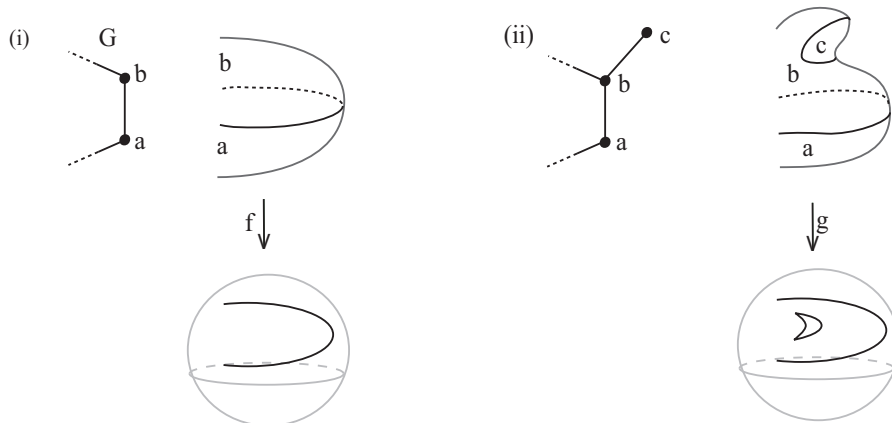


Figura 2.19: Acrescentando aresta em um grafo.

Teorema 2.30 [14] *Um grafo G é realizável por uma aplicação da esfera na esfera, com grau arbitrário se, e somente se, G é árvore, com todos os pesos iguais a zero.*

Demonstração: (\Rightarrow) Se G é um grafo realizável por uma aplicação da esfera na esfera com grau arbitrário, segue pelo Corolário 2.11 que G é uma árvore com todos os pesos iguais a zero.

(\Leftarrow) Seja G uma árvore com peso zero nos seus vértices.

A prova será feita por indução sobre o número de arestas da árvore G .

A árvore que possui apenas uma aresta é obtida pelas aplicações de graus arbitrários, construídas no Lema 2.28.

Suponhamos, que toda árvore com k arestas seja realizável por uma aplicação estável f da esfera na esfera, com k natural maior que zero. Seja G uma árvore com $k + 1$ arestas. Ao eliminar de G uma aresta extrema wv , cujo vértice extremo é v , obtemos uma árvore G' com k arestas. Note que v é um vértice extremo do G' .

Pela hipótese de indução, existe uma aplicação estável f da esfera na esfera, cujo grafo associado é a árvore G' . Vamos agora buscar uma aplicação que realize a árvore G . Como G possui uma aresta a mais que G' , então o conjunto singular da aplicação que procuramos deve possuir uma componente a mais que o conjunto singular de f , Σ_f . Pelo Lema 2.29, vamos obtê-la fazendo uma deformação na esfera do domínio de f .

E assim, passando por uma transição do tipo lábios, criamos uma região correspondente ao vértice w e um par de cúspides dando origem a uma curva de dobra correspondente à aresta wv . Essa nova aplicação h continua sendo estável da esfera na esfera e tem a árvore G como grafo associado.

Com isso concluímos que toda árvore com peso zero nos vértices é realizável por alguma aplicação estável da esfera na esfera, digamos $g : S^2 \rightarrow S^2$.

Pela Proposição 2.18, segue que toda árvore com peso zero nos vértices é realizável por alguma aplicação estável da esfera na esfera, com grau arbitrário.

E para obter o grau negativo, fazemos a cirurgia horizontal de h com $-g : S^2 \rightarrow S^2$, onde $-g$ é a aplicação g com a orientação invertida. \square

Proposição 2.31 *Todo grafo do tipo árvore com pesos inteiros nos vértices pode ser realizado por uma aplicação estável, com grau arbitrário, de alguma superfície fechada e orientada M em S^2 .*

Demonstração: Seja G um grafo do tipo árvore, arbitrário, com pesos inteiros nos seus vértices, consideramos G' como sendo o grafo G , sem os pesos nos vértices. Pelo Teorema 2.30, G' é realizado por uma aplicação estável, com grau arbitrário, da esfera na esfera. Escolhemos uma qualquer aplicação f' que realiza G' .

Se o vértice v_1 de G possui peso k , podemos realizar este peso tomando uma aplicação $f_1 : M_k \rightarrow S^2$, com uma única curva singular, que separa um disco do k -toro, cujo contorno aparente está ilustrado na Figura 2.12. Fazendo a cirurgia horizontal de f_1 com f' , de modo que o k -toro seja adicionado na região correspondente ao vértice v_1 , obtemos uma nova aplicação de uma superfície na esfera, que realiza o grafo G' , com peso k no vértice v_1 . O gênero $g(M_k) = k$.

Repetindo esse processo para todos os vértices, podemos obter uma nova aplicação $f' \oplus_h f_1 \oplus_h \dots \oplus_h f_V : M \rightarrow S^2$, que realiza o grafo G , onde o gênero $g(M) = k_1 + \dots + k_V$, sendo que V é o número de vértices de G . \square

2.4.2 Grafos com Pesos Arbitrários

No próximo resultado veremos como realizar um grafo qualquer, com auxílio de cirurgias e de uma árvore maximal do grafo.

Lema 2.32 *Todo grafo contém um subgrafo que é uma árvore maximal com todos os vértices.*

Demonstração: Seja G um grafo arbitrário. Se G é do tipo árvore, então G é a sua própria árvore maximal. Se G não é árvore e possui B ciclos, então retirando B arestas de G , uma de cada ciclo, obtemos uma árvore, contendo todos os vértices de G , sendo esta, uma árvore maximal de G . \square

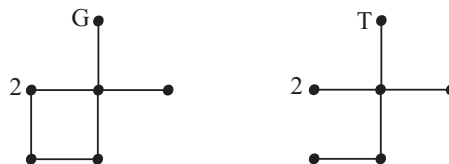


Figura 2.20: Árvore maximal.

Lema 2.33 *Se uma árvore maximal do grafo G com peso nos seus vértices é realizada por uma aplicação estável, então G também o é.*

Demonstração: Seja uma árvore maximal T do grafo G , obtida após tirar B arestas de G , uma de cada ciclo.

Vamos assumir que T é realizada por uma aplicação $f' : M' \rightarrow S^2$, onde M' é uma superfície fechada e orientada, tal que $g(M') = W$, onde W é o peso dos vértices de T . Para realizar uma aresta $a_1 \in G \setminus T$, aplicamos a Proposição 2.27 e fazemos uma cirurgia vertical sobre f' nas regiões correspondentes aos vértices da aresta a_1 , de onde obtemos $f_1 : M_1 \rightarrow S^2$.

Pela definição de cirurgia vertical, uma nova componente singular é criada e neste caso, a aresta associada a esta componente fecha um ciclo, pois é uma cirurgia de uma aplicação com ela mesma. Daí, o gênero $g(M_1) = W + 1$, onde a soma do número um representa o novo ciclo.

Repetindo esse processo para todas as B arestas de G que foram retiradas para obter T , obtemos uma aplicação $f : M_k \rightarrow S^2$, que realiza o grafo G , tal que $g(M_k) = B + W = 1 - V + A + W$, pelo Teorema 1.32. \square

Teorema 2.34 *Todo grafo bipartido, com pesos inteiros positivos nos vértices, é grafo de alguma aplicação estável na esfera, com grau arbitrário, de uma superfície M fechada e orientada, com gênero $g(M) = 1 - V + A + W$.*

Demonstração: Seja G um grafo, onde a soma dos seus pesos é W e T uma árvore maximal de G .

Pela Proposição 2.31, T é realizada por uma aplicação estável, com grau arbitrário, de alguma superfície M fechada e orientada, na esfera. O gênero $g(M) = W$, pois T é árvore, e então não possui ciclos.

Agora, pelo Lema 2.33, G é realizada por uma aplicação $f : M \rightarrow S^2$, onde $g(M) = 1 - V + A + W$ \square

A seguir, apresentamos um esquema para a realização de um grafo bipartido com pesos arbitrários nos seus vértices.

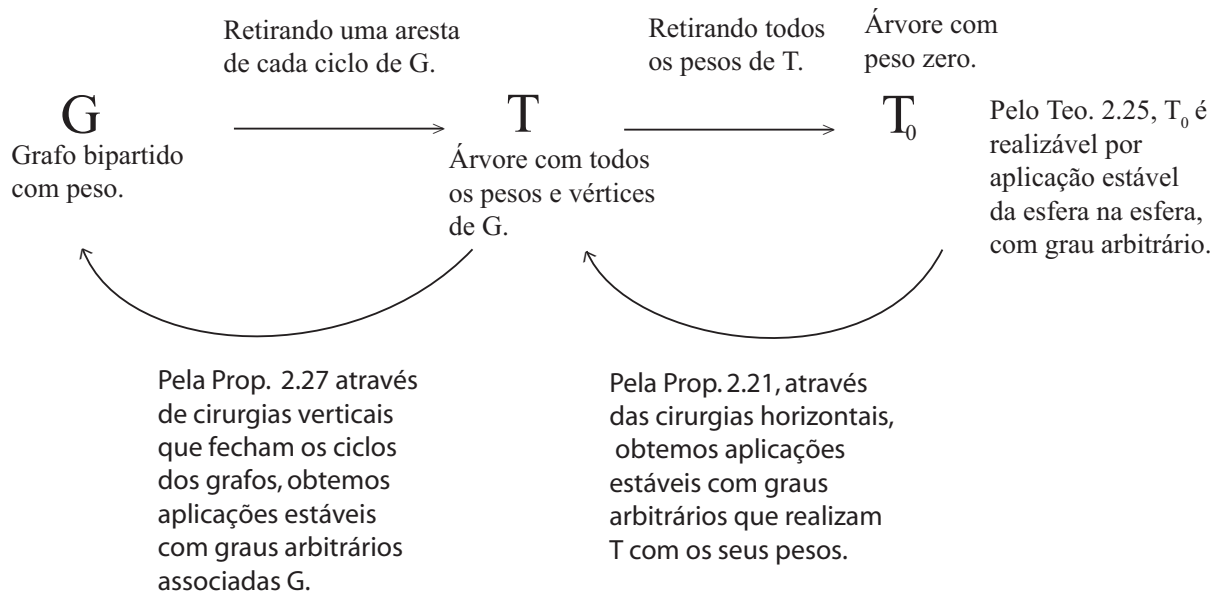


Figura 2.21: Esquema para a realização de um grafo arbitrário.

2.4.3 Algoritmo para a Realização de um Grafo

Apresentaremos aqui, um algoritmo que pode auxiliar na construção de uma aplicação estável na esfera, para a realização de um dado grafo.

Observação 2.35 *Toda grafo do tipo árvore pode ser decomposto, como inversa da cirurgia horizontal, em sub-grafos retos (sem bifurcação nos vértices), com três arestas e duas arestas. Basta ir decompondo a árvore a partir de um vértice extremo em sub-grafo com três arestas. Quando isso não é possível, decomponha em sub-grafo com duas arestas.*

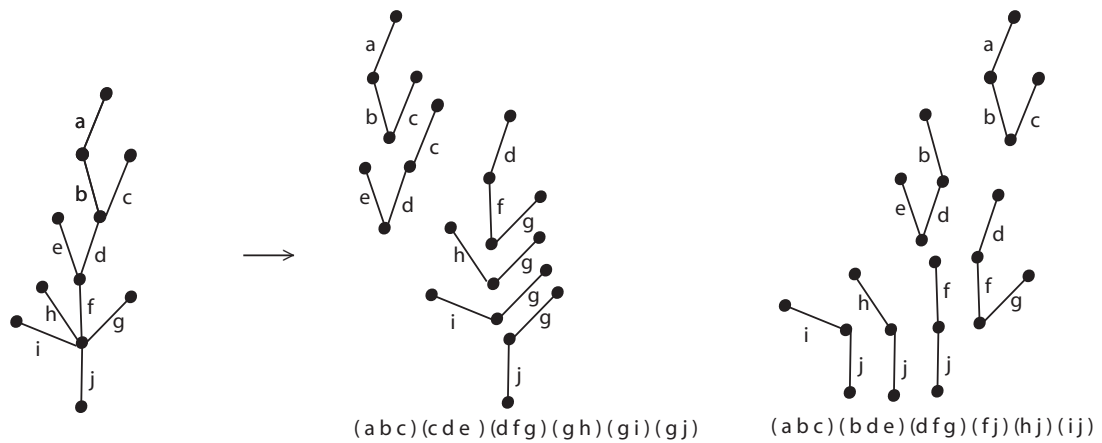


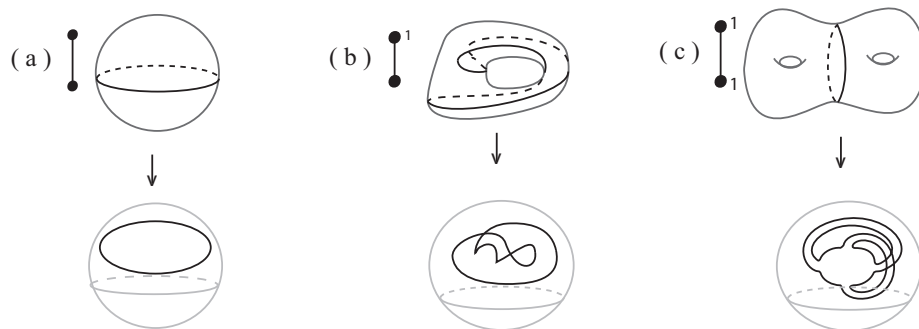
Figura 2.22: Diferentes decomposições de um grafo árvore.

Exemplo 2.36 *A Figura 2.22 ilustra duas decomposições distintas em subgrafos de duas e três arestas, de um dado grafo.*

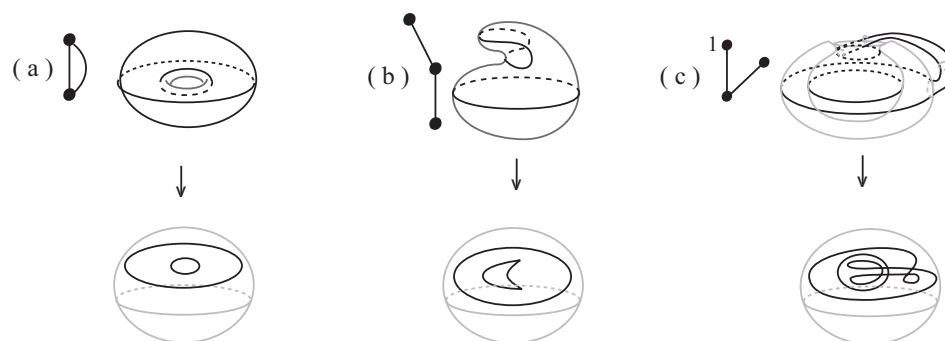
Aos grafos retos com uma, duas ou três arestas, chamaremos de **grafos básicos**.

A Figura 2.23 apresenta algumas aplicações estáveis que realizam grafos com no máximo três arestas e peso total dois, a estas aplicações chamaremos de **aplicações básicas**.

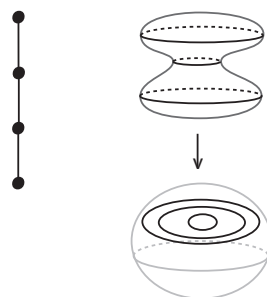
(1) Aplicações com grau zero, associadas a grafos com uma aresta.



(2) Aplicações com grau zero, associadas a grafos com duas arestas.



(3) Aplicação com grau zero, associada a grafo com três arestas.



(4) Aplicações com grau um, com uma ou duas arestas.

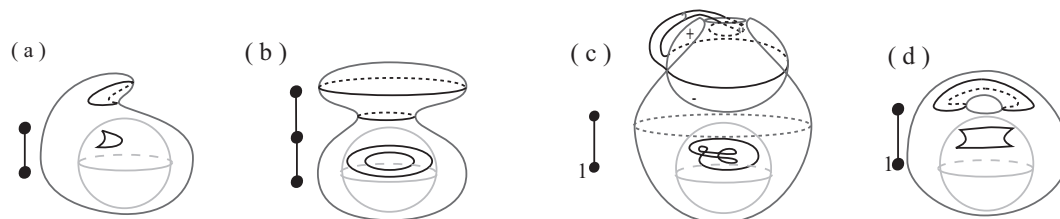


Figura 2.23: Algumas aplicações básicas.

A seguir, apresentaremos alguns passos baseados nos resultados anteriores e exemplificados na Figura 2.24, para auxiliar na construção de uma aplicação estável, por meio de cirurgias e aplicações básicas, que realizam um grafo dado.

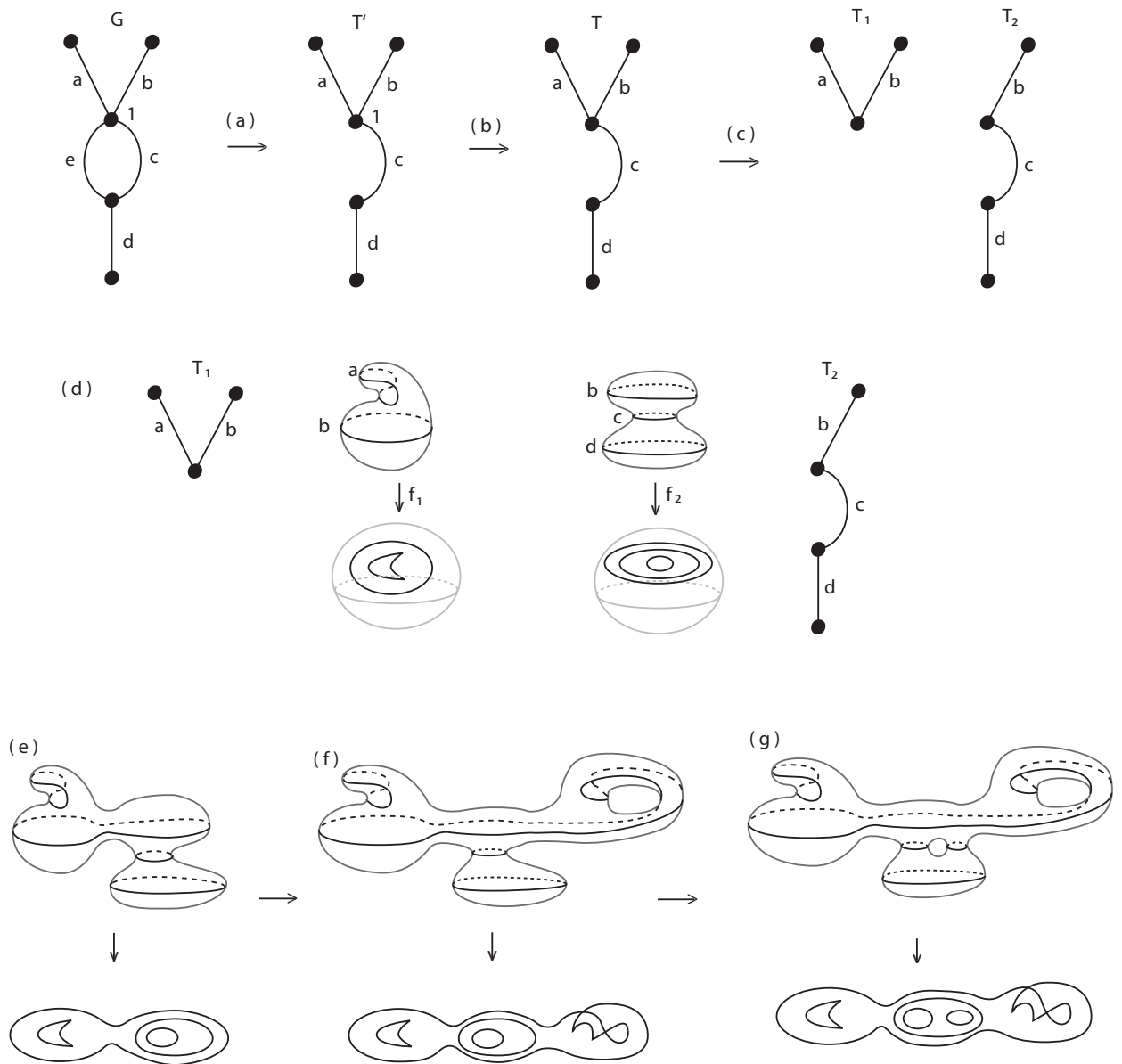


Figura 2.24: Exemplo de realização de um grafo.

Dado um grafo G :

- (a) Construímos uma árvore maximal T' do grafo G com todos os pesos.
- (b) Retiramos todos os pesos de T' e obtemos T .

- (c) Fazemos uma decomposição básica de T , em grafos de três ou duas arestas: T_1, \dots, T_m .
- (d) Realizamos cada grafo básico T_j , $j = 1, \dots, m$, com aplicações básicas f_j convenientes, das ilustradas da Figura 2.23.
- (e) Com cirurgia horizontal das aplicações f_j , conectamos os grafos T_j e realizamos a árvore T .
- (f) Com cirurgia horizontal de aplicações do tipo (1)(a) ou (b) ou (4)(c) ou (d) da Figura 2.23, que realiza grafos com única aresta e pesos $(1, 0)$ ou $(1, 1)$, realizamos os pesos de T' .
- (g) Com cirurgia vertical, realizamos as arestas complementares a T' em G , obtendo assim, uma aplicação que realiza G .
- (h) Com cirurgia horizontal da aplicação obtida, com uma aplicação $f : S^2 \rightarrow S^2$, como ilustrado na Figura 2.10, aumentamos o grau da aplicação que realiza G e mantemos o grafo. Analogamente, fazendo a cirurgia com a aplicação $-f : S^2 \rightarrow S^2$, onde $-f$ é a aplicação f com a orientação invertida, mantemos o grafo e diminuimos o grau.

Acabamos de ver que todo grafo bipartido pode ser realizado por uma aplicação de uma superfície fechada e orientada na esfera, com grau arbitrário. Agora surge uma nova pergunta:

“Todos os grafos bipartidos com peso podem ser realizados por aplicações sem cúspides?”

Na próxima seção, veremos condições necessárias e suficientes para que um grafo com peso possa ser realizado por uma aplicação sem cúspides.

2.5 Aplicações Dobras

Um caso especial das aplicações estáveis, são as aplicações sem cúspides, conhecidas como **aplicações dobra**. Em [14], Hacon, Mendes de Jesus e Romero-Fuster apresentaram condições necessárias e suficientes para que um dado grafo seja associado a uma aplicação dobra na esfera. Com o auxílio do teorema de Quine, verificaram que o grau de uma aplicação dobra está relacionado com o peso, vértices e sinais escolhidos para o grafo. Esta relação é o que veremos nesta seção. A condição de suficiência será apresentada, mas não provaremos aqui.

2.5.1 Teorema de Quine

A seguir, veremos o Teorema de Quine [27] que relaciona a característica de Euler do complemento do conjunto singular e do contradomínio, a soma dos sinais das cúspides e o grau de uma aplicação estável entre duas variedades.

Teorema 2.37 (Teorema de Quine) *Sejam M e N duas 2-variedades suaves, compactas, orientadas e conexas, $f : M \rightarrow N$ uma aplicação estável, M^+ o fecho do conjunto dos pontos regulares nos quais f preserva a orientação, M^- o fecho dos pontos regulares os quais f inverte a orientação e C_1, \dots, C_n pontos de cúspides, então*

$$\mathcal{X}(M) - 2\mathcal{X}(M^-) + \sum_i s(C_i) = \mathcal{X}(N) \cdot \deg(f),$$

onde \mathcal{X} é a característica de Euler e \deg é o grau da aplicação.

O corolário a seguir é um caso particular do Teorema de Quine, para aplicações estáveis do tipo $f : M \rightarrow S^2$ e será demonstrado no Apêndice A.

Corolário 2.38 *Sejam M uma 2-variedade suave, compacta, orientada e conexa, $f : M \rightarrow S^2$ uma aplicação estável, M^+ o fecho do conjunto dos pontos regulares nos quais f preserva a orientação, M^- o fecho dos pontos regulares nos quais f inverte a orientação e C_1, \dots, C_n pontos de cúspides, então*

$$\mathcal{X}(M) - 2\mathcal{X}(M^-) + \sum_i s(C_i) = 2\deg(f),$$

onde \mathcal{X} é a característica de Euler, \deg é o grau da aplicação e $s(C_i)$ é o sinal da cúspide C_i .

Corolário 2.39 *Seja $f : M \rightarrow S^2$ uma aplicação estável de uma superfície M fechada, orientada e conexa. Se o conjunto singular Σf é não vazio e conexo, então*

$$\left| \sum_i s(C_i) - 2\deg(f) \right| \leq 2 - \mathcal{X}(M).$$

Demonstração: Sejam $M^+(M^-) \subset M$ o fecho das regiões de M que possuem a orientação preservada (invertida) por f . Após a definição 1.70, vimos que $\Sigma f = M^+ \cap M^-$. Como assumimos M fechada e $\Sigma f \neq \emptyset$ e conexo, segue pela Observação 1.67 que Σf é fechada e simples. Com isso, M^+ e M^- são superfícies contendo o mesmo círculo como bordo. Portanto, pelo Teorema 1.28

$$\mathcal{X}(M^+) \leq 1 \quad \text{e} \quad \mathcal{X}(M^-) \leq 1.$$

Além disso, pela Proposição 1.22, $\mathcal{X}(M) = \mathcal{X}(M^+) + \mathcal{X}(M^-)$, pois $\mathcal{X}(M^+ \cap M^-) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(M^-) &= \mathcal{X}(M) - \mathcal{X}(M^+) \\ &\geq \mathcal{X}(M) - 1.\end{aligned}$$

E daí,

$$\mathcal{X}(M) - 1 \leq \mathcal{X}(M^-) \leq 1.$$

Substituindo essas duas desigualdades no Corolário 2.38, obtemos:

$$\sum_i s(C_i) - 2deg(f) \leq 2 \cdot 1 - \mathcal{X}(M) = 2 - \mathcal{X}(M)$$

e

$$\sum_i s(C_i) - 2deg(f) \geq 2(\mathcal{X}(M) - 1) - \mathcal{X}(M) = \mathcal{X}(M) - 2,$$

de onde obtemos

$$\left| \sum_i s(C_i) - 2deg(f) \right| \leq 2 - \mathcal{X}(M).$$

□

2.5.2 Grau da Aplicação Dobra Associada a G .

Lema 2.40 *Se $f : M \rightarrow S^2$ é uma aplicação estável, vale a seguinte relação:*

$$\mathcal{X}(M^\pm) = 2V^\pm - 2g^\pm - A,$$

onde A é o número de arestas e V^\pm e g^\pm são, respectivamente o número de vértices com sinal \pm e o peso total dos vértices com sinal \pm do grafo G_f .

Demonstração: Vamos denotar, respectivamente, por M_1^+, \dots, M_n^+ e M_1^-, \dots, M_p^- as regiões positivas e negativas do complemento $M - \Sigma f$. Como o número de regiões positivas (negativas) corresponde ao número de vértices positivos (negativos), temos que $n = V^+$ e $p = V^-$.

Para cada região M_i^\pm vamos denotar, respectivamente, por K_i^\pm e g_i^\pm o número de arestas do vértice associado à região M_i^\pm e o seu peso. Neste caso, g_i^\pm corresponde ao gênero da

região M_i^\pm e K_i^\pm corresponde ao número de componentes de bordo de M_i^\pm . Assim, pela Proposição 1.22 e pelo Teorema 1.28, podemos escrever

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(M^\pm) &= \sum_{i=1}^{V^\pm} \mathcal{X}(M_i^\pm) \\ &= \sum_{i=1}^{V^\pm} (2 - 2g_i^\pm - K_i^\pm) \\ &= 2V^\pm - 2g^\pm - \sum_{i=1}^{V^\pm} K_i^\pm.\end{aligned}$$

Como $A = \sum_{i=1}^{V^\pm} K_i^\pm$, logo,

$$\mathcal{X}(M^\pm) = 2V^\pm - 2g^\pm - A.$$

□

Teorema 2.41 *Se $f : M \rightarrow S^2$ é uma aplicação estável com C_1, \dots, C_n pontos de cúspides, cujo grafo associado é G_f , então*

$$2(V^+ - V^-) - 2(g^+ - g^-) + \sum_i s(C_i) = 2deg(f),$$

onde $V^+(V^-)$ é o número de vértices positivos (negativos), $g^+(g^-)$ é a soma dos pesos dos vértices positivos (negativos) do grafo G_f e $s(C_i)$ é o sinal da cúspide C_i .

Demonstração: Pelo Corolário 2.38, temos

$$\mathcal{X}(M) - 2\mathcal{X}(M^-) + \sum_i s(C_i) = 2deg(f),$$

onde \mathcal{X} é a característica de Euler, $s(C_i)$ é o sinal da cúspide C_i e deg é o grau da aplicação. E como $\mathcal{X}(M) = \mathcal{X}(M^+) + \mathcal{X}(M^-)$, então

$$\mathcal{X}(M^+) - \mathcal{X}(M^-) + \sum_i s(C_i) = 2deg(f).$$

E de acordo com o Lema 2.40,

$$2((V^+ - V^-) - 2(g^+ - g^-)) + \sum_i s(C_i) = 2deg(f).$$

□

Exemplo 2.42 A Figura 2.25 ilustra algumas aplicações dobra. Em (a), o grafo associado à aplicação da esfera na esfera possui quatro vértices, dois positivos e dois negativos e peso zero, então pelo Teorema 2.41, o grau da aplicação é $d = 0$. Em (b) temos uma aplicação do toro na esfera, cujo grafo associado possui três vértices e peso um. Consideramos o vértice cujo peso é um, positivo, obtemos $V^+ = 2, V^- = 1, g^+ = 1$ e $g^- = 0$. Assim o grau desta aplicação é $d = 0$. E em (c), uma aplicação do toro na esfera, cujo grafo associado possui dois vértices, sendo um deles com peso um. Considerando o vértice com peso positivo, temos $V^+ = 1, V^- = 1, g^+ = 1$ e $g^- = 0$, logo, o grau da aplicação é $d = 1$. O grau da aplicação independe da escolha do sinal dos vértices.

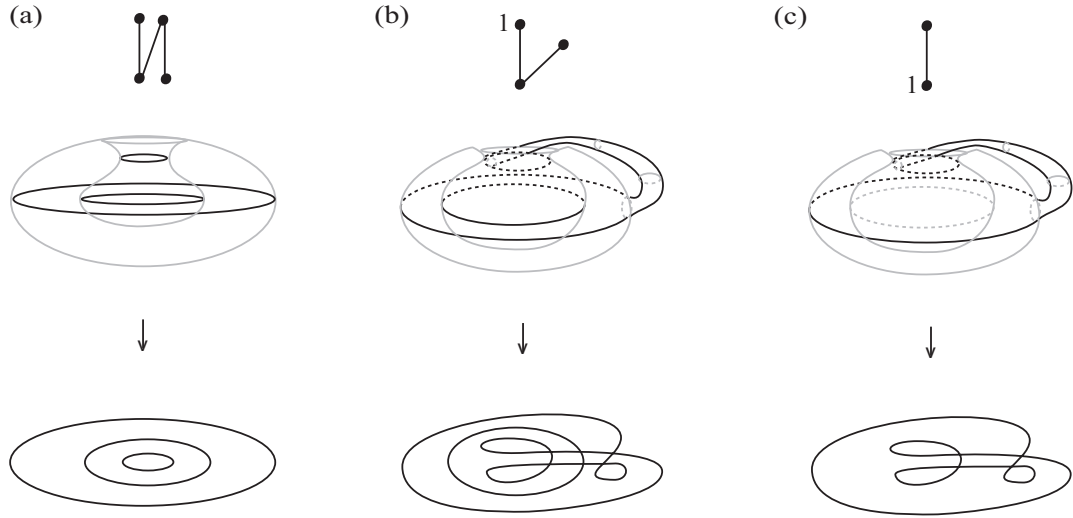


Figura 2.25: Exemplos de Aplicações Dobra.

Corolário 2.43 Se $f : M \rightarrow S^2$ é uma aplicação dobra, então

$$\deg(f) = (V^+ - V^-) - (g^+ - g^-).$$

Demonstração: Como f não possui cúspides, então $\sum_i s(C_i) = 0$, o resultado segue direto da Teorema 2.41. □

Como vemos, o Corolário 2.43 estabelece uma condição necessária para que o grafo G seja realizado por uma aplicação dobra f , para um determinado grau $\deg(f)$.

Exemplo 2.44 As aplicações projeção ilustradas na Figura 2.8 são exemplos de aplicações dobra de grau zero, cujos grafos associados possuem dois vértices com peso zero. Para acrescentar um peso $p > 0$ nos dois vértices, fazemos a cirurgia horizontal, $p - 1$ vezes da aplicação da Figura 2.8, com a aplicação dobra do bitoro na esfera com única curva singular, ilustrada na Figura 2.26.

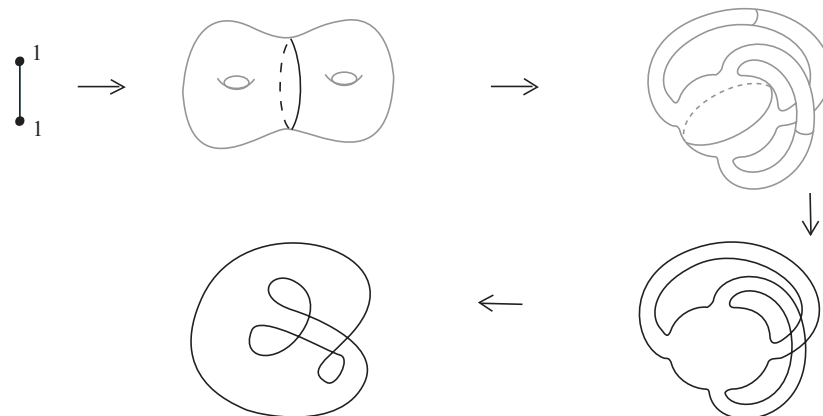


Figura 2.26: Aplicação do bitoro com grau zero.

Observação 2.45 *Sempre podemos construir uma nova aplicação dobra a partir de aplicações já conhecidas, das seguintes formas:*

1. *Se G_1 e G_2 são grafos realizados por aplicações dobra, então a soma horizontal e vertical destes também realiza por dobras, pois as cirurgias não acrescentam cúspides.*
2. *Se uma árvore maximal do grafo G realiza por aplicação dobra, então G também realiza por aplicação dobra, pois podemos realizar as arestas complementares por cirurgia vertical, sem acrescentar pontos de cúspides na nova aplicação.*
3. *Se um grafo G realiza por uma aplicação dobra, somando o peso k em dois vértices consecutivos v e w de G , o grafo obtido G' com o peso $W(G') = W(G) + 2k$, também realiza, pois basta fazer cirurgia envolvendo a curva correspondente à aresta unindo v e w com aplicação do $2k$ -toro, como exemplifica a Figura 2.27.*

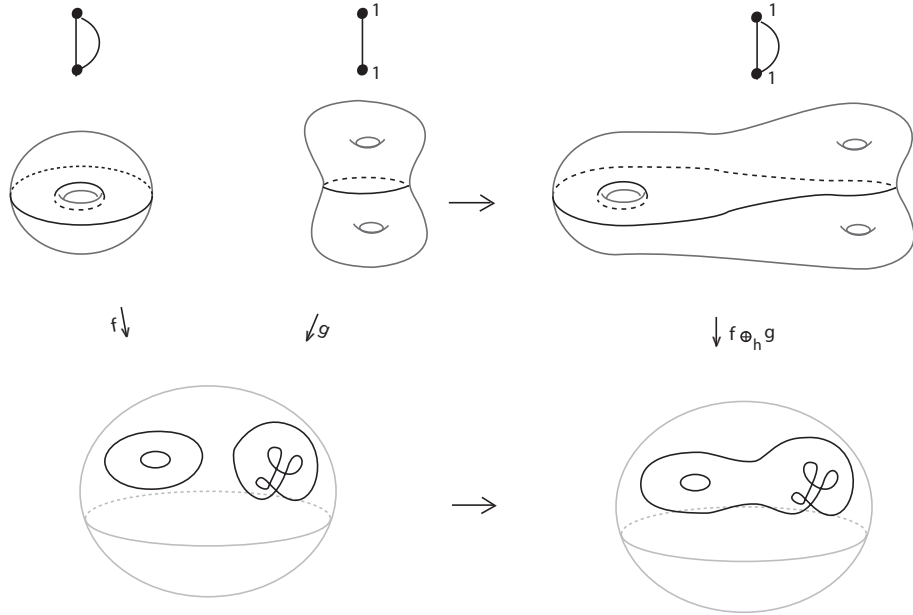


Figura 2.27: Acrescentando peso um em dois vértices consecutivos.

O seguinte teorema, devido a Hacon, Mendes de Jesus e Romero-Fuster [14], não será demonstrado aqui. Ele aborda um caso geral para a realização de grafos de aplicações dobras.

Teorema 2.46 *Todo grafo finito e bipartido G com peso nos vértices, pode ser realizado por uma aplicação dobra na esfera, com grau $d = (V^+ - V^-) - (W^+ - W^-)$, de uma superfície M fechada e orientada e com gênero $g(M) = 1 - V + A + W$.*

Acabamos de estudar as aplicações estáveis de superfícies na esfera, sem cúspides.

No próximo capítulo, vamos estudar o caso particular de aplicações estáveis entre duas esferas, quando o conjunto singular é conexo, levando em consideração o grau da aplicação e o número mínimo de cúspides.

Capítulo 3

Contorno Minimal de Aplicações da Esfera na Esfera

Neste capítulo, estudaremos o contorno aparente de aplicações estáveis da esfera na esfera, tomando como principal referência o trabalho de Demoto [2], que aplica resultados de Francis [6] e Quine [27].

O objetivo deste capítulo é estudar o contorno minimal de uma aplicação estável entre duas esferas, levando-se em consideração o grau da aplicação, o número de cúspides e o número de auto-interseções do seu contorno aparente.

A principal referência para este capítulo é o artigo de Demoto [2], no qual foram utilizados resultados importantes, como o teorema de Quine, disponível em [27] e duas proposições devido Francis [6]. E para a classificação do contorno aparente, baseamos em [22].

3.1 Contornos Aparentes de Aplicações Estáveis

Nesta seção, classificaremos os contornos aparentes de aplicações estáveis $f : M \rightarrow S^2$, onde M é uma superfície fechada e orientada. Essa classificação é feita em relação às componentes conexas do conjunto singular Σf , ao número de cúspides e o número de auto-interseções de f . As principais referências são [2] e [22].

Definição 3.1 *O contorno aparente, $f(\Sigma f)$, de uma aplicação estável $f : M \rightarrow S^2$, onde M é uma superfície fechada e orientada, é a união finita de curvas fechadas em S^2 , formadas pelo conjunto de valores críticos de f .*

Exemplo 3.2 *As duas aplicações ilustradas na Figura 2.4 possuem o mesmo contorno aparente, compostos por seis curvas simples e conexas.*

Definição 3.3 O *contorno irreduzível* de $f : M \rightarrow S^2$, onde M é uma superfície fechada e orientada, é o seu contorno aparente, quando o conjunto singular Σf é conexo.

Exemplo 3.4 A Figura 3.1 ilustra diferentes aplicações da esfera na esfera, com grau dois. Estas aplicações foram obtidas pela composição $g_i = j \circ f_i$, onde f_i é um mergulho com deformação da esfera no \mathbb{R}^3 e j é a projeção da imagem de f_i sobre a esfera. Em (a), o contorno aparente possui três curvas simples e disjuntas. Em (b), o contorno aparente é irreduzível, pois possui uma única componente, sendo esta com quatro cúspides e nenhuma auto-interseção.

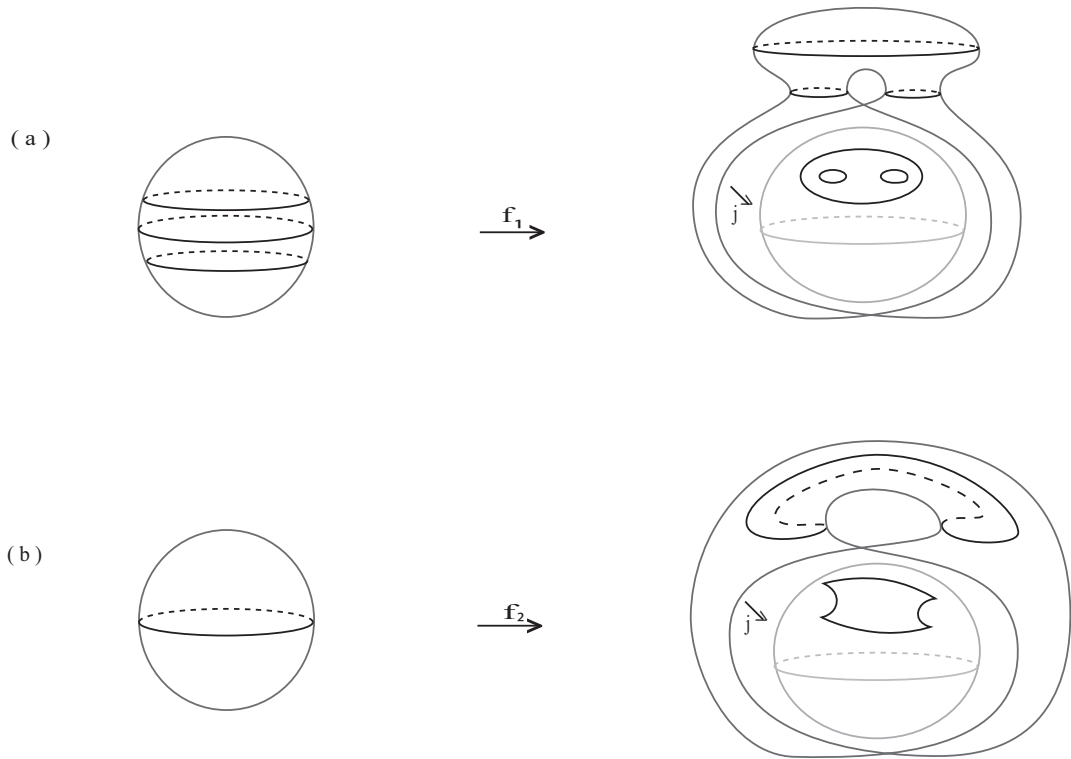


Figura 3.1: Contornos de diferentes aplicações em S^2 : (a) redutível e (b) irreduzível.

Segundo Èliasberg [4], se f é uma aplicação de classe C^∞ , então existem aplicações estáveis que possuem contorno irreduzível e são homotópicas a f .

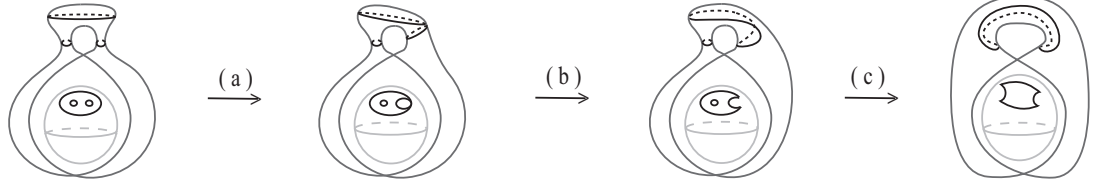


Figura 3.2: Homotopia entre aplicações estáveis entre duas esferas com grau dois.

Definição 3.5 *Seja f uma aplicação de classe C^∞ , o contorno irreduzível de h é dito **contorno minimal** de f , se h possui o menor inteiro possível para a soma do número de cúspides e do número de auto-interseções, $c + a$, entre todas as aplicações homotópicas a f .*

Veremos na próxima seção, que o contorno aparente da aplicação g_2 , ilustrada na Figura 3.1 (b) é o contorno minimal da aplicação g_1 , ilustrada em (a). De modo geral, vamos estabelecer o valor mínimo para a soma do número de cúspides e de auto-interseções que uma aplicação estável de grau dois, entre duas esferas, deve possuir para realizar o contorno minimal.

3.2 Aplicação de Grau dois

3.2.1 Número Mínimo de Cúspides

O seguinte teorema relaciona o grau de uma aplicação estável da esfera na esfera, com o número de cúspides e de auto-interseções que o seu contorno minimal deve possuir.

Teorema 3.6 *Seja $f : S^2 \rightarrow S^2$ uma aplicação estável com $\deg(f) = 2$, uma aplicação $h : S^2 \rightarrow S^2$ homotópica a f , que realiza o contorno minimal de f , deve possuir quatro cúspides e nenhuma auto-interseção.*

Demonstração: Pela Definição 3.5, a aplicação h que realiza o contorno minimal de f deve possuir o conjunto singular conexo e o menor valor para a soma $c + a$, onde c é o número de cúspides e a o número de auto-interseções.

Como h é homotópica a f , então $\deg(h) = \deg(f) = 2$, logo, pelo Corolário 1.90, $\Sigma h \neq \emptyset$. Por outro lado, como $\mathcal{X}(S^2) = 2$, então pelo Corolário 2.39,

$$\left| \sum_i s(C_i) - 2.2 \right| \leq 0,$$

Logo

$$\sum_i s(C_i) = 4,$$

ou seja, h deve possuir no mínimo quatro cúspides.

Deste modo, se podemos construir uma aplicação que possui exatamente quatro cúspides e nenhuma auto-interseção, então esta deve ser h , pois $a = 0$ e o menor valor para c é quatro, ou seja, realiza o contorno minimal de f .

Essa construção é feita através da cirurgia horizontal entre duas aplicações, de grau um, da esfera na esfera, como ilustrado na Figura 2.18, com cada uma delas possuindo conjunto singular conexo e contorno aparente com duas cúspides e nenhuma auto-interseção. \square

Exemplo 3.7 Na Figura 3.1, o contorno redutível da aplicação f_2 é dito contorno minimal da aplicação f_1 , pois $f_2 \simeq f_1$ (homotópica) e possui o menor valor para a soma $c + a = 4 + 0 = 4$, onde a é o número de auto-interseções.

3.3 Contorno Minimal de Aplicações \mathcal{A} -Equivalentes

Nesta seção, veremos que se duas aplicações estáveis $f, g : S^2 \rightarrow S^2$, tais que $\deg(f) = \deg(g) = 2$, realizam o contorno minimal, então elas são \mathcal{A} -equivalentes. Para isto, vamos apresentar duas proposições encontradas em [6], de Francis e o teorema de Quine [27]. Os principais teoremas e definições dessa seção estão no artigo [2].

3.3.1 Família Normal de Curvas Planas

Definição 3.8 Uma *família normal* de curvas planas é uma imersão estável $h : S^1 \rightarrow R^2$, de um conjunto finito de círculos orientados no plano.

No caso particular, dizemos que a **família normal** γ é a imersão de três círculos positivamente orientados, no plano, h_1, h_2 e h_3 , sendo que h_3 está na região limitada por h_2 , que por sua vez, está na região limitada por h_1 . Além disso, h_1 e h_2 não possuem cruzamentos e h_3 possui quatro auto-interseções e grau menos três.

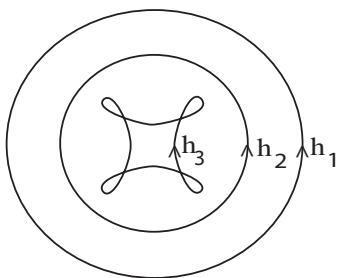


Figura 3.3: Família Normal γ .

Em uma família normal de curvas, o número de pontos duplos (com duas pré-imagens) $q \in \mathbb{R}^2$ é finito, pois as curvas da imagem são fechadas e sem tangência.

Definição 3.9 Chamaremos de *eliminação do ponto duplo* q de uma família normal h , o processo de trocar dois subarcs de h que passam pelo ponto q , respeitando suas respectivas orientações, como ilustra a Figura 3.4.

Definição 3.10 Os *círculos gaussianos* de uma imersão são as curvas obtidas após a eliminação dos pontos duplos.

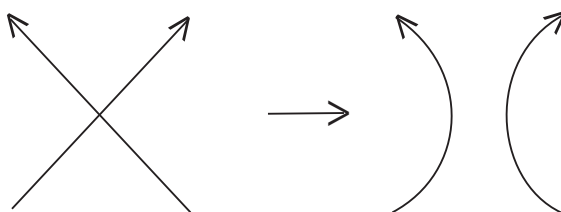


Figura 3.4: Eliminação de pontos duplos.

Observação 3.11 Se a curva h é cortada em todos os seus pontos duplos, a nova família normal de curvas obtida, h' , consiste de uma coleção finita de curvas simples, fechadas e orientadas, tal que $\tau(h) = \tau(h')$, onde τ é o grau de h e h' .

3.3.2 Radial de uma Família Normal

Vimos pela projeção estereográfica, o homeomorfismo $S^2 \setminus \{p\} \simeq \mathbb{R}^2$, sendo p um ponto qualquer de S^2 . Consideramos o ponto p como sendo o ponto ∞ de S^2 .

Observação 3.12 Seja α um conjunto de meridianos da esfera S^2 , concorrentes ao ponto infinito ∞ . Pela projeção estereográfica de $S^2 \setminus \{\infty\}$, α torna-se um conjunto de retas no plano, em direção ao infinito.

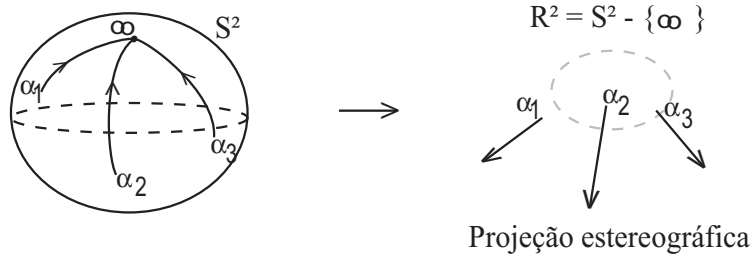


Figura 3.5: Meridianos concorrentes ao infinito.

Pela projeção estereográfica, podemos analisar o conjunto de retas α no plano. Com isso, podemos estabelecer condições para que α seja um radial para uma família normal h .

Definição 3.13 Um conjunto de semi-retas α é um **radial** para uma família normal h , se estiver em uma posição geral, ou seja, se x é um ponto em comum de h e α satisfizer as seguintes condições:

- (1) $x \neq \infty$,
- (2) x não é um ponto duplo de h ,
- (3) x não é o ponto inicial do raio que o contém,
- (4) h intersecta α transversalmente em x .

Definição 3.14 O radial α de uma família normal h é dito **suficiente**, se existe pelo menos um cruzamento em cada curva membro de h e no mínimo um cruzamento em cada círculo Gaussiano negativamente orientado no plano $S^2 \setminus \{\infty\}$.

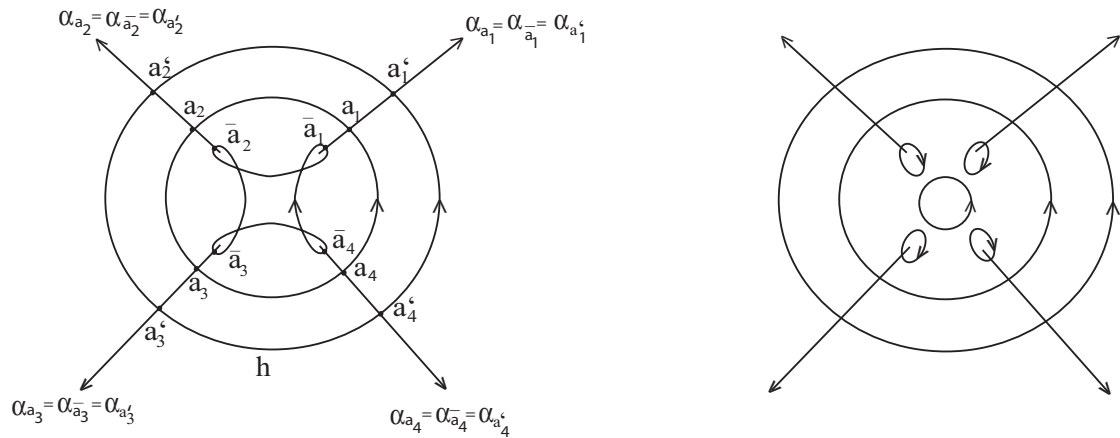


Figura 3.6: Radial e corte da família normal γ .

Exemplo 3.15 A Figura 3.6 ilustra o corte da família normal γ e um radial α . Cada curva componente de γ contém pelo menos um cruzamento com α e no total, γ possui doze cruzamentos. Após o corte, obtemos três círculos Gaussianos positivamente orientadas e quatro círculos Gaussianos negativamente orientadas. Observe que existe um cruzamento em cada círculo Gaussiano negativamente orientado. Logo, α é um radial suficiente para γ .

Vamos agora estudar os pontos em comum entre uma família normal e um radial para esta família normal.

3.3.3 Emparelhamento Efetivo e Transitivo

Notação: Denotaremos por $X(h, \alpha)$, o conjunto dos pontos em comum da família normal h e do radial α , ou seja, os cruzamentos entre h e α . E para $x \in X(h, \alpha)$, denotaremos por α_x o raio que passa por x , e por h_x a curva fechada na família h que passa por x .

Como a família normal h e cada radial α_i são orientados, seus cruzamentos naturalmente recebem um sinal.

Definição 3.16 O cruzamento x é dito **positivo**, se a curva membro h_x de h cruza da direita para a esquerda do radial α_x que o contém, orientado do ∞ para x ; caso contrário, o cruzamento x é dito **negativo**.

A Figura 3.7 ilustra localmente, um radial α para uma família normal h , com $x, y \in X(h, \alpha)$, sendo x um cruzamento negativo e y positivo.

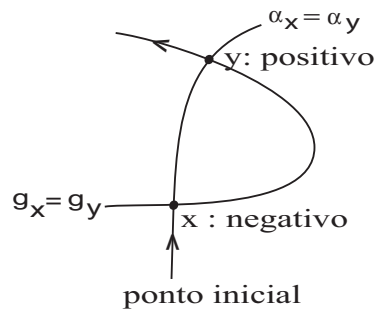


Figura 3.7: Cruzamentos positivo e negativo.

Exemplo 3.17 Os cruzamentos entre a família normal γ e o radial α , mostrados na Figura 3.6, são $X(h, \alpha) = \{a_1, \bar{a}_1, a'_1, a_2, \bar{a}_2, a'_2, a_3, \bar{a}_3, a'_3\}$, sendo que $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ e \bar{a}_4 são negativos e os demais positivos.

Os elementos do conjunto de cruzamentos entre uma família normal h e o radial α , $X(h, \alpha)$, podem ser permutados entre si. Dentre essas permutações, temos:

Definição 3.18 A permutação que leva cada cruzamento x no seu sucessor na componente h_x de h , na orientação de h_x , é dita **permutação sucessor** e é denotada por S .

Exemplo 3.19 Na Figura 3.8, partindo do ponto a_1 e seguindo a orientação de h , obtém-se a sequência de cruzamentos (a_1, a_2, a_3, a_4) . Seguindo a orientação de h após o cruzamento a_4 , retornamos ao cruzamento inicial a_1 , ou seja, fechamos o ciclo. Percorrendo as outras curvas membros de h , obtemos a permutação sucessor $S = (a_1, a_2, a_3, a_4)(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4)(a'_1, a'_2, a'_3, a'_4)$. Os cruzamentos sucessores são denotados como $a_1^S = a_2, a_2^S = a_3$, ou seja, o sucessor de a_1 é a_2 , o sucessor de a_2 é a_3 e assim por diante.

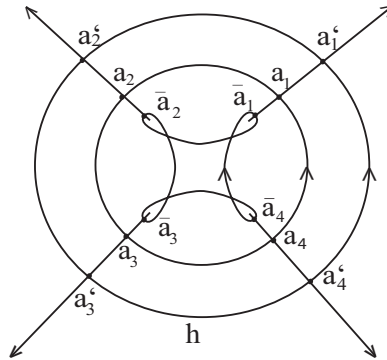


Figura 3.8: Um radial para a família normal γ .

Definição 3.20 Sejam α um radial suficiente para uma família normal h e $X(h, \alpha)$ o conjunto dos cruzamentos entre h e α , uma permutação P , que é o produto de pares disjuntos de $X(h, \alpha)$, é dita um **emparelhamento**.

Definição 3.21 Um emparelhamento P em $X(h, \alpha)$ é dito **efetivo** se possui exatamente a mesma quantidade de pares e de cruzamentos negativos, ou seja, se em cada par do emparelhamento P existe exatamente um cruzamento negativo.

Exemplo 3.22 Na Figura 3.9, ilustramos um emparelhamento dos cruzamentos entre o radial suficiente α e a família normal γ , ilustrados na Figura 3.8. Os pares do emparelhamento são representados pelos cruzamentos extremos de cada radial. Neste caso, o emparelhamento é dado por $P = (\bar{a}_1, a_1)(\bar{a}_2, a_2)(\bar{a}_3, a'_3)(\bar{a}_4, a'_4)$. Como em cada par temos um cruzamento negativo \bar{a}_i , segue que este emparelhamento é efetivo.

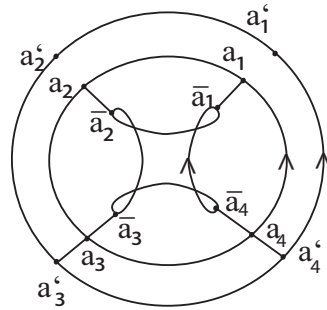


Figura 3.9: Um radial para a família normal γ .

A permutação sucessor S pode ser decomposta em permutações cíclicas disjuntas, como é o caso da permutação sucessor do exemplo 3.19 e os seus cruzamentos podem ser transitados de uma componente conexa de h para outra, através do emparelhamento P .

Definição 3.23 Uma permutação P é dita **transitiva** em S , se é transitiva no conjunto das componentes conexas de h .

Em outras palavras, uma permutação P é transitiva se possui pelo menos um par em cada componente conexa de h .

Observação 3.24 A permutação P do Exemplo 3.22 é transitiva, pois possui pelo menos um par em cada componente de h .

Notação: A permutação $R = SP$ é a composição da permutação sucessor S com o emparelhamento P .

Em alguns casos, a permutação R pode ser decomposta em ciclos disjuntos e estes ciclos podem limitar regiões homeomorfas a discos.

Exemplo 3.25 A Figura 3.10, ilustra em (a), o emparelhamento P dos cruzamentos de $X(\gamma, \alpha)$, visto no Exemplo 3.22. Os pontos final e inicial de cada radial α_i representam os pares de P . E em (b), os discos limitados pela permutação

$$R = SP = (a'_1, a'_2, \bar{a}_3, a'_4)(\bar{a}_1, a_2, a_3, a_4)(a'_1, \bar{a}_2, a'_3, \bar{a}_4).$$

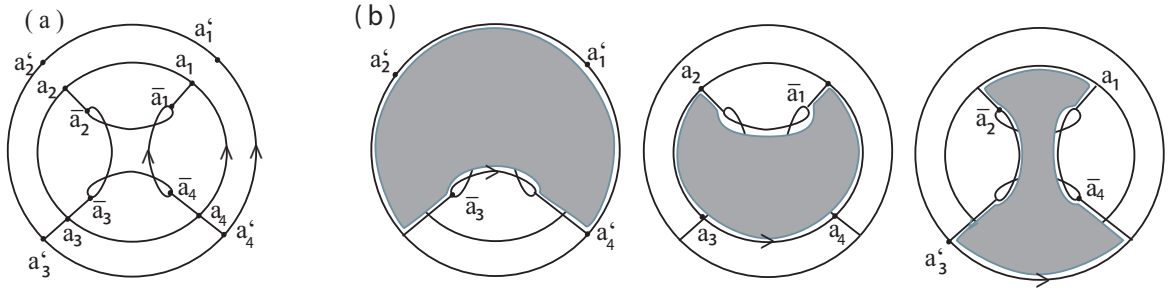


Figura 3.10: Exemplo de decomposição cíclica de $R = SP$.

Partindo de um cruzamento, segue a permutação sucessor S no sentido determinado pela família normal h e em seguida aplica o emparelhamento P . Os discos são construídos por sucessivas operações como esta, até retornar ao cruzamento inicial.

3.3.4 Radial Suficiente

As seguintes proposições 3.26 e 3.30, demonstradas por Francis em [6], relacionam um radial suficiente α para uma família normal h , um emparelhamento transitivo e efetivo na permutação sucessor S e o número de permutações cíclicas da permutação $R = SP$, com a existência de uma imersão de uma superfície no plano, tal que essa imersão, restrita ao bordo da superfície, é a família normal h .

Proposição 3.26 *Sejam h uma família normal de curvas fechadas, α um radial suficiente, $R = SP$ a permutação obtida pela composição de S e P e*

- ρ : número de curvas fechadas em h ,
- τ : o grau de h ,
- v : número de cruzamentos negativos em $X(h, \alpha)$,
- S : permutação sucessor,
- P : emparelhamento transitivo e efetivo em S ,
- ζ : número de permutações cíclicas disjuntas em $R = SP$, e
- $\mu = v + \tau - \zeta$: número esperado de valores singulares.

Se $\mu = 0$, existe uma imersão $G : M \rightarrow \mathbb{R}^2 = S^2 \setminus \{\infty\}$, de uma superfície M compacta, orientada e conexa, de gênero $g = \frac{2+v-\rho-\zeta}{2}$ tal que $G|_{\partial M} = h$, onde a orientação de ∂M é induzida pela de M .

Observação 3.27 *Se uma aplicação $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ não possui valores singulares, então não possui pontos singulares, portanto sua diferencial df_p é injetiva para todo $p \in M$, daí f é uma imersão. A Proposição 3.26 restringe f ao bordo ∂M da superfície M .*

Exemplo 3.28 A Figura 3.10 ilustra um emparelhamento P para a família normal γ e os três ciclos obtidos pela permutação $R = SP$. De acordo com a Proposição 3.26, temos:

$$\rho = 3 \quad \tau = -1 \quad v = 4$$

$$S = (a', b', c', d')(a, b, c, d)(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$$

$$P = (\bar{a}, a)(\bar{b}, b)(\bar{c}, c)(\bar{d}, d')$$

$$\zeta = 3,$$

logo,

$$\mu = v + \tau - \zeta = 4 - 1 - 3 = 0.$$

Além disso,

$$g = \frac{2 + v - \rho - \zeta}{2} = \frac{2 + 4 - 3 - 3}{2} = 0.$$

Neste caso, podemos considerar M como sendo uma superfície com gênero zero, contendo três bordos de curvas, sendo dois deles bordos de discos e o outro, bordo de uma vizinhança positiva de uma curva que contém quatro cúspides e nenhuma auto-interseção. A imersão destes bordos de curvas no plano é exatamente a família normal γ .

Exemplo 3.29 A Figura 3.11 (a) ilustra uma família normal h composta por uma única componente, com três auto-interseções e $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3$ um radial suficiente para h . Os cruzamentos entre h e α são dados por $X(h, \alpha) = \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3\}$, sendo que os cruzamentos b'_i são negativos. Em (b), temos um emparelhamento para os cruzamentos entre h e α e em (c), a decomposição em dois ciclos de $R = SP$, onde:

$$S = (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3),$$

$$P = (a_1, b_1)(a_2, b_2)(a_3, b_3).$$

Neste caso, pela Proposição 3.26, temos

$$\rho = 1, \quad \tau(h) = -1 \quad v = 3 \quad e \quad \zeta = 2,$$

ou seja,

$$\mu = v + \tau - \zeta = 3 - 1 - 2 = 0.$$

Além disso,

$$g = \frac{2 + v - \rho - \zeta}{2} = \frac{2 + 3 - 1 - 2}{2} = 1.$$

Neste caso, M é uma superfície com gênero $g(M) = 1$, contendo um bordo de curva, tal que a imersão desse bordo em $S^2 \setminus \{\infty\}$ é exatamente h .

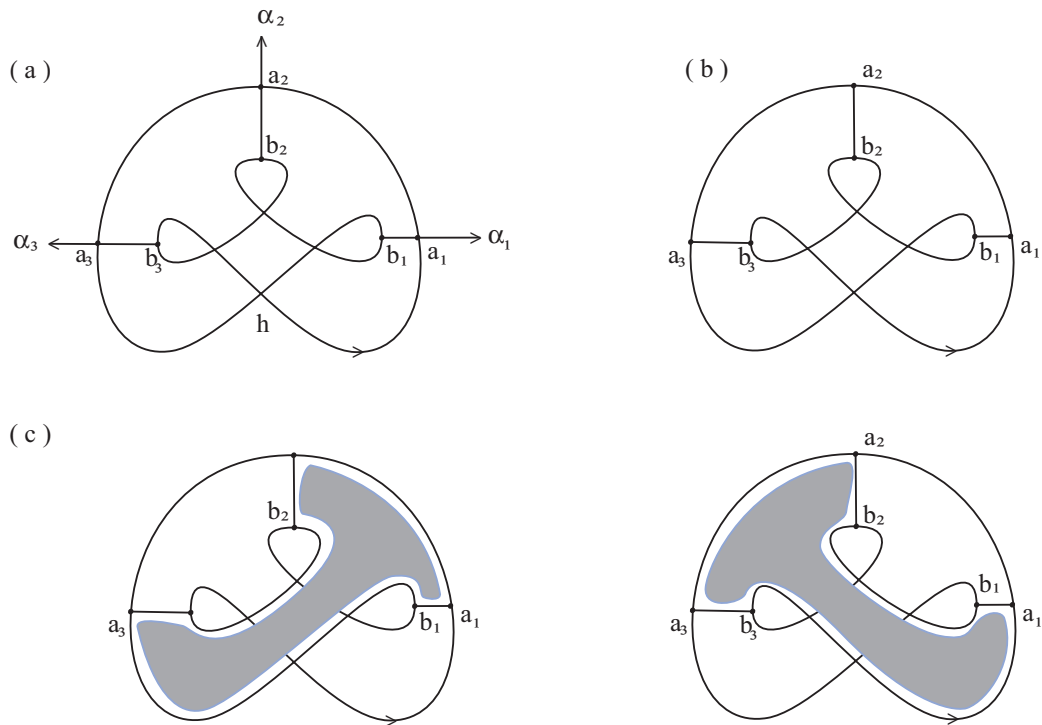


Figura 3.11: Um emparelhamento P para a família normal γ .

Proposição 3.30 *Se G é uma imersão em $\mathbb{R}^2 = S^2 \setminus \{\infty\}$ de uma superfície M compacta, orientada, conexa e com bordo, tal que $h = G|_{\partial M}$ é uma família normal com ρ curvas fechadas e τ número de voltas; α é um radial suficiente para h com v cruzamentos negativos em $X(h, \alpha)$; S é a permutação sucessor induzida por (h, α) e P é o emparelhamento efetivo induzido por G , então P é transitivo em S e existe um difeomorfismo $H : M_P \rightarrow M$ que preserva a orientação tal que $G_P = G \circ H$, onde M_P e a imersão $G_P : M_P \rightarrow \mathbb{R}^2 = S^2 \setminus \{\infty\}$ são aqueles da Proposição 3.26. Além disso, $\mu = v + \tau - \zeta$ deve ser igual a 0.*

$$\begin{array}{ccc}
 M_P & & \\
 H \downarrow & \searrow G_P & \\
 M & \xrightarrow{G} & \mathbb{R}^2
 \end{array}$$

Em outras palavras, se existe uma imersão G de uma superfície M no plano, satisfazendo as condições da proposição 3.30, então podemos fazer um arranjo, como indica o diagrama comutativo e assim, obter uma imersão mais simples.

3.3.5 O Mínimo de Pares de um Emparelhamento em Cada Curva

Lema 3.31 *Sejam h uma família normal com $n + 1$ componentes conexas, α um radial suficiente para h , $X(h, \alpha)$ o conjunto dos cruzamentos entre h e α , S a permutação sucessor e P um emparelhamento efetivo e transitivo. Considerando que n componentes de h possuem $2n$ cruzamentos positivos cada e que a outra componente possui $2n$ cruzamentos negativos, se P possui apenas um par em alguma das n componentes de h , então existe um ciclo da permutação $R = SP$, que não limita uma região homeomorfa a um disco.*

Demonstração: Seja x um cruzamento positivo de $X(h, \alpha)$, tal que x é único da componente de h que o contém, que pertence a um par de P . Aplicando a permutação $R = SP$ a partir de x , percorremos todo o círculo que o contém, em seguida, percorremos parte da curva que contém os cruzamentos negativos, voltamos para algum outro círculo sem cruzamentos negativos, e assim por diante. No início da permutação, percorremos todo o círculo que contém x e essa parte do ciclo de $R = SP$ limita uma região homeomorfa a um disco. Mas ao continuarmos a permutação, damos mais voltas e assim, o ciclo deixa de limitar uma tal região. \square

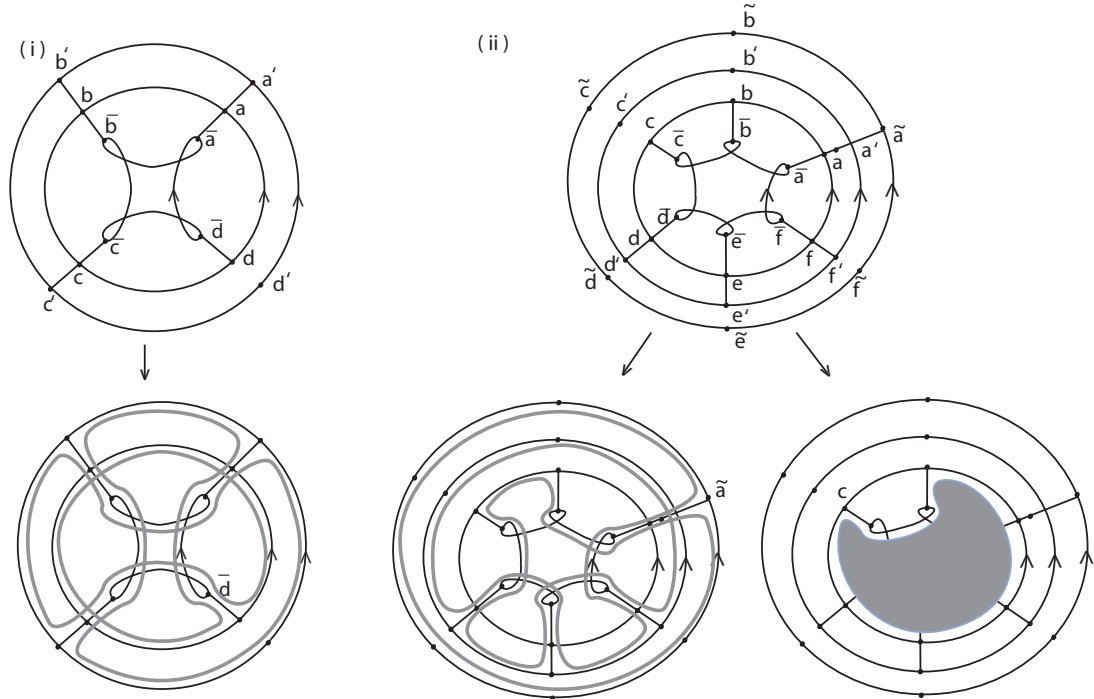


Figura 3.12: Regiões delimitadas pelos ciclos de $R = SP$.

Exemplo 3.32 *Na Figura 3.12 (i), ilustramos um emparelhamento para a família normal γ , tal que o cruzamento \bar{d} é o único da componente de γ que o contém, que pertence à*

P . O único ciclo da permutação $R = SP$, obtida a partir de \bar{d} não limita uma região homeomorfa a um disco.

Em (ii), a família normal h possui quatro componentes positivamente orientadas, sendo que a componente mais interna possui seis cruzamentos negativos. O cruzamento \tilde{a} é o único da sua componente que pertence a algum par de P . A permutação $R = SP$, a partir de \tilde{a} gera um ciclo que não limita uma região homeomorfa a um disco. Por outro lado, o círculo de h que contém o cruzamento c , possui mais um cruzamento pertencente à P . Logo, aplicando $R = SP$, a partir de c , obtemos um ciclo que limita uma região homeomorfa a um disco.

Lema 3.33 *Os ciclos que não delimitam uma região homeomorfa a um disco são maiores que os ciclos que delimitam uma tal região.*

Demonstração: De fato, para delimitar uma região não homeomorfa a um disco, precisamos de mais que uma rotação para fechar o ciclo. E para delimitar uma região homeomorfa a um disco, precisamos somente de uma rotação. \square

A Figura 3.12 (ii) ilustra estes dois tipos de ciclos e os seus respectivos tamanhos.

Proposição 3.34 *Sejam h uma família normal com $n + 1$ componentes conexas e α um radial suficiente para h . Se o emparelhamento P possui exatamente dois pares em cada componente conexa de h , então o número máximo de ciclos de $R = SP$ é $\zeta = n + 1$, onde S é a permutação sucessor.*

Demonstração: Sejam uma família normal h com $n + 1$ componentes conexas, α um radial suficiente para h , S a permutação sucessor e P o emparelhamento induzido por S , aplicando a permutação $R = SP$, partindo de um cruzamento $a_1 \in X(h, \alpha)$, tal que o seu sucessor é levado para o mesmo círculo por P , obtemos um ciclo que limita uma região homeomorfa a um disco, como ilustra o terceiro disco da Figura 3.10(b).

Agora, para cada uma das n curvas de h com cruzamentos positivos, aplicamos $R = SP$, partindo do cruzamento tal que o seu sucessor não é levado pelo emparelhamento P para o mesmo círculo. Assim percorremos o círculo em que ele se encontra até o outro cruzamento, passamos pela componente que possui cruzamentos negativos e retornamos ao cruzamento inicial, como ilustram os dois primeiros discos da Figura 3.10(b). Esta passagem é feita para cada círculo de h , cujos cruzamentos são positivos. De modo geral, se h tiver $n + 1$ componentes conexas, então o número de ciclos de $R = SP$ é $\zeta = n + 1$.

\square

Proposição 3.35 *Seja h uma família normal com $n + 1$ componentes conexas, α um radial suficiente de h , $X(h, \alpha)$ o conjunto dos cruzamentos entre h e α , S a permutação sucessor e P um emparelhamento efetivo e transitivo. Considerando que n componentes de h possuem $2n$ cruzamentos positivos e que a outra componente possui $2n$ cruzamentos negativos, se o número de permutações cíclicas em $R = SP$ for $\zeta = \rho = n + 1$, $n \geq 1$, onde ρ é o número de curvas fechadas em h , então P deve possuir no mínimo dois pares de cada uma dessas n curvas.*

Demonstração: Se P não possui um par em cada uma das n curvas, cujos cruzamentos são positivos, então P não é transitivo, contradição! Agora, se P possui exatamente um par em alguma das n curvas, então pelos Lemas 3.31 e 3.33, um dos ciclos de R não é homeomorfo a um disco, ou seja, este ciclo é maior. Com isso, o número de ciclos é menor que o número de curvas, ou seja, $\zeta < n + 1$. Absurdo! Portanto, P deve possuir no mínimo dois pares em cada uma das n curvas. \square

Exemplo 3.36 *A Figura 3.10 ilustra a família normal γ , na qual, $n = 2$ e $\rho = 3$. Neste caso, $\zeta = \rho = n + 1$, e como vemos, cada um dos círculos com cruzamentos positivos, possui dois pares do emparelhamento P .*

3.3.6 Orientação do Complemento de Conjunto Singular

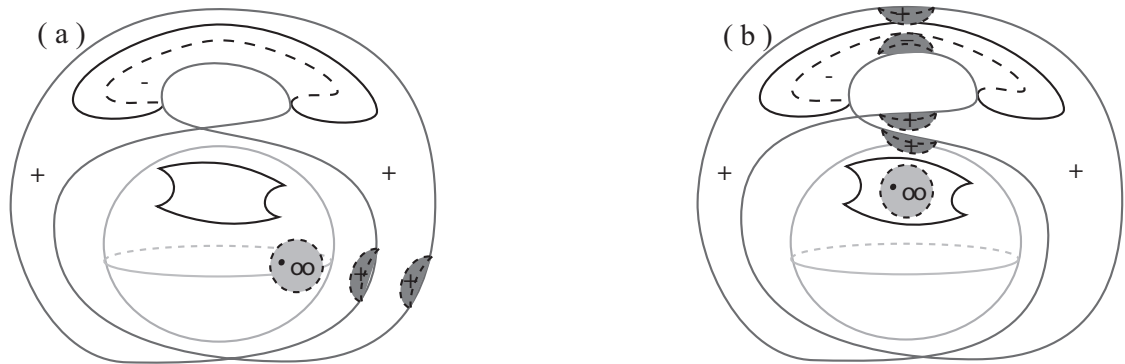


Figura 3.13: Pré-imagem de uma vizinhança.

Lema 3.37 *Seja $f : S^2 \rightarrow S^2$ uma aplicação estável, tal que $\deg(f) = 2$. Se U_∞ é uma vizinhança aberta de ∞ , ponto da esfera da imagem, tal que $f(\Sigma f) \cap \bar{U}_\infty = \emptyset$, onde \bar{U}_∞ é o fecho de U_∞ , então $f^{-1}(U_\infty)$ consiste de:*

- (1) *Dois discos cuja orientação é preservada por f ; ou*

(2) n discos cuja orientação é preservada por f e $n - 2$ discos cuja orientação é invertida por f ($n \geq 3$).

Demonstração: Se f é uma aplicação da esfera na esfera, com grau dois, pela Definição 1.88, o grau da aplicação f em cada valor regular y é $\deg_y(f) = 2 = \deg(f)$. Em outras palavras, a diferença entre o número de pontos positivos e o número de pontos negativos em $f^{-1}(y)$ é dois, ou seja, $f^{-1}(y)$ é constituído por dois pontos cuja orientação é preservada por f , ou n pontos cuja orientação é preservada por f e $n - 2$ pontos cuja orientação é invertida por f . Daí, surgem as duas possibilidades para $f^{-1}(U_\infty)$: dois discos cuja orientação é preservada por f ou n discos cuja orientação é preservada por f e $n - 2$ discos cuja orientação é invertida por f ($n \geq 3$). \square

Exemplo 3.38 A Figura 3.13 ilustra uma aplicação $g = f \circ j : S^2 \rightarrow S^2$ com $\deg(g) = 2$. Escolhemos um ponto ∞ em cada um dos componentes do complementos do contorno irreduzível sobre a esfera e U_∞ uma vizinhança aberta do ponto ∞ . Em (a), o ponto ∞ encontra-se do lado em que apontam as cúspides, neste caso, $g^{-1}(U_\infty)$ consiste de dois discos cuja orientação é preservada por g , e em (b) o ponto ∞ encontra-se do lado oposto em que apontam as cúspides, neste caso, $g^{-1}(U_\infty)$ consiste de três discos cuja orientação é preservada por g e um disco cuja orientação é invertida por g .

Proposição 3.39 Se $f : S^2 \rightarrow S^2$ é uma aplicação estável, tal que $\deg(f) = 2$ e o conjunto singular Σf é conexo, então a esfera do domínio de f pode ser dividida em quatro partes: dois discos cuja orientação é preservada por f ; uma região com três bordos de curvas fechadas; duas regiões homeomorfas a um cilindro e um disco cuja orientação é invertida por f , como ilustra a parte superior da Figura 3.14.

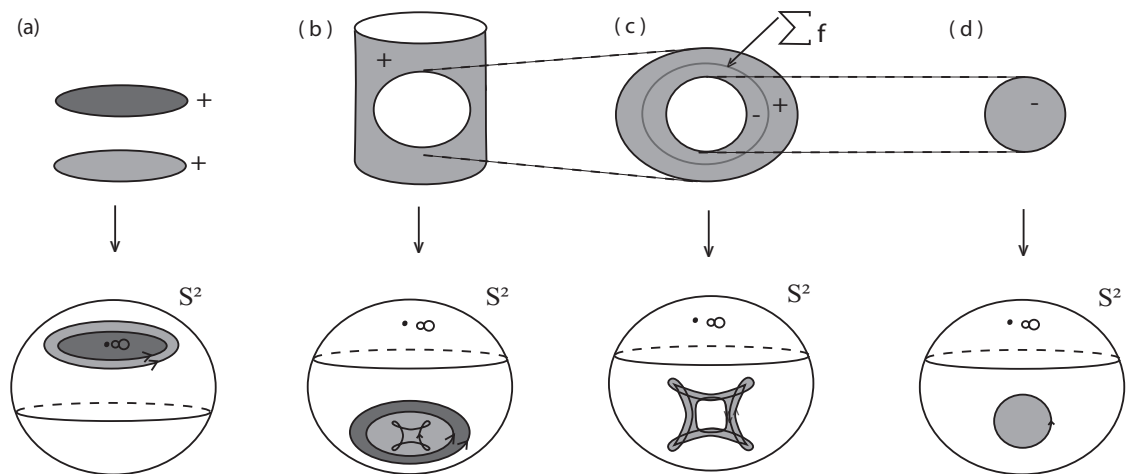


Figura 3.14: Complemento do conjunto singular do contorno minimal.

Demonstração: Considerando o primeiro caso do Lema 3.37, podemos dividir a esfera do domínio de f em: o fecho de $f^{-1}(U_\infty)$, que consiste de dois discos cuja orientação é preservada por f ; o conjunto dos pontos de S^2 cuja orientação é preservada por f , menos $f^{-1}(U_\infty) \cup V_{\Sigma f}$, onde $V_{\Sigma f}$ é a vizinhança de Σf , que consiste de uma região com três bordos de curvas fechadas; o fecho das vizinhanças positiva e negativa de Σf , onde cada uma delas é uma região homeomorfa a um cilindro e o conjunto dos pontos de S^2 cuja orientação é invertida por f , menos $V_{\Sigma f}$, que consiste de um disco cuja orientação é invertida por f . \square

A parte superior da Figura 3.14 ilustra, da esquerda para a direita, a divisão da esfera do domínio da aplicação $f : S^2 \rightarrow S^2$, tal que $\deg(f) = 2$ e Σf conexo, conforme a Proposição 3.39. De modo geral, seguindo as setas, esta figura ilustra a aplicação restrição de f a cada uma dessas quatro partes, sendo que as cores distintas representam o grau da aplicação, que é dois.

Na seguinte proposição, vamos verificar se existe uma imersão de cada uma das quatro partes do complemento do conjunto singular de f , em $R^2 = S^2 \setminus \{\infty\}$.

Proposição 3.40 *Seja $f : S^2 \rightarrow S^2$ uma aplicação estável, cujo complemento do conjunto singular pode ser dividido em quatro partes, como na Proposição 3.39. Existe imersão de cada uma dessas quatro partes de S^2 em $R^2 = S^2 \setminus \{\infty\}$.*

Demonstração: Primeiro observamos que todos os discos, ilustrados em (a) e (d) da Figura 3.14, do complemento do conjunto singular de f podem ser imersos em $R^2 = S^2 \setminus \{\infty\}$. Observemos também que as regiões em (c), homeomorfas a um cilindro também podem ser imersas em $R^2 = S^2 \setminus \{\infty\}$.

Vamos verificar se existe imersão em $R^2 = S^2 \setminus \{\infty\}$ da região de S^2 ilustrada em (b). Seja M a região de S^2 cuja orientação é preservada por f , menos $f^{-1}(U_\infty) \cup V_{\Sigma f}$, onde U_∞ é a vizinhança do ponto ∞ do domínio de f e $V_{\Sigma f}$ é a vizinhança do conjunto singular de f . Essa região contém três curvas com bordo, sendo duas delas bordos de círculos e a outra, bordo da vizinhança positiva de Σf .

Vamos considerar a imagem do bordo dessas três curvas fechadas, como uma família normal h e α um radial suficiente para h , no qual os pontos de cruzamentos entre h e α são dados por:

$$X(h, \alpha) = \{a, b, c, d, a', b', c', d', \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}\}.$$

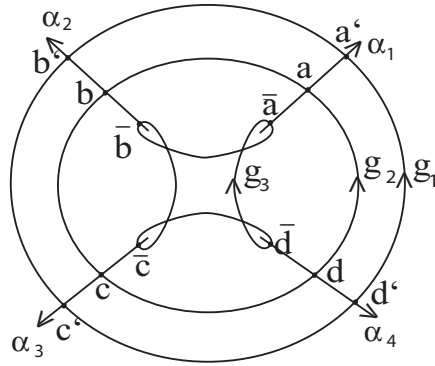


Figura 3.15: Cruzamentos entre h e α .

Os cruzamentos negativos de $X(h, \alpha)$ são $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ e \bar{d} e os outros cruzamentos são positivos.

Como h aceita difeomorfismos na fonte e na meta, então podemos considerar somente os emparelhamentos efetivos P_1, P_2, P_3 e P_4 :

$$\begin{aligned}
 P_1 &= (a', \bar{a})(b', \bar{b})(c', \bar{c})(d', \bar{d}), \\
 P_2 &= (a, \bar{a})(b', \bar{b})(c', \bar{c})(d', \bar{d}), \\
 P_3 &= (a, \bar{a})(b, \bar{b})(c', \bar{c})(d', \bar{d}), \\
 P_4 &= (a', \bar{a})(b, \bar{b})(c', \bar{c})(d, \bar{d})
 \end{aligned}$$

que podem ser vistos pela Figura 3.16, através dos pontos iniciais e finais de cada radial α_i .

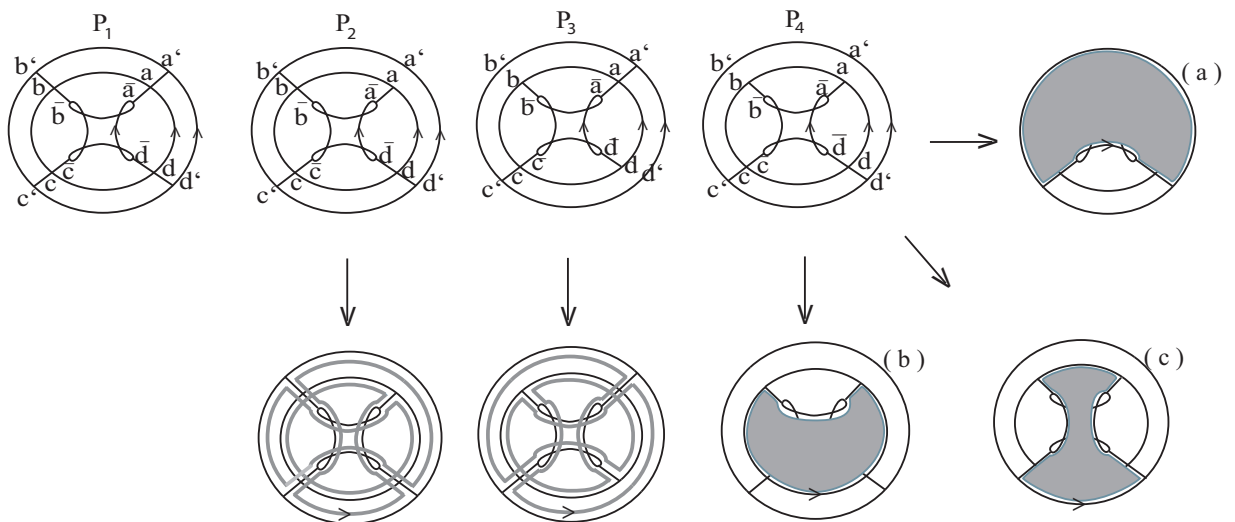


Figura 3.16: Emparelhamentos efetivos P_1, P_2, P_3 e P_4 .

Vamos verificar se existe uma imersão $G : M \rightarrow \mathbb{R}^2 = S^2 \setminus \{\infty\}$, para cada um dos quatro emparelhamentos, de acordo com as Proposições 3.26 e 3.30.

(a) Tipo 1 (P_1):

$$P_1 = (a', \bar{a})(b', \bar{b})(c', \bar{c})(d', \bar{d}).$$

Pela Definição 3.23, uma permutação é transitiva se ela o for nas componentes conexas de h . Como P_1 não contém nenhum par do círculo do meio de h , então P_1 não é transitivo. Logo, pela Proposição 3.30 este tipo não pode ser realizado por uma imersão de uma superfície conexa em R^2 .

(b) Tipo 2 (P_2):

Como P_2 é transitiva, vamos calcular μ , conforme estabelecido pelas Proposições 3.26 e 3.30. Para isto, é preciso encontrar a permutação $R = SP_2$, composição da permutação sucessor S com o emparelhamento P_2 , obtida a partir do cruzamento a' . Esta permutação é mostrada na Figura 3.16, apontada pela seta que parte do emparelhamento P_2 .

Temos que

$$R = SP_2 = (a', \bar{b}, c', \bar{d}, a, b, c, d, \bar{a}, b', \bar{c}, d').$$

Como vemos, R possui somente um ciclo, ou seja $\zeta = 1$ e neste caso, o ciclo não representa um disco.

Pela Proposição 3.26

$$\mu = v + \tau - \zeta' = 4 - 1 - 1 = 2 \neq 0.$$

Logo, pela Proposição 3.30, não existe imersão para o tipo 2.

Tipo 3 (P_3):

Analogamente ao tipo P_2 , $R = SP_3$ possui uma única permutação cíclica, sendo:

$$R' = SP_3 = (a', b', \bar{c}, d, a, \bar{b}, c', d', \bar{a}, b, c, \bar{d}),$$

de acordo com o contorno cinza da Figura 3.16 apontado pela seta que parte de P_3 .

Pela Proposição 3.26,

$$\mu = v + \tau - \zeta' = 4 - 1 - 1 = 2 \neq 0.$$

Logo, pela Proposição 3.30 não existe imersão para o tipo 3.

(d) Tipo 4 (P_4):

Como P_4 é transitivo, devemos encontrar $R = SP_4$:

$$R = SP_4 = (a', b', \bar{c}, d')(\bar{a}, b, c, d)(a, \bar{b}, c', \bar{d})$$

onde os três ciclos representam, respectivamente os discos mostrados em (a), (b) e (c) da Figura 3.16, apontados pelas setas que partem de P_4 .

Neste caso, o número de permutações cíclicas disjuntas em R é $\zeta = 3$, e daí,

$$\mu = v + \tau - \zeta' = 4 - 1 - 3 = 0.$$

Portanto, pela Proposição 3.26, existe uma imersão $G : M' \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde M' é uma superfície orientada, conexa e compacta, cujo gênero é $g = \frac{2+v-\rho-\zeta'}{2} = 0$, tal que $G|_{\partial M'} = h$, ou seja, M' pode ser a região M positiva com três bordos de discos, como queríamos. \square

Proposição 3.41 *Todas as aplicações correspondentes ao emparelhamento P_4 , definido na Proposição 3.40 são \mathcal{A} -equivalentes entre si.*

Demonstração: De fato, seja $G : M \rightarrow \mathbb{R}^2 = S^2 \setminus \{\infty\}$ uma aplicação correspondente ao emparelhamento P_4 . Dada $G' : N \rightarrow \mathbb{R}^2 = S^2 \setminus \{\infty\}$ outra aplicação correspondente à P_4 , pela Proposição 3.30, existe um difeomorfismo $H : N \rightarrow M$, que preserva a orientação e satisfaz $G' = Id \circ G \circ H$. \square

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{G'} & \mathbb{R}^2 \\ H \downarrow & & \downarrow Id \\ M & \xrightarrow{G} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

3.3.7 Decomposição do Complemento de um Conjunto singular Conexo

O complemento de um conjunto singular de uma aplicação estável f da esfera na esfera, é sempre composto por regiões homeomorfas a discos e discos com buracos, como por exemplo as aplicações ilustradas na Figura 3.1. As orientações de algumas destas regiões são preservadas por f e outras não.

Se o conjunto singular de f for conexo, retirando uma vizinhança deste no domínio, que é um cilindro, podemos decompor o complemento em discos e discos com buracos, como ilustra a Figura 3.17, generalizando a ilustração da Figura 3.14.

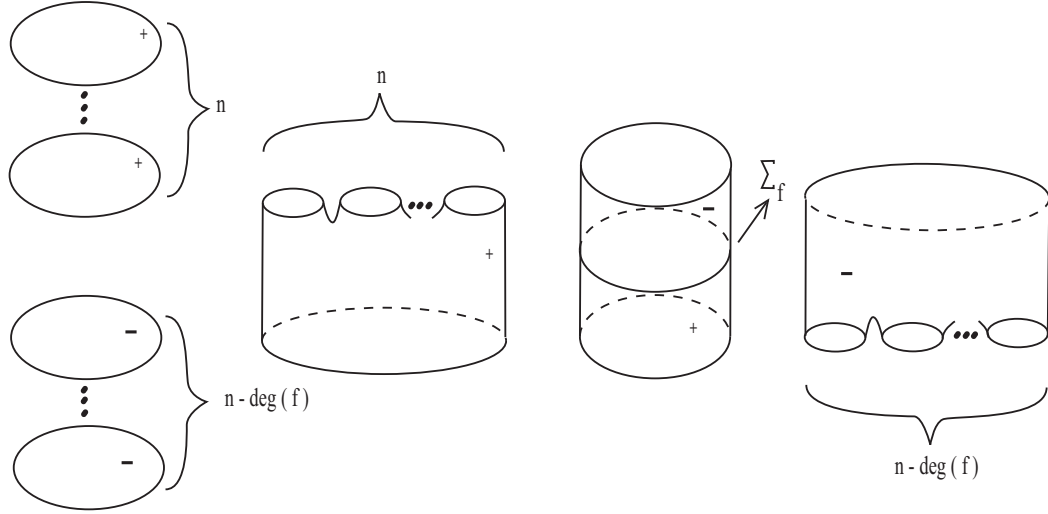


Figura 3.17: Complemento do conjunto singular.

Neste caso tem-se o seguinte:

Proposição 3.42 *Se $f : S^2 \rightarrow S^2$ é uma aplicação estável, tal que $\text{deg}(f) = 2$ e o conjunto singular Σf é conexo, então a esfera do domínio de f pode ser dividida em quatro partes: n discos cuja orientação é preservada por f e $n - 2$ discos cuja orientação é invertida por f ; uma região com $n + 1$ bordos de curvas fechadas; duas regiões homeomorfas a um cilindro e uma região com $n - 1$ bordos de curvas fechadas.*

Demonstração: Considerando o segundo caso do Lema 3.37, podemos dividir a esfera do domínio de f em: o fecho de $f^{-1}(U_\infty)$, que consiste de n discos cuja orientação é preservada por f e $n - 2$ discos cuja orientação é invertida por f ; o conjunto dos pontos de S^2 cuja orientação é preservada por f , menos $f^{-1}(U_\infty) \cup V_{\Sigma f}$, onde $V_{\Sigma f}$ é a vizinhança de Σf , que consiste de uma região com $n + 1$ bordos de curvas fechadas; o fecho das vizinhanças positiva e negativa de Σf , onde cada uma delas é uma região homeomorfa a um cilindro e o conjunto dos pontos de S^2 cuja orientação é invertida por f , menos $V_{\Sigma f}$, que consiste de uma região com $n - 2 + 1 = n - 1$ bordos de curvas fechadas. \square

A Figura 3.17 ilustra, da esquerda para a direita, a divisão da esfera do domínio da aplicação $f : S^2 \rightarrow S^2$, tal que Σf é conexo, conforme a proposição 3.42.

Proposição 3.43 *Seja $f : S^2 \rightarrow S^2$, cujo complemento do conjunto singular pode ser dividido em quatro partes, como na Proposição 3.42. Não existe imersão da região que contém n discos cuja orientação é preservada por f e $n - 2$ discos cuja orientação é invertida por f , em $R^2 = S^2 \setminus \{\infty\}$, ($n \geq 3$).*

Demonstração: Seja M a região positiva de S^2 , menos $f^{-1}(U_\infty) \cup V_{\Sigma f}$, onde U_∞ é a vizinhança do ponto ∞ da imagem de f e $V_{\Sigma f}$ é a vizinhança do conjunto singular de f . Neste caso, M é uma região com $n + 1$ bordos de discos, sendo n deles círculos e o outro, a vizinhança positiva do conjunto singular de f , que contém quatro pontos de cúspides ($n \geq 3$).

Consideramos a família normal h , como sendo a imagem dos $n + 1$ bordos das curvas fechadas de M , e α um radial suficiente para h , como mostra a Figura 3.18.

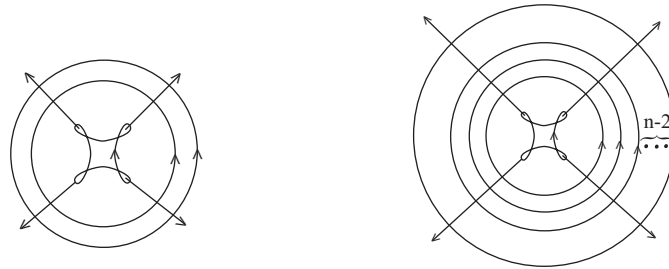


Figura 3.18: Radial para a família normal h .

A Figura 3.18 corresponde à um radial para a família normal γ , acrescida por $n - 2$ círculos.

Os únicos cruzamentos negativos, são aqueles pertencentes à curva vizinhança de Σf , ou seja, a curva mais interna.

De acordo com a Proposição 3.26, obtemos

$$\begin{aligned} \rho &: \text{número de curvas fechadas} = n + 1; \\ \tau &: \text{grau de } g = n - 3 \text{ e} \\ v &: \text{número de cruzamentos negativos} = 4. \end{aligned}$$

Pela Proposição 3.30, para obtermos uma imersão, devemos ter $\mu = v + \tau - \zeta = 0$, ou seja, $v + \tau = \zeta$ e daí, $\zeta = 4 + n - 3 = n + 1 = \rho$.

Daí, pela Proposição 3.35, devemos ter pelo menos dois pares do emparelhamento P em cada círculo de h . Além disso, como cada par do emparelhamento efetivo deve conter exatamente um cruzamento negativo, então $2n \leq v = 4$, ou seja, $n \leq 2$. Mas por hipótese, $n \geq 3$, logo não existe imersão para este caso.

□

3.3.8 Aplicações \mathcal{A} -Equivalentes de Grau Dois

O seguinte resultado garante que se duas aplicações estáveis e de grau dois, entre duas esferas, realizam o contorno minimal, então elas são \mathcal{A} -equivalentes.



Figura 3.19: Contornos minimais com grau dois.

Exemplo 3.44 A Figura 3.19 ilustra duas aplicações \mathcal{A} -equivalentes com grau dois que realizam o contorno minimal.

Teorema 3.45 Sejam $f, g : S^2 \rightarrow S^2$ duas aplicações estáveis que realizam o contorno minimal. Se $\deg(f) = \deg(g) = 2$, então f e g são \mathcal{A} -equivalentes.

Demonstração: Seja $f : S^2 \rightarrow S^2$ uma aplicação estável com $\deg(f) = 2$, que realiza o contorno minimal. Pelo Teorema 3.6, conjunto singular Σf é conexo e o seu contorno aparente α possui exatamente quatro cúspides e nenhuma auto-interseção, como ilustra a Figura 3.19.

Consideramos agora uma vizinhança U_∞ de ∞ , na imagem de f , pequena o suficiente, tal que $f(\Sigma_f) \cap \bar{U}_\infty = \emptyset$, onde \bar{U}_∞ é o fecho de U_∞ . Pela Proposição 3.39, $f^{-1}(U_\infty)$ consiste de dois casos: dois discos cuja orientação é preservada por f ou n discos cuja orientação é preservada por f e $n - 2$ discos cuja orientação é invertida por f , como exemplifica a Figura 3.13.

De acordo com a Proposição 3.42, podemos dividir o domínio de f em quatro partes: n discos cuja orientação é preservada por f e $n - 2$ discos cuja orientação é invertida por f , uma região com $n + 1$ bordos de curvas fechadas, duas regiões homeomorfas a um cilindro e uma região com $n - 1$ bordos de curvas fechadas, como ilustra a Figura 3.17.

Entretanto, pela Proposição 3.43, não existe imersão da região com $n - 1$ bordos de curvas fechadas, em $\mathbb{R}^2 = S^2 \setminus \{\infty\}$, logo vamos desconsiderar essa divisão.

Por outro lado, de acordo com a Proposição 3.39, também podemos dividir o domínio de f em quatro partes, como ilustra a Figura 3.20, que denotaremos por:

M_1 : os dois discos cuja orientação é preservada por f e com bordos denotados por S_{12}^1 e S_{12}^2 ;

M_2 : a região com três bordos que são S_{12}^1 , S_{12}^2 e S_{23} ;

M_3 : $= M_{31} \cup M_{32}$ as duas regiões homeomorfas ao cilindro, onde M_{31} tem como bordo S_{23} e $\alpha = \Sigma f$ e M_{32} tem como bordo S_{34} e α ;

M_4 : um disco cuja orientação é invertida por f .

Observemos que os sub-índices correspondem aos índices das componentes conectadas.

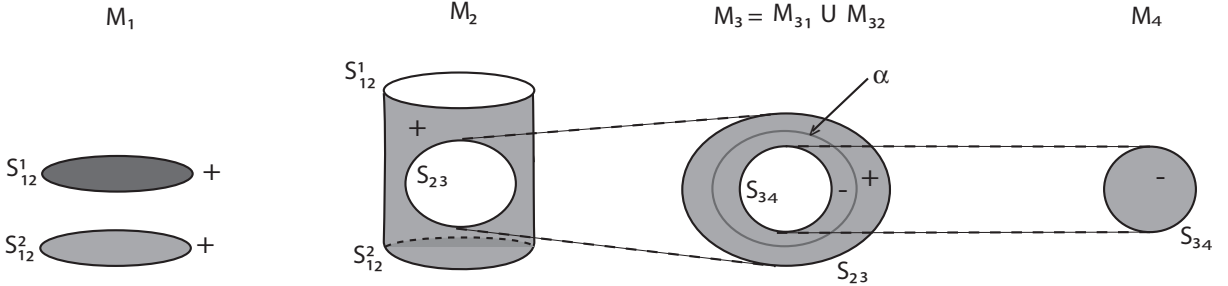


Figura 3.20: Divisão do domínio de f .

Pela Proposição 3.40, vimos que existe uma imersão em $\mathbb{R}^2 = S^2 \setminus \{\infty\}$, de cada uma dessas quatro partes.

Consideremos mergulhos $m_j : M_j \rightarrow \mathbb{R}^3$, para $i = 2, 3, 4$, tal que a projeção π , no plano $\mathbb{R}^2 = S^2 \setminus \{\infty\}$, dos bordos de $m_j(M_j)$, coincidam com a projeção estereográfica das curvas imagem de f em $S^2 \setminus \{\infty\}$, dos bordos das M_j , como ilustra a Figura 3.21 (a). Consideramos também que π não possui pontos singulares no interior de cada região, como ilustrado em (b).

Estas imersões devem ser de forma que podemos obter uma aplicação suave (pág. 108,[[25]])

$Im = m_2 \oplus m_{31} \oplus m_{32} \oplus m_4 : M_2 \cup M_{31} \cup M_{32} \cup M_4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde $Im(x) = m_j(x)$, se $x \in M_j$ e $Im(x) = m_l(x) = m_s(x)$, se $x \in M_l \cap M_s$, como ilustra a Figura 3.21 (c).

Consideramos as aplicações h_j , $j = 2, 3, 4$, como a composição $\pi \circ m_j$ e exigimos que π seja regular em todos os pontos interiores de $Im(M_2 \cup M_{31} \cup M_{32} \cup M_4 - \alpha)$, onde $\alpha = M_{31} \cap M_{32}$ é uma curva com quatro pontos de cúspides e nenhuma auto-interseção, como ilustra a Figura 3.21 (d). Neste caso, a aplicação $(h_{31} \oplus h_{32}) : M_{31} \cup M_{32} \rightarrow \mathbb{R}^2 = S^2 \setminus \{\infty\}$ tem a curva α como conjunto singular, que contém quatro pontos de cúspides e nenhuma auto-interseção.

Agora consideremos a imersão $m_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ da seguinte forma:

- os bordos $m_1(S_{12}^1 \cup S_{12}^2) = m_2(S_{12}^1 \cup S_{12}^2)$.
- a imersão $(i_1 \oplus i_2) : M_1 \cup M_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é suave em todos os pontos, de forma que $(h_1 \oplus h_2) : M_1 \cup M_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ seja regular em todos os pontos.
- o centro dos dois discos de M_1 são levados no infinito do \mathbb{R}^3 , de forma que a projeção de $i_1(M_1)$ cobre, com duas pré-imagens em quase todos os pontos.
- o complementar $Im = h_2 \oplus h_{31} \oplus h_{32} \oplus h_4 : M_2 \cup M_{31} \cup M_{32} \cup M_4 \rightarrow \mathbb{R}^2 = S^2 \setminus \{\infty\}$, de $h_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{R}^2 = S^2 \setminus \{\infty\}$, tem em comum somente as duas curvas imagens de $S_{12}^1 \cup S_{12}^2$.

Como $M_1 \cup M_2 \cup M_{31} \cup M_{32} \cup M_4 = S^2$, construímos a aplicação suave $H = h_1 \oplus h_2 \oplus h_{31} \oplus h_{32} \oplus h_4 : S^2 = M_1 \cup M_2 \cup M_{31} \cup M_{32} \cup M_4 \rightarrow \mathbb{R}^2 = S^2 \setminus \{\infty\}$, que tem como conjunto singular a curva α , como ilustra a Figura 3.21 (e) e (f).

Tomando a inversa da projeção estereográfica P e compondo com H , podemos obter a aplicação original $f : S^2 \rightarrow S^2$, como ilustrados na Figura 3.21 (g) e (h).

Por outro lado, pela Proposição 3.41, todas as imersões da região que contém três bordos de disco, no plano, são \mathcal{A} -equivalentes. E considerando essas outras imersões, obtemos aplicações \mathcal{A} -equivalentes a f , como queríamos. \square

Para completar o estudo, vamos estabelecer condições em relação ao número de cúspides e de auto-interseções, para que o contorno aparente de uma aplicação estável $f : S^2 \rightarrow S^2$, com $deg(f) \geq 2$ seja contorno minimal.

3.4 Aplicações entre 2-Esferas com Grau $d \geq 2$

Vamos generalizar o argumento de que o contorno minimal de uma aplicação estável $f : S^2 \rightarrow S^2$, tal que $deg(f) \geq 2$, possui exatamente $2deg(f)$ cúspides e nenhuma auto-interseção. Para isto, novamente vamos utilizar o teorema de Quine [27] e algumas relações entre um polígono com $2deg(f)$ lados e o emparelhamento de seus vértices. Os resultados dessa seção são devidos à Demoto [2].

3.4.1 $2d$ -ágono e Emparelhamento de um $2d$ -ágono

Definição 3.46 *Um $2d$ -ágono é um polígono com $2d$ lados.*

Definição 3.47 *Um emparelhamento P de um $2d$ -ágono é a conexão de dois vértices por um arco.*

Definição 3.48 Um *mau-cruzamento* em um emparelhamento P é um cruzamento entre dois arcos que conectam vértices.

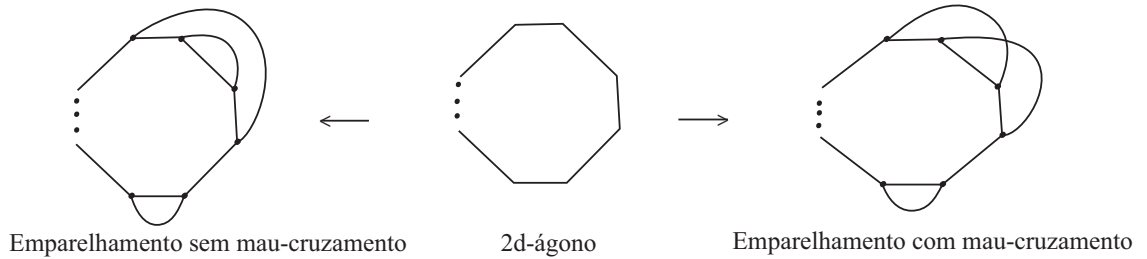


Figura 3.22: $2d$ -ágono e emparelhamento.

Podemos associar um $2d$ -ágono ao contorno irreduzível de uma aplicação.

Seja $f : S^2 \rightarrow S^2$ uma aplicação estável, tal que o contorno irreduzível $f(\Sigma f)$ contenha $2d$ cúspides e nenhuma auto-interseção. Os vértices de um $2d$ -ágono representam as cúspides de $f(\Sigma f)$.

A Figura 3.23 ilustra a vizinhança positiva de um contorno irreduzível de uma aplicação, contendo $2d$ cúspides, e o $2d$ -ágono correspondente.

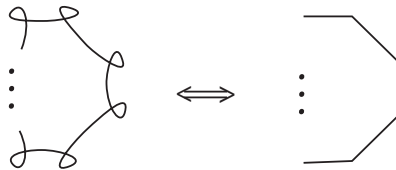


Figura 3.23: $2d$ -ágono.

Podemos associar um emparelhamento de um $2d$ -ágono, a partir de um emparelhamento P dos pontos de cruzamento entre h e α , onde α é um radial suficiente para uma família normal h .

Sejam α um radial suficiente para uma família normal h e o conjunto dos pontos de cruzamento $X(h, \alpha)$. Os vértices ligados do $2d$ -ágono são aqueles cujos cruzamentos negativos são transportados por P , para o mesmo círculo de h .

Exemplo 3.49 A Figura 3.24 ilustra dois emparelhamentos dos cruzamentos de uma família normal h contendo cinco curvas, com o radial suficiente α . Cada emparelhamento P é dado pelos cruzamentos inicial e final de cada radial α_i . E a partir de P , obtemos o emparelhamento do octógono.

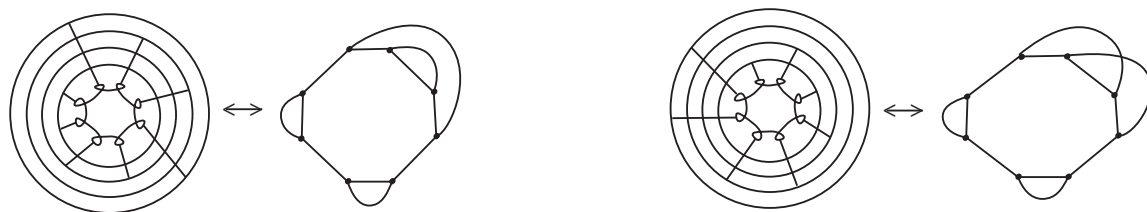


Figura 3.24: Conectando vértices de um $2d$ -ágono.

Observação 3.50 *Se dois pares não consecutivos de um emparelhamento P são levados em um mesmo círculo de h e outros dois pares de P , também não consecutivos, são levados no círculo mais interno de h , então ocorre um mau-cruzamento no emparelhamento do $2d$ -ágono correspondente à P .*

Lema 3.51 *Sejam h uma família normal, α um radial suficiente para h , P um emparelhamento efetivo e transitivo na permutação sucessor S e a permutação $R = SP$.*

- (1) *Se P gera um mau-cruzamento, então a permutação $R = SP$ possui um ciclo cuja região limitada não é homeomorfa a um disco, como mostra a Figura 3.25 (i) e (ii)(a).*
- (2) *Se P tiver exatamente dois pares consecutivos levados em um mesmo círculo, se aplicamos $R = SP$, obtemos um ciclo que limita uma região homeomorfa a um disco, como mostra a Figura 3.25 (ii)(b).*

Demonstração:

- (1) Se P gera um mau-cruzamento, se aplicamos a permutação $R = SP$, a partir de um cruzamento positivo, que causa este mau-cruzamento, percorremos o círculo em que ele se encontra até o próximo cruzamento contido nele, depois percorremos a curva interna, que possui cruzamentos negativos, retornamos a outro círculo com apenas cruzamentos positivos e assim por diante, até fechar o ciclo. Neste caso, não conseguimos fechar o ciclo em uma rotação, logo a região limitada por este não é homeomorfa a um disco.
- (2) Considere os dois cruzamentos consecutivos, pertencentes aos pares consecutivos e únicos de P , que são levados em um dado círculo de h . Partindo do segundo cruzamento e aplicando a permutação $R = SP$, percorremos o círculo em que ele se encontra até chegar ao primeiro cruzamento, em seguida, percorremos a curva cujos cruzamentos são negativos, até retornar ao cruzamento inicial. Deste modo, limitamos uma região homeomorfa a um disco.

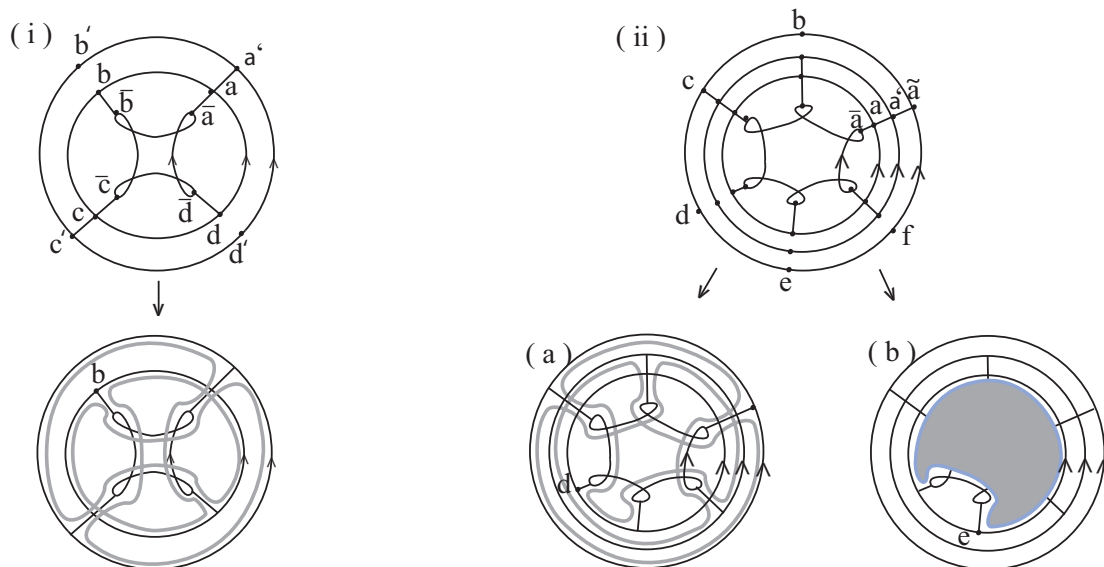


Figura 3.25: Permutação que gera mal-cruzamento.

Lema 3.52 *Sejam α um radial suficiente para uma família normal h e P um emparelhamento efetivo e transitivo na permutação sucessor S determinada por (h, α) . Se o $2d$ -ágono associado à P não possui mau-cruzamento, então a permutação $R = SP$ possui $n + 1$ ciclos, onde n é o número de curvas com cruzamentos positivos de h .*

Demonstração: Partindo de um cruzamento tal que o seu sucessor é aquele levado pelo emparelhamento P no mesmo círculo e aplicando a composição $R = SP$, obtemos um ciclo que limita uma região homeomorfa a um disco. Partindo do seguinte cruzamento e aplicando $R = SP$, contornamos o círculo em que se encontra, passamos pela componente mais interna de h e retornamos ao cruzamento inicial. Essa passagem é feita aos pares de cruzamentos. De modo geral, se h tiver $n + 1$ componentes conexas, obtemos $n + 1$ ciclos de $R = SP$. □

Exemplo 3.53 *A Figura 3.26 ilustra emparelhamentos cujos $2d$ -ágonos associados, para $d = 2$ e 3 , não possuem mau-cruzamentos. Em (i), a permutação sucessor possui três ciclos e em (ii), $R = SP$ possui quatro ciclos.*

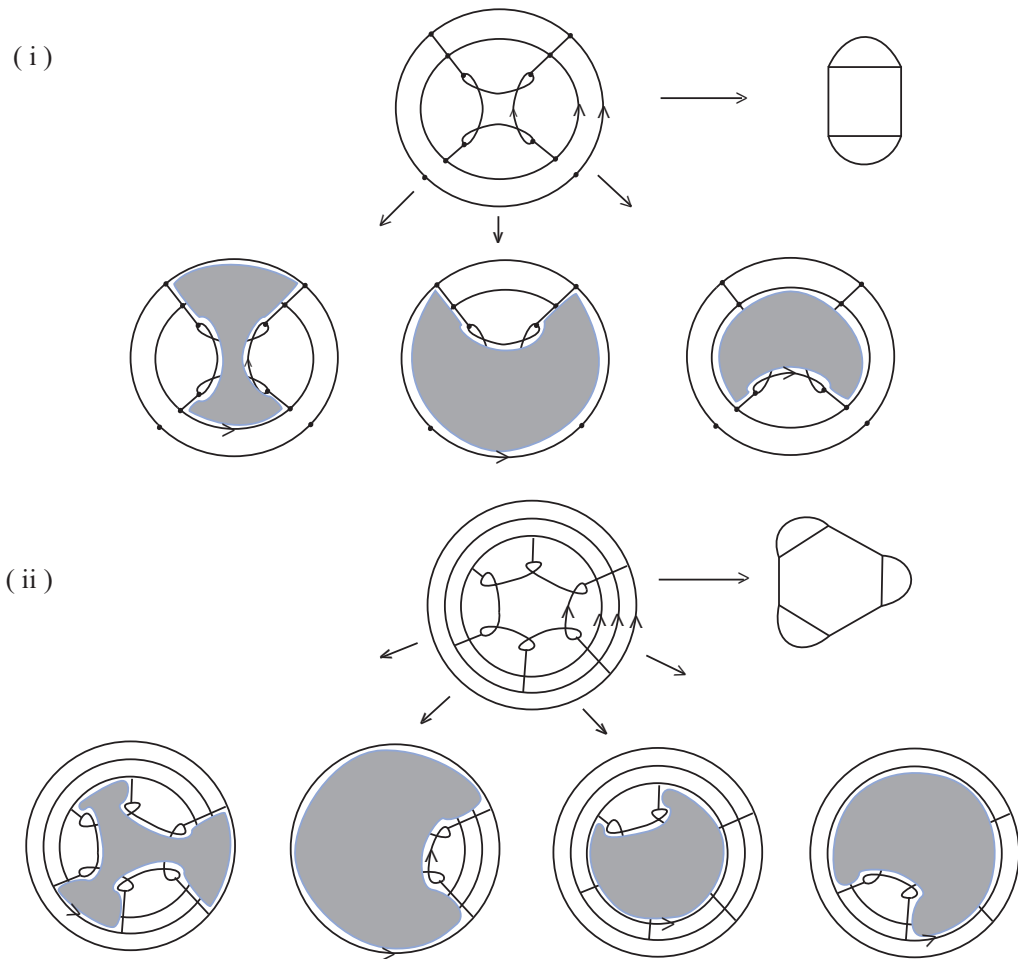


Figura 3.26: Emparelhamentos sem mau-cruzamento.

Proposição 3.54 *Seja P um emparelhamento efetivo e transitivo na permutação sucessor S determinada por (h, α) , onde h é uma família normal e α é um radial para h . Se existe uma imersão $G : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $G|_{\partial M} = h$, então o $2d$ -ágono não possui mau-cruzamento.*

Demonstração: Se existe uma imersão G , então pela Proposição 3.30, devemos ter $\mu = 0$. Logo $\zeta = v + \tau = n + 1$, onde μ é o número de valores singulares, ζ é o número de ciclos da permutação $R = SP$, v é o número de cruzamentos negativos, τ é o grau de h e n é o número de curvas de h com cruzamentos positivos. Suponhamos que o diagrama $2d$ -ágono possui mau-cruzamento, então pelo Lema 3.51, obtemos um ciclo que não limita uma região homeomorfa a um disco. Mas pelo Lema 3.33, estes ciclos são maiores que os ciclos que delimitam uma região homeomorfa a um disco. Com isso, o número de ciclos da permutação $R = SP$ diminui, ou seja, $\zeta < n + 1$, contradição. \square

Proposição 3.55 *Seja P um emparelhamento efetivo e transitivo na permutação sucessor S determinada por (h, α) , onde h é uma família normal e α é um radial para h . Se o $2d$ -ágono não possui mau-cruzamento, então existe uma imersão $G : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $G|_{\partial M} = h$.*

Demonstração: Se não existe uma imersão G , então pela Proposição 3.26 devemos ter $\mu \neq 0$, ou seja $\zeta \neq n + 1$. Por outro lado, se o diagrama $2d$ -ágono não possui mau-cruzamento, então pelo Lema 3.52, obtemos $n + 1$ ciclos de $R = SP$, ou seja, $\zeta = n + 1$, contradição! Portanto existe uma imersão desejada. \square

3.4.2 Mínimo de Cúspides de um Contorno Minimal

De acordo com o seguinte teorema, o contorno minimal de uma aplicação estável f entre duas esferas, com grau $deg(f)$, possui no mínimo $2deg(f)$ cúspides.

Teorema 3.56 *Seja $f : S^2 \rightarrow S^2$ uma aplicação estável com $deg(f) \geq 2$. A aplicação estável $h : S^2 \rightarrow S^2$, que realiza o contorno minimal de f , deve possuir no mínimo $2deg(f)$ cúspides.*

Demonstração: Seja h uma aplicação estável, homotópica a f , que realiza o contorno minimal de f . Pela Proposição 1.89 (1), o grau de duas aplicações homotópicas é o mesmo, ou seja, $deg(h) = deg(f) \geq 2$, então pelo Corolário 1.90, segue que o conjunto singular $\Sigma h \neq \emptyset$.

Por outro lado, como a característica de Euler $\mathcal{X}(S^2) = 2$, segue pelo Corolário 2.39 que

$$\left| \sum_i s(C_i) - 2deg(f) \right| \leq 0.$$

Logo,

$$\sum_i s(C_i) = 2deg(f),$$

onde $s(C_i)$ é o sinal da cúspide C_i .

A aplicação que gera o contorno minimal de f deve ter o menor valor para a soma do número de cúspides e de auto-interseções, logo h deve ter no mínimo $2deg(f)$ cúspides e nenhuma auto-interseção. \square

Se pudermos construir uma aplicação $h : S^2 \rightarrow S^2$, com $deg(h) = deg(f)$, cujo contorno aparente é conexo e possui exatamente $2deg(f)$ cúspides e nenhuma auto-interseção, como mostra a Figura 3.27, dizemos que h **realiza o contorno minimal de f** .

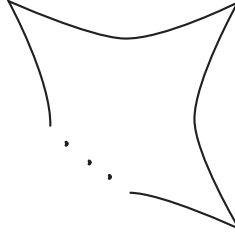


Figura 3.27: Contorno minimal com $2deg(f)$ cúspides e nenhuma auto-interseção.

3.4.3 Decomposição do Complemento de um Conjunto Singular Geral

Lema 3.57 *Seja $f : S^2 \rightarrow S^2$ uma aplicação estável, com $deg(f) \geq 2$. Se U_∞ é uma vizinhança aberta de ∞ , onde ∞ é um ponto da esfera da imagem de f , tal que $f(\Sigma f) \cap \bar{U}_\infty = \emptyset$, onde \bar{U}_∞ é o fecho de U_∞ , então $f^{-1}(U_\infty)$ consiste de n discos abertos cuja orientação é preservada por f e $n - deg(f)$ discos abertos cuja orientação é invertida por f ($n \geq deg(f)$).*

Demonstração: Se f é uma aplicação da esfera na esfera, pela Definição 1.88, o grau da aplicação f para cada valor regular y é $deg_y(f) = deg(f)$. Em outras palavras, a diferença entre o número de pontos positivos e o número de pontos negativos em $f^{-1}(y)$ é $deg(f)$, ou seja, $f^{-1}(y)$ é constituído por n pontos cuja orientação é preservada por f e $n - deg(f)$ pontos cuja orientação é invertida por f . Segue daí que, $f^{-1}(U_\infty)$ consiste de n discos cuja orientação é preservada por f e $n - deg(f)$ discos cuja orientação é invertida por f ($n \geq deg(f)$). \square

Proposição 3.58 *Se $f : S^2 \rightarrow S^2$ é uma aplicação estável, tal que $deg(f) \geq 2$ e o conjunto singular Σf é conexo, então o domínio de f pode ser dividido em quatro partes: n discos cuja orientação é preservada por f e $n - deg(f)$ discos cuja orientação é invertida por f ; uma região contendo $n + 1$ bordos de curvas fechadas; duas regiões homeomorfas a um cilindro e uma região com $n - deg(f) + 1$ bordos de curvas fechadas, como ilustra a Figura 3.17.*

Demonstração: De acordo com o Lema 3.57, podemos dividir a esfera do domínio de f em: fecho de $f^{-1}(U_\infty)$, que contém n discos cuja orientação é preservada e $n - deg(f)$ discos cuja orientação é invertida por f ; conjunto dos pontos de S^2 cuja orientação é preservada por f menos $f^{-1}(U_\infty) \cup V_{\Sigma f}$, onde $V_{\Sigma f}$ é a vizinhança de Σf , que consiste de uma região com $n + 1$ bordos de curvas fechadas; o fecho das vizinhanças positiva

e negativa de Σf , onde cada uma delas é homeomorfa a um cilindro e o conjunto dos pontos de S^2 cuja orientação é invertida por f menos $V_{\Sigma f}$, que consiste de uma região com $n - \text{deg}(f) + 1$ bordos de curvas fechadas, como mostra a Figura 3.17. \square

Proposição 3.59 *Seja $f : S^2 \rightarrow S^2$ uma aplicação estável cujo complemento do conjunto singular pode ser dividido em quatro partes, como na Proposição 3.58. Existe imersão em $R^2 = S^2 \setminus \{\infty\}$, da região que contém $n + 1$ bordos de curvas fechadas.*

Demonstração: Seja M o conjunto dos pontos de S^2 cuja orientação é preservada por f , menos $f^{-1}(U_\infty) \cup V_{\Sigma f}$, onde $V_{\Sigma f}$ é a vizinhança de Σf . Neste caso, M é uma região com $n + 1$ bordos de curvas fechadas. Vamos consideramos a imagem desses $n + 1$ bordos, como uma família normal h e α um radial suficiente para h , como na Figura 3.28, para $n \geq \text{deg}(f)$. Lembremos que n curvas de h correspondem ao bordo de $f^{-1}(U_\infty)$ e a outra curva corresponde ao bordo da vizinhança positiva de Σf .

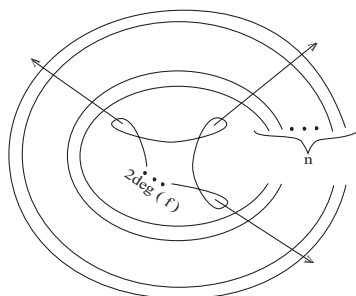


Figura 3.28: g e α .

Pela Proposição 3.26, o número de componentes de h , o grau de h e o número de cruzamentos negativos entre h e α são, respectivamente

$$\rho = n + 1; \quad \tau = n - 2\text{deg}(f) + 1 \quad \text{e} \quad v = 2\text{deg}(f).$$

Além disso, para que exista imersão de M em $R^2 = S^2 \setminus \{\infty\}$, devemos ter $\mu = v + \tau - \zeta = 0$, ou seja,

$$\zeta = v + \tau = n + 1 = \rho$$

Então, pela Proposição 3.35, devem existir no mínimo dois pares de P em cada um dos n círculos de h que possuem cruzamentos positivos. E daí,

$$2n \leq 2\text{deg}(f) \quad \Rightarrow \quad n \leq \text{deg}(f).$$

Mas como assumimos $n \geq \deg(f)$, segue $n = \deg(f)$.

Portanto, vamos considerar somente o caso $n = \deg(f)$ e com isso, devemos ter exatamente dois pares de P em cada círculo e com isso, podemos associar um $2\deg(f)$ -ágono ao emparelhamento P .

Pela Proposição 3.55, devemos escolher um emparelhamento P cujo $2\deg(f)$ -ágono não possui maus-cruzamentos. Assim, obtemos uma imersão $G : M' \rightarrow \mathbb{R}^2 = S^2 \setminus \{\infty\}$, tal que $G|_{\partial M'} = h$, e o gênero de M' é $g = 0$.

Logo, M' é uma região com $n + 1$ bordos de curvas fechadas, ou seja, podemos afirmar que $M' = M$, como queríamos. \square

Como $n = \deg(f)$, as outras três partes da Proposição 3.58 se limitam a: $\deg(f)$ discos cuja orientação é preservada por f ; duas regiões homeomorfas a um cilindro, e uma região homeomorfa a um disco, cuja orientação é invertida por f . Deste modo, pela Proposição 3.40, existe imersão de cada uma dessas três partes em $\mathbb{R}^2 = S^2 \setminus \{\infty\}$.

3.4.4 Mínimo de Cúspides de um Contorno Minimal Geral

Teorema 3.60 *Seja $f : S^2 \rightarrow S^2$ uma aplicação de classe C^∞ , com $\deg(f) \geq 2$. O contorno minimal de f possui exatamente $2\deg(f)$ cúspides e nenhuma auto-interseção.*

Demonstração: Seja $f : S^2 \rightarrow S^2$ uma aplicação estável, com $\deg(f) \geq 2$, tal que o conjunto singular Σf é conexo e o seu contorno aparente α possui exatamente $2\deg(f)$ cúspides e nenhuma auto-interseção. Seja U_∞ uma vizinhança aberta suficientemente pequena de ∞ , ponto da imagem de f , tal que $f(\Sigma f) \cap \bar{U}_\infty = \emptyset$, onde \bar{U}_∞ é o fecho de U_∞ .

Pelo Lema 3.57, podemos dividir o domínio de f em quatro partes, como ilustra a Figura 3.17:

M_1 : n discos cuja orientação é preservada por f e $n - \deg(f)$ discos cuja orientação é invertida por f ;

M_2 : uma região contendo $n + 1$ bordos de curvas fechadas;

M_3 : duas regiões homeomorfas a um cilindro e

M_4 : uma região com $n - \deg(f) + 1$ bordos de curvas fechadas.

Mas pela Proposição 3.59, existe imersão de M_2 em $S^2 \setminus \{\infty\}$ se $\deg(f) = n$.

Considerando os mergulhos $m_j : M_j \rightarrow \mathbb{R}^3$, para $i = 2, 3, 4$, tal que a projeção π , no plano $\mathbb{R}^2 = S^2 \setminus \{\infty\}$, dos bordos de $m_j(M_j)$ coincidem com a projeção estereográfica das curvas

imagem por f em $S^2 \setminus \{\infty\}$, dos bordos das M_j , e que π não possui pontos singulares no interior de cada região, então usando a mesma técnica da demonstração do Teorema 3.45, construímos uma aplicação suave $H : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 = S^2 \setminus \{\infty\}$, tendo α como conjunto singular, contendo $2deg(f)$ cúspides e nenhuma auto-interseção.

Tomando a inversa da projeção estereográfica P e compondo com H , podemos obter a aplicação original $f : S^2 \rightarrow S^2$, possuindo α como conjunto singular. \square

Acabamos de construir uma aplicação f entre duas esferas, com grau arbitrário, tal que o seu contorno irreduzível possui exatamente $2deg(f)$ cúspides e nenhuma auto-interseção. Logo f realiza o contorno minimal.

3.5 Exemplos de Contorno Minimal

Exemplo 3.61 *As aplicações estáveis entre duas 2-esferas, construídas no Exemplo 2.28, realizam o contorno minimal com $2deg(f)$ cúspides cada e nenhuma auto-interseção, onde $deg(f)$ é o grau da aplicação dada. A medida que aumenta o grau, aumenta o número de cúspides do contorno minimal por dois, devido à cirurgia horizontal com uma aplicação $g : S^2 \rightarrow S^2$, obtida a partir da aplicação identidade passando pela transição do tipo lábios.*

Exemplo 3.62 1. *O contorno aparente da aplicação construída na Figura 2.13 pode ser visto como um contorno minimal de aplicações estáveis com grau um, do toro na esfera, sem auto-interseções. Neste caso, o contorno minimal possui quatro cúspides e nenhuma auto-interseção. Fazendo sucessivas cirurgias horizontais como nesta figura, podemos concluir que o contorno minimal de aplicações estáveis do k -toro na esfera, com grau um e sem auto-interseções, possui $2k + 2$ cúspides, pois a cada cirurgia, acrescentamos o número de cúspides por dois, sempre que acrescentamos o gênero da superfície do domínio da aplicação por um.*

2. *Se queremos obter uma aplicação de um k -toro com grau d , basta fazer cirurgia horizontal com uma aplicação da esfera na esfera com grau $d - 1$ com contorno minimal. A aplicação resultante terá um contorno minimal com $2(k + d)$ cúspides e nenhuma auto-interseção.*

3. *Outro exemplo de aplicação com contorno minimal do toro na esfera está ilustrada na Figura 2.25 c). Neste caso é o contorno minimal de uma aplicação dobra, com quatro auto-interseções e nenhuma cúspide.*

4. *Combinando cirurgias entre aplicações dos itens 2 e 3 acima, podemos obter um contorno minimal contendo $4l$ pontos duplos e $2(k + d)$ cúspides, de uma aplicação do $(k+l)$ -toro, com grau $d + l$.*

Apêndice

Apresentaremos neste apêndice, uma demonstração para um caso particular do teorema de Quine, sobre aplicações estáveis na 2-esfera, que está enunciado como o corolário 2.38. A técnica usada na demonstração é a relação dos sinais das cúspides nas transições de codimensão um, a característica de Euler do complemento do conjunto singular antes e após as transições e o grau da aplicação.

Observação 3.63 *As transições do tipo lábios ou bicos alteram a soma dos sinais das cúspides, denotada por, $\sum s(C_i)$, por ± 2 , enquanto a transição do tipo rabo de andorinha mantém o valor de $\sum s(C_i)$. De fato, as cúspides obtidas pelas transições do tipo lábios ou bicos têm o mesmo sinal, enquanto as cúspides obtidas pelas transições do tipo rabo de andorinha possuem sinais opostos, como ilustra a Figura 3.29.*

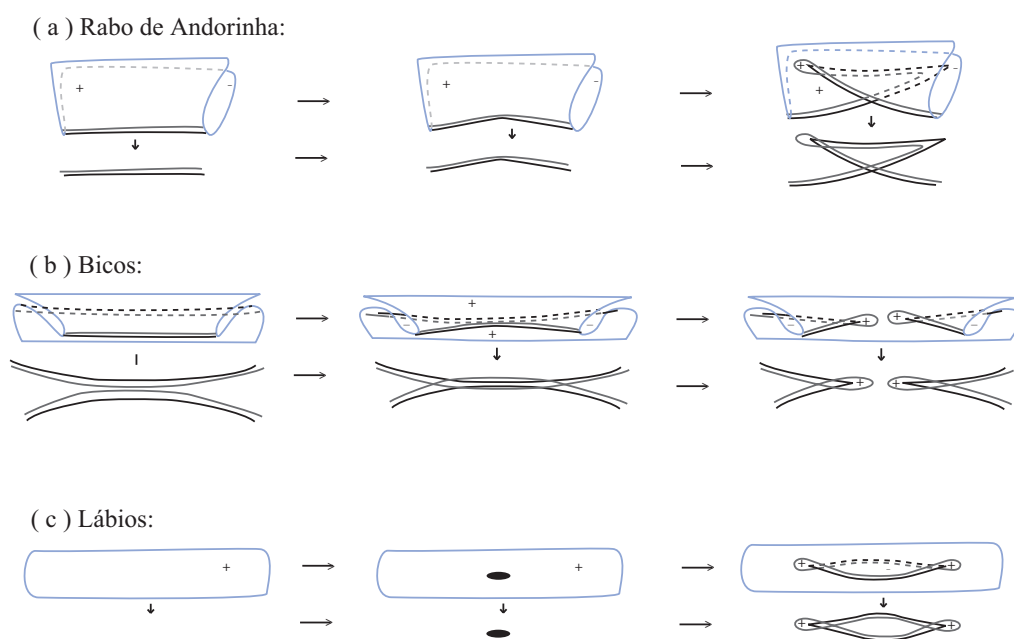


Figura 3.29: Sinal das cúspides.

Lema 3.64 *Sejam f_0 e f_1 aplicações estáveis de superfícies fechadas e orientadas na esfera, onde f_1 é obtida por f_0 , a partir de uma transição do tipo bicos ou lábios. Se M_0 e M_1 são, respectivamente, o complemento dos conjuntos singulares Σf_0 e Σf_1 , então*

$$\mathcal{X}(M_1^\pm) = \mathcal{X}(M_0^\pm) \mp s(C),$$

onde $s(C)$ denota o sinal das duas novas cúspides.

Demonstração: Vamos considerar $M_0^+(M_0^-)$ o fecho da região positiva (negativa) de f_0 e $M_1^+(M_1^-)$ o fecho da região positiva (negativa) de f_1 .

Vamos primeiro analisar a transição do tipo bicos B . Para este caso, temos duas possibilidades: B^+ e B^- , que respectivamente, acrescentam e diminuem o número de componentes conexas do contorno aparente da aplicação.

Vamos considerar cada uma delas separadamente.

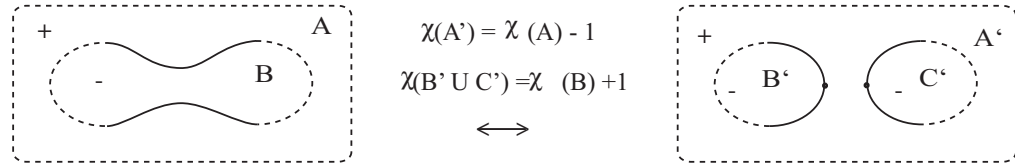


Figura 3.30: Alterando a característica de Euler pelas transição B^+ .

Na Figura 3.30, podemos ver a transição do tipo B^- . Inicialmente, temos uma componente de Σ_0 , que separa as regiões A e B . Após a transição, Σ_1 adquire uma nova componente, além de dois pontos de cúspides. A região A ganha mais uma componente com bordo e passa a ser denotada por A' . Essas duas componentes separam as regiões B' e C' .

Temos ainda que

$$\mathcal{X}(A') = \mathcal{X}(A) - 1$$

e como $s(C) = 1$, então

$$\mathcal{X}(A') = \mathcal{X}(A) - s(C).$$

Consequentemente,

$$\mathcal{X}(M_1^+) = \mathcal{X}(M_0^+) - s(C).$$

Por outro lado,

$$\mathcal{X}(B' \cup C') = \mathcal{X}(B) + 1 = \mathcal{X}(B) + s(C).$$

Logo

$$\mathcal{X}(M_1^-) = \mathcal{X}(M_0^-) + s(C).$$

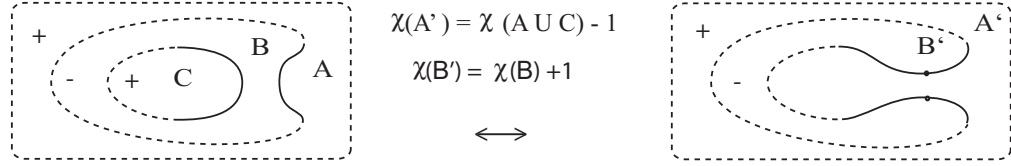


Figura 3.31: Alterando a característica de Euler pelas transição B^- .

Na Figura 3.31, podemos ver uma transição do tipo B^- . Inicialmente, duas componentes de curva de Σf_0 , separa as regiões A, B e C . Após a transição, as duas componentes se unem, de modo que Σf_1 possui apenas uma componente conexa e com isso, as regiões A e C também se iniram, dando origem à região A' . Neste caso, para as novas regiões A' e B' , podemos afirmar:

$$\mathcal{X}(A') = \mathcal{X}(A \cup C) - 1 = \mathcal{X}(A) + \mathcal{X}(C) - 1$$

e

$$\mathcal{X}(B') = \mathcal{X}(B) + 1.$$

Portanto

$$\mathcal{X}(M_1^+) = \mathcal{X}(M_0^+) - s(C)$$

e

$$\mathcal{X}(M_1^-) = \mathcal{X}(M_0^-) + s(C).$$

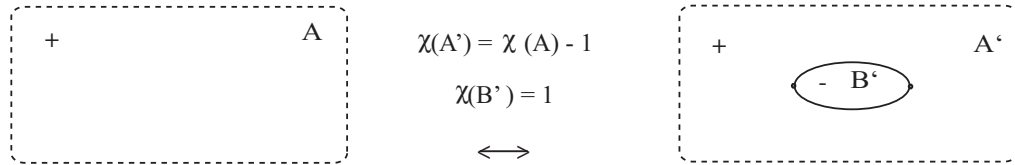


Figura 3.32: Alterando a característica de Euler pelas transição L .

Na Figura 3.32 podemos ver uma transição do tipo lábios. Inicialmente temos uma região A . Após a transição, a região A adquire mais uma componente com bordo, logo a sua característica diminui por um. Além disso, uma nova região negativa, E' homeomorfa a um disco é criada, assim a característica das regiões negativas aumenta por um. Como neste caso, o sinal das cúspides é positivo, segue o resultado. \square

Observação 3.65 *Se no Lema 3.64, a transição for do tipo rabo de andorinha, então*

$$\mathcal{X}(M_1^\pm) = \mathcal{X}(M_0^\pm),$$

uma vez que esta transição não altera a topologia das regiões do complemento do conjunto singular.

Na figura 3.33, ilustramos uma aplicação estável $f = j \circ g : M \rightarrow S^2$, com grau d , onde M é um k -toro, com $k \geq 0$, g é um mergulho de M deformada em \mathbb{R}^3 e j é a projeção da imagem de g na esfera.

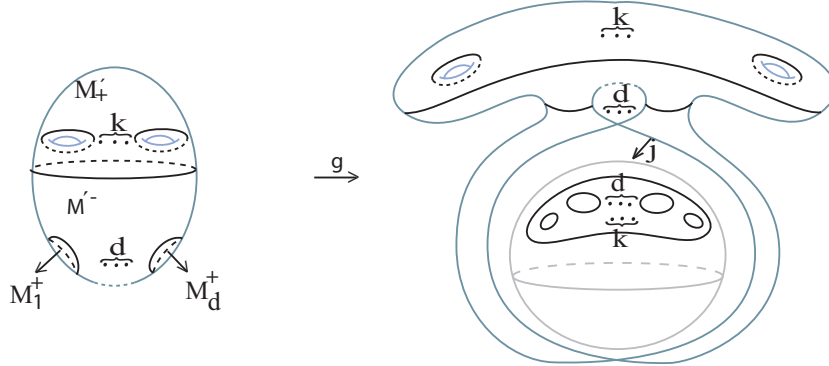


Figura 3.33: Aplicação dobra do k -toro com grau d .

Lema 3.66 *Seja $f : M \rightarrow S^2$ uma aplicação estável de uma superfície M fechada, orientada e de gênero k , na esfera, com grau d , cujo contorno aparente sobre a esfera tenha $d + k + 1$ componentes conexas disjuntas e simples. Se M^+ e M^- são, respectivamente, o fecho das regiões positivas e negativas do complemento do conjunto singular Σf , então*

$$\mathcal{X}(M^+) - \mathcal{X}(M^-) = 2d.$$

Demonstração: Se $f : M \rightarrow S^2$ é uma aplicação estável com grau d , onde a superfície M tem gênero k e o conjunto singular tem $d + k + 1$ componentes sem pontos de cúspides, então M^+ , o fecho da região de M cuja orientação é preservada por f é decomposto em $d + 1$ componentes, onde d componentes são homeomorfas ao disco, denotadas por M_1^+, \dots, M_d^+ e a outra componente é homeomorfa ao disco com k buracos, denotada por M_+^+ , como ilustra a Figura 3.33. Neste caso, a característica de Euler de M^+ é dada por

$$\mathcal{X}(M^+) = \mathcal{X}(M'^+) + d = 1 - k + d.$$

Por outro lado, M^- , o fecho dos pontos regulares de M , que tem a orientação invertida por f , é uma região homeomorfa a um disco com $k + d$ buracos, a qual denotamos por M'^- . Com isso, a característica de Euler de M^- é dada por

$$\mathcal{X}(M^-) = \mathcal{X}(M'^-) = 1 - k - d.$$

Portanto

$$\mathcal{X}(M^+) - \mathcal{X}(M^-) = 2d.$$

□

Corolário 3.67 (*Corolário do Teorema de Quine*) *Sejam M uma 2-variedade suave, compacta, orientada e conexa, $f : M \rightarrow S^2$ uma aplicação estável, M^+ o fecho do conjunto dos pontos regulares nos quais f preserva a orientação, M^- o fecho dos pontos regulares os quais f inverte a orientação e C_1, \dots, C_n pontos de cúspides, então*

$$\mathcal{X}(M) - 2\mathcal{X}(M^-) + \sum_i s(C_i) = 2deg(f),$$

onde \mathcal{X} é a característica de Euler e deg é o grau da aplicação.

Demonstração: Seja $f_0 : M_0 \rightarrow S^2$ uma aplicação estável, tal que $deg(f_0) = deg(f)$, onde a superfície M_0 tem gênero k e o número de componentes singulares é $deg(f_0) + k + 1$, sem cúspides, como ilustra a Figura 3.33. Podemos obter a aplicação f a partir de f_0 , por meio de transições do tipo bicos, lábios ou rabo de andorinha. Vamos denotar por $f_j, j \in \mathbb{N}$, a aplicação obtida de f_0 após j transições do tipo B, L ou S, e por $M_i^+ (M_i^-)$ a união das regiões positivas (negativas) do complemento $M \setminus \Sigma f_i$. Chamaremos por C_{j1} e C_{j2} as cúspides criadas na j -ésima transição.

Se a primeira transição for do tipo L ou B, pelo Lema 3.64, temos

$$\mathcal{X}(M_1^+) = \mathcal{X}(M_0^+) - s(C_{11}), e$$

$$\mathcal{X}(M_1^-) = \mathcal{X}(M_0^-) + s(C_{12}).$$

Subtraindo as equações acima e substituindo o Lema 3.66, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(M_1^+) - \mathcal{X}(M_1^-) &= \mathcal{X}(M_0^+) - \mathcal{X}(M_0^-) - \sum_{i=1}^2 s(C_{1i}) \\ &= 2deg(f) - \sum_{i=1}^2 s(C_{1i}). \end{aligned}$$

Se a primeira transição for do tipo S, então pela Observação 3.65, temos

$$\mathcal{X}(M_1^+) = \mathcal{X}(M_0^+)$$

$$\mathcal{X}(M_1^-) = \mathcal{X}(M_0^-).$$

Subtraindo as equações acima e substituindo o Lema 3.66, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(M_1^+) - \mathcal{X}(M_1^-) &= \mathcal{X}(M_0^+) - \mathcal{X}(M_0^-) \\ &= 2deg(f),\end{aligned}$$

mas as cúspides obtidas pelas transições do tipo rabo de andorinha possuem sinais opostos, com isso $\sum_i^2 s(C_{1i}) = 0$, e daí, podemos dizer que

$$\mathcal{X}(M_1^+) - \mathcal{X}(M_1^-) = 2deg(f) - \sum_i^2 s(C_{1i}).$$

Com isso, vemos que se a primeira transição for do tipo L , B ou S , vale a relação:

$$\mathcal{X}(M_1^+) - \mathcal{X}(M_1^-) = 2deg(f) - \sum_i^2 s(C_{1i}) \quad (3.1)$$

Se a segunda transição for do tipo L ou B , pelo Lema 3.64, temos

$$\mathcal{X}(M_2^+) = \mathcal{X}(M_1^+) - s(C_{21}), e$$

$$\mathcal{X}(M_2^-) = \mathcal{X}(M_1^-) + s(C_{22}).$$

Subtraindo as equações acima e substituindo a equação 3.1, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(M_2^+) - \mathcal{X}(M_2^-) &= \mathcal{X}(M_1^+) - \mathcal{X}(M_1^-) - \sum_{i=1}^2 s(C_{2i}) \\ &= 2deg(f) - \sum_{i=1}^2 s(C_{1i}) - \sum_{i=1}^2 s(C_{2i}) \\ &= 2deg(f) - \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 s(C_{ji}).\end{aligned}$$

Se a segunda transição for do tipo S , então pela Observação 3.65, temos

$$\mathcal{X}(M_2^+) = \mathcal{X}(M_1^+)$$

$$\mathcal{X}(M_2^-) = \mathcal{X}(M_1^-).$$

Subtraindo as equações acima e substituindo a equação 3.1, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(M_2^+) - \mathcal{X}(M_2^-) &= \mathcal{X}(M_1^+) - \mathcal{X}(M_1^-) \\ &= 2deg(f),\end{aligned}$$

mas as cúspides obtidas pelas transições do tipo rabo de andorinha possuem sinais opostos, com isso $\sum_i^2 s(C_{2i}) = 0$, e daí, podemos dizer que

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(M_2^+) - \mathcal{X}(M_2^-) &= 2deg(f) - \sum_i^2 s(C_{1i}) - \sum_i^2 s(C_{2i}) \\ &= 2deg(f) - \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 s(C_{ji}).\end{aligned}$$

Com isso, vemos que se a segunda transição for do tipo L , B ou S , vale a relação:

$$\mathcal{X}(M_2^+) - \mathcal{X}(M_2^-) = 2deg(f) - \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 s(C_{ji}). \quad (3.-3)$$

Vamos concluir por indução sobre o número k de transições do tipo B, L ou S. Suponhamos que para $p < k$, vale a relação

$$\mathcal{X}(M_p^+) - \mathcal{X}(M_p^-) = 2deg(f) - \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^2 s(C_{ji}).$$

Seja a k -ésima transição do tipo B, L ou S, pelo Lema 3.64 e pela Observação 3.65, podemos dizer que

$$\mathcal{X}(M_k^+) - \mathcal{X}(M_k^-) = \mathcal{X}(M_{k-1}^+) - \mathcal{X}(M_{k-1}^-) - \sum_{i=1}^2 s(C_{ki}),$$

pois as cúspides obtidas pela transição do tipo S possuem sinais opostos. Aplicando a hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(M_k^+) - \mathcal{X}(M_k^-) &= 2deg(f) - \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^2 s(C_{ji}) - \sum_{i=1}^2 s(C_{ki}) \\ &= 2deg(f) - \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^2 s(C_{ji}).\end{aligned}$$

Daí, obtemos

$$\mathcal{X}(M^+) - \mathcal{X}(M^-) = 2deg(f) - \sum_i s(C_i),$$

ou seja

$$\mathcal{X}(M^+) - \mathcal{X}(M^-) + \sum_i s(C_i) = 2deg(f),$$

onde $\sum_i s(C_i) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^2 s(C_{ji})$ e $M^\pm = M_k^\pm$.

□

Conclusão e Perspectivas Futuras

O objetivo deste trabalho foi estudar as singularidades de aplicações estáveis de superfícies fechadas e orientadas na esfera. Para tanto, apresentamos resultados relevantes ao nosso estudo. Apresentamos também os grafos associados a aplicações estáveis de superfícies na esfera e algumas relações do contorno minimal de tais aplicações com o seu grau.

Além destes resultados, podemos através de pesquisas futuras estudar:

1. Singularidades de aplicações estáveis em superfícies quaisquer

No capítulo 2, verificamos quais grafos podem ser realizados por aplicações estáveis de superfícies fechadas, orientadas e sem bordo nas esfera. E para aplicações estáveis em superfícies quaisquer, podemos também verificar quais grafos podem ser associados a tais aplicações;

2. Contornos minimais de aplicações em superfícies quaisquer

No capítulo 3, estabelecemos o número mínimo de cúspides e auto-interseções que o contorno minimal que as aplicações estáveis entre duas esferas deve possuir, de acordo com o seu grau. Uma idéia, é estabelecer o número mínimo de cúspides e auto-interseções que o contorno minimal que as aplicações em superfícies quaisquer deve possuir.

Referências Bibliográficas

- [1] V. I. ARNOLD - Topological Invariants of Plane Curves and Caustic, *University Lecture Series*, Vol. 5, AMS Providenci 1994.
- [2] S. DEMOTO - Stable maps between 2-spheres with a connected fold curve, *Hiroshima Math. J.* 35 (2005), 93-113.
- [3] E.CHÍNCARO “Bifurcations of Whitney Maps”, Tese de Doutorado, IMPA, 1978.
- [4] JA. M. ÈLIASBERG - On Singularities of Folding Type, *Math. USSR-Izvestija.* 4 (1970) 1119-1134.
- [5] E. L. LIMA - “Curso de Análise.”, Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, vol. 2, 2008, pp.505-517.
- [6] G. K. FRANCIS - Assembling Compact Riemann Surfaces with given Boundary curves and branch points on the sphere, *Illinois J. Math.* 20,(1976) 198-217.
- [7] W. FULTON -“Algebraic Topology, a first course.”, Springer, 1995.
- [8] C. G. GIBSON -“Singular Points of Smooth Mappings.”, Research Notes in Maths, 25, Pitman, 1979.
- [9] M. GOLUBITSKY and V. GUILLEMIN -“Stable Mappings and Their Singularities.”, Springer Verlag, Berlin, 1976.
- [10] V. GORYUNOV - Local Invariants of Mappings os Surface into three-space, Preprint (2006).
- [11] D. HACON, C. MENDES DE JESUS and M.C. ROMERO FUSTER - Topological invariants of stable maps from a surface to the plane from a global viewpoint, *Proceedings of the 6th Workshop on Real and Complex Singularities.* Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 232 Marcel and Dekker (2003) 227-235.

- [12] D. HACON, C. MENDES DE JESUS and M.C. ROMERO FUSTER - Fold maps from the sphere to the plane. To appear in *Experimental Maths* 15 (2006) 491-497.
- [13] D. HACON, C. MENDES DE JESUS and M.C. ROMERO FUSTER, Stable maps from surfaces to the plane with prescribed branching data, *Topology and Its Appl.* 154 (2007) 166-175.
- [14] D. HACON, C. MENDES DE JESUS and M.C. ROMERO FUSTER - Graphs of stable maps from closed orientable surfaces to the 2-sphere, *Journal of Singularities*, aceito em 2010.
- [15] D. HACON, C. MENDES DE JESUS and M.C. ROMERO FUSTER - Stable maps the surfaces in to projective plane, preprint.
- [16] D. HACON, C. MENDES DE JESUS and M.C. ROMERO FUSTER - Global aspects of the classification of the stable maps of compact surfaces in the plane, *Rev. Semin. Iberoam. Mat. Singul. Tordesillas* Vol.3 (2005) 3-23.
- [17] M. HIRSCH -“Differential Topology.”, Graduate Texts in Mathematics, 33. Springer Verlag, New York, 1976.
- [18] L. C. KINSEY -“Topology of Surfaces.”, Springer Verlag, New York, 1994.
- [19] D. DA S. MACHADO “Invariante Global de Aplicações Estáveis de Superfície Fechada no Plano”, Dissertação de Mestrado, DMA-UFV, 2010.
- [20] W. S. MASSEY - “A Basic Course in Algebraic Topology.”, Springer, 1991.
- [21] C. MENDES DE JESUS “Invariantes Topológicos de Aplicações Genéricas de Superfícies Compactas Orientáveis no Plano”, Tese de Doutorado, PUC-RIO, 2001.
- [22] C. MENDES DE JESUS - Contornos aparentes: conjunto singular e grafos. *Actas Primera Jornada de Tecnologia Aplicada a Restauración* Ed. Editora Moliner 1 (2009) 54-61.
- [23] C. MENDES DE JESUS, R. OSET SINHA and M.C. ROMERO FUSTER - Global topological invariants of stable maps from 3-manifolds to R^3 , *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, v. 267 (2009).
- [24] C. MENDES DE JESUS, S. M. DE MORAES and M.C. ROMERO FUSTER - Stable Gauss maps on surfaces from a global viewpoint, *Bulletin Brazilian Mathematical Society*, (Impresso) (2010).

- [25] J. R. MUNKRES - "Topología", 2ª Edição. *Prentice Hall*, Madrid, 2002, pp.108.
- [26] T. OHMOTO e F. AICARDI - First Order Local Invariants of Apparent Coutours, *Topology* 45 (2006), 27-45.
- [27] J.R. QUINE - A global theorem for singularities of maps between oriented 2-manifolds, *Trans. AMS* 236 (1978), 307-314.
- [28] R.THOM - Structural Stability and Morphogenesis, (translated by D. H. Fowler), Benjamin-Adison Wesley, New York.(1975).
- [29] V. A. VASSILIEV - Complements of Discriminants of smooth maps: topology and applications, AMS, Providenci, RI: Amer. Math. Soc. (1992).
- [30] A. T. WHITE- Graphs, Groups and Surfaces, *Mathematics Studies*, Nort Holland (1973).
- [31] H. WHITNEY - On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces. I. Mappings of the Plane into the Plane, *Ann. of Math.* 62 (1955) 374-410.
- [32] YUNG-CHE - "Singularity Theory and Introduction to Catastrophe.", Springer (1976).