

FERNANDO LOURENÇO

**O TEOREMA DE BAUM-BOTT**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

**VIÇOSA**  
**MINAS GERAIS - BRASIL**  
**2012**

**Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e  
Classificação da Biblioteca Central da UFV**

T

L892t  
2012

Lourenço, Fernando, 1985-  
O Teorema de Baum-Bott / Fernando Lourenço. – Viçosa,  
MG, 2012.  
viii, 120f. : il. ; 29cm.

Orientador: Maurício Barros Correa Júnior.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.  
Referências bibliográficas: f. 119-120

1. Folheações (Matemática). 2. Geometria algébrica.  
3. Soluções algébricas. I. Universidade Federal de Viçosa.  
II.Título.

CDD 22.ed. 514.72

FERNANDO LOURENÇO

**O TEOREMA DE BAUM-BOTT**

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 16 de fevereiro de 2012.

---

Marcos Benevenuto Jardim

---

Anderson Luís Albuquerque de Araujo

---

Kennedy Martins Pedroso  
(Coorientador)

---

Alexandre Miranda Alves  
(Coorientador)

---

Maurício Barros Correa Júnior  
(Orientador)

*“Só no conhecimento de sua própria essência,  
deixam de ser os homens,  
um bando de macacos”.*  
Aldoux Huxley.

## AGRADECIMENTOS

Deixo nesse espaço a minha homenagem às pessoas que foram fundamentais para a elaboração desse trabalho, agradeço:

A minha mãe, Neusa Grotto Lourenço, por sempre estar comigo em meus estudos, desde a alfabetização até agora, me ajudando em todos os sentidos e me dando força para sempre continuar essa jornada.

Ao meu irmão e amigo, Rudi Lourenço, que por ser mais velho sempre me passou as coordenadas dessa vida e me incentiva a seguir em frente esse caminho. Agradeço também ao seu filhinho, Pedro Henrique, que é um amor de pessoa, muito feliz, alegre e adora brincar, e assim transmite toda essa felicidade ao titiu.

A minha irmã, Cristina Lourenço, pela força, carinho, amizade e companheirismo em toda essa caminhada, desde tomar chuva em Ilha Solteira para fazermos a inscrição de minha graduação.

Família, muito obrigado por tudo!

As amizades construídas em Viçosa, em particular os amigos e companheiros de mestrado, Ana Paula, Arthur, Fred, Isaque e Vinícius, os quais me deram força e muito incentivo nessa fase de minha vida. Pelas festas, churrascos, comemorações e principalmente pela troca de cultura e informações que tivemos, também pela indicações de livros, filmes, músicas entre outros tipos de arte que nos faz desgarrar desse mundo SÓRDIDO.

A alguns amigos de graduação, entre eles Guemael, por sempre estar comigo desde a graduação em quase todos os momentos, em muitas viagens e por me transmitir uma imensa bagagem cultural. Agradeço também aos amigos Dipolo, Caborja, Mirna, Fernanda, Merda, Aldine entre outros.

As amizades que perduram em Catanduva, Gabriel, Bruno, André, Limone, Ana Cláudia e todos os outros que torce pelo meu sucesso.

Amigos, muito obrigado!

A todos os professores do departamento de matemática da UFV, os quais de uma maneira direta ou indireta contribuíram fortemente para a realização desse trabalho. Em especial, quero destacar o professor Maurício, pela sua competência e profissionalismo e acima de tudo pela sua disposição em atender um orientado, o que fez muita diferença, pois me deixou a vontade.

Professores, o meu muito obrigado!

Gostaria de destacar também o trabalho do seu Jair na cozinha, onde vi muito profissionalismo, amor e gosto pelo o que faz. Agradeço também a Miriam, afinal foi uma pessoa que sempre nos atendeu com o sorriso no rosto. Também a todos os outros funcionários que tiverem sua participação efetiva, deixo aqui o meu enorme obrigado.

A CAPES-REUNI pelo apoio financeiro.

Enfim a todos aqueles que circundam minha rede de amigos e não foram citados.

A todos vocês, deixo a meu imenso obrigado, pois nesse trabalho tem um pouquinho de cada um.

## SUMÁRIO

<b>RESUMO</b>	<b>vii</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>viii</b>
<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1 Variedades Complexas . . . . .	3
1.2 Cohomologia de De Rham . . . . .	6
1.3 Fibrados Vetoriais . . . . .	9
1.4 Índice de Poincaré-Hopf . . . . .	19
1.5 Número de Milnor . . . . .	25
1.6 O núcleo de Bochner-Martinelli . . . . .	33
1.7 Resíduo de Grothendieck . . . . .	37
1.8 Conexões, Polinômios Invariantes e Classes Características . . . . .	41
1.8.1 Conexões Métricas . . . . .	48
1.9 Fibrados Virtuais . . . . .	51
1.10 Localização das classes características . . . . .	56
<b>2 Folheações holomorfas</b>	<b>61</b>
2.1 Folheações holomorfas regulares . . . . .	61
2.2 Folheações holomorfas singulares . . . . .	67
2.3 Explosão . . . . .	70
2.4 Construção de Folheações holomorfas . . . . .	76

2.4.1	Fibrados associado a folheações . . . . .	79
2.5	Folheações em $\mathbb{P}^n$ . . . . .	82
<b>3</b>	<b>O Teorema de Baum-Bott</b>	<b>85</b>
3.1	O Teorema de Baum-Bott: Primeira versão . . . . .	85
3.2	O Teorema de Baum-Bott: Segunda versão . . . . .	98
<b>4</b>	<b>O problema de Poincaré para hipersuperfícies</b>	<b>103</b>
4.1	O problema de Poincaré para hipersuperfícies . . . . .	104
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>119</b>



## RESUMO

LOURENÇO, Fernando, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2012. **O teorema de Baum-Bott**. Orientador: Maurício Barros Correa Júnior. Coorientadores: Kennedy Martins Pedroso e Alexandre Miranda Alves.

Fizemos, neste trabalho, um estudo detalhado do teorema de Baum-Bott em duas situações. Para tal feito, analisamos esse teorema em [2] e a sua prova dada por S. S. Chern através de métodos de geometria diferencial, no caso em que as singularidades da folheação holomorfa de dimensão 1 são do tipo não-degeneradas. Depois usamos o artigo [31] de M. Soares, onde ele refaz essa prova de Chern com uma ligeira mudança, retirando assim a hipótese de não-degeneração. Resultado esse de grande importância pelo fato de ser aplicado a campos de vetores meromorfos, que são abundantes e que geram folheações holomorfas singulares de dimensão 1 em variedade compactas. Como maneira de aplicar tal resultado, lidamos com o problema de Poincaré em [28], que trata de limitar o grau de uma curva invariante em função do grau da folheação. Esse problema foi motivado pelo trabalho de Darboux com respeito á integrabilidade algébrica de folheações em [13]. Reunimos os resultados de Cerveau e Lins neto em [12] e também de M. Carnicer em [9] a respeito do problema de Poincaré, que foram apresentados cerca de 100 anos depois do trabalho de Poincaré. E por fim exploramos a contribuição de M. Soares para esse problema em [32].

## ABSTRACT

LOURENÇO, Fernando, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2012. **The Baum-Bott's theorem.** Adviser: Maurício Barros Correa Júnior. Co-advisers: Kennedy Martins Pedroso and Alexandre Miranda Alves.

In this work, we did a detailed study of the Baum-Bott's theorem in two situations. To do this, we examine this theorem in [2] and its proof given by S. S. Chern using methods of differential geometry, in which case the non-degenerated singularities for one-dimensional holomorphic foliation. Then use the article [31] of M. Soares, where he retraces the Chern's proof with a slight change, thus eliminating the possibility of non-degenerated. The result of great importance because it is applied to meromorphic vector fields, which are abundant and generate one-dimensional singular holomorphic foliations in compact manifolds. As a way to apply this result, we deal with the problem of Poincaré in [28] to limit the degree of an invariant curve depending on the degree of the foliation. This problem was motivated by the work of Darboux with respect to algebraic integrability foliations in [13]. We gathered the results of Cerveau and Lins Neto in [12] and also M. Carnicer in [9] about the problem of Poincaré, that were introduced about 100 years later the work of Poincaré. Finally we also explored the contribution of M. Soares to this problem in [32].

## INTRODUÇÃO

O objetivo dessa dissertação é apresentar, com fineza de detalhes, o teorema de Baum-Bott, assim como todos os pré-requisitos que circundam tal resultado. Apresentamos também o problema de Poincaré, o de limitar o grau de uma curva invariante em função do grau da folheação, como uma forma de aplicar o teorema de Baum-Bott.

Começamos o trabalho com um capítulo extenso. Nele abordamos conceitos importantíssimos, pois para apresentar o teorema devemos saber, por exemplo, o que é Classe de Chern, para isso temos que ter em mente o conceito de fibrados vetoriais. Abordamos também nesse capítulo o índice de Poincaré Hopf, o número de Milnor, o núcleo de Bochner-Martinelli, o resíduo de Grothendieck, conexões e a localização das classes características, que nos diz que as classes características de grau  $n$ , de um certo fibrado virtual, localizam-se no conjunto singular da folheação.

Já o capítulo seguinte é reservado para falar exclusivamente do conceito de folheações holomorfas. Para isso, nos limitamos à variedades complexas de dimensão 2 (superfície complexa) e por conseguinte trataremos de folheações holomorfas de dimensão 1, onde apresentamos três maneiras distintas, porém equivalentes, de induzir tais folheações.

O terceiro capítulo, o principal desse trabalho, vem com o objetivo de explorar e apresentar o resultado de Baum-Bott. Para chegarmos até lá recordemos o clássico teorema de Gauss-Bonnet em [27]. Seja  $M$  uma superfície orientada, compacta e suave em  $\mathbb{R}^3$ , então

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K dM = \chi(M) \quad (1)$$

onde  $\chi(M)$  é a característica de Euler de  $M$  e  $K$  é a curvatura gaussiana de  $M$ .

Por outro lado, um resultado que é muito próximo deste é o teorema de Poincaré-Hopf em [15] e [18]. Seja  $M$  nas condições acima e  $V$  um campo de vetores suave e tangente à  $M$ , assuma também que temos apenas uma quantidade finita de zeros de  $V$ , então

$$\sum_{\{p:V(p)=0\}} \mathcal{I}_p(V) = \chi(M) \quad (2)$$

Analisando esses dois resultados em (1) e (2), podemos fazer uma ligação entre eles, o que nos remete a

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K dM = \sum_{\{p:V(p)=0\}} \mathcal{I}_p(V) \quad (3)$$

Podemos olhar (1) quando  $M$  é uma variedade complexa de dimensão arbitrária  $n$ . Com isso, teremos que a curvatura gaussiana  $K$  é a  $n$ -ésima classe de Chern de  $M$ . Da mesma forma olhamos a expressão em (2) quando a variedade  $M$  tem dimensão  $n$ . Assim, (3) é a ligação do teorema de Gauss-Bonnet com o teorema de Poincaré-Hopf em dimensões maiores.

Uma generalização desse fato é o que elucida o teorema de Baum-Bott, onde primeiro substituímos o campo de vetores suave tangente  $V$  por um campo holomorfo. Dessa ideia nasceu o resultado de R. Bott em [6] no ano de 1967. No entanto, devido aos resultados apresentados por Carrell e Liebermann em [10], esse teorema de Bott se torna fraco pela pouca aplicabilidade. Daí Baum e Bott generalizaram tal resultado à campos de vetores meromorfos no ano de 1970 em [2], que geram folheações holomorfas singulares de dimensão 1 em  $M$  e nos dá obstrução topológica para a existência de seções globais sem singularidades em  $M$ . Posteriormente em [3] no ano de 1972, os mesmos autores generalizaram esse teorema obtendo resultados globais sobre folheações holomorfas singulares de dimensão qualquer, mas por motivos técnicos não abordaremos tal versão.

No capítulo 3 tratamos desse teorema em dois casos. No primeiro caso, apresentamos o teorema original de 1970 com a demonstração dada por S. S. Chern. Já no segundo caso mostramos a grande ideia de M. Soares em [31], ao utilizar a relação do resíduo de Grothendieck com o núcleo de Bochner-Martinelli, para fazer uma pequena modificação na prova de Chern retirando assim uma hipótese genérica.

Procuramos no último capítulo aplicar o teorema de Baum-Bott. Para esse fim, tratamos do problema de Poincaré a respeito de integrabilidade algébrica de folheações. Após essa questão ter ficado cerca de 100 anos sem aparecer um resultado de expressão, Cerveau e Lins Neto em [12] no ano de 1991, assim como M. Carnicer em [9], 3 anos mais tarde apresentam à comunidade matemática certos resultados, sob determinadas hipóteses. Exploramos também nesse capítulo, a contribuição para esse problema de M. Soares em [32], o qual tem uma demonstração belíssima pelo recurso utilizado.

# Capítulo 1

## Preliminares

Começamos o trabalho com um capítulo que nos trás os pré-requisitos necessários para termos um entendimento da teoria abordada nessa dissertação.

A primeira seção vem com o objetivo de apresentar o ambiente de estudo, variedades complexas. Em seguida, exploramos esses ambientes e extraímos alguns resultados sobre fibrados vetoriais. Apresentamos uma caracterização de fibrados vetoriais por cociclos, a qual fornece uma maneira prática para construir fibrados. Nessa seção ainda exploramos a construção de novos fibrados, tais como: fibrado dual, soma de Whitney, produto tensorial, produto exterior, pullback e subfibrados; pelo fato de usarmos alguns desses conceitos no capítulo 3 e também no capítulo 4.

Na seção 1.4 veremos sobre o índice de Poincaré Hopf e o número de Milnor, assim como alguns resultados relevantes desses conceitos; além de demonstrar o Teorema 1.5.18 que trata sobre a igualdade desses dois conceitos no caso complexo.

Em seções seguintes desse capítulo, exploramos o núcleo de Bochner-Martinelli e também o resíduo de Grothendieck, com o objetivo de apresentar a relação entre eles, pois foi com esse fato que Márcio Gomes Soares refez a demonstração do teorema de Baum-Bott, dada por S. S. Chern, retirando uma hipótese genérica.

Já na seção 1.8 abordamos conexões, polinômios invariantes, classes características e classes de Chern, afinal no capítulo 3 usamos fortemente as classes de Chern para apresentar o teorema de Baum-Bott.

Terminamos o capítulo com uma belíssima seção sobre a localização das Classes Características. Fazemos toda uma construção para mostrar que a matriz da curvatura da conexão do fibrado torcido  $TM \otimes L$ , localiza-se fora dos zeros de uma seção global desse fibrado. Esse fato será extremamente útil na demonstração do teorema de Baum-Bott.

### 1.1 Variedades Complexas

Começamos esse primeiro capítulo definindo variedade complexa, o qual serve de base para nosso trabalho. Definiremos espaço tangente e exploraremos suas propriedades, com o objetivo de abordar, na seção seguinte, o conceito de fibrado vetorial.

**Definição 1.1.1** *Uma estrutura analítica num espaço topológico  $M$  é dado por uma*

cobertura de  $M$  por abertos  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  e homeomorfismos

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha \subset \mathbb{C}^n$$

tais que as funções de transição

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \longrightarrow \varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$$

são holomorfas para  $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ .

**Definição 1.1.2** *Uma variedade complexa de dimensão  $n$  é um espaço topológico  $M$ , Hausdorff, conexo, com base enumerável que admite uma estrutura analítica.*

**Observações:**

- A condição de que  $M$  seja Hausdorff é importante, pois com ela garantimos alguns resultados já conhecidos do estudo em espaços euclidianos. Entre eles, temos a unicidade do limite na variedade. Outro fator positivo é que quando tomamos dois pontos distintos de  $M$ , temos vizinhanças disjuntas.
- Já a exigência de termos base enumerável é de grande importância para que possamos explorar algumas propriedades globais na variedade. Com essa hipótese garantimos a existência da partição da unidade, a qual é útil para estendermos conceitos locais à globais.

Na definição acima de variedade complexa, o par  $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$  denotará um atlas para  $M$ . Quando  $n = 1$ , nossa variedade leva o nome de **Superfície de Riemann**.

**Definição 1.1.3** *Seja  $M$  uma variedade complexa de dimensão  $n$ . Um subconjunto conexo  $N \subset M$  é uma subvariedade de dimensão  $m$  de  $M$  desde que, para cada  $x \in N$ , exista uma carta  $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$  do atlas de  $M$ , com  $x \in U_\alpha$ , tal que  $\varphi_\alpha$  seja um homeomorfismo entre  $U_\alpha \cap N$  e um aberto de  $\mathbb{C}^n \times \{0\} \subset \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{n-m} \cong \mathbb{C}^n$ .*

Até agora definimos e exploramos o conceito de variedade complexa. Sendo assim, temos possibilidade de falar em aplicações holomorfas entre variedades. Para isso, temos a seguinte definição.

**Definição 1.1.4** *Dadas duas variedades complexas  $M$  e  $N$ , uma aplicação*

$$f : M \rightarrow N$$

*é holomorfa, se a composta  $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$  for holomorfa no sentido clássico, onde  $\varphi_\alpha$  e  $\psi_\beta$  são cartas em  $M$  e em  $N$  respectivamente.*

**Exemplo 1.1.5** *O primeiro exemplo de variedade a comentar é que  $\mathbb{C}^n$  é trivialmente uma variedade complexa de dimensão  $n$ , onde um possível atlas é da forma  $\{\mathbb{C}^n, Id\}$ .*

**Exemplo 1.1.6** *Uma importante variedade complexa compacta é o espaço projetivo complexo  $n$ -dimensional  $\mathbb{P}^n$ , o qual é definido pelo quociente de  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  pela relação de equivalência,*

$$z, w \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}; z \sim w \text{ se, e somente se, existe } \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ tal que } z = \lambda w.$$

Seja a aplicação quociente

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{P}^n \\ z &\longmapsto [z] \end{aligned}$$

agora considere a restrição dessa aplicação  $\pi$  à esfera unitária centrada no origem  $S^{2n+1}$ , logo  $\pi : S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{P}^n$  é uma fibração sobre  $\mathbb{P}^n$  com fibra homeomorfa à  $S^1$ . Assim, como essa restrição é contínua e sobrejetora temos  $\pi(S^{2n+1}) = \mathbb{P}^n$  é compacto pois  $S^{2n+1}$  o é.

Intuitivamente, um elemento de  $\mathbb{P}^n$  é uma reta passando pela origem de  $\mathbb{C}^{n+1}$ .

Passamos agora a definir um novo ambiente de uma variedade. Esse será o espaço tangente, onde é possível efetuar alguns cálculos, tal como uma certa derivada.

Seja  $M$  uma variedade complexa de dimensão  $n$ , logo  $M$  é uma variedade real de dimensão  $2n$ . Tome um ponto  $p \in M$  e uma carta  $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$  do atlas analítico de  $M$  com as seguintes coordenadas reais,:

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(q) &= \left( x_1(q), y_1(q), \dots, x_n(q), y_n(q) \right) \\ &= \left( x_1(q) + iy_1(q), \dots, x_n(q) + iy_n(q) \right) \\ &= \left( z_1(q), \dots, z_n(q) \right) \end{aligned}$$

onde  $q \in U_\alpha$ . Seja  $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$  o espaço vetorial das funções de classe  $\mathcal{C}^\infty$  em  $M$ . Uma derivação é uma aplicação.

$$v : \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

com as seguintes propriedades

(i)  $v$  é  $\mathbb{R}$ -Linear;

(ii)  $v(fg) = g(p)v(f) + f(p)v(g)$

Se  $f \in \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{R})$  então  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) := \frac{\partial (f \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial x_i}(\varphi_\alpha(p))$

para  $i = 1, 2, \dots, n$ , onde  $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$  é um sistema de coordenadas locais.

Considere o espaço vetorial real gerado pelo conjunto,

$$\beta = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \frac{\partial}{\partial y_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p), \frac{\partial}{\partial y_n}(p) \right\}.$$

Ou melhor,  $\beta$  é uma base para esse espaço, o qual denotamos por  $T_pM$  que é comumente chamado de **espaço tangente** à  $M$  em  $p$ .

Seja  $T_pM^{\mathbb{C}}$  o espaço complexificado de  $T_pM$ , ou seja,

$$T_pM^{\mathbb{C}} = T_pM \otimes \mathbb{C},$$

logo  $\dim_{\mathbb{C}} T_pM^{\mathbb{C}} = 2n$ , daí escolhemos para  $T_pM^{\mathbb{C}}$ , através da carta  $\varphi_\alpha$ , a base,

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z_1}(p), \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}(p), \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}(p) \right\}$$

onde

$$\frac{\partial}{\partial z_k}(p) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k}(p) - i \frac{\partial}{\partial y_k}(p) \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}(p) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k}(p) + i \frac{\partial}{\partial y_k}(p) \right].$$

## 1.2 Cohomologia de De Rham

Nessa seção vamos apresentar uma parte básica da cohomologia de De Rham, porém necessária para nosso propósito, pois será útil para definirmos o invariante topológico Classes Características de fibrados vetoriais.

Sejam  $z_1, \dots, z_n$  coordenadas locais em  $\mathbb{C}^n$ . Define-se  $\Omega^*$  como a álgebra sobre  $\mathbb{C}$ , gerada pelas 1-formas  $dz_1, \dots, dz_n$  com a seguinte relação,

$$\begin{cases} (dz_i)^2 = 0 \\ dz_i dz_j = -dz_j dz_i \text{ para } i \neq j. \end{cases}$$

Então, como espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$ , a álgebra  $\Omega^*$  possui a seguinte base,

$$\{1, dz_i, dz_i dz_j, dz_i dz_j dz_k, \dots, dz_1 \dots dz_n \text{ para } i < j, i < j < k\}$$

Nesse contexto, dizemos que as formas diferenciais em  $\mathbb{C}^n$  são elementos de



$$\Omega^*(\mathbb{C}^n) = \{\text{funções } \mathcal{C}^\infty \text{ em } \mathbb{C}^n\} \otimes_{\mathbb{C}} \Omega^*$$

Tendo em vista a base acima, temos que se  $\omega$  é uma tal forma, podemos escrevê-la, de maneira única, como

$$\omega = \sum f_{i_1 \dots i_r} dz_{i_1} \dots dz_{i_r}$$

onde as funções coeficientes  $f_{i_1 \dots i_r}$  são de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . De uma maneira mais concisa, temos também a notação

$$\omega = \sum_I f_I dz_I.$$

Seja  $\Omega^q(\mathbb{C}^n)$  o módulo que consiste das  $q$ -ésimas formas em  $\mathbb{C}^n$ , então temos que  $\Omega^*(\mathbb{C}^n)$  é uma álgebra graduada, ou seja,

$$\Omega^*(\mathbb{C}^n) = \bigoplus_{q=0}^n \Omega^q(\mathbb{C}^n).$$

Então definimos, de um modo natural, o seguinte operador diferencial por

$$\begin{aligned} d : \quad \Omega^q(\mathbb{C}^n) &\longrightarrow \Omega^{q+1}(\mathbb{C}^n) \\ w = \sum f_I dz_I &\longmapsto d(\sum f_I dz_I) \end{aligned}$$

onde

$$(i) \text{ se } f \in \Omega^0(\mathbb{C}^n), \text{ então } df = \sum \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i;$$

$$(ii) \text{ se } w = \sum f_I dz_I, \text{ então } d(w) = \sum df_I dz_i.$$

Daremos o nome de derivada exterior para o operador  $d$ .

**Definição 1.2.1** *Sejam  $w_1 = \sum f_I dz_I$  e  $w_2 = \sum g_J dz_J$  duas formas diferenciáveis. Definimos o produto exterior delas por,*

$$w_1 \wedge w_2 = \sum f_I g_J dz_I dz_J$$

Sendo assim temos,

$$w_1 \wedge w_2 = (-1)^{(\deg w_1)(\deg w_2)} w_2 \wedge w_1.$$

**Proposição 1.2.2** *O operador diferencial  $d$  é uma antiderivação, isto é,*

$$d(w_1 \wedge w_2) = d(w_1) \wedge w_2 + (-1)^{\deg(w_1)} w_1 \wedge d(w_2)$$

**Demonstração:** Como  $d$  é linear, é suficiente verificar o resultado para

$$w_1 = f_I dz_I \quad \text{e} \quad w_2 = g_J dz_J.$$

Então

$$\begin{aligned} d(w_1 \wedge w_2) &= d(f_I g_J dz_I \wedge dz_J) = d(f_I g_J) \wedge dz_I \wedge dz_J \\ &= [(df_I)g_J + f_I(dg_J)] \wedge dz_I \wedge dz_J \\ &= (df_I) \wedge g_J dz_I \wedge dz_J + f_I(dg_J) \wedge dz_I \wedge dz_J \\ &= (df_I) \wedge dz_I g_J \wedge dz_J + (-1)^{\deg w_2} f_I dz_I \wedge dg_J \wedge dz_J \\ &= (dw_1) \wedge w_2 + (-1)^{\deg w_2} w_1 \wedge (dw_2). \end{aligned}$$

□

O próximo resultado é de grande importância na definição de cohomologia.

**Proposição 1.2.3**  $d^2 \equiv 0$ .

**Demonstração:** Seja  $f$  uma função de classe  $C^\infty$ , então

$$d^2 f = d\left(\sum \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i\right) = \sum \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial z_i} dz_j \wedge dz_i$$

sendo  $\frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial z_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}$  e também  $dz_j \wedge dz_i = -dz_i \wedge dz_j$ , então  $d^2 f \equiv 0$ .

Portanto se  $w = \sum f_I dz_I$  é uma forma temos,

$$d^2 w = d^2 \left( \sum f_I dz_I \right) = \sum d^2 f_I dz_I = 0$$

□

**Definição 1.2.4** Definimos o **Complexo de De Rham**, como sendo a álgebra graduada  $\Omega^*(\mathbb{C}^n)$  junto com o operador diferencial  $d$ .

**Definição 1.2.5** Definimos as **formas fechadas** como o núcleo de  $d$ . Já as **formas exatas** são definidas como a imagem de  $d$ .

**Observação:** Encontrar uma 1-forma fechada  $w = f dz_1 + g dz_2$  em  $\mathbb{C}^2$  é equivalente a resolver a seguinte equação diferencial

$$\frac{\partial g}{\partial z_1} - \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0.$$

De fato, a forma  $w = f dz_1 + g dz_2$  é fechada se, e somente se,

$$\begin{aligned} dw &= \frac{\partial f}{\partial z_2} dz_2 \wedge dz_1 + \frac{\partial g}{\partial z_1} dz_1 \wedge dz_2 = 0 \\ &= \left( \frac{\partial g}{\partial z_1} - \frac{\partial f}{\partial z_2} \right) dz_1 \wedge dz_2 = 0 \end{aligned}$$

Mas isso ocorre se, e somente se,

$$\frac{\partial g}{\partial z_1} - \frac{\partial f}{\partial z_2} = 0.$$

A proposição 1.2.3 nos diz que formas exatas são fechadas, pois se  $w_1$  é uma forma exata, existe uma forma  $w_2$  de maneira que  $w_1 = dw_2$ . Derivando essa relação temos,  $dw_1 = d^2 w_2 = 0$ . Portanto  $w_1$  é fechada.

Por mera curiosidade, existe um lema, devido à Poincaré, no qual nos diz que, localmente, toda forma fechada é exata. Terminamos a seção com a definição central.

**Definição 1.2.6** *A  $q$ -ésima Cohomologia de De Rham em  $\mathbb{C}^n$  é definido como o espaço vetorial quociente*

$$H_{DH}^q(\mathbb{C}^n) = \frac{\{q - \text{forma fechada}\}}{\{q - \text{forma exata}\}}.$$

### 1.3 Fibrados Vetoriais

A grosso modo, um fibrado vetorial sobre os espaços topológicos  $M$  e  $F$  é um outro espaço topológico  $E$ , o qual é localmente  $U_\alpha \times F$ , onde  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  é uma cobertura por abertos de  $M$ , satisfazendo determinadas propriedades. Para precisar essas ideias temos:

**Definição 1.3.1** *Seja  $M$  um espaço topológico. Um **fibrado vetorial** de ponto  $k$  sobre  $M$  é um espaço topológico  $E$  junto com uma projeção contínua  $\pi : E \rightarrow M$  satisfazendo:*

1.  $\pi^{-1}(x) := E_x$  tem estrutura de espaço vetorial de dimensão  $k$  sobre o corpo  $\mathbb{K}$ , para todo  $x \in M$ ;
2. existe uma cobertura  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  de  $M$  por abertos e homeomorfismos  $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{K}^k$ , tal que, para todo  $\alpha \in A$  e todo  $x \in U_\alpha$  as seguintes aplicações:

$$\varphi_\alpha : E_x \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{K}^k \cong \mathbb{K}^k$$

são isomorfismos entre espaços vetoriais.

A condição (2), da definição acima, é equivalente à:

- para cada  $\alpha \in A$  existem difeomorfismos  $\varphi_\alpha$  que fazem o seguinte diagrama comutar

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & U_\alpha \times \mathbb{K}^r \\ & \searrow \pi & \swarrow p_1 \\ & & U_\alpha \end{array}$$

onde  $p_1$  é a projeção na primeira coordenada.

**Definição 1.3.2** Para cada  $x \in M$ ,  $\pi^{-1}(x) = E_x$  será chamado de **fibra** do fibrado  $E$ .

Por questões de notação, vamos nos referir a terna  $\eta = (E, \pi, M)$  como o fibrado vetorial com espaço total  $E$ , projeção  $\pi$  e base  $M$ , ou seja,

- $E =$  espaço total;
- $\pi =$  projeção;
- $M =$  espaço base.

E as aplicações  $\varphi_\alpha$  serão chamadas de **trivializações** locais de  $E$ .

Antes de apresentar alguns exemplos de fibrados vetoriais, com o objetivo de dar um maior entendimento desse conceito, passamos a apresentar uma caracterização de fibrados vetoriais, onde será usado em várias partes desse trabalho, pela sua facilidade em se obter os tais fibrados.

**Proposição 1.3.3** Sejam  $M$  uma variedade complexa e  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  uma cobertura por abertos de  $M$ . Suponha dada um coleção de aplicações

$$\varphi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow GL_r(\mathbb{K})$$

satisfazendo as condições de cociclo:

$$\varphi_{\alpha\beta} \cdot \varphi_{\beta\gamma} \cdot \varphi_{\gamma\alpha} = \text{Id} \text{ em } U_{\alpha\beta\gamma} \neq \emptyset \text{ e } \varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\beta\alpha}^{-1} \text{ em } U_{\alpha\beta} \neq \emptyset.$$

Considere o espaço topológico  $\mathcal{F} := \coprod_{\alpha \in A} (U_\alpha \times \mathbb{K}^r)$  (união disjunta munido da topologia óbvia). Defina a seguinte relação de equivalência em  $\mathcal{F}$ :

$$(\alpha, x, u) \sim (\beta, y, v) \Leftrightarrow x = y \text{ e } \varphi_{\alpha\beta}(x)v = u.$$

Então o quociente  $(\mathcal{F}/\sim)$  tem estrutura de fibrado vetorial real de posto  $r$  sobre  $M$ , único a menos de isomorfismos, cujas funções de transição são  $\varphi_{\alpha\beta}$ .

**Demonstração:** Defina a seguinte projeção contínua

$$p : E = (\mathcal{F}/\sim) \longrightarrow M \\ [(\alpha, x, u)] \longmapsto x$$

Agora note que  $p^{-1}(\{x\}) = [(\alpha, x, u)] \cong \mathbb{K}^r$ , logo cada  $E_x$  tem estrutura de espaço vetorial de dimensão  $r$ .

Por outro lado,

$$p^{-1}(U_\alpha) = ((U_\alpha \times \mathbb{K}^r)/\sim) \times \{\alpha\} \cong (U_\alpha \times \mathbb{K}^r)/\sim = [(\alpha, U_\alpha, \mathbb{K}^r)]$$

Daí defina

$$\psi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{K}^r \\ [(\alpha, x, u)] \longmapsto (x, u),$$

a qual é um homeomorfismo, pois é injetora, uma vez que se  $(x_1, u_1) = (x_2, u_2)$  então  $x_1 = x_2$  e  $u_1 = u_2$ , logo

$$[(\alpha, x_1, u_1)] = [(\alpha, x_2, u_2)].$$

E  $\varphi_\alpha$  também é sobrejetora, pois tomando  $(a, b)$  em  $U_\alpha \times \mathbb{K}^r$  considere  $\theta = [(\alpha, a, b)]$  onde  $a \in U_\alpha$ , logo

$$\psi_{\alpha x} : E_x = p^{-1}(x) \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{K}^r \\ [(\alpha, x, u)] \longmapsto (x, u)$$

onde  $\alpha \in A$  é fixo.

É um isomorfismo por ser injetivo. Portanto o quociente é, de fato, um fibrado vetorial de posto  $r$ . □

**Proposição 1.3.4** *Sejam  $\eta = (E, \pi, M, \mathbb{K}^r)$  um fibrado vetorial de posto  $r$ ,  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  uma cobertura trivializadora e  $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$  trivializações locais de  $E$ . Dados  $x \in U_\alpha$  e  $\varphi_{\alpha x} : E_x \rightarrow \mathbb{K}^r$ , definimos*

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} &\longrightarrow GL_r(\mathbb{K}) \\ x &\longmapsto \varphi_{\alpha x} \circ \varphi_{\beta x}^{-1} \end{aligned}$$

Então as funções de transição  $\varphi_{\alpha\beta}$  satisfazem as condições de cociclo.

**Demonstração:** Com efeito, como

$$\varphi_{\alpha\beta}(x) = \varphi_{\alpha x} \circ \varphi_{\beta x}^{-1}$$

$$\text{temos } \left( \varphi_{\beta\alpha}(x) \right)^{-1} = \left( \varphi_{\beta x} \circ \varphi_{\alpha x}^{-1} \right)^{-1} = \varphi_{\alpha x} \circ \varphi_{\beta x}^{-1} = \varphi_{\alpha\beta}(x)$$

Então  $\varphi_{\beta\alpha}^{-1} = \varphi_{\alpha\beta}$ .

Por outro lado temos,

$$\begin{aligned} \left( \varphi_{\alpha\beta} \cdot \varphi_{\beta\gamma} \cdot \varphi_{\gamma\alpha} \right)(x) &= \varphi_{\alpha\beta}(x) \cdot \varphi_{\beta\gamma}(x) \cdot \varphi_{\gamma\alpha}(x) \\ &= \varphi_{\alpha x} \cdot \varphi_{\beta x}^{-1} \cdot \varphi_{\beta x} \cdot \varphi_{\gamma x}^{-1} \cdot \varphi_{\gamma x} \cdot \varphi_{\alpha x}^{-1} \\ &= \varphi_{\alpha x} \circ \varphi_{\alpha x}^{-1} \\ &= \text{Id} \end{aligned}$$

Portanto temos as condições de cociclo satisfeitas. □

Esses dois resultados é o que nos garante a tal caracterização falada, pois a proposição [1.3.3](#) nos diz que é possível construir um fibrado tendo apenas funções de transição satisfazendo as condições de cociclo. Por outro lado a proposição [1.3.4](#) garante que dado um fibrado vetorial, temos aplicações que satisfazem as condições de cociclo. Portanto temos um fibrado vetorial se, e somente se, temos as devidas funções de transição. Passamos agora a apresentar alguns exemplos de fibrados vetoriais.

**Exemplo 1.3.5** O fibrado trivial de posto  $r$  sobre  $M$ , denotado por  $\underline{\mathbb{K}}^r$  é definido por

$$\underline{\mathbb{K}}^r := M \times \mathbb{K}^r.$$

Para ver esse fato, defina a projeção contínua

$$\begin{aligned} \pi : \underline{\mathbb{K}}^r &\longrightarrow M \\ (p, v) &\longmapsto p \end{aligned}$$

e observando que para cada  $U_\alpha \subset M$  temos  $\pi^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times \mathbb{K}^r$ . Defina então

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) &\longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{K}^r \\ (x, y) &\longmapsto (x, y) \end{aligned}$$

ou seja,  $\varphi_\alpha = Id|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}$ , logo  $\varphi_\alpha$  é um difeomorfismo que satisfaz  $(p_1 \circ \varphi_\alpha)(x, y) = x = \pi(x, y)$  para todo  $(x, y) \in U_\alpha \times \mathbb{K}^r$ , ou seja, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & U_\alpha \times \mathbb{K}^r \\ & \searrow \pi & \swarrow p_1 \\ & & U_\alpha \end{array}$$

comuta.

**Definição 1.3.6** Uma seção do fibrado  $\eta = (E, \pi, M)$  é uma aplicação de classe  $C^\infty$ ,  $s : M \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ s = Id_M$ , ou seja,  $s(x) \in E_x$  para todo  $x \in M$ . Denotamos por  $\Gamma^\infty(M, E)$  o  $C^\infty(M)$ -módulo das seções do fibrado  $E$  de classe  $C^\infty$ .

**Exemplo 1.3.7** Se  $f \in C^\infty(M, \mathbb{K}^r)$ , então a aplicação gráfico

$$\begin{aligned} s : M &\longrightarrow \underline{\mathbb{K}^r} = M \times \mathbb{K}^r \\ x &\longmapsto s(x) = (x, f(x)) \end{aligned}$$

é uma seção do fibrado trivial  $\underline{\mathbb{K}^r}$ .

Uma observação pertinente é que, localmente, toda seção tem esse comportamento, ou seja, é gráfico de alguma função de classe  $C^\infty$ .

**Exemplo 1.3.8** Seja  $M$  uma variedade complexa de dimensão  $n$ . Para cada  $p \in M$  seja  $T_p M$  o espaço tangente à  $M$  em  $p$  é

$$TM := \{(p, v_p) / p \in M \text{ e } v_p \in T_p M\}$$

então  $\eta = (TM, \pi, M)$  é o fibrado tangente à  $M$ .

O fibrado tangente à uma variedade é útil, entre outros motivos, para falarmos em campos de vetores, assim como em  $p$ -formas em uma variedade.

Falamos agora na construção de novos fibrados a partir de outros pré-existentes. Faremos isso através de operações entre fibrados, como por exemplo: soma de Whitney, produto tensorial, entre outros.

Vimos, na definição de fibrados, que a fibra de um fibrado vetorial possui estrutura de espaço vetorial, então operações nessas fibras induzem operações nos fibrados.

**Fibrado Dual:** Seja  $\eta = (E, \pi, M)$  um fibrado vetorial cujas funções de transição são  $\{g_{\alpha\beta}\}$ . Então definimos o fibrado vetorial dual como sendo a união de toda fibra dual do fibrado  $E$ , ou seja,

$$E^* := \cup_{x \in M} E_x^*$$

onde  $E_x^*$  é o dual do espaço vetorial  $E_x$ , cujas funções de transição são dadas por:

$$j_{\alpha\beta}(x) := (g_{\alpha\beta}^T)^{-1}(x).$$

Nesse contexto, definimos o **fibrado cotangente** de uma variedade, como sendo o fibrado dual, no sentido acima, do fibrado tangente, ou seja,  $T^*M = (TM)^*$ .

Considere  $\eta = (E, \pi, M)$  e  $\Theta = (F, p, M)$  dois fibrados vetoriais complexos de posto  $k$  e  $l$ , respectivamente, cujas funções de transição são  $\{g_{\alpha\beta}\}$  e  $\{h_{\alpha\beta}\}$ , respectivamente. Assim podemos construir os seguintes fibrados.

**Soma de Whitney:** O fibrado **soma direta**, denotado por,  $E \oplus F$  é tal que suas fibras, sobre cada  $x \in M$ , é a soma direta dos espaços vetoriais  $E_x$  com  $F_x$ , ou seja,

$$(E \oplus F)_x = E_x \oplus F_x.$$

Já as funções de transição do fibrado  $E \oplus F$  é definido por:

$$j_{\alpha\beta}(x) := (g_{\alpha\beta} \oplus h_{\alpha\beta})(x) = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & h_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \in GL_{k+l}(\mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C}^l).$$

**Produto Tensorial:** Definimos o produto tensorial entre os fibrados  $E$  e  $F$ , como sendo o fibrado, cujas fibras são o produto tensorial entre os espaços vetoriais  $E_x$  e  $F_x$ , isto é:

$$(E \otimes F)_x = E_x \otimes F_x.$$

E mais, as funções de transição de  $E \otimes F$  são definidas por;

$$j_{\alpha\beta}(x) := g_{\alpha\beta}(x) \otimes h_{\alpha\beta}(x) \in GL_{k \cdot l}(\mathbb{C}^k \otimes \mathbb{C}^l).$$

**Produto Exterior:** O  $r$ -ésimo produto exterior do fibrado  $E$ , denotado por  $\bigwedge^r E$ , é definido como sendo o fibrado o qual tem por funções de transição,

$$j_{\alpha\beta}(x) := \bigwedge^r g_{\alpha\beta}(x).$$

Em particular, quando  $r = k$  (posto de  $E$ ),  $\bigwedge^r E$  é um fibrado de retas, ou seja, de posto 1, cujas funções de transição são da forma,



$$j_{\alpha\beta}(x) = \det g_{\alpha\beta}(x).$$

Esse fibrado é comumente chamado de **fibrado determinante** de  $E$ .

**Pullback:** Dados uma aplicação de classe  $C^\infty$   $f : M \rightarrow N$  entre as variedades  $M$  e  $N$  e um fibrado vetorial complexo  $\eta = (E, \pi, N)$ , definimos o fibrado pullback  $f^*E$ , cujas fibras são;

$$(f^*E)_x = E_{f(x)}.$$

E se  $g_{\alpha\beta}$  são as funções de transição de  $E$ , as funções de transição do fibrado pullback são da forma;

$$j_{\alpha\beta} := g_{\alpha\beta} \circ f.$$

**Subfibrado:** Seja  $\eta = (E, \pi, M)$  um fibrado vetorial. Um **subfibrado** de  $E$  consiste em um subconjunto  $F \subset E$  tal que a projeção  $\pi$  e as trivializações locais de  $E$  dão a  $F$  uma estrutura de fibrado vetorial, o qual tem por fibras  $F_x$ , subespaços vetoriais das fibras de  $E_x$ .

**Definição 1.3.9** *Uma p-forma diferenciável numa variedade é uma seção*

$$w : M \rightarrow \bigwedge^p (TM)^*$$

*diferenciável do fibrado  $\bigwedge^p (TM)^*$ . Denotaremos o espaço das p-formas por*

$$\bigwedge^p(M) := \Gamma\left(M, \bigwedge^p (TM)^*\right).$$

A próxima definição, com respeito a isomorfismo de fibrados, é muito útil na teoria de classificação de fibrados, pois dado uma variedade complexa  $M$ , podemos definir e construir muitos fibrados sobre  $M$ , e assim classificá-los quanto ao fato deles serem ou não isomorfos. Esse fato é interessante para calcular tanto as classes características quanto as classes de Chern do fibrado, o quais são invariantes topológicos, ou seja, fibrados isomorfos tem a mesma classe característica e por conseguinte a mesma classe de Chern.

**Definição 1.3.10** *Sejam  $E$  e  $F$  fibrados vetoriais sobre a variedade complexa  $M$ . Um morfismo  $\varphi : E \rightarrow F$  é uma aplicação contínua tal que o seguinte diagrama comuta;*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & F \\ \pi_E \downarrow & & \downarrow \pi_F \\ M & \longrightarrow & M \end{array}$$

E mais  $\varphi|_{E_x} : E_x \rightarrow F_x$  é linear para todo  $x \in M$ . Se  $\varphi$  é uma bijeção e  $\varphi^{-1}$  é um morfismo, então  $\varphi$  é chamada de **isomorfismo**. Nesse último caso, dizemos que os fibrados  $E$  e  $F$  são isomorfos, e para tal fato, usamos a seguinte notação  $E \cong F$ .

**Exemplo 1.3.11** Considere a variedade  $M = S^1$ . Então temos que o fibrado tangente a  $S^1$  é isomorfo ao fibrado trivial de retas sobre  $S^1$ , ou seja;

$$S^1 \times \mathbb{R} \cong TS^1$$

O morfismo que dá o referido isomorfismo é definido por;

$$\begin{aligned} \varphi : S^1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow TS^1 \\ (y, \lambda) &\longmapsto \varphi(y, \lambda) = (\lambda, \lambda v_y) \end{aligned}$$

onde  $y = (\cos(\theta), \sin(\theta))$  e  $v_y = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$ .

Podemos caracterizar os fibrados triviais de uma variedade da seguinte forma. Um fibrado  $E$ , na variedade complexa  $M$ , é trivial se é isomorfo à  $M \times \mathbb{C}^k$ .

Tendo em mente a definição de fibrado vetorial, exploramos agora alguns tipos particulares de fibrados vetoriais.

**O fibrado  $[V]$**  : Vamos associar um fibrado à uma hipersuperfície (conjunto analítico). Para isso tome  $M$  uma variedade complexa compacta e  $V \subset M$  um conjunto analítico de codimensão 1, o qual é definido pelas pré-imagens das aplicações;

$$f_i : U_i \subset M \rightarrow \mathbb{C},$$

Daí considere a cobertura de  $M$  formada pelos  $\{U_i\}$ . Na intersecção não nula dos  $U_i$ , existe uma aplicação holomorfa  $\varphi_{ij}$ , que não se anula em ponto algum, de forma que;

$$f_i = \varphi_{ij} f_j.$$

Partindo desse princípio, definimos o fibrado de posto 1 associado a  $V$  e denotado por  $[V]$ , como sendo o fibrado cujas funções de transição são da forma

$$\varphi_{ij} = \frac{f_i}{f_j}.$$

Suponha que  $V$  seja definido pela pré-imagem de outras funções, a saber:  $g_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ . Logo temos as seguintes funções holomorfas, que não se anulão.

$$\psi_{ij} = \frac{g_i}{g_j},$$

as quais dão origem a um "outro" fibrado. Mas que é isomorfo ao fibrado  $[V]$ , pois

$$\psi_{ij} = \frac{g_i}{g_j} = \frac{f_i\left(\frac{f_j}{g_j}\right)}{f_j\left(\frac{f_i}{g_i}\right)} = \varphi_{ij}\left(\frac{f_j}{g_j}, \frac{f_i}{g_i}\right)$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} f_i \\ g_i \end{pmatrix} \psi_{ij} = \varphi_{ij}\left(\frac{f_j}{g_j}\right).$$

Portanto a  $V$  fica associado a classe de isomorfismos do fibrado  $[V]$ .

**Fibrado Tautológico  $\mathbb{L}^*$ :** Considere a variedade complexa compacta como sendo o espaço projetivo complexo  $n$ -dimensional  $\mathbb{P}^n$ . Tome o fibrado trivial  $\underline{\mathbb{C}}^{n+1} = \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ . Com isso definimos o **fibrado tautológico** ou **universal**, denotado por  $\mathbb{L}^*$ , como sendo o subfibrado, de posto 1 de  $\underline{\mathbb{C}}^{n+1}$ , o qual consiste dos pares  $([w], z) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$  tais que  $z$  pertence a reta definida por  $[w]$ , ou seja,

$$\mathbb{L}^* = \{([w], z) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}; \text{ existe } \lambda \in \mathbb{C} \text{ tal que } z = tw\}$$

Em coordenadas do aberto  $U_i$  temos,

$$\mathbb{L}^*|_{U_i} = \{((z_0 : \dots : z_n), \lambda(z_0, \dots, z_n)); \lambda \in \mathbb{C}\}$$

E mais, as aplicações de transição tem o seguinte comportamento

$$\begin{aligned} U_{ij} \times \mathbb{C} &\xleftarrow{\Theta_j} \mathbb{L}^*|_{U_{ij}} \xrightarrow{\Theta_i} U_{ij} \times \mathbb{C} \\ ([z], t) &\longmapsto ([z], \Theta_{ij}([z])t) \end{aligned}$$

E na intersecção não vazia  $U_{ij}$  obtemos,

$$\left(\frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_i}{z_j}, \dots, 1, \dots, \frac{z_n}{z_j}\right) = \frac{z_i}{z_j} \left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, 1, \dots, \frac{z_j}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i}\right).$$

Portanto  $\Theta_{ij}([z]) = \frac{z_i}{z_j}$ .

**Fibrado Hiperplano  $\mathbb{L}$ :** Seja  $H$  um hiperplano em  $\mathbb{P}^n$ , então podemos denotá-lo por  $H = \{P(z) = 0\}$ , onde  $P : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$  é um polinômio de grau 1 com  $P(0) = 0$ . Fazendo uma mudança linear de coordenadas, se necessário, podemos supor

$$H = \{z_0 = 0\}$$

ou seja,  $P(z) = z_0$ .

Em  $U_i$  para  $i \neq 0$  o hiperplano  $H$  é definido pela seguinte equação

$$f_i = \frac{z_0}{z_i}.$$

Assim definimos o **fibrado hiperplano**  $\mathbb{L}$ , o qual representa a classe de isomorfismos dos fibrados da forma  $[H]$ , pelas funções de transição

$$\varphi_{ij} = \frac{f_i}{f_j} = \frac{\frac{z_0}{z_i}}{\frac{z_0}{z_j}} = \frac{z_j}{z_i} \text{ em } U_{ij}.$$

É possível mostrar que dois hiperplanos quaisquer definem fibrados isomorfos.

Agora note que

$$\varphi_{ij} = \frac{z_j}{z_i} = \left( \frac{z_i}{z_j} \right)^{-1} = \Theta_{ij}^{-1};$$

ou seja, o fibrado hiperplano é o dual do fibrado tautológico.

Dado  $d \in \mathbb{Z}$ , definimos  $\mathbb{L}(d)$  por;

$$\mathbb{L}(d) = \begin{cases} \mathbb{L}^{\otimes d} = \underbrace{\mathbb{L} \otimes \cdots \otimes \mathbb{L}}_{d \text{ vezes}}, & \text{se } d \geq 0 \\ \mathbb{L}^{*\otimes -d} = \underbrace{\mathbb{L}^* \otimes \cdots \otimes \mathbb{L}^*}_{-d \text{ vezes}}, & \text{se } d < 0. \end{cases}$$

**Fibrado Canônico:** Para  $M$  uma variedade complexa, definimos o **fibrado canônico**  $K_M$  de  $M$ , como sendo o fibrado dual do fibrado determinante do tangente holomorfo, ou seja;

$$K_M := (\det T'M)^*,$$

o qual tem posto 1.

Considere  $M = \mathbb{P}^n$ , logo as funções de transição do fibrado  $\det T'\mathbb{P}^n$  são da forma,

$$\det \theta_{ij} = (-1)^{i+j} \left( \frac{z_j}{z_i} \right)^{n+1}$$

assim

$$(-1)^j \det \theta_{ij} = \left( \frac{z_j}{z_i} \right)^{n+1} (-1)^j.$$

E isso nos diz que o fibrado  $\det \theta_{ij}$  é isomorfo ao fibrado cujas funções de transição são:  $\left(\frac{z_j}{z_i}\right)^{n+1}$ , ou seja,  $\mathbb{L}(n+1)$ . Portanto

$$K_{\mathbb{P}^n} := (\det T'\mathbb{P}^n)^* \cong \mathbb{L}(n+1)^* = \mathbb{L}(-n-1).$$

## 1.4 Índice de Poincaré-Hopf

Vamos explorar nessa seção, o conceito topológico do índice de Poincaré Hopf do germe de uma aplicação holomorfa em torno de uma singularidade isolada, assim como algumas propriedades concernentes à nosso trabalho. Para esse fim, vamos supor variedades imersas em espaços euclidianos, o qual é possível devido ao Teorema de mergulho de Whitney e também por estarmos tratando com problemas de caráter local.

Começamos com dois resultados técnicos, que no entanto consolidam a construção de nossos conceitos, pelo fato de afirmarem que estamos trabalhando em um ambiente extremamente vasto.

**Teorema 1.4.1 (Sard)** *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^m$  um conjunto aberto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação suave. Denote por  $\Sigma$  o conjunto dos pontos críticos de  $f$ , isto é,*

$$\Sigma = \{p \in U; \text{posto}(df_p) < n\}.$$

*Então a imagem  $f(\Sigma) \subset \mathbb{R}^n$  tem medida de Lebesgue nula.*

**Demonstração:** Ver referência [25].

□

**Teorema 1.4.2 (Brown)** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades suaves e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação suave. Então o conjunto de valores regulares de  $f$ ,  $N \setminus f(\Sigma)$ , é denso em  $N$ .*

**Demonstração:** Ver referência [25].

□

Sejam  $M$  e  $N$  variedades orientáveis de dimensão  $n$ , com  $N$  conexa e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação própria e suave. Tome um ponto regular  $p \in M$  de  $f$ , então a aplicação;

$$df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

é um isomorfismo linear entre espaços vetoriais orientados.

**Observação:** Uma orientação na variedade induz uma orientação em seu espaço tangente.

**Definição 1.4.3** Um isomorfismo preserva orientação quando seu determinante é positivo. Já quando o isomorfismo tem determinante negativo, dizemos que este inverte orientação.

**Definição 1.4.4** Definimos o **sinal** da aplicação  $df_p$  por;

$$\text{sgn}(df_p) = \begin{cases} +1, & \text{se } df_p \text{ preserva orientação;} \\ -1, & \text{se } df_p \text{ inverte orientação.} \end{cases}$$

Assim, se  $q \in N$  é um valor regular de  $f$ , definimos o grau de  $f$  relativamente a  $q$  por:

$$\text{deg}(f, q) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \text{sgn}(df_p).$$

**Teorema 1.4.5** O número inteiro  $\text{deg}(f, q)$  não depende do valor regular  $q \in N$ .

**Demonstração:** Ver referência [21]. □

Tendo em mente esse resultado, podemos apresentar a seguinte definição.

**Definição 1.4.6** O grau da aplicação  $f$  é definido por,

$$\text{deg}(f) := \text{deg}(f, q)$$

onde  $q \in N$  é um valor regular para  $f$ .

Denote por  $|z|$  a norma hermitiana em  $\mathbb{C}^n$ , ou seja,

$$|z| = \sqrt{\sum_{j=1}^n z_j \cdot \bar{z}_j}.$$

Seja a aplicação germe  $f : (\mathbb{C}^n, p) \rightarrow (\mathbb{C}^n, q)$ . Então, sem perda de generalidade, podemos assumir  $f(p) = q = 0$ . Assim estaremos nos referindo à  $p$  como uma "raiz" de  $f = 0$ .

**Definição 1.4.7** Seja  $f : (\mathbb{C}^n, p) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  um germe de uma aplicação holomorfa com  $f^{-1}(0) = \{p\}$ . O **Índice de Poincaré-Hopf** de  $f$  em  $p$ , denotado por  $\mathcal{I}_p(f)$ , é o grau da seguinte aplicação suave;

$$\frac{f}{|f|} : S_\varepsilon^{2n-1}(p) \rightarrow S_1^{2n-1},$$

onde  $S_\varepsilon^{2n-1}(p)$  é a esfera euclidiana de raio  $\varepsilon > 0$  e centro em  $p$ , ou seja;

$$S_\varepsilon^{2n-1}(p) = \{z \in \mathbb{C}^n; |z - p| = \varepsilon\},$$

e  $S_1^{2n-1}$  é a esfera unitária centrada na origem  $0 \in \mathbb{C}^n$ .

**Definição 1.4.8** Uma **homotopia suave** entre duas aplicações  $f, g : M \rightarrow N$  é uma aplicação suave  $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$  tal que

$$F(\cdot, 0) \equiv f \text{ e } F(\cdot, 1) \equiv g.$$

Com essa definição, temos que o grau é um invariante por aplicações homotópicas, mais precisamente.

**Teorema 1.4.9** Se  $f$  é suavemente homotópica a  $g$ , ou seja, se existe  $F$  como na definição acima, então;

$$\deg(f) = \deg(g).$$

**Observação:** A recíproca desse resultado também se verifica. Logo temos uma caracterização para homotopia de aplicações.

**Proposição 1.4.10** Sejam  $M^{n+1}$  uma variedade orientada compacta com bordo  $\partial M$  e  $N^n$  é outra variedade orientada compacta. Considere  $f : \partial M \rightarrow N$  uma aplicação suave própria. Então, se  $f$  admite uma extensão suave  $F : M \rightarrow N$  temos  $\deg(f) = 0$ .

**Proposição 1.4.11** Se  $f : (\mathbb{C}^n, p) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  é o germe de um biholomorfismo, então  $\mathcal{I}_p(f) = 1$ .

Tome  $\overline{B}_\varepsilon(p)$  uma bola euclidiana fechada, com  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, para que a única solução de  $f(z) = 0$  na bola seja  $p$ . Daí temos a seguinte proposição.

**Proposição 1.4.12**  $\mathcal{I}_p(f)$  é o número de pontos do conjunto  $f^{-1}(\zeta) \cap B_\varepsilon(p)$ , onde  $\zeta$  é um valor regular de  $f$  suficientemente próximo de  $0$ .

**Demonstração:** Considere  $\delta = \inf_{S_\varepsilon^{2n-1}} |f| > 0$ . Então pela desigualdade triangular temos,

$$|f(z) - t\zeta| \geq |f(z)| - t|\zeta| \geq \delta - t|\zeta| > 0 \text{ para } t \in [0, 1] \quad (1.1)$$

onde  $z \in S_\varepsilon^{2n-1}(p)$  e  $\zeta$  é um valor regular de  $f$  suficientemente próximo de  $0$ . Isso implica que,

$$f^{-1}(t\zeta) \cap S_\varepsilon^{2n-1}(p) = \emptyset \text{ para todo } t \in [0, 1]$$

pois se  $z \in f^{-1}(t\zeta) \cap S_\varepsilon^{2n-1}(p)$  então  $|z - p| = \varepsilon$ , e mais

$$f(z) = t\zeta \text{ ou seja } |f(z) - t\zeta| = 0$$

o que contraria (1.1). Com isso podemos definir a seguinte função contínua

$$F(z, t) = \frac{f(z) - t\zeta}{|f(z) - t\zeta|}$$

a qual é uma homotopia suave entre  $\frac{f}{|f|}$  e  $\frac{f - \zeta}{|f - \zeta|}$ . Logo pelo Teorema 1.4.9

$$\deg \left( \frac{f}{|f|} \right) = \deg \left( \frac{f - \zeta}{|f - \zeta|} \right).$$

Isto é,

$$\mathcal{I}_p(f) = \deg \left( \frac{f - \zeta}{|f - \zeta|} \right).$$

Considere  $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k\} = f^{-1}(\zeta) \cap B_\varepsilon(p)$  e também esferas disjuntas centradas nesses pontos, duas a duas disjuntas:  $S_{\delta_j}^{2n-1}(\xi_j)$  satisfazendo

$$S_{\delta_j}^{2n-1} \cap S_\varepsilon^{2n-1}(p) = \emptyset.$$

Agora tome a variedade orientada

$$X = \overline{B}_\varepsilon(p) \setminus \bigcup_{j=1}^k B_{\delta_j}(\xi_j).$$

O bordo dessa variedade é dada pela seguinte união disjunta.

$$\partial X = S_\varepsilon^{2n-1} \amalg S_{\delta_1}^{2n-1}(\xi_1) \amalg \dots \amalg S_{\delta_k}^{2n-1}(\xi_k).$$

Temos que a aplicação;

$$\frac{f - \zeta}{|f - \zeta|} : \partial X \rightarrow S_1^{2n-1}(0),$$

admite uma extensão suave, a qual por abuso de notação, ainda denotaremos por  $\frac{f - \zeta}{|f - \zeta|}$  em  $X$ . E pela proposição 1.4.10  $\deg \left( \frac{f - \zeta}{|f - \zeta|} \right) = 0$  e pela orientação de  $X$  temos,



$$\deg \left( \frac{f - \zeta}{|f - \zeta|} \right) = \mathcal{I}_p(f) - \mathcal{I}_{\xi_1}(f - \zeta) - \mathcal{I}_{\xi_2}(f - \zeta) - \dots - \mathcal{I}_{\xi_k}(f - \zeta) = 0.$$

Então  $\mathcal{I}_p(f) = \mathcal{I}_{\xi_1}(f - \zeta) + \dots + \mathcal{I}_{\xi_k}(f - \zeta) = k$ , pois  $f$  é um biholomorfismo em cada  $\xi_j$  e pela proposição 1.4.11  $\mathcal{I}_{\xi_j}(f - \zeta) = 1$  para todo  $j = 1, \dots, k$ .  $\square$

Como forma de enfatizar a última proposição, temos o seguinte exemplo.

**Exemplo 1.4.13** Considere  $f(z_1, z_2) = (z_1^2, z_1 + z_2^3)$  então  $f^{-1}(0) = \{0\}$  e o índice de Poincaré Hopf:  $\mathcal{I}_0(f)$ , é dado pelo número de soluções do sistema;

$$S = \begin{cases} z_1^2 = \zeta_1 \\ z_1 + z_2^3 = \zeta_2 \end{cases}$$

Note que esse fato se origina da relação

$$\mathcal{I}_0(f) = \#(f^{-1}(\zeta) \cap B_\varepsilon(0)).$$

onde  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$  é um valor regular de  $f$  suficientemente próximo de 0.

Resolvendo o sistema ( $S$ ) temos,

para  $z_1 = -\sqrt{\zeta_1}$  tem-se,

$$z_2^3 = \zeta_2 + \sqrt{\zeta_1} \quad \text{então} \quad z_2^3 - (\zeta_2 + \sqrt{\zeta_1}) = 0$$

logo,

$$\left( z_2 - \sqrt[3]{\zeta_2 + \sqrt{\zeta_1}} \right) \cdot \left( z_2 - \sqrt[3]{\zeta_2 + \sqrt{\zeta_1}} \cdot \Theta \right) \cdot \left( z_2 - \sqrt[3]{\zeta_2 + \sqrt{\zeta_1}} \cdot \Theta^2 \right) = 0$$

onde  $\Theta = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ . Logo temos três raízes;

$$\sqrt[3]{\zeta_2 + \sqrt{\zeta_1}}, \quad \sqrt[3]{\zeta_2 + \sqrt{\zeta_1}} \cdot \Theta \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{\zeta_2 + \sqrt{\zeta_1}} \cdot \Theta^2.$$

Analogamente, encontramos mais 3 raízes considerando  $z_1 = \sqrt{\zeta_1}$ . Portanto  $\mathcal{I}_0(f) = 6$ .

**Teorema 1.4.14** Seja  $X \subset \mathbb{C}^n$  uma variedade suave compacta e conexa com fronteira,  $\dim X = 2n$ . Considere  $f : U \rightarrow \mathbb{C}^n$  uma aplicação holomorfa, onde  $U$  é um domínio,  $p \in X \setminus \partial X$ ,  $f(p) = 0$  e  $f^{-1}(0) \cap \partial X = \emptyset$ . Suponha que o grau da aplicação

$$\varphi = \frac{f}{|f|} : \partial X \rightarrow S_1^{2n-1}(0)$$

seja  $k$ . Então, a equação  $f = 0$  tem um número finito de soluções no interior de  $X$  e a soma dos índices de  $f$  nos pontos é precisamente  $k$ .

**Definição 1.4.15** *Sejam  $f, g : (\mathbb{C}^n, p) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  germes de duas aplicações holomorfas. Dizemos que  $f$  e  $g$  são algebricamente equivalentes ou **A-equivalentes**, se existe um germe de uma aplicação holomorfa  $A : (\mathbb{C}^n, p) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$  tal que*

$$f(z) = A(z)g(z).$$

Apresentamos agora um resultado que nos diz que o índice de Poincaré Hopf é invariante sobre aplicações A-equivalentes.

**Proposição 1.4.16** *Se  $f, g : (\mathbb{C}^n, p) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  são A-equivalentes e  $f^{-1}(f(p)) = \{p\}$ , então  $\mathcal{I}_p(f) = \mathcal{I}_p(g)$ .*

**Demonstração:** Mostremos que existe uma homotopia suave entre  $\frac{f}{|f|}$  e  $\frac{g}{|g|}$ , daí pelo teorema 1.4.9  $\deg\left(\frac{f}{|f|}\right) = \deg\left(\frac{g}{|g|}\right)$ , e portanto  $\mathcal{I}_p(f) = \mathcal{I}_p(g)$ .

Temos que  $GL_n(\mathbb{C})$  é aberto, denso e conexo em  $M_n(\mathbb{C})$ . Então tome  $V \subset GL_n(\mathbb{C})$  uma pequena vizinhança aberta de  $A(p)$ . Logo existe uma homotopia suave  $G(z, t)$  entre  $A(z) \in V$  e  $A(p)$ , ou seja,

$$G(z, 0) = A(z) \quad \text{e} \quad G(z, 1) = A(p)$$

onde  $A$  é tal que  $f(z) = A(z)g(z)$ . Então a seguinte aplicação

$$\psi(z, t) = \frac{G(z, t)g(z)}{|G(z, t)g(z)|}$$

é uma homotopia suave entre  $\frac{f(z)}{|f(z)|} = \frac{A(z)g(z)}{|A(z)g(z)|}$  e  $\frac{A(p)g(z)}{|A(p)g(z)|}$  pois,

$$\psi(z, 0) = \frac{G(z, 0)g(z)}{|G(z, 0)g(z)|} = \frac{A(z)g(z)}{|A(z)g(z)|}$$

e

$$\psi(z, 1) = \frac{G(z, 1)g(z)}{|G(z, 1)g(z)|} = \frac{A(p)g(z)}{|A(p)g(z)|}.$$

Tome agora uma curva real suave  $\gamma$  em  $GL_n(\mathbb{C})$  de forma que  $\gamma(0) = A(p)$  e  $\gamma(1) = I$ . Então a aplicação suave

$$\frac{\gamma(t)g(z)}{|\gamma(t)g(z)|} = \varphi(z, t)$$

é uma homotopia entre  $\frac{A(p)g(z)}{|A(p)g(z)|}$  e  $\frac{g(z)}{|g(z)|}$ , pois

$$\varphi(z, 0) = \frac{\gamma(0)g(z)}{|\gamma(0)g(z)|} = \frac{A(p)g(z)}{|A(p)g(z)|}$$

e

$$\varphi(z, 1) = \frac{\gamma(1)g(z)}{|\gamma(1)g(z)|} = \frac{g(z)}{|g(z)|}.$$

Então por transitividade de homotopia, temos

$$\frac{f(z)}{|f(z)|} = \frac{A(z)g(z)}{|A(z)g(z)|} \text{ é homotópica à } \frac{g(z)}{|g(z)|}.$$

□

## 1.5 Número de Milnor

Vamos definir e explorar nessa seção o número de Milnor, o qual é um conceito puramente algébrico. Terminamos a seção com um belo resultado que nos dá a igualdade entre esse conceito e o índice de Poincaré-Hopf. Para essa abordagem necessitamos da aplicação Pham.

Sejam  $M$  e  $N$  espaços topológicos,  $p \in M$  e  $f, g : M \rightarrow N$  duas aplicações holomorfas. Dizemos que  $f$  e  $g$  definem o mesmo germe em  $p$  se existe uma vizinhança  $U_p \subset M$  de  $p$  tal que,

$$f|_{U_p} \equiv g|_{U_p}.$$

Então, vamos denotar por  $\mathcal{O}_p$  o anel local de germes de funções holomorfas em  $p \in M$ . Se considerarmos  $M = N = \mathbb{C}^n$ , então o anel de germes  $\mathcal{O}_p$  terá estrutura de  $\mathbb{C}$ -álgebra.

Dado  $f = (f_1, \dots, f_k) : (\mathbb{C}^n, p) \rightarrow \mathbb{C}^k$  denotamos por  $\mathcal{I}_f$  o ideal de  $\mathcal{O}_p$  gerado pelas funções coordenadas  $(f_1, \dots, f_k)$ , ou seja,

$$\mathcal{I}_f = \{h_1 f_1 + \dots + h_k f_k; h_j \in \mathcal{O}_p\} = \langle f_1, \dots, f_k \rangle_{\mathcal{O}_p}.$$

**Definição 1.5.1** Seja  $f : (\mathbb{C}^n, p) \rightarrow \mathbb{C}^k$  um germe de uma aplicação holomorfa. A álgebra local de  $f$  em  $p$  é a  $\mathbb{C}$ -álgebra quociente

$$\mathcal{Q}_f = \frac{\mathcal{O}_p}{\mathcal{I}_f}.$$

**Definição 1.5.2** Seja  $f : (\mathbb{C}^n, p) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  um germe de uma aplicação holomorfa. A multiplicidade de  $f$  em  $p$  ou Número de Milnor de  $f$  em  $p$ , denotado por  $\mu_p(f)$ , é a dimensão do  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial  $\mathcal{Q}_f$ , ou seja;

$$\mu_p(f) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_f = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_p}{\mathcal{I}_f}.$$

Vamos abordar novamente o exemplo 1.4.13, para termos um maior entendimento da definição acima.

**Exemplo 1.5.3** Seja  $f = (f_1, f_2) = (z_1^2, z_1 + z_2^3)$  e  $p = 0$ . Calculemos o número de Milnor de  $f$  em  $p$ .

Para fazer isso, basta encontrar uma base para o  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial  $\mathcal{Q}_f = \frac{\mathcal{O}_p}{\langle f_1, f_2 \rangle}$ .

Temos que  $f_1 = z_1^2$  e  $f_2 = z_1 + z_2^3$ , logo

$$f_1 = z_1^2 \in \mathcal{I}_f = \langle f_1, f_2 \rangle$$

$$z_1 z_2^3 = z_1(z_1 + z_2^3) - z_1^2 = z_1 f_2 - f_1 \in \mathcal{I}_f$$

e também

$$z_2^6 = z_2^3 - z_1 z_2^3 \in \mathcal{I}_f.$$

Por outro lado

- $z_2^3 \equiv -z_1 \pmod{\mathcal{I}_f}$  pois  $z_2^3 + z_1 = f_2 \in \mathcal{I}_f$
- $z_1 z_2 \equiv -z_2^4 \pmod{\mathcal{I}_f}$  pois  $z_1 z_2 + z_2^4 = z_2(z_1 + z_2^3) \in \mathcal{I}_f$
- $z_1 z_2^2 \equiv -z_2^5 \pmod{\mathcal{I}_f}$  pois  $z_1 z_2^2 + z_2^5 = z_2^2(z_1 + z_2^3) \in \mathcal{I}_f$

Então uma base para o  $\mathbb{C}$ -espaço linear  $\mathcal{Q}_f$  é dado por

$$\beta = \{1, z_1, z_2, z_1 z_2, z_2^2, z_1 z_2^2\}$$

Portanto  $\mu_0(f) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_f = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_p}{\mathcal{I}_f} = 6$ .

Uma função holomorfa  $F(z_1, \dots, z_n)$  definida numa vizinhança de  $p = (p_1, \dots, p_n)$  pode ser expressa em série de potências;

$$F = \sum_{i=m}^{\infty} F_i = F_m + F_{m+1} + \dots \quad F_m \neq 0$$

onde cada  $F_j$  é um polinômio homogêneo de grau  $j$  nas variáveis  $z_1 - p_1, \dots, z_n - p_n$ . O número  $m$  é chamado a ordem de  $F$  em  $p$ .

**Proposição 1.5.4** *Sejam  $f, g : (\mathbb{C}^n, p) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  germes de aplicações holomorfas, onde  $f$  tem multiplicidade  $\mu$ . Suponha que cada componente da diferença  $g - f$  tenha expansão da forma,*

$$g_i - f_i = F_{i, \mu+r_i} + F_{i, \mu+r_i+1} + \dots \quad r_i \geq 1$$

então  $f$  e  $g$  são  $A$ -equivalentes.

**Proposição 1.5.5** *Se  $f$  e  $g$  são germes de aplicações holomorfas  $A$ -equivalentes, então elas têm a mesma multiplicidade em  $p$ , ou seja,  $\mu_p(f) = \mu_p(g)$ .*

**Demonstração:** Uma vez que  $f$  e  $g$  são  $A$ -equivalentes temos,

$$f(z) = A(z)g(z) \text{ para } A(z) \in GL_n(\mathbb{C})$$

logo  $\mathcal{I}_f \subset \mathcal{I}_g$ . Por outro lado, como  $A$  é inversível temos também,

$$B(z)f(z) = g(z) \text{ onde } B = A^{-1}.$$

Assim  $\mathcal{I}_f \subset \mathcal{I}_g$ . Então  $\mathcal{I}_f = \mathcal{I}_g$ .

Portanto

$$\mu_p(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_p}{\mathcal{I}_f} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_p}{\mathcal{I}_g} = \mu_p(g).$$

□

**Lema 1.5.6** *Seja  $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  uma transformação linear inversível, então  $\mu_0(T) = 1$ .*

**Demonstração:** Como  $T$  é inversível tem-se,

$$T.T^{-1} = I,$$

onde  $I$  é a transformação identidade e  $T^{-1} = A \in GL_n(\mathbb{C})$ . Logo  $T$  e  $I$  são A-equivalentes. Assim pela Proposição 1.5.5 temos,

$$\mu_0(T) = \mu_0(I).$$

Mas

$$\mu_0(I) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_0}{\langle I_1, \dots, I_n \rangle} = 1,$$

pois uma base para essa álgebra local é formada pela classe do monômio;

$$z_1 \cdot z_2 \dots z_n.$$

Portanto

$$\mu_0(T) = 1.$$

□

**Proposição 1.5.7** *Se  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  é um germe de um biholomorfismo então  $\mu_0(f) = 1$ .*

**Demonstração:** Para  $f$  temos que

$$f(z) = f'(0)z + F_2(z) + \dots$$

logo

$$f(z) - f'(0)z = F_2(z) + \dots$$

então pela Proposição 1.5.4  $f$  é A-equivalente à  $f'(0)$  e pela Proposição 1.5.5  $\mu_0(f) = \mu_0(f'(0))$ , mas como  $f'(0)$  é uma transformação linear, temos pelo Lema 1.5.6  $\mu_0(f'(0)) = 1$ . Portanto  $\mu_0(f) = 1$ .

□

**Definição 1.5.8** *A aplicação Pham  $\gamma^J : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  é definida da seguinte maneira*

$$\gamma^J(z_1, \dots, z_n) = (z_1^{j_1}, \dots, z_n^{j_n})$$

onde  $J = (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n$  com  $j_k \geq 1$ .

**Lema 1.5.9** *Seja  $\gamma^J : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  a aplicação Pham, definida acima, então*

$$\mathcal{I}_0(\gamma^J) = \mu_0(\gamma^J).$$

**Demonstração:** Mostremos que o número de Mílnor se iguala ao índice de Poincaré Hopf da Aplicação Pham no zero, através de um cálculo direto.

Vimos na Proposição 1.4.12 que  $\mathcal{I}_0(\gamma^J)$  é o número de pré-imagens de  $\gamma^J$  por um valor regular, ou seja, o número de soluções de

$$\gamma^J(z) = \xi, \text{ ou seja,}$$

$$(z_1^{j_1}, z_2^{j_2}, \dots, z_n^{j_n}) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \text{ se, e somente se,}$$

$$(*) \begin{cases} z_1^{j_1} = \xi_1 \\ z_2^{j_2} = \xi_2 \\ \vdots \\ z_n^{j_n} = \xi_n \end{cases}$$

onde  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  é um valor regular para a aplicação Pham. Portanto o número de soluções do sistema (\*) é  $j_1 \cdot j_2 \dots j_n$ , logo

$$\mathcal{I}_0(\gamma^J) = j_1 \cdot j_2 \dots j_n.$$

Por outro lado, o número de Milnor de  $\gamma^J$  em 0 é a dimensão do  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial

$$\mathcal{Q}_{\gamma^J} = \frac{\mathcal{O}_0}{\langle \gamma_1^J, \dots, \gamma_n^J \rangle} \text{ onde } \gamma_i^J = z_i^{j_i}.$$

Uma base para esse espaço vetorial é formada pelos monômios

$$z_1^{m_1} \cdot z_2^{m_2} \dots z_n^{m_n}; \quad 0 \leq m_1 < j_1, \quad 0 \leq m_2 < j_2, \dots, \quad 0 \leq m_n < j_n.$$

Então

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_0}{\langle \gamma_1^J, \dots, \gamma_n^J \rangle} = j_1 \cdot j_2 \dots j_n = \mu_0(\gamma^J).$$

Portanto  $\mathcal{I}_0(\gamma^J) = \mu_0(\gamma^J)$ . □

É interessante ver que o número de Milnor é igual ao índice de Poincaré Hopf para essa aplicação. Daí surge naturalmente a questão. Isso é um caso específico da aplicação Pham ou é válido em geral?

**Proposição 1.5.10** *Seja  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  um germe de uma aplicação holomorfa com multiplicidade  $\mu$  em 0. Considere a seguinte aplicação Pham*

$$\gamma^{[\mu+1]}, \text{ onde } [\mu+1] = (\mu+1, \dots, \mu+1)$$

e a deformação holomorfa  $\gamma_\lambda^{[\mu+1]} = \gamma^{[\mu+1]} + \lambda f$ , para  $\lambda$  em uma vizinhança pequena de  $0 \in \mathbb{C}$ . Então  $f$  é A-equivalente a  $\gamma_\lambda^{[\mu+1]}$  para  $\lambda \neq 0$ .

**Demonstração:** Temos que  $\gamma_\lambda^{[\mu+1]} - \lambda f = \gamma^{[\mu+1]}$ ; mas toda componente de  $\gamma^{[\mu+1]}$  tem grau maior do que  $\mu$ , então pela proposição 1.5.4  $\gamma_\lambda^{[\mu+1]}$  é A-equivalente a  $\lambda f$ . Por outro lado  $\lambda f$  é A-equivalente a  $f$ . Portanto, por transitividade  $\gamma_\lambda^{[\mu+1]}$  é A-equivalente a  $f$ . □

**Teorema 1.5.11** *Seja  $f : (\mathbb{C}^n, p) \rightarrow (\mathbb{C}^n, p)$  um germe de uma aplicação holomorfa. Então  $\mu_p(f)$  é finito se, e somente se,  $p$  é um ponto isolado de  $f^{-1}(0)$ .*

Após ter introduzido a número de Mílnor e o índice de Poincaré Hopf para germes de aplicações holomorfas, e ter observado que os dois conceitos são definidos de maneiras bem distintas, pelo fato do primeiro ser apresentado como o grau de um certo isomorfismo, no sentido de topologia algébrica e o segundo como a dimensão de um certo espaço vetorial, provemos que, sob uma certa hipótese, esses dois números são os mesmos, assim como ocorre com a aplicação Pham. Para isso considere

$$\mathcal{O}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C}^n; f \text{ é holomorfa} \}$$

onde  $U$  é um domínio em  $\mathbb{C}^n$ . E também  $\mathcal{I}_f$  é o ideal de  $\mathcal{O}(U)$  gerado pelas componentes de  $f$ .

**Definição 1.5.12** *A álgebra  $\mathcal{Q}_f(U)$  é definido como sendo o quociente de  $\mathbb{C}$ -álgebras*

$$\mathcal{Q}_f = \frac{\mathcal{O}(U)}{\mathcal{I}_f}.$$

Através da definição acima, temos a aplicação quociente

$$q : \mathcal{O}(U) \rightarrow \frac{\mathcal{O}(U)}{\mathcal{I}_f} = \mathcal{Q}_f(U).$$

Agora note que a álgebra polinomial  $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]|_U$  é um subconjunto de  $\mathcal{O}(U)$ . Então defina a subálgebra polinomial  $\mathcal{Q}_f[U]$  como sendo a imagem de  $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]|_U$  pela aplicação  $q$ . Logo

$$\mathcal{Q}_f[U] \leq \mathcal{Q}_f(U).$$

**Proposição 1.5.13** *Seja  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  o germe de uma aplicação holomorfa de multiplicidade finita  $\mu$  em  $0$ . Considere a deformação holomorfa  $f_\lambda$  de  $f$  com  $\lambda \in \mathbb{C}^m$  e  $f_0 = f$ . Então existe uma vizinhança  $U \subset \mathbb{C}^n$  de  $0$  tal que, para  $|\lambda|$  suficientemente pequeno, a dimensão do  $\mathbb{C}$ -espaço vetorial  $\mathcal{Q}_{f_\lambda}[U]$  é no máximo  $\mu$ , ou seja,*



$$\mathcal{Q}_{f,\lambda}[U] \leq \mu_0(f).$$

**Lema 1.5.14** *Seja  $f : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  uma aplicação holomorfa tal que  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_f[U] \leq \infty$ . Então cada zero de  $f$  em  $U$  tem multiplicidade finita. Além disso, o número de soluções da equação  $f = 0$  em  $U$  contadas sem multiplicidade, é limitado por  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_f[U]$ .*

Considere a aplicação holomorfa  $f : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  e suponha que  $\xi_1, \dots, \xi_k$  são todas as soluções de  $f = 0$  em  $U$ . Seja  $\mathcal{O}_{\xi_i f}$  o germe de  $f$  no ponto  $\xi_i$  e considere a correspondente álgebra local  $\mathcal{Q}_{\xi_i f}$ . Definimos a **álgebra multilocal** de  $f$  em  $U$  por

$$\bigoplus_{i=1}^k \mathcal{Q}_{\xi_i f}.$$

Nessa álgebra multilocal, definimos a seguinte homomorfismo de  $\mathbb{C}$ -álgebras.

$$\aleph : \mathcal{O}(U) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{Q}_{\xi_i f}$$

dado por: para  $g \in \mathcal{O}(U)$  tome os germes nos pontos  $\xi_i, g_{\xi_i}$  e olhe a sua imagem  $\tilde{g}_{\xi_i} \in \mathcal{Q}_{\xi_i f}$ , ou seja,

$$\aleph(g) = (\tilde{g}_{\xi_1}, \dots, \tilde{g}_{\xi_k})$$

**Notação:** Seja  $g \in \mathcal{O}(U)$  e  $\xi \in U$ . O polinômio de Taylor de grau  $l$  de  $g$  em  $\xi$  será denotado por  $T_{\xi}^l(g)$ .

**Lema 1.5.15** *Dado um número finito de pontos distintos em  $U$ , a saber:  $\xi_1, \dots, \xi_k$  e um polinômio  $P_i$  de grau  $d_i$ , centrado em  $\xi_i$ , existe um polinômio  $Q$  tal que*

$$T_{\xi_i}^{d_i} Q = P_i.$$

**Demonstração:** Ver referência [30]. □

**Proposição 1.5.16** *O número de soluções em  $U$ , contadas com multiplicidades, da equação  $f = 0$ , é limitada por  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_f[U]$ .*

**Demonstração:** Ver referência [30]. □

**Proposição 1.5.17** *Suponha  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  germe de uma aplicação holomorfa tal que  $\mu_0(f) < \infty$ . Então  $\mathcal{I}_0(f) \leq \mu_0(f)$ .*

**Demonstração:** O Teorema 1.5.11 garante que  $0$  é isolado em  $f^{-1}(0)$  e a Proposição 1.4.12 nos fala que  $\mathcal{I}_0(f)$  é o número de soluções da equação  $f_{\lambda} = f - \lambda = 0$ , com  $\lambda$  sendo um valor regular suficientemente próximo de  $0$ . Já pelo Lema 1.5.14

$$\mathcal{I}_0(f) \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_{f,\lambda}[U].$$

Pela Proposição 1.5.13  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_{f,\lambda}[U] \leq \mu_0(f)$ .

Portanto

$$\mathcal{I}_0(f) \leq \mu_0(f).$$

□

Finalmente temos bagagem suficiente para demonstrar o resultado mais esperado dessa seção.

**Teorema 1.5.18** *Seja  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  o germe de uma Aplicação holomorfa. Se  $\mu_0(f)$  é finito, então  $\mu_0(f) = \mathcal{I}_0(f)$ .*

**Demonstração:** Seja  $\mu$  o número de Milnor de  $f$  em 0, ou seja,

$$\mu = \mu_0(f)$$

Considere a seguinte aplicação Pham

$$\gamma^{[\mu+1]}(z_1, \dots, z_n) = (z_1^{\mu+1}, \dots, z_n^{\mu+1})$$

E pela Proposição 1.5.10 a deformação  $\gamma_\lambda^{[\mu+1]} = \gamma^{[\mu+1]} + \lambda f$  é A-equivalente a  $f$ . Pela Proposição 1.4.16 tem-se,

$$\mathcal{I}_0(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}) = \mathcal{I}_0(f),$$

e usando a Proposição 1.5.5 temos também

$$\mu_0(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}) = \mu_0(f).$$

Exploremos agora algumas propriedades da aplicação Pham e suas deformações. Fixe uma bola  $B_\varepsilon(0)$  e um valor para o parâmetro  $\lambda$  de forma que a Proposição 1.5.13 se verifica para a aplicação  $\gamma_\lambda^{\mu+1}$ . Seja  $\{\xi_i\}$  as soluções na bola  $B_\varepsilon(0)$  da equação  $\gamma_\lambda^{[\mu+1]} = 0$ .

Então usando a Proposição 1.5.13 temos,

$$\dim \mathcal{Q}_{\gamma_\lambda^{[\mu+1]}}[U] \leq \mu_{\xi_i}(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}).$$

Pela Proposição 1.5.16 o número de soluções de  $\gamma_\lambda^{[\mu+1]} = 0$  contadas com multiplicidade é limitado por  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_{\gamma_\lambda^{[\mu+1]}}[U]$ , ou seja,

$$\sum_i \mu_{\xi_i}(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}) \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_{\gamma_\lambda^{[\mu+1]}}[U].$$

Mas pela Proposição 1.5.17

$$\mathcal{I}_{\xi_i}(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}) \leq \mu_{\xi_i}(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}) \text{ para todo } i \quad (1.2)$$

O Teorema 1.4.14 fala que

$$\sum_i \mathcal{I}_{\xi_i}(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}) = \deg \left( \frac{\gamma_\lambda^{[\mu+1]}}{|\gamma_\lambda^{[\mu+1]}|} \right) \text{ na esfera } \partial B_\varepsilon(0).$$

O teorema de caráter aditivo do índice de Poincaré Hopf nos garante que

$$\deg \left( \frac{\gamma_\lambda^{[\mu+1]}}{|\gamma_\lambda^{[\mu+1]}|} \right) = \deg \left( \frac{\gamma^{[\mu+1]}}{|\gamma^{[\mu+1]}|} \right) = \mathcal{I}_0(\gamma^{[\mu+1]})$$

mas pelo Lema 1.5.9

$$\mu_0(\gamma^{[\mu+1]}) = \mathcal{I}_0(\gamma^{[\mu+1]})$$

de onde segue que

$$\sum_i \mu_{\xi_i}(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}) = \sum_i \mathcal{I}_{\xi_i}(\gamma^{[\mu+1]}).$$

Uma vez que todos os termos envolvidos no somatório da igualdade acima é positivo e vale também (1.2) temos,

$$\mathcal{I}_{\xi_i}(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}) = \mu_{\xi_i}(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}) \quad \forall i$$

Mas 0 é uma solução  $\xi_i$  na equação  $\gamma_\lambda^{[\mu+1]} = 0$ . Portanto

$$\mu_0(f) = \mu_0(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}) = \mathcal{I}_0(\gamma_\lambda^{[\mu+1]}) = \mathcal{I}_0(f).$$

□

## 1.6 O núcleo de Bochner-Martinelli

Passamos agora a definir o núcleo de Bochner-Martinelli, o qual nos dá uma generalização da fórmula integral de Cauchy para  $\mathbb{C}^n$ . Lembrando que a versão dessa fórmula é

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial f(z)}{\partial z} \cdot \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z}.$$

onde  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Faremos a tal generalização para  $\mathbb{R}^n$  e posteriormente para  $\mathbb{C}^n$ . Em  $\mathbb{R}^n$  tome as seguintes formas,

$$w_i = (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Então

$$dw_i = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = w.$$

Com isso, considere a seguinte aplicação

$$\varphi_n = \frac{C_n \sum_{i=1}^n w_i}{|x|^n},$$

onde  $|x|$  é norma euclidiana em  $\mathbb{R}^n$ , e  $C_n$  é uma constante dependendo unicamente de  $n$ .

**Lema 1.6.1** *A aplicação  $\varphi_n$  é uma forma fechada em  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .*

**Demonstração:** Calculando a derivada de  $\varphi_n$  resulta

$$\begin{aligned} d(\varphi_n) &= d\left(\frac{C_n \sum w_i}{|x|^n}\right) \\ &= d(C_n |x|^{-n} \sum w_i) \\ &= d(C_n |x|^{-n}) \sum w_i + C_n |x|^{-n} d(\sum w_i). \end{aligned}$$

Mas como  $|x| = |(x_1, \dots, x_n)| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ , logo  $|x|^{-n} = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{n}{2}}$ . Assim

$$\begin{aligned} d(C_n |x|^{-n}) &= d\left(C_n (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{n}{2}}\right) \\ &= C_n \left(-\frac{n}{2}\right) (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} (2x_1 dx_1 + \dots + 2x_n dx_n) \\ &= -nC_n |x|^{-n-2} (x_1 dx_1 + \dots + x_n dx_n). \end{aligned}$$

Então, temos que

$$\begin{aligned}
d(\varphi_n) &= -nC_n|x|^{-n-2}(x_1dx_1 + \dots + x_ndx_n) \sum_{i=1}^n w_i + C_n|x|^{-n} \sum_{i=1}^n dw_i \\
&= -nC_n|x|^{-n-2}(x_1^2dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n + \dots + x_n^2dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) + nC_n|x|^{-n}w \\
&= -nC_n|x|^{-n-2}|x|^2w + nC_n|x|^{-n}w = 0.
\end{aligned}$$

□

**Lema 1.6.2**  $\int_{S_r^{n-1}} \varphi_n$  não depende de  $r > 0$ .

**Demonstração:** De fato tome  $0 < r' < r$  e considere a esfera  $S_{r'}^{n-1}$ . Logo pelo teorema de Stokes

$$0 = \int_{B_r \setminus B_{r'}} d\varphi_n = \int_{\partial B_r} \varphi_n - \int_{\partial B_{r'}} \varphi_n.$$

Portanto

$$\int_{S_r^{n-1}} \varphi_n = \int_{S_{r'}^{n-1}} \varphi_n.$$

□

Pelo Lema 1.6.2 podemos escolher a constante  $C_n$ , de modo conveniente, para que tenhamos

$$\int_{S_r^{n-1}} \varphi_n = 1.$$

**Proposição 1.6.3** A constante  $C_n$  é dada por,

$$C_n = \begin{cases} \frac{(q-1)!}{2\pi^q}, & \text{se } m = 2q; \\ \frac{(2q)!}{2^m \pi^q q!}, & \text{se } m = 2q + 1. \end{cases}$$

No caso particular de  $\mathbb{R}^2$  temos,

$$\varphi_2 = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} \right) \text{ para } (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta) \text{ tem-se}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2\pi} d\theta$$

Passamos agora para  $\mathbb{C}^n$ . Para isso identificamos  $\mathbb{C}^n$  com  $\mathbb{R}^{2n}$ , então a aplicação  $\varphi_{2n}$  toma o seguinte formato.

$$\varphi_{2n} = \frac{B_n + \overline{B}_n}{2},$$

onde

$$B_n = \frac{l_n \sum_{i=1}^n \overline{w}_i \wedge w}{|z|^{2n}}$$

sendo

- $w = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$ ;
- $\overline{w}_i = (-1)^{i-1} \overline{z}_i d\overline{z}_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\overline{z}_i} \wedge \dots \wedge d\overline{z}_n$ ;
- $l_n = \frac{(-1)^{n \frac{(n-1)}{2}} (n-1)!}{(2\pi i)^n}$

Note que  $B_n$  é uma  $(n, n-1)$  forma fechada em  $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ . Damos o nome de tal forma de **Núcleo de Bochner Martinelli**. Observe que  $B_n$  é uma forma real quando restrita à  $S_r^{2n-1}$  e que

$$\int_{S_r^{2n-1}} B_n = 1 \quad \text{para todo } r > 0. \quad (1.3)$$

Seja  $f$  uma função holomorfa definida numa vizinhança de  $0 \in \mathbb{C}^n$ , então

$$\begin{aligned} d(fB_n) &= (df) \wedge B_n + f(dB_n) = 0 \\ &= \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j \right) \wedge B_n + f(dB_n) \\ &= 0. \end{aligned}$$

A primeira parcela da igualdade acima é zero pelo fato de  $f$  ser holomorfa e a segunda é zero pois  $B_n$  é uma forma fechada.

Sendo assim tome  $B_r(0)$  e  $0 < \varepsilon < r$ , e pelo teorema de Stokes

$$0 = \int_{\overline{B}_r(0) \setminus B_\varepsilon(0)} d(fB_n) = \int_{\partial B_r(0)} fB_n - \int_{\partial B_\varepsilon(0)} fB_n.$$

Logo

$$\int_{\partial B_r(0)} fB_n = \int_{\partial B_\varepsilon(0)} fB_n.$$

Assim, usando (1.3) temos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} f B_n = f(0).$$

Portanto  $\int_{\partial B_r(0)} f B_n = f(0)$ .

O que justifica o fato de dizer que esse núcleo generaliza a fórmula integral de Cauchy. De uma maneira geral, definimos o núcleo de Bochner-Martinelli em  $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$  por

$$B_n(z, w) = \frac{l_n \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \overline{(z_i - w_i)} \bigwedge_{j \neq i} (d\bar{z}_j - d\bar{w}_j) \wedge dw_1 \wedge \dots \wedge dw_n}{|z - w|^{2n}}.$$

Esse conceito será usado no capítulo 3, junto com o conceito de resíduos, para obter uma demonstração do teorema de Baum-Bott.

## 1.7 Resíduo de Grothendieck

Vamos definir e explorar a conceito de resíduo de Grothendieck, o qual é devido à A. Grothendieck, e é uma generalização do resíduo de Cauchy da teoria de Análise complexa em uma variável.

Sejam  $U, V$  abertos de  $\mathbb{C}^n$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow V$  uma aplicação holomorfa com multiplicidade finita  $\mu$  e  $g \in \mathcal{O}(U)$ . Considere também  $\zeta$  um valor regular de  $f$  e

$$f^{-1}(\zeta) = \{\xi_1, \dots, \xi_\mu\}.$$

**Definição 1.7.1** *O Resíduo de Grothendieck em 0 de g relativo a f é definido como sendo o limite*

$$Res_0(g, f) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\mu} \frac{g(\xi_i)}{\det(Jf(\xi_i))},$$

onde  $Jf(\xi_k) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial z_j}(\xi_k) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ .

Note que, como cada  $\xi_i$  é um ponto regular, temos

$$\det(Jf(\xi_i)) \neq 0,$$

logo a Definição 1.7.1 tem sentido.

Por outro lado, o teorema do traço na referência [30], garante a existência do limite na Definição 1.7.1.

O próximo resultado nos dá uma fórmula integral para  $Res_0(g, f)$ .

**Teorema 1.7.2** *Seja  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  com  $\varepsilon_i > 0$  e considere o  $n$ -ciclo real*

$$\Gamma_\varepsilon = \{z \in U; |f_i(z)| < \varepsilon_i \text{ para } 1 \leq i \leq n\}$$

*com orientação descrita pela  $n$ -forma  $d(\arg f_1) \wedge \dots \wedge d(\arg f_n)$ . Se  $\varepsilon$  está suficientemente próximo de 0 então,*

$$Res_0(g, f) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\Gamma_\varepsilon} g \cdot \frac{dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{f_1 \dots f_n}.$$

**Demonstração:** Considere a seguinte  $n$ -forma holomorfa

$$\eta = g dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n.$$

Logo em um subconjunto aberto e denso  $U$  temos,

$$g dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n = \frac{g}{\det Jf} (df_1) \wedge \dots \wedge (df_n),$$

pois  $\eta$  é uma  $n$ -forma num espaço  $n$ -dimensional. Pela orientação do ciclo  $\Gamma_\varepsilon$  temos,

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\Gamma_\varepsilon} g \cdot \frac{dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{f_1 \dots f_n} = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(\frac{g}{\det Jf}\right) \frac{df_1 \wedge \dots \wedge df_n}{f_1 \dots f_n}.$$

Nessas condições o traço da  $n$ -forma  $\eta$  é

$$\text{tr}(\eta)(w) = \sum_{i=1}^{\mu} \frac{g(w)}{\det Jf(w)},$$

onde a aplicação traço está definida em [30]. Agora, pelo teorema do traço em [30], temos

$$\text{tr}(\eta)(w) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\Gamma_\varepsilon} g \cdot \frac{dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{\prod_{j=1}^n (f_j - w_j)},$$

de onde temos

$$\lim_{w \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\mu} \frac{g(w)}{\det Jf(w)} = \text{tr}(\eta)(w) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\Gamma_\varepsilon} g \cdot \frac{dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{f_1 \dots f_n}.$$



Portanto

$$Res_0(g, f) = \int_{\Gamma_\varepsilon} g \cdot \frac{dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{f_1 \dots f_n}.$$

□

Se  $w = g \cdot \frac{dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{f_1 \dots f_n}$  é uma  $n$ -forma, então também usaremos a notação  $Res_0\{w\}$  para representar  $Res_0(g, f)$ .

Vale ressaltar que em muitos livros define-se o resíduo como o resultado do teorema acima. Passamos agora a explorar algumas propriedades desse resíduo.

**Propriedade I:** O resíduo é linear em  $g$ , ou seja, para  $a, b \in \mathbb{C}$  e  $g, h \in \mathcal{O}(U)$  tem-se

$$Res_0(ag + bh, f) = aRes_0(g, f) + bRes_0(h, f).$$

**Demonstração:** De fato,

$$\begin{aligned} Res_0(ag + bh, f) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\Gamma_\varepsilon} (ag + bh) \frac{dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{f_1 \dots f_n} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\Gamma_\varepsilon} \left( ag \cdot \frac{dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{f_1 \dots f_n} + bh \cdot \frac{dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{f_1 \dots f_n} \right) \\ &= a \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\Gamma_\varepsilon} g \cdot \frac{dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{f_1 \dots f_n} + b \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\Gamma_\varepsilon} h \cdot \frac{dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{f_1 \dots f_n} \\ &= aRes_0(g, f) + bRes_0(h, f). \end{aligned}$$

□

E mais,  $Res_0(g, f)$  é alternado nas componentes  $f_1, \dots, f_n$  de  $f$ .

**Propriedade II:**  $Res_0(\det J(f), f) = \mu_0(f) = \mathcal{I}_0(f)$ .

**Demonstração:** Seja  $\zeta$  um valor regular de  $f$  e  $f^{-1}(\zeta) = \{\xi_1, \dots, \xi_\mu\}$  então

$$Res_0(\det J(f), f) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\det Jf(\xi_i)}{\det Jf(\xi_i)} = \mu = \mu_0(f) = \mathcal{I}_0(f).$$

□

Essa é uma propriedade de grande interesse pelo fato de entrelaçar o índice de Poincaré Hopf, o número de Milnor e o resíduo de Grothendieck.

Passamos agora a relacionar o resíduo de Grothendieck com o núcleo de Bochner-Martinelli. Essa bela relação foi a chave usada por Márcio Soares para "refazer" a prova dada por S. S. Chern do teorema de Baum-Bott, que será abordada, com fineza de detalhes, no capítulo 3.

Considere  $w = g \cdot \frac{dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{f_1 \dots f_n}$  uma  $n$ -forma meromorfa com  $g$  holomorfa,

então efetuando os cálculos, vemos que a representação distinguida de Dolbeault da forma  $\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n w$  é dada por

$$\eta_w = g \left[ \frac{l_n \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \bar{f}_i d\bar{f}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{f}_n \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{|f|^{2n}} \right].$$

Tal construção é feita na referência [17]. Agora temos o seguinte resultado.

**Proposição 1.7.3**  $Res_0 w = \eta_w$ , ou equivalentemente

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\Gamma} w = \int_{S^{2n-1}} \eta_w.$$

**Demonstração:** Ver referência [17] página 651. □

Agora defina a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} F : \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \\ z &\longmapsto F(z) = (z + f(z), z) \end{aligned}$$

onde  $f$  é uma aplicação holomorfa. Sendo

$$B_n(z, w) = \frac{l_n \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \overline{(z_i - w_i)} \bigwedge_{j \neq i} (dz_j - d\bar{w}_j) \wedge dw_1 \wedge \dots \wedge dw_n}{|z - w|^{2n}},$$

o núcleo de Bochner-Martinelli, podemos calcular o pullback de  $B_n$  pela  $F$ .

$$F^* B_n = \frac{l_n \sum (-1)^{i-1} \bar{f}_i(z) \bigwedge_{j \neq i} d\bar{f}_j \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{|f|^{2n}}.$$

Sendo assim, note que

$$g \cdot F^* B_n = \eta_w.$$

Por outro lado, a Proposição 1.7.3 nos diz que

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\Gamma} w = \int_{S^{2n-1}} \eta_w.$$

Logo

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_{\Gamma} w = \int_{S^{2n-1}} gF^* B_n.$$

Portanto essa é a relação entre o núcleo e o resíduo,

$$Res_0 w = Res_0(g, f) = \int_{S^{2n-1}} gF^* B_n.$$

## 1.8 Conexões, Polinômios Invariantes e Classes Características

Podemos dizer que, a grosso modo, uma conexão é uma maneira de diferenciar seções de fibrados vetoriais. Para precisar essa ideia, considere  $M$  uma variedade complexa de dimensão  $n$ ,  $E$  um fibrado vetorial complexo de posto  $k$  sobre  $M$  e

$$\bigwedge^p(M, E) := \Gamma(M, \bigwedge^p TM^* \otimes E)$$

o espaço das  $p$ -formas com valores em  $E$ .

**Definição 1.8.1** *Uma conexão em  $E$  é uma aplicação  $\mathbb{C}$ -linear*

$$\nabla : \bigwedge^0(M, E) \rightarrow \bigwedge^1(M, E)$$

que satisfaz a regra de Leibniz, ou seja,

$$\nabla(f \cdot s) = df \otimes s + f \cdot \nabla(s), \quad \forall f \in \bigwedge^0(M) \text{ e } \forall s \in \bigwedge^0(M, E).$$

**Proposição 1.8.2** *Nas condições da definição acima, sempre existe conexão em  $E$ .*

**Demonstração:** Considere  $U = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  uma cobertura trivializadora de ambos os fibrados  $TM$  e  $E$ . Para cada  $\alpha \in \Lambda$ , escolha um referencial

$$S^\alpha = (S_1^\alpha, \dots, S_n^\alpha) \text{ de } E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{C}^n.$$

Tome  $\{\rho_\alpha\}$  uma partição da unidade subordinada à cobertura  $U$ , depois defina a conexão  $\nabla^\alpha$  em  $U_\alpha$  por,

$$\nabla^\alpha(s_i^\alpha) = 0 \text{ para todo } i.$$

Logo  $\nabla^\alpha(f s_i^\alpha) = df \otimes s_i^\alpha + f \nabla^\alpha(s_i^\alpha) = df \otimes s_i^\alpha$ . Assim, estenda essa definição local fazendo

$$\nabla = \sum \rho_\alpha \nabla^\alpha,$$

e vê que  $\nabla$ , de fato, é uma conexão em  $E$ . □

Sejam  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação holomorfa e  $\nabla$  uma conexão sobre o fibrado  $E$  de  $N$ , então essa conexão induz uma outra conexão sobre o fibrado pullback, que denotaremos por  $f^*\nabla$  e a chamamos de conexão pullback.

Passamos agora a fazer uma representação local do conceito de conexão. Para isso tome  $U = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  uma cobertura trivializadora de  $M$ .

$$s^\alpha = (s_1^\alpha, \dots, s_n^\alpha),$$

um referencial local de  $E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{C}^n$ , então a curvatura  $\nabla$  se expressa, localmente, através desse referencial por

$$\nabla(s_i^\alpha) = \sum \theta_{ij}^\alpha \otimes s_j^\alpha$$

onde  $\theta_{ij}^\alpha$  são 1-formas holomorfas sobre  $U_\alpha$ . A matriz de 1-formas

$$\theta^\alpha = [\theta_{ij}^\alpha]$$

é por definição, a matriz da conexão  $\nabla$  em  $U_\alpha$ .

Analisemos agora o que ocorre na intersecção não-vazia dos abertos trivializadores. Para isso sejam  $s^\alpha$  e  $s^\beta$  referenciais locais de  $E$  sobre  $U_\alpha$  e  $U_\beta$ , respectivamente, tal que  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ . Então existe uma matriz invertível  $g_{\alpha\beta} = [g_{ij}]$  de forma que os referenciais se relacionam da seguinte maneira

$$s_i^\alpha = \sum g_{ij} s_j^\beta \text{ ou ainda } s_j^\alpha = \sum h_{jl} s_l^\beta$$

onde  $[h_{jl}] = g_{\alpha\beta}^{-1}$ .

Analisando mais a fundo e usando fortemente a definição de conexão temos,

$$\begin{aligned}
\nabla(s_i^\alpha) &= \sum \theta_{ij}^\alpha \otimes s_l^\alpha \\
&= \nabla\left(\sum g_{ij}s_j^\beta\right) = \sum dg_{ij} \otimes s_j^\beta + \sum g_{ij}\nabla(s_j^\beta) \\
&= \sum dg_{ij} \otimes s_j^\beta + \sum g_{ij}\left(\sum \theta_{jr}^\beta \otimes s_r^\beta\right) \\
&= \sum dg_{ij} \otimes \sum h_{jl} \otimes s_l^\alpha + \sum g_{ij}\left(\sum \theta_{jr}^\beta \otimes \sum h_{kl} \otimes s_l^\alpha\right) \\
&= \sum dg_{ij}h_{jl} \otimes s_l^\alpha + \sum g_{ij}\theta_{jr}^\beta h_{kl} \otimes s_l^\alpha.
\end{aligned}$$

Com isso, segue que as matrizes da conexão se relacionam da seguinte forma

$$\theta^\alpha = dg_{\alpha\beta} \cdot g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta} \theta^\beta g_{\alpha\beta}^{-1}.$$

Note que definimos conexão em  $\bigwedge^0(M, E)$ . De modo inteiramente análogo, entendemos essa definição para  $\bigwedge^1(M, E)$ , onde por abuso de notação vamos continuar denotando por  $\nabla$ .

**Definição 1.8.3** *Definimos o operador  $\nabla$   $\mathbb{C}$ -linear, de caráter local,*

$$\nabla : \bigwedge^1(M, E) \longrightarrow \bigwedge^2(M, E)$$

*exigindo que ele satisfaça a regra de Leibniz, ou seja,*

$$\nabla(w \otimes s) = dw \otimes s - w \wedge \nabla(s)$$

*para todo  $w \in \bigwedge^1(M)$  e todo  $s \in \bigwedge^1(M, E)$ .*

**Definição 1.8.4** *Nas condições da Definição 1.8.3, definimos a curvatura da conexão por  $K_\nabla = \nabla \circ \nabla$ .*

Uma propriedade interessante de se observar é que a curvatura da conexão é  $\bigwedge^0(M)$ -linear. Isto é

$$K_\nabla(f \cdot s) = f K_\nabla(s).$$

Assim como foi feito para conexões, vamos explorar localmente, a matriz da curvatura.

Seja  $s^\alpha = (s_1^\alpha, \dots, s_n^\alpha)$  um referencial local de  $E$ , então

$$\begin{aligned} K_\nabla(s_i^\alpha) &= (\nabla \circ \nabla)(s_i^\alpha) = \nabla \left( \sum \theta_{ij}^\alpha \otimes s_j^\alpha \right) \\ &= \sum d\theta_{ij}^\alpha \otimes s_j^\alpha - \sum \theta_{ij}^\alpha \wedge \nabla(s_j^\alpha) \\ &= \sum d\theta_{ij}^\alpha \otimes s_j^\alpha - \sum \theta_{ij}^\alpha \wedge \sum \theta_{jk}^\alpha \otimes s_k^\alpha \\ &= \sum d\theta_{ik}^\alpha \otimes s_k^\alpha - \sum \left( \sum \theta_{ij}^\alpha \wedge \theta_{jk}^\alpha \right) \otimes s_k^\alpha. \end{aligned}$$

Logo temos que  $K_\nabla$  é dado localmente, pela matriz de 2-formas

$$\Theta^\alpha = d\theta^\alpha - \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha.$$

Por fim também relacionamos os referenciais. Para isso sejam  $s^\alpha$  e  $s^\beta$  referenciais locais sobre os abertos trivializadores  $U_\alpha$  e  $U_\beta$  respectivamente, os quais estão relacionados através de  $s^\alpha = g_{\alpha\beta} s^\beta$ . Procedendo como acima, ou seja, calculando  $K_\nabla$  em cada  $s_i^\alpha$  e usando  $s^\alpha = g_{\alpha\beta} s^\beta$  temos,

$$K_\nabla(s_i^\alpha) = \sum g_{ij} \Theta^\beta g_{ij}^{-1} \otimes s_l^\alpha.$$

Portanto as matrizes da curvatura tem a seguinte relação

$$\Theta^\alpha = g_{\alpha\beta} \Theta^\beta g_{\alpha\beta}^{-1}.$$

Passamos agora a explorar o conceito de polinômio invariante.

**Definição 1.8.5** Um polinômio homogêneo  $P : \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  é dito **invariante** quando

$$P(gAg^{-1}) = P(A)$$

para todo  $g \in Gl_n(\mathbb{C})$  e para todo  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ .

Alguns textos, como as referência [17], usa a seguinte caracterização como definição de polinômio invariante.

**Proposição 1.8.6** Seja  $P : \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  um polinômio homogêneo, então são equivalentes;

- $P(gAg^{-1}) = P(A)$  para todo  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  e para todo  $g \in Gl_n(\mathbb{C})$ ;
- $P(X.Y) = P(Y.X)$  para todo  $X, Y \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ .

**Exemplo 1.8.7** Como exemplo de polinômios invariantes, temos os polinômios simétricos elementares dos autovalores de uma matriz  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ , ou seja, os  $C_k(A)$  tais que,

$$\det(tI + A) = \sum_{i=0}^n C_{n-i}(A)t^i$$

onde  $C_{n-i}(A) = \text{tr} \left( \bigwedge^{n-i} A \right)$ . Para ver que, de fato, os  $C_k$  são invariantes, note que,

$$\det(tI + A) = \det(g(tI + A)g^{-1}) = \det(tI + gAg^{-1})$$

Assim

$$\sum_{i=0}^n C_{n-i}(A)t^i = \sum_{i=0}^n C_{n-i}(gAg^{-1})t^i,$$

Portanto  $C_{n-i}(A) = C_{n-i}(gAg^{-1})$  para  $i = 0, 1, \dots, n$ .

O próximo teorema nos diz que todo polinômio invariante pode ser expresso como um (outro) polinômio cujas variáveis são os polinômios simétricos elementares de uma matriz.

**Teorema 1.8.8** *Todo polinômio invariante  $P : \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  pode ser escrito da forma;*

$$P(A) = p(c_0(A), c_1(A), \dots, c_n(A))$$

onde  $p$  é um (outro) polinômio,  $A \in M_n(\mathbb{C})$  e  $c_k(A)$  são os polinômios simétricos elementares da matriz  $A$ .

**Demonstração:** Ver referência [20]

□

**Lema 1.8.9** *Sejam  $E$  um fibrado vetorial complexo sobre a variedade complexa  $M$ ,  $\nabla$  uma conexão sobre  $E$ ,  $K_\nabla$  a curvatura da conexão e  $P$  um polinômio invariante de grau  $k$ , então  $P(K_\nabla)$  define globalmente uma  $2k$ -forma em  $M$ .*

**Demonstração:** Como  $P$  é um polinômio de grau  $k$  e  $K_\nabla$  é, localmente, uma matriz de 2-formas,  $P$  aplicado em  $K_\nabla$  define, localmente, uma  $2k$ -forma. Agora para verificar que temos uma definição global, basta constatar que na intersecção tudo funciona "bem".

Sejam  $U_\alpha$  e  $U_\beta$  abertos trivializadores tais que  $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ . Logo  $K_\nabla$  é dada pela matriz de 2-formas  $\Theta^\alpha$  em  $U_\alpha$  e  $\Theta^\beta$  em  $U_\beta$ , onde se relacionam por

$$\Theta^\alpha = g_{\alpha\beta} \Theta^\beta g_{\alpha\beta}^{-1}.$$

Logo na intersecção temos que;

$$P(\Theta^\alpha) = P(K_\nabla)|_{U_\alpha} = P(g_{\alpha\beta} \Theta^\beta g_{\alpha\beta}^{-1}) = P(\Theta^\beta) = P(K_\nabla)|_{U_\beta}.$$

Portanto  $P(K_\nabla) \in \bigwedge^2(M, E)$ .

□

O próximo teorema nos garante que, de fato, a  $2r$ -forma  $P(K_\nabla)$  define um elemento em  $H_{DR}^{2r}(M, \mathbb{C})$ , uma vez que  $P(K_\nabla)$  é fechado.

**Teorema 1.8.10** *Se  $P$  é um polinômio invariante então  $dP(K_\nabla) = 0$ . Além disso, a classe  $[P(K_\nabla)] \in H_{DR}^{2*}(M, \mathbb{C})$  independe da conexão sobre  $E$ .*

**Demonstração:** Ver referência [17].

□

**Definição 1.8.11** *Sejam  $M$  uma variedade complexa,  $E$  um fibrado vetorial complexo de posto  $r$  sobre  $M$ ,  $\nabla$  uma conexão sobre  $E$ ,  $K_\nabla$  a curvatura da conexão e  $P$  um polinômio invariante. Como a classe  $[P(K_\nabla)]$  independe da conexão, definimos a **classe característica** do fibrado  $E$  por*

$$[P(E)] := [P(K_\nabla)].$$

Visto a Definição 1.8.11 de classe característica, que é um invariante topológico, ou seja, fibrados isomorfos possuem a mesma classe característica. Vamos definir as formas de Chern e também as classes de Chern, onde também são invariantes topológicos e serão extremamente úteis para apresentar o teorema de Baum-Bott no capítulo 3, afinal vale lembrar que a curvatura de Gauss, expressa no teorema de Gauss-Bonnet é uma das classes de Chern, em dimensões maiores.

**Definição 1.8.12** *Sejam  $C_j, j = 0, 1, \dots, n$  os polinômios simétricos elementares dos autovalores de uma matriz de ordem  $n \times n$ . As **formas de Chern** de uma curvatura  $K_\nabla$ , associada a uma conexão  $\nabla$  sobre  $E$ , são definidas por*

$$c_j(K_\nabla) := C_j\left(\frac{i}{2\pi} K_\nabla\right) = \text{tr} \left( \bigwedge^j \left(\frac{i}{2\pi} K_\nabla\right) \right).$$

As **classes de Chern** do fibrado  $E$  são definidas por;  $c_0(E) = 1$ .

$$c_j(E) := \left[ C_j\left(\frac{i}{2\pi} K_\nabla\right) \right] \in H_{DR}^{2j}(M, \mathbb{C}).$$

$c(E) = c_0(E) + c_1(E) + \dots + c_n(E)$  é a classe de Chern total de  $E$ .



Definindo classe de Chern da maneira acima, temos que elas satisfazem algumas propriedades básicas, as quais serão listadas abaixo. No entanto, em outros contextos, como em topologia, define-se a  $j$ -ésima classe de Chern como sendo elementos de  $H_{DR}^{2j}(M, \mathbb{C})$ , os quais satisfazem as propriedades a seguir.

Antes de enunciar as propriedades, note que definimos classe de Chern de um fibrado vetorial  $E$  sobre  $M$ . Uma pergunta que surge de maneira natural é se tem sentido falar de classe de Chern de uma variedade complexa. A resposta é positiva e para isso temos a.

**Definição 1.8.13** *Seja  $M$  uma variedade complexa. Definimos a  $j$ -ésima classe de Chern da variedade complexa  $M$ , como sendo a  $j$ -ésima classe de Chern do seu fibrado tangente holomorfo, ou seja,*

$$c_j(M) := c_j(T^1 M).$$

### Propriedades das classes de Chern

A referência básica para as propriedades das classes de Chern é [17]. Considere  $E$  e  $F$  dois fibrados vetoriais sobre a variedade complexa  $M$ . Então temos.

**Propriedade I:** Considere  $f : N \rightarrow M$  uma aplicação holomorfa, então a  $j$ -ésima classe de Chern do fibrado pullback é o pullback da  $j$ -ésima classe de Chern do fibrado, ou seja,

$$c_j(f^* E) = f^* c_j(E).$$

**Propriedade II:** Considere o fibrado soma direta  $E \oplus F$ , então

$$c_j(E \oplus F) = \sum_{i=0}^j c_i(E) \cdot c_{j-i}(F)$$

logo  $c(E \oplus F) = c(E) \cdot c(F)$ .

**Propriedade III: Classe de Chern dual.** Se  $\Theta$  representa a matriz da curvatura da conexão  $\nabla$  em  $E$ , então a conexão do fibrado dual  $E^*$  tem matriz de curvatura representada por  $-\Theta$ , logo

$$c_j(E^*) = (-1)^j c_j(E).$$

**Propriedade IV: Produto Tensorial.** Considere  $F = L$  um fibrado de retas então;

$$c_j(E \otimes F) = \sum_{k=0}^j \binom{n-k}{j-k} c_j(E) c_1(L)^{j-k} \quad \text{para } 2 \leq i \leq n.$$

### 1.8.1 Conexões Métricas

Passamos agora a falar de métrica hermitiana, onde de uma maneira informal, é um produto interno hermitiano em cada fibra de um fibrado vetorial variando suavemente com o ponto.

**Definição 1.8.14** *Sejam  $M$  uma variedade complexa de dimensão  $n$ ,  $\eta = (E, \pi, M, \mathbb{C}^k)$  um fibrado vetorial complexo de dimensão  $k$  sobre  $M$ . Então a família  $h = \{h_z\}_{z \in M}$  é uma **métrica hermitiana** no fibrado  $E$  se;*

1.  $h_z$  é um produto hermitiano em  $E_z$ , para todo  $z \in M$ ;
2. se  $U_\alpha$  é um aberto trivializador de  $E$  e  $s^\alpha = (s_1^\alpha, \dots, s_k^\alpha)$  é um referencial de  $E$  sobre  $U_\alpha$  então as funções

$$\begin{aligned} h_{ij}^\alpha : U_\alpha &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto h_z(s_i^\alpha(z), s_j^\alpha(z))_{1 \leq i, j \leq k} \end{aligned}$$

são de classe  $C^\infty$ .

**Definição 1.8.15** *Um fibrado vetorial holomorfo munido de um métrica hermitiana é chamado de **fibrado hermitiano**.*

Note que definimos métrica hermitiana localmente. Usamos agora a partição da unidade para estender essa definição a todo  $E$ . Para isso tome  $\{U_\alpha\}$  uma cobertura de  $M$  que trivializa  $E$ ,  $h_\alpha$  métrica hermitiana em  $E|_{U_\alpha}$  e  $\{\rho_\alpha\}$  uma partição da unidade subordinada a  $\{U_\alpha\}$ . Então definimos a métrica hermitiana em  $E$  por

$$h = \sum_{\alpha} \rho_\alpha h_\alpha.$$

Sejam  $u$  e  $s$  duas seções do fibrado  $E$ . Definimos o produto interno entre elas por

$$\langle u, s \rangle (z) = h_z(u(z), s(z)).$$

Seja  $\nabla$  uma conexão num fibrado hermitiano  $E$ . Dizemos que a conexão  $\nabla$  é compatível com a métrica se

$$d(\langle u, s \rangle) = \langle \nabla(u), s \rangle + \langle u, \nabla(s) \rangle.$$

para todo  $u, s \in \Gamma(M, E)$ .

**Lema 1.8.16** *Se  $E$  é um fibrado hermitiano, existe uma única conexão  $\nabla$  em  $E$  que é compatível com a estrutura complexa e com a métrica.*

**Demonstração:** Ver referência [17]. □

Essa única conexão que é compatível com a métrica leva o nome de **conexão Métrica**. Dados dois fibrados hermitianos  $E$  e  $F$ , definimos a métrica hermitiana em  $E \otimes F$  por

$$\langle s \otimes u, s' \otimes u' \rangle = \langle s, s' \rangle \cdot \langle u, u' \rangle$$

onde  $s$  e  $s'$  são seções de  $E$  enquanto  $u$  e  $u'$  são seções de  $F$ .

**Lema 1.8.17** *Sejam  $E$  e  $F$  fibrados hermitianos sobre  $M$  e  $\nabla_{h_E}, \nabla_{h_F}$  as conexões métricas em  $E$  e  $F$ . Defina conexão em  $E \otimes F$  por*

$$(\nabla_{h_E} \otimes 1)(s \otimes u) = \nabla_{h_E}(s) \otimes u \quad e \quad (1 \otimes \nabla_{h_F})(s \otimes u) = s \otimes \nabla_{h_F}(u)$$

onde  $\nabla_{h_E} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla_{h_F}$  é a conexão métrica em  $E \otimes F$ .

Exploramos um pouco mais a conexão métrica obtida no Lema 1.8.16, onde a demonstração desse resultado (que pode ser encontrada em [17] na página 73) nos diz que a matriz da conexão métrica é dada localmente por

$$\theta^\alpha = \partial h^\alpha (h^\alpha)^{-1}$$

ou seja,  $\partial h^\alpha = \theta^\alpha h^\alpha$ . Aplicando o operador  $\partial$  temos,

$$0 = \partial \partial h^\alpha = \partial(\theta^\alpha h^\alpha) = \partial \theta^\alpha h^\alpha - \theta^\alpha \wedge \partial h^\alpha.$$

Logo  $\partial \theta^\alpha h^\alpha = \theta^\alpha \wedge \partial h^\alpha$ , e daí

$$\partial \theta^\alpha = \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha.$$

Por outro lado a matriz da curvatura  $k_{\nabla_h}$  da conexão métrica tem matriz local

$$\Theta^\alpha = d\theta^\alpha - \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha = \partial \theta + \bar{\partial} \theta^\alpha - \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha = \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha + \bar{\partial} \theta^\alpha - \theta^\alpha \wedge \theta^\alpha = \bar{\partial} \theta^\alpha.$$

Portanto

$$\bar{\partial} \Theta^\alpha = \bar{\partial} \bar{\partial} \theta^\alpha = 0. \tag{1.4}$$

Considere  $L$  um fibrado holomorfo de posto 1 sobre a variedade  $M$ . Denotando por  $H_\alpha$  uma métrica hermitiana em  $L$  e  $g_{\alpha\beta}$  as transições de  $L$  temos

$$H_\alpha = g_{\alpha\beta} \bar{g}_{\alpha\beta} H_\beta.$$

Já a conexão métrica  $\nabla_H$  é dada localmente pela matriz

$$\phi^\alpha = \partial \log H_\alpha. \quad (1.5)$$

A curvatura na conexão métrica  $K_{\nabla_H}$  é expressa por

$$\Phi^\alpha = \bar{\partial} \partial \log H_\alpha. \quad (1.6)$$

Usando coordenadas locais, (1.5) e (1.6) se comportam respectivamente

$$\begin{aligned} \phi^\alpha &= \sum_i \left( \frac{\partial \log H_\alpha}{\partial z_i^\alpha} \right) dz_i^\alpha, \\ \Phi^\alpha &= \sum_i \bar{\partial} \left( \frac{\partial \log H_\alpha}{\partial z_i^\alpha} \right) \wedge dz_i^\alpha = \sum_i \psi_i^\alpha \wedge dz_i^\alpha \end{aligned} \quad (1.7)$$

onde  $\psi_i^\alpha = \bar{\partial} \left( \frac{\partial \log H_\alpha}{\partial z_i^\alpha} \right)$ , logo  $\bar{\partial} \psi_i^\alpha = 0$ .

Defina a matriz  $\Omega^\alpha = [\Omega_{ij}^\alpha]$  em  $U_\alpha$  por

$$\Omega_{ij}^\alpha = \Theta_{ij}^\alpha - dz_j^\alpha \wedge \psi_i^\alpha \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (1.8)$$

Tal matrix carrega informações sobre o fibrado  $T'M \otimes L$ , pela maneira como foi definida.

**Lema 1.8.18** *Seja  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  uma cobertura trivializadora a  $T'M$  e  $L$ . Considere também  $\Xi^\alpha$  a matriz de  $(1, 1)$ -forma em  $U_\alpha$  definida por*

$$\Xi_{ij}^\alpha = -dz_j^\alpha \wedge \psi_i^\alpha \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Se  $B_{\alpha\beta}$  são as transições de  $T'M$ , então

$$\Xi^\alpha = B_{\alpha\beta} \Xi^\beta B_{\alpha\beta}^{-1}.$$

Sejam  $B_{\alpha\beta}$  e  $g_{\alpha\beta}$  as transições dos fibrados  $T'M$  e  $L$  respectivamente, onde esse último fibrado tem posto 1. Logo as transições do fibrado torcido  $T'M \otimes L$  são da seguinte forma,

$$B_{\alpha\beta} \otimes g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}.$$

Então a matriz definida em (1.8) satisfaz

$$\Omega^\alpha = (B_{\alpha\beta} \otimes g_{\alpha\beta}) \Omega^\beta (B_{\alpha\beta} \otimes g_{\alpha\beta})^{-1}. \quad (1.9)$$

Para ver esse fato, note que  $\Omega^\alpha = \Theta^\alpha + \Xi^\alpha$ , logo

$$\begin{aligned} \Omega^\alpha &= B_{\alpha\beta}(\Theta^\alpha + \Xi^\alpha)B_{\alpha\beta}^{-1} \\ &= B_{\alpha\beta}(\Theta^\alpha + \Xi^\alpha)B_{\alpha\beta}^{-1}g_{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}^{-1} \\ &= g_{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}(\Theta^\alpha + \Xi^\alpha)g_{\alpha\beta}^{-1}B_{\alpha\beta}^{-1} \\ &= (B_{\alpha\beta} \otimes g_{\alpha\beta})(\Theta^\alpha + \Xi^\alpha)(B_{\alpha\beta} \otimes g_{\alpha\beta})^{-1}. \end{aligned}$$

## 1.9 Fibrados Virtuais

Vamos nessa seção explorar um pouco mais o conceito de fibrados. Recorde da seção 1.3, onde falamos na construção de novos fibrados, tais como: fibrado dual, soma de Whitney, produto tensorial, produto exterior, pullback e subfibrados. No entanto, temos certo problema em estudar a diferença entre fibrados, ou melhor, dada uma aplicação injetora entre fibrados;

$$\psi : E \rightarrow F$$

não temos, até então, condições de falar em uma estrutura de fibrado para o quociente  $F/E$ . Então essa parte da dissertação vem com o objetivo de dar um sentido à esse quociente.

Sejam  $M$  uma variedade complexa e  $A$  o conjunto constituído de todos os fibrados vetoriais complexos  $\mathcal{C}^\infty$  sobre  $M$ . Agora defina a seguinte relação de equivalência entre os fibrados:

$$\text{Dados } E, F \text{ em } A, \text{ então } E \sim F \text{ se, e somente se, } E \cong F.$$

onde  $E \cong F$  é o isomorfismo entre os fibrados  $E$  e  $F$ , definido em Definição 1.3.10.

Então defina

$$Vec(M) := A / \sim .$$

Sendo assim  $(Vec(M), \oplus)$ , onde  $\oplus$  é a soma de Whitney, que é associativo, comutativo e também existe um elemento neutro, o qual é a classe do fibrado de posto zero sobre  $M$ , tem estrutura de semigrupo.

Associamos ao semigrupo  $Vec(M)$  um grupo abeliano  $K(M)$ , satisfazendo a seguinte propriedade universal

Existe um homomorfismo de semigrupos

$$\gamma : Vec(M) \longrightarrow K(M)$$

tal que para qualquer grupo  $G$  e

$$\Gamma : Vec(M) \longrightarrow G$$

um homomorfismo de semigrupos, existe um único homomorfismo

$$\aleph : K(M) \longrightarrow G$$

de forma que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} & Vec(M) & \\ \gamma \swarrow & & \searrow \Gamma \\ K(M) & \xrightarrow{\aleph} & G \end{array}$$

Isto é,  $\Gamma = \aleph \circ \gamma$ .

Feito isso, mostremos como é construído o grupo abeliano  $K(M)$ . Para isso tome o homomorfismo diagonal de semigrupos.

$$\begin{array}{ccc} \Delta : Vec(M) & \longrightarrow & Vec(M) \times Vec(M) \\ E & \longmapsto & \Delta(E) = (E, E) \end{array}$$

Daí define o grupo  $K(M)$  da seguinte forma

$$K(M) := \frac{Vec(M) \times Vec(M)}{\Delta(Vec(M))}.$$

Essa definição nos diz que:

$$[(F, G)] = [(F', G')]$$

se, e somente se, existe um fibrado  $E$ , sobre  $M$  de forma que

$$F = F' \oplus E$$

$$G = G' \oplus E$$

O conjunto  $(K(M), +)$  tem estrutura de semigrupo onde a operação  $+$  é definida por

$$\begin{aligned} + : \quad K(M) \times K(M) &\longrightarrow \quad Vec(M) \\ ((F_1, G_1), [(F_2, G_2)]) &\longmapsto \quad [(F_1 \oplus F_2, G_1 \oplus G_2)]. \end{aligned}$$

Por outro lado, a permutação

$$\begin{aligned} \sigma : \quad Vec(M) \times Vec(M) &\longrightarrow \quad Vec(M) \times Vec(M) \\ (E, G) &\longmapsto \quad (G, E). \end{aligned}$$

induz um elemento simétrico, uma vez que

$$[(E, G)] + [G, E] = [(E \oplus G, E \oplus G)] \text{ e } (E \oplus G, E \oplus G) \in \Delta(Vec(M)).$$

Portanto  $(K(M), +)$  tem estrutura de grupo abeliano e o chamaremos de **grupo de Grothendieck de  $M$** .

Defina

$$\gamma : Vec(M) \longrightarrow K(M)$$

por  $\gamma = q \circ i$ , onde  $q$  e  $i$  são homomorfismos de semigrupos tais que

$$\begin{aligned} Vec(M) &\xrightarrow{i} (Vec(M))^2 \xrightarrow{q} K(M) \\ E &\longmapsto (E, 0) \longmapsto [(E, 0)] \end{aligned}$$

**Proposição 1.9.1** *Se  $\Gamma : Vec(M) \longrightarrow G$  é um homomorfismo de semigrupos, então temos um diagrama comutativo.*

$$\begin{array}{ccc} Vec(M) & \xrightarrow{\gamma} & K(M) \\ \Gamma \downarrow & & \downarrow K(\Gamma) \\ G & \xrightarrow{\gamma_G} & K(G) \end{array}$$

**Demonstração:** Defina

$$\begin{aligned} K(\Gamma) : \quad K(M) &\longrightarrow \quad K(G) \\ [(F, G)] &\longmapsto \quad [(\Gamma(F), \Gamma(G))] \end{aligned}$$

onde  $K(G) := \frac{G \times G}{\Delta(G)}$ .

A aplicação  $\gamma_G$  é definida no mesmo sentido de  $\gamma$ , ou seja,

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{i_G} & (G)^2 \xrightarrow{q_G} K(G) \\ X & \longmapsto & (X, 0) \longmapsto [(X, 0)] \end{array}$$

logo  $\gamma_G = q_G \circ i_G$ . Mostremos que  $K(\Gamma) \circ \gamma = \gamma_G \circ \Gamma$ .

$$(K(\Gamma) \circ \gamma)(E) = K(\Gamma)(\gamma(E)) = K(\Gamma)([E, 0]) = [(\Gamma(E), \Gamma(0))] = [(\Gamma(E), 0)]$$

Por outro lado,

$$(\gamma_G \circ \Gamma)(E) = \gamma_G(\Gamma(E)) = (q_G \circ i_G)(\Gamma(E)) = q_G(\Gamma(E), 0) = [(\Gamma(E), 0)].$$

Portanto o diagrama acima é comutativo. □

Uma vez que  $(Vec(M), \otimes)$  tem estrutura de semi-anel, onde  $\otimes$  é o produto tensorial de fibrados,  $K(M)$  possui estrutura de anel.

Agora, denote por  $[E]$  a classe  $[(E, 0)]$  em  $K(M)$ , logo

$$[(F, G)] = [(F, 0)] + [(0, G)] = [(F, 0)] - [(G, 0)] = [F] - [G].$$

Esse fato nos diz que os elementos do grupo de Grothendieck  $K(M)$  são da forma  $[F] - [G]$ .

**Lema 1.9.2** *Seja  $\eta = (E, \pi, M)$  um fibrado vetorial complexo de classe  $C^\infty$ , onde  $M$  é uma variedade compacta. Então existe um fibrado vetorial complexo  $\xi = (F, p, M)$  de classe  $C^\infty$  tal que  $E \oplus F$  é trivial.*

**Definição 1.9.3** *Os elementos de  $K(M)$  são chamados de **fibrados virtuais**. Para tais objetos usaremos a notação  $E$ , ao invés de  $[E]$ .*

Visto a classe de Chern, na seção 1.8, de fibrados vetoriais, vamos estudar um pouco esse invariante topológico para fibrados virtuais.

**Definição 1.9.4** *Sejam  $E_0, E_1, \dots, E_{k+1}$ ,  $k + 1$  fibrados complexos de classe  $C^\infty$  sobre  $M$  e considere o fibrado virtual*

$$E = \sum_{i=0}^k (-1)^i E_i \in K(M).$$



Definimos a classe de Chern total de  $E$ ,  $c(E)$ , como sendo o elemento

$$c(E) = \prod_{i=0}^k c(E_i)^{(-1)^i} \in H_{DR}^*(M, \mathbb{C}).$$

**Exemplo 1.9.5** Sejam  $E$  um fibrado de posto  $m$  e  $L$  um fibrado em retas. Considere o fibrado virtual

$$E - L.$$

Pela Definição 1.9.4 temos

$$c(E - L) = c(E) \cdot c(L)^{-1} = \frac{1 + c_1(E) + c_2(E) + \dots + c_m(E)}{1 + c_1(L)}.$$

Expandindo formalmente o termo  $\frac{1}{1 + c_1(L)}$  temos

$$\frac{1}{1 + c_1(L)} = \frac{1}{1 - (-c_1(L))} = \sum_{i=0}^{\infty} (-c_1(L))^i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i [c_1(L)]^i,$$

assim

$$\begin{aligned} c(E - L) &= (1 + c_1(E) + \dots + c_m(E)) \cdot \left( \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (c_1(L))^i \right) \\ &= (1 + c_1(E) + \dots + c_m(E)) \cdot (1 - c_1(L) + c_1(L)^2 - \dots + (-1)^i (c_1(L))^i + \dots) \end{aligned}$$

Agora lembre da relação das classes de Chern de um fibrado vetorial e seu dual

$$c_j(F^*) = (-1)^j c_j(F).$$

Logo como  $L$  é um fibrado em retas, tem-se

$$c_1(L^*) = -c_1(L).$$

Daí

$$[c_1(L^*)]^i = [-c_1(L)]^i = (-1)^i (c_1(L))^i.$$

Assim

$$\begin{aligned}
c(E - L) &= (1 + c_1(E) + \dots + c_m(E)) \cdot \left( \sum_{i=0}^{\infty} (c_1(L^*))^i \right) \\
&= (1 + c_1(E) + \dots + c_m(E)) \cdot (1 + c_1(L^*) + c_1(L^*)^2 + \dots + c_1(L^*)^i + \dots) \\
&= 1 + [c_1(E) + c_1(L^*)] + [c_2(E) + c_1(E)c_1(L^*) + c_1(L^*)^2] + \dots
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
c_0(E - L) &= 1; \\
c_1(E - L) &= c_1(E) + c_1(L^*); \\
c_2(E - L) &= c_2(E) + c_1(E)c_1(L^*) + c_1(L^*)^2; \\
&\vdots \\
c_j(E - L) &= c_j(E) + c_{j-1}(E)c_1(L^*) + \dots + c_1(L^*)^j.
\end{aligned}$$

Em particular  $c_n(E - L) = c_n(E \otimes L)$ .

## 1.10 Localização das classes características

Essa seção tem como objetivo fornecer suporte à demonstração do teorema de Baum-Bott, no sentido de mostrar que as classes características de grau  $n$  do fibrado torcido  $TM \otimes L$ , são nulas fora do conjunto de zeros de uma seção deste fibrado. Como veremos no capítulo 2 sobre folheações, uma folheação holomorfa singular em  $M$  é induzida por uma seção global de  $TM \otimes L$ , onde  $L$  é um fibrado em retas. Portanto, as classes características de grau  $n$ , de  $TM - L$  se localiza no conjunto singular da folheação.

Para precisar a discussão acima, começamos apresentando um lema, onde sua demonstração pode ser encontrada na referência [26].

**Lema 1.10.1** *Seja  $P$  um polinômio invariante. Então*

$$P\left(\left[\frac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial z_j^\alpha}(p)\right]\right) = P\left(\left[\frac{\partial \xi_i^\beta}{\partial z_j^\beta}(p)\right]\right)$$

*isto é, o número  $P(J\xi(p)) = P\left(\left[\frac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial z_j^\alpha}(p)\right]\right) \in \mathbb{C}$  independe das trivializações do fibrado  $T'M \otimes L$ , qualquer que seja  $p \in M$  tal que  $\xi(p) = 0$ , onde  $\xi$  é uma seção do fibrado  $T'M \otimes L$ .*

Sejam  $\nabla_h$  e  $\nabla_H$  conexões métricas nos fibrados  $T'M$  e  $L$  respectivamente, logo a conexão métrica em  $T'M \otimes L$  é dada por

$$\nabla = (\nabla_h \otimes 1) + (1 \otimes \nabla_H).$$

Escrevendo a matriz da conexão  $\nabla_h$  na forma

$$\theta_{ij}^\alpha = \sum_k \Gamma_{ik}^{\alpha j} dz_k^\alpha.$$

Temos que

$$\begin{aligned} [(\nabla_h \otimes 1) + (1 \otimes \nabla_H)] \left( \xi_i^\alpha \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha} \right) &= \nabla_H(\xi_i^\alpha) \otimes \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha} + \xi_i^\alpha \otimes \nabla_h \left( \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha} \right) \\ &= (d\xi_i^\alpha + \xi_i^\alpha \partial \log H_\alpha) \otimes \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha} + \sum_j \xi_i^\alpha \theta_{ij}^\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha} \\ &= (d\xi_i^\alpha + \xi_i^\alpha \partial \log H_\alpha) \otimes \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha} + \\ &\quad + \left( \sum \xi_i^\alpha \Gamma_{ik}^{\alpha j} dz_k^\alpha \right) \otimes \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \nabla(\xi^\alpha) &= \nabla \left( \sum \xi_i^\alpha \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha} \right) \\ &= \sum \left( d\xi_i^\alpha + \xi_i^\alpha \partial \log H_\alpha + \sum_{j,k} \xi_j^\alpha \Gamma_{jk}^{\alpha i} dz_k^\alpha \right) \otimes \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha}. \end{aligned}$$

Agora defina

$$E_k^{\alpha i} := -\frac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial z_k^\alpha} - \xi_i^\alpha \frac{\partial \log H_\alpha}{\partial z_k^\alpha} - \sum_j \Gamma_{kj}^{\alpha i} \xi_j^\alpha. \quad (1.10)$$

Com essas notações temos o seguinte lema.

**Lema 1.10.2** A coleção  $\tilde{E} = \{\tilde{E}^\alpha\}$ , onde

$$\tilde{E}^\alpha = -\sum_{i,k} \left( \frac{\partial \xi_i^\alpha}{\partial z_k^\alpha} + \xi_i^\alpha \frac{\partial \log H_\alpha}{\partial z_k^\alpha} + \sum_j \Gamma_{kj}^{\alpha i} \xi_j^\alpha \right) \frac{\partial}{\partial z_i^\alpha} \otimes dz_k^\alpha$$

define uma seção global em  $T^*M \otimes T^*M^* \otimes L$ .

Analisando a definição de  $E_k^{\alpha i}$  (1.10) temos

$$\bar{\partial}E_k^{\alpha i} = -\xi_i^\alpha \left( \bar{\partial} \frac{\partial \log H_\alpha}{\partial z_k^\alpha} \right) - \sum_j \xi_j^\alpha \bar{\partial} \Gamma_{kj}^{\alpha i} = -\xi_i^\alpha \psi_k^\alpha - \sum_j \xi_j^\alpha \bar{\partial} \Gamma_{kj}^{\alpha i}. \quad (1.11)$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \Omega_{ki}^\alpha &= \Theta_{ki}^\alpha - dz_i^\alpha \wedge \psi_k^\alpha \\ &= \bar{\partial} \theta_{ki}^\alpha - dz_i^\alpha \wedge \psi_k^\alpha \\ &= \bar{\partial} \left( \sum_j \Gamma_{kj}^{\alpha i} dz_j^\alpha \right) - dz_i^\alpha \wedge \psi_k^\alpha \\ &= - \left( \sum_j dz_j^\alpha \wedge \bar{\partial} \Gamma_{kj}^{\alpha i} \right) - dz_i^\alpha \wedge \psi_k^\alpha. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} i(\xi^\alpha) \Omega_{ki}^\alpha &= -i(\xi^\alpha) \left( \sum_j dz_j^\alpha \wedge \bar{\partial} \Gamma_{kj}^{\alpha i} \right) - i(\xi^\alpha) (dz_i^\alpha \wedge \psi_k^\alpha) \\ &= - \sum_j \xi_j^\alpha \bar{\partial} \Gamma_{kj}^{\alpha i} - \xi_i^\alpha \psi_k^\alpha \end{aligned}$$

uma vez que  $i(\xi^\alpha) d\bar{z}_l^\alpha = 0$ , pois  $\xi^\alpha$  é holomorfa. Portanto, comparando esta relação com (1.11) vemos que

$$i(\xi^\alpha) \Omega_{ki}^\alpha = \bar{\partial} E_k^{\alpha i}.$$

Para continuar nossa construção, tome  $P$  um polinômio invariante de grau  $n = \dim_{\mathbb{C}} M$ . Logo por (1.9) temos

$$P(\Omega^\alpha) = P(\Omega^\beta). \quad (1.12)$$

Isto é, a coleção  $\{P(\Omega^\alpha)\}$  define globalmente uma  $(n, n)$ - forma em  $M$ , pois a igualdade em (1.12) afirma que elas se compatibilizam na intersecção não-vazia de  $U_{j_\alpha}$  e  $U_{j_\beta}$ . Denotamos essa forma por  $P(\Omega)$ .

Considere  $\tilde{P}$  a polarização completa<sup>1</sup> de  $P$  e faça

$$P_r(\Omega^\alpha, E^\alpha) = \binom{n}{r} \tilde{P}(E^\alpha, \dots, E^\alpha, \Omega^\alpha, \dots, \Omega^\alpha) \quad 0 \leq r \leq n.$$

<sup>1</sup>**Definição:** Qualquer polinômio invariante  $P$  é a restrição à diagonal de uma aplicação  $k$ -linear simétrica, invariante,  $\tilde{P}$ . Essa aplicação  $\tilde{P}$  é determinada por  $P$  de modo único e é chamada de **polarização completa de  $P$** .

logo  $P_r(\Omega^\alpha, E^\alpha)$  é uma  $(r, r)$ -forma com coeficientes em  $L|_{U_\alpha}^{n-r}$ . Por outro lado (1.7) e (1.4) nos dizem que

$$\bar{\partial}(\Omega^\alpha) = 0.$$

Logo, lembrando que  $\bar{\partial}E^\alpha = i(\xi^\alpha)\Omega^\alpha$ , temos,

$$\begin{aligned} \bar{\partial}P_r(\Omega^\alpha, E^\alpha) &= \binom{n}{r} \sum_{i=1}^{n-r} \tilde{P}(E^\alpha, \dots, i(\xi^\alpha)\Omega^\alpha, \dots, E^\alpha, \Omega^\alpha, \dots, \Omega^\alpha) \\ &= i(\xi^\alpha)P_{r+1}(\Omega^\alpha, E^\alpha). \end{aligned}$$

Agora tome a forma dual da seção  $\xi$ , a qual é uma  $(1, 0)$  forma, onde localmente é expressa por

$$w^\alpha = \frac{\sum_{i,k} h_{ik}^\alpha \bar{\xi}_k^\alpha dz_i^\alpha}{\sum_{i,k} h_i^\alpha \bar{\xi}_k^\alpha \xi_i^\alpha}.$$

fora dos zeros da seção  $\xi$ . Como  $i(\xi^\alpha)dz_i^\alpha = \xi_i^\alpha$  temos

$$i(\xi^\alpha)w^\alpha = \frac{\sum_{i,k} h_{ik}^\alpha \bar{\xi}_k^\alpha \cdot i(\xi^\alpha)dz_i^\alpha}{\sum_{i,k} h_i^\alpha \bar{\xi}_k^\alpha \cdot \xi_i^\alpha} = \frac{\sum_{i,k} h_{ik}^\alpha \bar{\xi}_k^\alpha \cdot \xi_i^\alpha}{\sum_{i,k} h_i^\alpha \bar{\xi}_k^\alpha \cdot \xi_i^\alpha} = 1$$

e mais  $i(\xi^\alpha)\bar{\partial}w^\alpha = 0$ . Agora defina

$$\Pi_r^\alpha := w^\alpha \wedge (\bar{\partial}w^\alpha)^{n-r-1} \wedge P_r(\Omega^\alpha, E^\alpha) \quad 1 \leq r \leq n-1.$$

Daí, como

$$\begin{aligned} \bar{\partial}(\Pi_r^\alpha) &= [\bar{\partial}w^\alpha \wedge (\bar{\partial}w^\alpha)^{n-r-1}] \wedge P_r(\Omega^\alpha, E^\alpha) - w^\alpha \wedge (\bar{\partial}w^\alpha)^{n-r-1} \wedge \bar{\partial}P_r(\Omega^\alpha, E^\alpha) \\ &= (\bar{\partial}w^\alpha)^{n-r} \wedge P_r(\Omega^\alpha, E^\alpha) - w^\alpha \wedge (\bar{\partial}w^\alpha)^{n-r-1} \wedge \bar{\partial}P_r(\Omega^\alpha, E^\alpha) \end{aligned}$$

temos

$$i(\xi^\alpha)\bar{\partial}\Pi_r^\alpha = (\bar{\partial}w^\alpha)^{n-r}i(\xi^\alpha)P_r(\Omega^\alpha, E^\alpha) - (\bar{\partial}w^\alpha)^{n-r-1} \wedge i(\xi^\alpha)P_{r+1}(\Omega^\alpha, E^\alpha).$$

O que nos dá

$$i(\xi^\alpha) \left[ \bar{\partial} \sum_{r=0}^{n-1} \Pi_r^\alpha + P_n(\Omega^\alpha, E^\alpha) \right] = 0. \quad (1.13)$$

Agora note que  $P_n(\Omega^\alpha, E^\alpha) = P(\Omega)|_{U_\alpha}$  e mais

$$\bar{\partial} \left[ \sum_{r=0}^{n-1} \Pi_r^\alpha \right] + P(\Omega)|_{U_\alpha},$$

É uma  $(n, n)$ -forma em  $U_\alpha \setminus \{p : \xi(p) = 0\}$ . Então segue de (1.13) que

$$\bar{\partial} \left[ \sum_{r=0}^{n-1} \Pi_r^\alpha \right] + P(\Omega)|_{U_\alpha} = 0$$

Agora

$$\gamma^\alpha := - \sum_{r=0}^{n-1} \Pi_r^\alpha,$$

é uma  $(n, n-1)$ -forma. Então

$$\bar{\partial} \gamma^\alpha = d\gamma^\alpha$$

e assim  $d\gamma^\alpha = P(\Omega)|_{U_\alpha}$  em  $U_\alpha \setminus \{p : \xi(p) = 0\}$ .

Como a coleção  $\{\gamma^\alpha\}$  define uma  $(n, n-1)$ -forma global  $\gamma$  em  $M \setminus \{p; \xi(p) = 0\}$  segue que

$$d\gamma = P(\Omega) \text{ em } M \setminus \{p; \xi(p) = 0\}. \quad (1.14)$$

É essa igualdade em (1.14) a qual nos diz que a  $(n, n)$ -forma global  $P(\Omega)$  é exata, na cohomologia de De Rham, fora dos zeros da seção  $\xi$ , então

$$\left[ P \left( \frac{i}{2\pi} \Omega \right) \right] = 0 \in H_{DR}^{2n} \left( M \setminus \{p; \xi(p) = 0, \mathbb{C}\} \right). \quad (1.15)$$

Recordando da seção 1.8, a classe característica de um fibrado é definido como sendo a classe, na cohomologia de De Rham, de um polinômio invariante calculado na matriz da curvatura da conexão. Na expressão em (1.15)  $\Omega$  é uma matriz de 2-formas, que nos da informações do fibrado  $TM \otimes L$ . Logo as classes características desse fibrado, de grau  $n$ , são nulas fora dos zeros da seção  $\xi$ . Em particular, as classes de Chern também são nulas.

# Capítulo 2

## Folheações holomorfas

Esse capítulo começa com o conceito de folheações holomorfas regulares de dimensão arbitrária. À primeira vista, esse parece um conceito demasiado abstrato, talvez pela força das exigências na definição. Mas sempre que possível construiremos figuras ilustrativas objetivando passar um entendimento maior de cada conceito. Apresentamos também outras formas de definir folheações, ou seja, algumas caracterizações desse conceito, tais como, folheações induzidas por submersões, onde as folhas são os conjuntos de nível das submersões. No caso de folheações em superfícies complexas (variedade complexa de dimensão 2) veremos como estas são induzidas tanto por 1-formas quanto por campos.

A segunda seção generaliza a primeira, no âmbito de englobar algo a mais, onde é possível falar de folheação singular. Veremos também alguns resultados envolvendo 1-formas, campos de vetores e submersões. No entanto, ressaltamos que não temos uma caracterização de folheação, assim como no caso regular, para campos de vetores.

Após ter definido e explorado folheações, passamos a definir o conceito de Blow-up, ou melhor, explosão, que é uma ferramenta muito útil para lidar com singularidades, pois veremos um resultado devido a Seidenberg que nos garante uma "redução" de singularidade. Como forma de explorar as explosões, introduzimos resultados importantes, devido á Poincaré, Siegel e também Dulac, onde esses dois primeiros autores nos mostram uma forma de linearizar as 1-formas que induzem as folheações.

Feito isso, passamos ao caso de construir novas folheações: folheação produto, folheação Pull-Back e folheação quociente. Terminamos a seção abrindo uma subseção para fazer certo paralelo entre folheação e fibrados, ou seja, veremos como folheações dão origem a certos fibrados e vice-versa.

Por fim definimos o espaço projetivo complexo  $n$ -dimensional e exploramos suas folheações, no sentido de apresentar a compactificação de folheações no espaço afim  $\mathbb{C}^n$ . Para encerrar, usamos do feito acima, para ver como se define o grau de uma folheação em  $\mathbb{P}^n$ .

### 2.1 Folheações holomorfas regulares

Vamos introduzir nessa seção o conceito de folheações holomorfas regulares. Conceito esse de grande importância para se obter um entendimento maior de algumas

variedades complexas que admitem tal estrutura.

Podemos dizer que, a grosso modo, uma folheação numa variedade complexa  $M$  é uma partição de  $M$  em subvariedades de dimensão constante duas a duas disjuntas.

Apresentaremos uma das definições possíveis para folheação holomorfa regular. Através dela caracterizaremos esse conceito, assim como daremos também alguns exemplos com o objetivo de esclarecer melhor essa teoria, pois trataremos no capítulo 4 de um resultado que tem aplicações para folheações de dimensão 1. Entendemos por folheação a estrutura definida da seguinte maneira.

**Definição 2.1.1** *Seja  $M$  uma variedade complexa de dimensão  $n$  ( $n \geq 2$ ). Uma **folheação holomorfa regular de dimensão  $k$** ,  $\mathcal{F}$  em  $M$ , onde  $1 \leq k \leq n - 1$ , é dada pelo seguinte conjunto de informações:*

1. *uma cobertura  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  de  $M$  por abertos;*
2. *para cada  $\alpha \in A$ , um biholomorfismo  $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}$ ;*
3. *sempre que  $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ :*

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha\beta} : \phi_\alpha(U_{\alpha\beta}) &\longrightarrow \phi_\beta(U_{\alpha\beta}) \\ (z, w) &\longmapsto (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})(z, w) = (\varphi_1(z, w), \varphi_2(w)). \end{aligned}$$

Nesse contexto vamos chamar cada  $U_\alpha$  de aberto trivializador da folheação, assim  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$  serão as cartas da folheação  $\mathcal{F}$ .

**Definição 2.1.2** *Sejam  $\mathcal{F}$  uma folheação holomorfa regular de dimensão  $k$  sobre uma variedade complexa  $M$  de dimensão  $n$  e  $(U, \psi)$  uma carta da folheação. Definimos a **placa** de  $\mathcal{F}$  como o conjunto da forma*

$$\psi^{-1}(\mathbb{C}^k \times \{w_0\})$$

onde  $w_0 \in \mathbb{C}^{n-k}$ .

**Proposição 2.1.3** *As placas, definidas acima, se sobrepõem nas intersecções de abertos trivializadores da seguinte forma:*

$P_\alpha \subset U_\alpha$  e  $P_\beta \subset U_\beta$  são placas, então ou  $P_\alpha \cap P_\beta = \emptyset$  ou  $P_\alpha \cap P_\beta = P_\alpha \cap U_\beta = P_\beta \cap U_\alpha$ .

A seguinte figura ilustra esse fato.

Provado esse resultado, temos bem definido a seguinte relação de equivalência em  $M$ :

Dados  $p, q$  em  $M$ ,  $p \sim q$  se existem placas  $P_1, P_2, \dots, P_n$  com  $p \in P_1$  e  $q \in P_n$



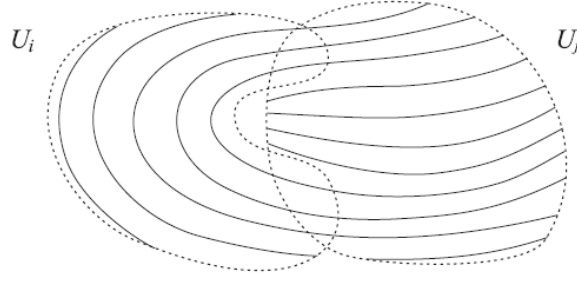


Figura 2.1: Placas na intersecção

tais que  $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$  para  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ .

**Definição 2.1.4** *Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação holomorfa regular de dimensão  $k$  em uma variedade complexa  $M$ . Definimos as **folhas** de  $\mathcal{F}$  como sendo as classes de equivalência dos pontos de  $M$  com respeito a relação de equivalência acima.*

Vale salientar que para cada  $p \in M$ , a folha relativa a esse ponto, com a topologia induzida pelos abertos de suas placas, possui estrutura de variedade complexa de dimensão  $k$  imersa em  $M$ . Por esse fato que destacamos no começo da seção, a definição informal de folheação. Para continuar construindo a teoria das folheações, necessitamos do seguinte resultado.

**Teorema 2.1.5 (Teorema da Submersão Holomorfa)** *Sejam  $M$  uma variedade complexa,  $U \subset M$  um domínio de  $M$  e  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  uma submersão holomorfa. Então para todo ponto  $p \in U$  existe uma vizinhança aberta  $U_p$  de  $p$ , uma vizinhança aberta  $W$  de  $f(p)$ , um domínio aberto  $V \subset \mathbb{C}$  e uma aplicação holomorfa  $g : U_p \rightarrow V$  tal que  $q \mapsto (g(q), f(q))$  define um biholomorfismo de  $U_p$  em um subconjunto aberto de  $V \times W$ .*

Apresentamos agora uma caracterização do conceito de folheação, ou seja, uma maneira equivalente de definir folheação em uma dada variedade.

**Proposição 2.1.6** *Uma folheação  $\mathcal{F}$ , em uma variedade complexa  $M$ , pode ser dada pelo seguinte conjunto de dados:*

1. Uma cobertura  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  de  $M$  por abertos;
2. para cada  $\alpha \in A$ , uma submersão holomorfa  $\psi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^{n-k}$ ;
3. sempre que  $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , existe uma aplicação holomorfa  $\psi_{\alpha\beta}$  em  $\psi_\alpha(U_{\alpha\beta})$  que satisfaz:

$$\psi_\alpha = \psi_{\alpha\beta} \circ \psi_\beta \text{ em } U_{\alpha\beta}.$$

**Demonstração:** Considere o conjunto de hipóteses acima. Provemos que elas definem, de fato, uma folheação holomorfa na variedade  $M$ .

Observe que já temos a condição 1 da definição satisfeita pela nossa hipótese 1. A hipótese 2 garante a existência de submersões holomorfas  $\psi_\alpha$ . Assim o Teorema 2.1.5 garante a existência de uma aplicação holomorfa  $g_\alpha : U_p \rightarrow V$ , onde  $U_p$  é uma vizinhança aberta de  $p \in U_\alpha$ ,  $V \subset \mathbb{C}^{n-k}$  é um domínio, de forma que

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha : U_p \subset U_\alpha &\longrightarrow V \times W \\ x &\longmapsto (g_\alpha(x), \psi_\alpha(x)), \end{aligned}$$

define o seguinte biholomorfismo.

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha\beta} : \Phi_\alpha(U_p \cap U_{\alpha\beta}) &\longrightarrow \Phi_\beta(U_p \cap U_{\alpha\beta}) \\ (z, w) &\longmapsto (\Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1})(z, w). \end{aligned}$$

Provemos por fim a condição 3 da definição de folheação, ou seja, que nosso biholomorfismo tem a segunda função coordenada que depende apenas da segunda variável.

Considere  $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$  e tome  $(z, w) \in V \times W$ , daí  $\Phi_\alpha^{-1}(z, w) = x \in U_{\alpha\beta}$ . Logo  $\Phi_\alpha(x) = (z, w)$ , por outro lado  $\Phi_\alpha(x) = (g_\alpha(x), \psi_\alpha(x)) = (z, w)$ , assim  $g_\alpha(x) = z$  e  $\psi_\alpha(x) = w$ .

Mas  $\Phi_{\alpha\beta}(z, w) = (\Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1})(z, w) = \Phi_\beta(\Phi_\alpha^{-1}(z, w)) = \Phi_\beta(x) = (g_\beta(x), \psi_\beta(x))$ . E pela condição (3) da hipótese, temos

$$\psi_\beta = \psi_{\beta\alpha} \circ \psi_\alpha \text{ em } U_{\alpha\beta} \neq \emptyset.$$

Daí

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha\beta}(z, w) &= \left( g_\beta(x), \psi_{\beta\alpha}(\psi_\alpha(x)) \right) = \left( g_\beta(x), \psi_{\beta\alpha}(w) \right) \\ \Phi_{\alpha\beta}(z, w) &= \left( (g_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1})(z, w), \psi_{\beta\alpha}(w) \right) \end{aligned}$$

Portanto temos uma estrutura de folheação. □

Convém ressaltar que a recíproca dessa proposição também se verifica. Portanto temos uma caracterização da definição de folheação.

Uma observação interessante a se fazer é que quando temos uma folheação  $\mathcal{F}$  induzida por submersões as folhas de  $\mathcal{F}$  restrita aos abertos trivializadores, são os conjuntos de níveis de cada submersão.

Agora, afim de apresentar outras caracterizações da definição de folheação, vamos restringir nosso estudo à variedades complexas de dimensão 2. Com isso trataremos, é claro, com folheações de dimensão 1.

**Definição 2.1.7** *Seja  $\omega$  uma 1-forma holomorfa definida num subconjunto aberto  $U$  de uma superfície complexa  $M$ . Dizemos que uma curva complexa  $\gamma : V \subset \mathbb{C} \rightarrow U$  é tangente a  $\omega$  se  $\gamma^*\omega = 0$ .*

O próximo lema nos dá uma "ligação" entre 1-forma holomorfa e submersão holomorfa.

**Lema 2.1.8** *Sejam  $M$  uma superfície complexa,  $\{U_i\}$  uma cobertura por abertos de  $M$ ,  $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$  submersões holomorfas e  $h_{ij} : f_i(U_{ij}) \rightarrow f_j(U_{ij})$  biholomorfismos satisfazendo:*

$$f_i = h_{ij}f_j$$

*Então existe uma coleção de 1-formas holomorfas não nulas  $w_i$ , definidas em  $U_i$  tal que, os conjuntos de nível de cada  $f_i$  são curvas tangentes à  $w_i$  e para cada intersecção não vazia  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , temos que  $w_i$  e  $w_j$  diferem nessa intersecção pela multiplicação de uma função holomorfa não nula.*

**Demonstração:** É necessário refinar a cobertura dada com os abertos  $\{U_{ip}\}$  do teorema da submersão holomorfa, para cada  $p \in U_i$ . Sem perda de generalidade vamos usar a cobertura original.

Sendo assim, pelo Teorema 2.1.5, para cada  $U_i$ , existe um biholomorfismo  $H = (g_i, f_i)$  de  $U_i$  em  $V_i \times W_i \subset \mathbb{C}^2$ . Agora denote por  $h$  a inversa de  $H$ . O conjunto de nível de cada  $f_i$  é dado por

$$\begin{aligned} h_c : V_i &\longrightarrow M \\ z &\longmapsto h_i(z) := h(z, c). \end{aligned}$$

onde  $c$  é fixo. Logo temos:  $f_i(h_c(z)) = c$ . Derivando essa função temos,

$$(h_c^*df_i)(z) = df_i\left(\frac{\partial h_c(z)}{\partial z}\right) \equiv 0.$$

Como cada  $f_i$  é uma submersão holomorfa, sua derivada tem posto máximo, logo define uma 1-forma holomorfa não nula. Então para cada  $U_i$  temos definida uma 1-forma holomorfa  $\omega_i = df_i$  no qual são curvas tangentes aos conjuntos de nível de cada  $f_i$ . Por hipótese  $f_i = h_{ij}f_j$  então,

$$\omega_j = df_j = d(h_{ji} \circ f_i) = \left(\frac{\partial h_{ji}}{\partial z} \circ f_i\right) df_i = \left(\frac{\partial h_{ji}(z)}{\partial z} \circ f_i\right) \omega_i.$$

Logo na intersecção dos abertos,  $\omega_i$  e  $\omega_j$  se diferenciam pela função holomorfa  $\frac{\partial h_{ij}}{\partial z} \circ f_i$  que é não nula, uma vez que  $h_{ji}$  é um biholomorfismo. □

Vimos na Proposição 2.1.6 que uma folheação é dada por um família de submersões. Já o lema precedente nos diz que temos uma relação entre submersão e 1-forma, onde o conjunto de nível de cada submersão coincide com as curvas tangentes das 1-formas. Portanto se  $\mathcal{F}$  é a folheação gerada por submersões,  $\mathcal{F}$  é também induzida por essas 1-formas com essa característica.

**Definição 2.1.9** *Sejam  $M$  uma variedade complexa,  $U \subset M$  um domínio aberto e  $X$  um campo de vetores holomorfo em  $U$ . Uma **curva integral complexa** para  $X$  é uma curva holomorfa  $\theta : D \rightarrow U$  com  $D \subset \mathbb{C}$  também um domínio aberto, tal que:*

$$\theta'(t) = d\theta_t \left( \frac{d}{dz} \right) = X(\theta(t))$$

para todo  $t \in D$ .

**Definição 2.1.10** *Um **fluxo complexo** associado a  $X$  é uma aplicação holomorfa  $\Theta : D \rightarrow M$ , onde  $D \subset \mathbb{C} \times U$  é uma vizinhança aberta e  $\theta_p(t) := \Theta(t, p)$  é uma curva integral complexa para  $X$  com  $\theta_p(0) = p$ , para todo  $p \in U$ .*

O próximo resultado nos mostra que também é possível definir uma folheação em  $M$  através de uma família de campos de vetores holomorfos, e mais, essa folheação tem como folhas, restritas aos abertos trivializadores, as curvas integrais aos campos.

**Lema 2.1.11** *Sejam  $M$  uma superfície complexa,  $\{U_i\}$  uma cobertura de  $M$  e  $\{X_i\}$  uma coleção de campos de vetores holomorfos não nulos definidos em  $U_i$ , tal que  $U_{ij} \neq \emptyset$ , então  $X_i$  e  $X_j$  diferem nessa intersecção por uma função holomorfa não nula. Então, a menos de um refinamento da cobertura de  $M$ , existem cartas holomorfas  $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^2$  tal que  $\{(U_i, \phi_i)\}$  define uma folheação  $\mathcal{F}$  em  $M$  cujas folhas, restrita a cada  $U_i$ , são as curvas integrais de cada  $X_i$ .*

**Lema 2.1.12** *Sejam  $M$  uma superfície complexa e  $\{U_i\}$  um atlas para  $M$ . Vamos considerar a coleção  $\{\omega_i\}$  e  $\{X_i\}$ , com  $\omega_i$  uma 1-forma holomorfa não nula e  $X_i$  um campo de vetores holomorfos não nulos, ambos definidos em  $U_i$  e tal que se  $U_{ij} \neq \emptyset$  então  $\omega_i$  e  $\omega_j$  ( $X_i$  e  $X_j$  respectivamente) diferem na intersecção pela multiplicação de uma função holomorfa não nula. Então dado uma coleção de um desses dois tipos, existe uma coleção do outro tipo tal que as curvas tangentes a  $\omega_i$  coincidem com as curvas integrais de  $X_i$  para todo  $i$ .*

**Demonstração:** Fixe um índice  $i$ . Sejam  $\omega$  e  $X$  uma 1-forma e um campo de vetores holomorfos respectivamente. Em coordenadas temos,

$$\omega = f(x, y).dx + g(x, y).dy \quad X = a(x, y).\frac{\partial}{\partial x} + b(x, y).\frac{\partial}{\partial y}$$

Seja  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  um curva tangente à 1-forma  $\omega$  então,

$$f(\gamma(z)).\frac{d\gamma_1(z)}{dz} + g(\gamma(z)).\frac{d\gamma_2(z)}{dz} = 0.$$

Mas esse fato acontece se, e somente se,

$$\frac{d\gamma(z)}{d\gamma} = \begin{bmatrix} -g(\gamma(z)) \\ f(\gamma(z)) \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Por outro lado, a curva  $\gamma$  acima, é uma curva integral do campo  $X$  se, e somente se,

$$\frac{d\gamma(z)}{d\gamma} = \begin{bmatrix} a(\gamma(z)) \\ b(\gamma(z)) \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Note que (2.1) e (2.2) são equações diferenciais holomorfas com,

$$F(z, \gamma) = (-g(\gamma), f(\gamma)) \text{ e}$$

$$F(z, \gamma) = (a(\gamma), b(\gamma)).$$

Pelo teorema de existência e unicidade existem soluções locais, que coincidem pela unicidade do teorema se  $(-g, f) = (a, b)$ . Logo a curva tangente à 1-forma  $\omega$  coincide com a curva integral ao campo  $X$ . □

Observe que dado uma família de 1-forma é possível definir uma folheação pois o lema anterior nos diz que as curvas tangentes as 1-formas são exatamente as curvas integrais de um campo. Então as curvas tangentes à 1-forma decompõe os abertos  $U_i$  em subconjuntos de dimensão 1. Assim basta considerar a folheação  $\mathcal{F}$  cujas folhas são as curvas tangentes as 1-formas.

Sumarizando, vimos três maneiras de construir uma folheação  $\mathcal{F}$  numa variedade  $M$  de dimensão 2. Uma a partir de submersões, outra a partir de campos holomorfos e a última através de 1-formas. Vale ressaltar que a recíproca também é verdade, ou seja, uma folheação pode ser induzida por uma família de submersões, campos de vetores holomorfos ou 1-formas holomorfas.

## 2.2 Folheações holomorfas singulares

Vamos, nessa seção, expandir um pouco mais o conceito de folheação holomorfa, pois agora vamos admitir singularidades para tais folheações. Para precisar tal fato começamos com a seguinte definição.

**Definição 2.2.1** *Seja  $M$  uma variedade complexa de dimensão  $n$ . Uma **folheação holomorfa singular** de dimensão  $k$  é um par  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}', \Sigma)$  onde  $\Sigma$  é um subconjunto analítico próprio de  $M$  e  $\mathcal{F}'$  é uma folheação holomorfa regular em  $M \setminus \Sigma$ . O conjunto  $\Sigma$  é chamado de conjunto singular de  $\mathcal{F}$ .*

**Definição 2.2.2** *Uma folheação  $\mathcal{F}$  é dita **saturada**, quando não pode ser estendida, em qualquer ponto, a um conjunto singular.*

**Observações:** Visto a definição acima, temos os seguintes fatos:

1. Uma placa de  $\mathcal{F}$  é uma placa da folheação regular  $\mathcal{F}'$ ;
2. Uma folha de  $\mathcal{F}$  é uma folha de  $\mathcal{F}'$ ;
3. Dizemos que duas folheações  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}', \Sigma)$  e  $\mathcal{G} = (\mathcal{G}', \Omega)$  são iguais se:
  - $Sing(\mathcal{F}) = Sing(\mathcal{G})$ ;
  - as folheações regulares  $\mathcal{F}'$  e  $\mathcal{G}'$  são iguais.

**Definição 2.2.3** *Seja  $U$  um domínio aberto de  $M$ . Um ponto  $p \in U$  é um **ponto singular** de uma 1-forma holomorfa  $\omega$  se  $\omega_p = 0$ . Chamamos conjunto singular ou local singular de  $\omega$  o conjunto de todos os pontos singulares de  $\omega$ . Analogamente se define ponto singular e conjunto singular de um campo de vetores holomorfo.*

O próximo resultado nos mostra como uma coleção de 1-formas, com singularidades, dá origem a uma folheação holomorfa singular.

**Lema 2.2.4** *Sejam  $M$  uma superfície complexa e  $\{U_i\}$  um atlas para a variedade  $M$ . Considere  $\{\omega_i\}$  uma coleção de 1-formas holomorfa não identicamente nula, onde cada  $\omega_i$  está definida em  $U_i$  e tal que se  $U_{ij} \neq \emptyset$  então  $\omega_i$  e  $\omega_j$  diferem na intersecção pela multiplicação de uma função holomorfa não nula. Então existe uma folheação holomorfa singular  $\mathcal{F}$  tal que as curvas tangentes a  $\omega_i$ , fora do conjunto singular, são as folhas de  $\mathcal{F}$ .*

**Demonstração:** Denote por  $\Sigma$  a união de todo conjunto singular das 1-formas  $\omega_i$ . Mas  $\omega_i$  e  $\omega_j$  diferem na intersecção  $U_{ij} \neq \emptyset$  por uma função holomorfa não nula. Então o conjunto singular de  $\omega_i$  coincide com o de  $\omega_j$  nessa intersecção.

Fora do conjunto singular  $\Sigma$ , a seção precedente nos dá uma folheação holomorfa  $\mathcal{F}'$ , portanto temos a folheação holomorfa singular  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}', \Sigma)$ . □

Assim como no caso regular, o próximo resultado nos diz que campos de vetores holomorfo, não identicamente nulos, induzem uma folheação em  $M$ .

**Lema 2.2.5** *Seja  $M$  uma superfície complexa e  $\{U_i\}$  um atlas para  $M$ . Considere  $\{X_i\}$  uma coleção de um campo de vetores holomorfos (não identicamente nulos) onde cada  $X_i$  está definido em  $U_i$  e tal que se  $U_{ij} \neq \emptyset$ , então  $X_i$  e  $X_j$  diferem na intersecção pela multiplicação de uma função holomorfa não nula. Então existe uma folheação holomorfa singular  $\mathcal{F}$  tal que as curvas integrais de  $X_i$ , fora do conjunto singular, são as folhas de  $\mathcal{F}$ .*

**Demonstração:** Ver referência [11]. □

Uma diferença interessante do caso regular é que nem toda folheação regular é dada por uma coleção de campos de vetores singulares, como mostra o seguinte exemplo.

**Exemplo 2.2.6** Considere o campo holomorfo em  $M' = \mathbb{C}^2 \setminus \{x = 0\}$  definida por

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + \exp\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial y}$$

Intrinsecamente estamos considerando a folheação  $\mathcal{F}$  induzida por  $X$ .

Desde que  $X$  é um campo de vetores que nunca se anula em  $M'$ ,  $X$  define uma folheação holomorfa regular  $\mathcal{F}'$  em  $M'$ . E daí temos uma folheação holomorfa singular em todo  $\mathbb{C}^2$ , com conjunto singular  $\Sigma = \{x = 0\}$ .

Note que  $x = 0$  é uma singularidade essencial para  $f(x) = \exp(\frac{1}{x})$ , pois

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \exp\left(\frac{1}{x}\right) \right| \nrightarrow \infty \quad \text{logo } x = 0 \text{ não é um polo}$$

por outro lado  $\lim_{x \rightarrow 0} (x - 0) \exp(\frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \exp(\frac{1}{x}) \neq 0$ , então  $x = 0$  também não é uma singularidade removível.

Como  $x = 0$  é uma singularidade essencial para o campo acima, para quase todo  $c \in \mathbb{C}$  o campo  $X$  assume o valor  $\frac{\partial}{\partial x} + c \frac{\partial}{\partial y}$  infinitas vezes em toda vizinhança aberta do ponto  $(0, y)$ .

Daí temos que nossa  $\mathcal{F}$  não pode ser definida localmente por um campo de vetores holomorfos em uma vizinhança desse ponto  $(0, y)$ .

Terminamos essa seção tecendo mais comentários com respeito a singularidades de uma folheação. Nesse momento aproveitamos para expor algumas definições que serão de grande importância para o restante o trabalho, pois vamos definir singularidade dicrítica, que por sua vez necessita da definição de separatriz de uma folheação.

**Definição 2.2.7** Seja  $v = v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} = (v_1, v_2)$  um campo holomorfo na superfície  $M$ . Desenvolvendo  $v_1$  e  $v_2$  em série de Taylor em torno de um ponto  $p$ , temos

$$v_1 = \sum_{k=m_1}^{\infty} v_{1k}, \quad v_2 = \sum_{k=m_2}^{\infty} v_{2k}.$$

O número  $m = \min\{m_1, m_2\}$  é chamado de **multiplicidade** do campo  $v$ .

**Definição 2.2.8** Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação de dimensão 1 em uma variedade complexa  $M$ . Dado  $p \in M$ , a multiplicidade algébrica ou simplesmente **multiplicidade** de  $\mathcal{F}$  em  $p$ , denotada por  $m_p(\mathcal{F})$ , é a multiplicidade em  $p$  de algum campo holomorfo que induz  $\mathcal{F}$  em torno de  $p$ .

**Definição 2.2.9** *Seja  $\omega$  um germe de uma 1 - forma holomorfa em  $0 \in \mathbb{C}^2$ , com uma singularidade isolada em 0. Uma **separatriz analítica** de  $\omega$  é um germe de uma curva complexa  $S$  em  $0 \in \mathbb{C}^2$  onde, se  $f$  é uma função que define  $S$ , com  $f(0) = 0$ , então:*

$$\omega \wedge df = f\eta,$$

para alguma 2 - forma  $\eta$ .

Observe que uma separatriz analítica é uma curva invariante pela folheação induzida por  $\omega$ .

**Definição 2.2.10** *Uma singularidade  $p$ , de uma folheação  $\mathcal{F}$ , é dita **dicrítica**, quando  $p$  admite um número infinito de separatrizes.*

**Definição 2.2.11 (Singularidade nodal)** *Seja  $S$  uma curva em  $\mathbb{P}^2$  dada por uma equação polinomial homogênea reduzida  $f = 0$  de grau  $m$ . Dizemos que uma singularidade  $p \in S$  é do tipo nodal, ou cruzamento normal, se em uma vizinhança de  $p$ , após mudança de coordenadas analítica,  $S$  é definida pela equação local  $f = x.y$  em  $p$ .*

**Exemplo 2.2.12** *Considere a folheação  $\mathcal{F}$  induzida pelo campo*

$$X = px \frac{\partial}{\partial x} + qy \frac{\partial}{\partial y} \text{ onde } p \neq q \text{ inteiros,}$$

então observe que a curva  $C_\alpha = \{f = y^p - \alpha x^q\}$ , onde  $\alpha \in \mathbb{C}$ , é uma separatriz analítica para o campo  $X$ . E mais, o ponto  $p = (0, 0)$  é uma singularidade dicrítica, pois para cada  $\alpha \in \mathbb{C}$  temos uma separatriz diferente, ou seja,  $p$  admite infinitas separatrizes.

## 2.3 Explosão

A explosão de singularidade de uma folheação é particularmente útil para ter um melhor conhecimento do comportamento de folheações, ou campos de vetores, em pontos singulares, isto é, simplificar determinadas singularidades.

Veremos o teorema de redução de singularidades de Seidenberg em [29], mostrando que para folheação de dimensão 1, em uma superfície complexa, depois de um número finito de explosões pode-se reduzir o estudo de folheações holomorfas singulares com apenas singularidades reduzidas, onde singularidades reduzidas estão definidas na Definição 2.3.5.

Começamos definindo explosão da origem de  $\mathbb{C}^2$ , depois estendemos este conceito para uma variedade  $M$ , em um ponto singular de uma folheação.

Considere 0 a origem de  $\mathbb{C}^2$  e  $\mathbb{P}^1$  o espaço projetivo complexo. Agora defina o subconjunto  $\tilde{\mathbb{C}}^2$  de  $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$  da seguinte forma,

$$\tilde{\mathbb{C}}^2 = \{(z, w, [u : t]) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1; zt = wu\}.$$



**Afirmção:**  $\tilde{\mathbb{C}}^2$  tem estrutura de variedade complexa.

Com efeito, considere os seguintes conjuntos:

$$V = \{(z, w, [u : t]) \in \tilde{\mathbb{C}}^2; u \neq 0\}$$

$$W = \{(z, w, [u : t]) \in \tilde{\mathbb{C}}^2; t \neq 0\},$$

os quais são abertos e cobrem  $\tilde{\mathbb{C}}^2$ . Agora considere as aplicações:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow V \\ (z, t) &\longmapsto (z, zt, [1 : t]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow W \\ (u, w) &\longmapsto (uw, w, [u : 1]) \end{aligned}$$

que são holomorfas, inversíveis (considerando as imagens dessas aplicações) e tem inversa contínua, uma vez que em seus respectivos domínios apropriados:  $\varphi^{-1}$  pega o elemento  $(z, zt, [1 : t])$  e leva em  $(z, t)$  e a inversa da  $\psi$  pega  $(uw, w, [u : 1])$  e o leva em  $(w, u)$ . A composição  $\varphi \circ \psi^{-1}$  é um biholomorfismo, pois é bijetora e holomorfa. Portanto  $\tilde{\mathbb{C}}^2$  admite uma estrutura de variedade complexa de dimensão 2.

Observe que  $\varphi$  aplica o conjunto  $\{(0, t) \in \mathbb{C}^2\}$  de modo injetivo em

$$\{(0, 0, [u : t]) \in \tilde{\mathbb{C}}^2; u \neq 0\}.$$

A injetividade é pelo seguinte fato

se  $\varphi(0, t_1) = \varphi(0, t_2)$  então  $(0, 0, [1, t_1]) = (0, 0, [1, t_2])$ , logo  $[1, t_1] = [1, t_2]$  o que nos dá  $t_1 = t_2$ .

Da mesma forma  $\psi$  aplica o conjunto  $\{(u, 0) \in \mathbb{C}^2\}$  injetivamente em

$$\{(0, 0, [u : t]) \in \tilde{\mathbb{C}}^2; t \neq 0\}.$$

Defina

$$\begin{aligned} \sigma : \tilde{\mathbb{C}}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (z, w, [u : t]) &\longmapsto (z, w) \end{aligned}$$

que é um biholomorfismo entre  $\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus \sigma^{-1}(0)$  e  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  com  $S := \sigma^{-1}(0) \cong \mathbb{P}^1$ .

Na carta coordenada  $\varphi$  a aplicação  $\sigma$  tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \sigma \circ \varphi : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (z, t) &\longmapsto (z, zt) \end{aligned}$$

Enquanto que na carta coordenada  $\psi$  a mesma aplicação tem o formato

$$\begin{aligned} \sigma \circ \psi : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (z, w) &\longmapsto (zw, w). \end{aligned}$$

Como forma de nomear as construções acima, considere a seguinte definição.

**Definição 2.3.1** Denominamos a aplicação  $\sigma : \tilde{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  como **explosão**. O conjunto  $S := \sigma^{-1}(0) \cong \mathbb{P}^1$  é chamado de **divisor excepcional** de  $\tilde{\mathbb{C}}^2$  e  $\sigma^{-1} : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus S$  é chamada de **implosão** de  $\mathbb{C}^2$  na origem. Para representar essa explosão denominamos  $(\tilde{\mathbb{C}}^2, S, \sigma)$  ou simplesmente  $\tilde{\mathbb{C}}^2$ .

**Observação:** Desde que o grupo de automorfismo de  $\mathbb{C}^2$  é transitivo, podemos usar a mesma construção para definir explosão de  $\mathbb{C}^2$  em um ponto qualquer. Assim como em qualquer subconjunto aberto  $U \subset \mathbb{C}^2$  num ponto  $p$ .

Já sabendo como se defini uma explosão em  $\mathbb{C}^2$ , passamos agora a estudar um modo de explodir uma variedade complexa  $M$ , de dimensão 2 num ponto  $p \in M$ .

Seja  $M$  uma superfície complexa e  $\Sigma$  um conjunto finito de pontos de  $M$ . Considere  $\{U_i\}_{i \in I}$  uma cobertura aberta de  $M$ , onde cada  $U_i$  é o domínio de uma carta coordenada que não contém mais do que um ponto do conjunto  $\Sigma$ .

Nessa condição  $M$  é biholomorfo a  $(\cup_{i \in I} U_i) / \sim$ , onde  $\sim$  é uma relação de equivalência que identifica pontos idênticos de  $M$  em diferentes  $U_i$ .

**Teorema 2.3.2** Seja  $M$  uma superfície complexa e  $\Sigma \subset M$  um conjunto finito de pontos. Então existe uma superfície complexa  $\tilde{M}$  e uma aplicação holomorfa

$$\pi : \tilde{M} \rightarrow M$$

tal que:

1. para cada  $p \in \Sigma$ , temos que  $S_p := \pi^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^1$ ;
2.  $\pi : \tilde{M} \setminus \cup_{p \in \Sigma} S_p \rightarrow M \setminus \Sigma$  é um biholomorfismo;
3. ao redor de cada  $S_p$  existe uma vizinhança aberta tal que  $\pi$ , restrita a essa vizinhança, em coordenadas locais, é um rebaixamento elementar como acima.

Nesse resultado, a variedade  $\tilde{M}$  é a explosão de  $M$  nos pontos de  $\Sigma$ .

**Observação:** Relembre que cada folheação pode ser estendida a uma folheação saturada, no qual o conjunto singular é uma subvariedade analítica de codimensão 2, isto é, dimensão 0.

**Definição 2.3.3** Seja  $M$  uma superfície complexa com folheação saturada  $\mathcal{F}$  no qual tem um conjunto finito de pontos singulares  $\Sigma$ . Então a explosão dessa folheação é uma folheação  $\tilde{\mathcal{F}}$  obtida por extensão da folheação  $\sigma^{-1}(\mathcal{F})$  definida em  $\tilde{M} \setminus \cup_{p \in \Sigma} S_p$ . Extensão essa no sentido da observação acima.

Trataremos agora de explorar alguns tipos de singularidades, assim como alguns resultados de grande relevância para a teoria local de folheações singulares, com o intuito de estudar o comportamento local de uma folheação em torno de uma singularidade.

Considere  $M$  uma superfície complexa e  $\mathcal{F}$  uma folheação holomorfa singular de dimensão 1 em  $M$ . Então  $\mathcal{F}$  é induzida por um campo de vetores holomorfos numa vizinhança de um ponto singular  $p \in M$ .

Seja

$$v = v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} = (v_1, v_2)$$

esse campo de vetores.

Por outro lado, vimos que  $\mathcal{F}$  também pode ser induzida pela seguinte 1-forma holomorfa

$$\omega = -v_2 dx + v_1 dy.$$

Seja  $m = m_p(\mathcal{F})$  (multiplicação algébrica da folheação). Considere o desenvolvimento em série de Taylor de  $v_1$  e de  $v_2$ :

$$v_1 = \sum_{k=m}^{\infty} v_{1k} \quad \text{e} \quad v_2 = \sum_{k=m}^{\infty} v_{2k}.$$

Seja  $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$  a explosão de  $M$  em  $p$  e  $S = \pi^{-1}(p)$ . Desde que

$$\pi|_{\widetilde{M} \setminus S} : \widetilde{M} \setminus S \rightarrow M \setminus \{p\}$$

é uma biholomorfismo  $\mathcal{F}|_{M \setminus \{p\}}$  pode ser transportada a uma folheação  $\widetilde{\mathcal{F}}$  em  $\widetilde{M} \setminus S$ . E mais,  $\widetilde{\mathcal{F}}$  se estende a uma folheação em  $\widetilde{M}$ , a qual denotaremos por  $\pi^*(\mathcal{F})$ .

Em coordenadas  $(x, y)$ , temos que  $\pi(x, t) = (x, xt)$ , logo a folheação  $\widetilde{\mathcal{F}}$  é induzida pelos seguintes campos

$$\begin{aligned} \pi^* \omega(x, t) &= \omega \pi(x, t) = \omega(x, xt) = -v_2(x, xt) dx + v_1(x, xt)(t dx + x dt) \\ &= [tv_1(x, xt) - v_2(x, xt)] dx + xv_1(x, xt) dt. \end{aligned}$$

Agora em coordenadas  $(u, y)$ , tem-se que  $\pi(u, y) = (uy, y)$ , logo,

$$\begin{aligned} \pi^* \omega(u, y) &= \omega \pi(u, y) = \omega(uy, y) = -v_2(uy, y)(y du + u dy) + v_1(uy, y) dy \\ &= -yv_2(uy, y) du + (v_1(uy, y) - uv_2(uy, y)) dy. \end{aligned}$$

**Definição 2.3.4** *Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação holomorfa em uma superfície complexa  $M$ , onde  $p = 0$  é uma singularidade da folheação. Definimos os **autovalores** de  $\mathcal{F}$  em  $p$  como sendo os autovalores associados ao campo  $X$  em  $p$ , ou seja, associado a matriz  $JacX(0)$ .*

Note que estamos assumindo que o campo  $X$  tenha parte linear não nula. Seja  $p \in Sing(\mathcal{F})$  com  $m_p(\mathcal{F}) = 1$ . Fixe um campo de vetores holomorfo  $v$  que induz  $\mathcal{F}$  em torno de  $p$  e sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  os autovalores da parte linear de  $v$ .

**Definição 2.3.5** *Dizemos que  $p$  é uma **singularidade reduzida** de  $\mathcal{F}$  se alguma das duas situações seguintes ocorre:*

1.  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$  e  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}^+$ ;
2.  $\lambda_1 \neq 0$  e  $\lambda_2 = 0$  ou  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 \neq 0$ .

Na Definição 2.3.5, uma singularidade do tipo 1 é chamada simples, enquanto que uma singularidade do tipo 2 é chamada sela-nó.

Vimos no começo da seção a ideia de explosão. Agora veremos claramente de que modo podemos usar esse conceito para conhecer, de uma maneira propriamente dita, o comportamento das folheações ao redor de um ponto singular.

**Definição 2.3.6** *Uma sequência finita de explosões num ponto  $p$  é*

$$\pi = \pi_n \circ \pi_{n-1} \circ \dots \circ \pi_2 \circ \pi_1$$

onde  $\pi_1$  é a explosão em  $p$  e  $\pi_k$  é a explosão em algum ponto de  $(\pi_{k-1} \circ \dots \circ \pi_1)^{-1}(p)$  com  $k = 2, \dots, n$ .

O resultado a seguir, devido a Seidenberg na referência [29], nos mostra que é possível reduzir as singularidades de uma folheação.

**Teorema 2.3.7 (Seidenberg)** *Sejam  $\mathcal{F}$  uma folheação holomorfa em uma superfície complexa  $M$  e  $p \in Sing(\mathcal{F})$ . Então existe uma sequência finita de explosões  $\pi$  em  $p$  tal que todas as singularidades de  $\pi^*(\mathcal{F})$  sobre  $\pi^{-1}(p)$  são reduzidas.*

No Teorema 2.3.7 dizemos que  $\pi$  é uma resolução de  $\mathcal{F}$  em  $p$  e que as singularidades de  $\pi^*(\mathcal{F})$  sobre  $\pi^{-1}(p)$  são resolvidas.

As proposições que seguem nos dão as formas normais para 1-forma que induz a folheação em torno de uma singularidade reduzida. Mas observe que, nessas proposições, vamos estar supondo que essas singularidades são do tipo reduzidas, pois o teorema de Seidenberg nos diz que sempre é possível partir de uma singularidade qualquer, através de um número finito de explosões, e chegar em singularidades reduzidas.

Para os resultados seguintes considere:  $\mathcal{F}$  uma folheação holomorfa na variedade complexa  $M$ ,  $p$  um ponto singular de  $\mathcal{F}$  com  $m_p(\mathcal{F}) = 1$ ,  $v$  um campo de vetores que induz  $\mathcal{F}$  em torno de  $p$ ,  $\omega$  a 1-forma dual e  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  os autovalores da parte linear de  $v$ .

**Proposição 2.3.8 (Forma Normal de Poincaré)** *Nas condições do enunciado acima se  $\lambda_1 \neq 0$  e  $\lambda_2 \neq 0$  satisfazem:*

1.  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{R}^-$ ;
2.  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \notin \mathbb{Z}^+$  ou  $\lambda_1 = \lambda_2$  e a parte linear de  $v$  é diagonalizável.

Então existe um biholomorfismo local  $\phi$  entre uma vizinhança de  $p$  e uma vizinhança de  $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$  tal que  $\omega = \phi^*\tilde{\omega}$  onde:

$$\tilde{\omega} = \lambda_1 x dy - \lambda_2 y dx.$$

**Demonstração:** Ver referência [8]. □

O conjunto dos pares  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$  satisfazendo  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{R}^-$  é chamado de domínio de Poincaré.

**Proposição 2.3.9 (Forma Normal de Siegel)** *Se  $\lambda_1 \neq 0$  e  $\lambda_2 \neq 0$  satisfazendo  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{R}^-$ , então existe um biholomorfismo local  $\phi$  entre uma vizinhança de  $p$  e uma vizinhança de  $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$  tal que  $\omega = \phi^*\tilde{\omega}$ , onde:*

$$\tilde{\omega} = [\lambda_1 x + xyf(x, y)]dy - [\lambda_2 y + xyg(x, y)]dx$$

e  $f$  e  $g$  são funções holomorfas.

**Demonstração:** Ver referência [8]. □

Note que nas duas formas locais acima, de Poincaré e de Siegel, estávamos nas condições de singularidades simples. Agora apresentaremos a forma normal de Dulac.

**Proposição 2.3.10 (Forma Normal de Dulac)** *Se  $p$  é uma sela-nó, então existe uma mudança de coordenadas holomorfa  $\phi$  tal que  $\omega = \phi^*\tilde{\omega}$ , onde:*

$$\tilde{\omega} = x^{p+1}dy + (y(1 + \lambda x^p) + f(x, y))dx$$

e  $f$  é holomorfa e tem multiplicidade  $p + 2$ .

**Demonstração:** Ver referência [8]. □

Para uma singularidade sela-nó temos ainda a seguinte forma normal formal.

**Proposição 2.3.11** *Se  $p$  é uma sela-nó, então existe uma mudança de coordenadas formal  $\phi$  tal que  $\omega = \phi^*\tilde{\omega}$ , onde:*

$$\tilde{\omega} = x^{p+1}dy + y(1 + \lambda x^p)dx$$

**Demonstração:** Ver referência [8]. □

## 2.4 Construção de Folheações holomorfas

Nessa seção apresentemos alguns modos de construir novas folheações a partir de outras pré-existentes. Uma de grande interesse é a folheação pull-back, onde consideramos duas variedades e uma submersão suave entre elas. Daí tendo uma folheação no contradomínio da aplicação, é possível importar essa estrutura de folheação para a variedade domínio. Antes porém, lembramos de uma definição equivalente de folheação, que será de fundamental importância para o desenvolvimento da seção.

**Definição 2.4.1** *Uma folheação  $\mathcal{F}$  de dimensão  $k$ , em uma variedade complexa  $M$ , pode ser dada pelo seguintes dados:*

1. *uma cobertura  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  de  $M$  por abertos;*
2. *para cada  $\alpha \in A$ , uma submersão holomorfa  $\psi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^{n-k}$ ;*
3. *sempre que  $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ , um biholomorfismo*

$$\psi_{\alpha\beta} : \psi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \rightarrow GL(n-k, \mathbb{C})$$

*que satisfaz,  $\psi_\alpha = \psi_{\alpha\beta} \circ \psi_\beta$  em  $U_{\alpha\beta}$ .*

Note que o biholomorfismo  $\psi_{\alpha\beta}$  satisfaz as condições de cociclo,

$$\psi_{\alpha\beta} \circ \psi_{\beta\gamma} \circ \psi_{\gamma\alpha} = I \quad \text{e} \quad \psi_{\alpha\beta} = \psi_{\beta\alpha},$$

o primeiro em  $U_{\alpha\beta\gamma} \neq \emptyset$  e o segundo em  $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ . De fato, para  $\psi_{\alpha\beta}, \psi_{\beta\gamma}, \psi_{\gamma\alpha}$  temos

$$\psi_\alpha = \psi_{\alpha\beta} \circ \psi_\beta, \quad \psi_\beta = \psi_{\beta\gamma} \circ \psi_\gamma \quad \text{e} \quad \psi_\gamma = \psi_{\gamma\alpha} \circ \psi_\alpha, \quad \text{então}$$

$$\begin{aligned} \psi_\alpha &= \psi_{\alpha\beta} \circ (\psi_{\beta\gamma} \circ \psi_\gamma) \\ \psi_\alpha &= (\psi_{\alpha\beta} \circ \psi_{\beta\gamma} \circ \psi_{\gamma\alpha}) \circ \psi_\alpha. \end{aligned}$$

Portanto  $\psi_{\alpha\beta} \circ \psi_{\beta\gamma} \circ \psi_{\gamma\alpha} = I$ . Além disso

$$\begin{aligned} \psi_\alpha &= \psi_{\alpha\beta} \circ \psi_\beta \\ \psi_\alpha &= \psi_{\alpha\beta} \circ \psi_{\beta\alpha} \circ \psi_\alpha \end{aligned}$$

Logo  $\psi_{\alpha\beta} \circ \psi_{\beta\alpha} = I$ , ou seja,  $\psi_{\alpha\beta} = \psi_{\beta\alpha}$ .

Esse cociclo é chamado de cociclo Haefliger representando  $\mathcal{F}$ . Sendo assim, quando quisermos nos referir a uma folheação com mais detalhes, dizemos: seja  $(M, \mathcal{F})$  uma folheação na variedade  $M$ , representada pelo cociclo Haefliger  $(U_\alpha, \psi_\alpha, \psi_{\alpha\beta})$ , onde  $U_\alpha$  são os abertos de  $M$ ,  $\psi_\alpha$  são as submersões definidas em  $U_\alpha$  e  $\psi_{\alpha\beta}$  são os biholomorfismos satisfazendo a condição de cociclo Haefliger.

Partimos agora para a primeira folheação a ser construída, a folheação produto.

**Folheação produto:** Sejam  $(M, \mathcal{F})$  e  $(N, \mathcal{G})$  duas variedades folheadas. Então existe uma folheação produto  $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$  em  $M \times N$ , onde é construída da seguinte forma.

Se  $\mathcal{F}$  é representada pelo cociclo Haefliger  $(U_\alpha, \psi_\alpha, \psi_{\alpha\beta})$  em  $M$  e  $\mathcal{G}$  é representada pelo cociclo Haefliger  $(V_k, \psi'_k, \psi'_{kl})$  em  $N$ , então  $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$  é a folheação em  $M \times N$  a qual é representada pelo cociclo Haefliger,

$$(U_\alpha \times V_k, \psi_\alpha \times \psi'_k, \psi_{\alpha\beta} \times \psi'_{kl}) \quad (2.3)$$

Veremos que de fato (2.3) define uma folheação na variedade  $M \times N$ .

$$\begin{aligned} \psi_\alpha \times \psi'_k : U_\alpha \times V_k &\longrightarrow \mathbb{C}^{m-k_1} \times \mathbb{C}^{n-k_2} \\ (x, y) &\longmapsto (\psi_\alpha \times \psi'_k)(x, y) = (\psi_\alpha(x), \psi'_k(y)) \end{aligned}$$

Esta aplicação é holomorfa, pois suas aplicações coordenadas o são, e também é uma submersão pelo mesmo motivo. Também se verifica que  $\psi_{\alpha\beta} \times \psi'_{kl} = (\psi_{\alpha\beta}, \psi'_{kl})$  é um biholomorfismo com

$$\psi_\alpha \times \psi'_k = (\psi_{\alpha\beta} \circ \psi_\beta) \times (\psi'_{kl} \circ \psi'_l) = (\psi_{\alpha\beta} \times \psi'_{kl}) \circ (\psi_\beta \times \psi'_l)$$

Portanto o cociclo Haefliger para a folheação  $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$  define, de fato, uma folheação na variedade produto.

**Folheação pull-back:** Seja  $f : N \rightarrow M$  uma aplicação suave e  $\mathcal{F}$  uma folheação em  $M$  de dimensão  $k$ . Assume que  $f$  seja transversal a folheação. Isto significa que  $f$  é transversal a toda folha da folheação  $\mathcal{F}$ , ou seja, para todo  $x \in N$  temos

$$(df)_x(T_x N) + T_{f(x)}(\mathcal{F}) = T_{f(x)}(M).$$

Temos uma folheação  $f^*(\mathcal{F})$  de  $N$ , definida da seguinte forma.

Seja  $\mathcal{F}$  dada pelo cociclo Haefliger  $(U_\alpha, \psi_\alpha, \psi_{\alpha\beta})$  em  $M$ . Coloque  $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$  e também  $\varphi_\alpha = (\psi_\alpha \circ f)|_{V_\alpha}$ . Mostremos que, de fato, as  $\varphi_\alpha$  são submersões.

Seja  $x \in V_\alpha$ , logo

$$(d\varphi_\alpha)_x = (d\psi_\alpha)_{f(x)} \circ (df)_x,$$

mas  $(d\psi_\alpha)_{f(x)}$  é sobrejetiva, pois cada  $\psi_\alpha$  é uma submersão e é trivial em  $T_{f(x)}(\mathcal{F})$ , daí esta fatora o quociente

$$\omega : T_{f(x)}(M) \longrightarrow \frac{T_{f(x)}M}{T_{f(x)}(\mathcal{F})}$$

como um aplicação sobrejetora.

Temos também que  $\omega \circ (df)_x$  é sobrejetora desde que  $f$  é transversal as folhas, logo  $(d\varphi_\alpha)_x$  é também sobrejetora. Por outro lado, os biholomorfismos da folheação  $f^*(\mathcal{F})$  são  $\psi_{\alpha\beta}$ , pois

$$\varphi_\alpha = (\psi_\alpha \circ f) = \psi_{\alpha\beta} \circ \psi_\beta \circ f = \psi_{\alpha\beta} \circ \psi_\beta.$$

Portanto o cociclo Haefliger da folheação pull-back  $f^*(\mathcal{F})$  em  $N$  é

$$(V_\alpha, \varphi_\alpha, \psi_{\alpha\beta})$$

Para esse caso temos

$$\text{codim}(\mathcal{F} \times \mathcal{G}) = \text{codim}(\mathcal{F}) + \text{codim}(\mathcal{G})$$

e

$$T(\mathcal{F} \times \mathcal{G}) = T(\mathcal{F}) \otimes T(\mathcal{G}) \subset T(M) \otimes T(\mathcal{G}) = T(M \times N).$$

Exploremos agora folheações quocientes. Para isso, devemos ter uma folheação dada e um grupo agindo livremente na variedade, sendo assim, é possível construir uma folheação na variedade quociente.

**Folheação quociente:** Sejam  $(M, \mathcal{F})$  uma variedade folheada e  $G$  um grupo agindo livremente de maneira descontínua por difeomorfismos em  $M$ , então a variedade quociente  $\frac{M}{G}$  é Hausdorff.

Assuma que a folheação  $\mathcal{F}$  seja invariante sobre a ação de  $G$ , ou seja, qualquer difeomorfismo  $g : M \rightarrow M$  em  $G$  leva folhas em folhas, ou equivalentemente,

$$dg(T(\mathcal{F})) = T(\mathcal{F}) \text{ para todo } g \in G.$$

Sendo assim,  $\mathcal{F}$  induz uma folheação  $\frac{\mathcal{F}}{G}$  na variedade  $\frac{M}{G}$ , da seguinte maneira,

Seja  $\pi : M \rightarrow \frac{M}{G}$  a aplicação quociente, que é uma projeção cobertura.

Considere  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  o atlas folheado de  $\mathcal{F}$ . Assumimos que  $\pi|_{U_\alpha}$  seja injetora, pois caso contrário, refinamos nossa cobertura de modo a ser. Assim considere a carta,



$$\left( \pi(U_\alpha), \varphi_\alpha \circ (\pi|_{U_\alpha})^{-1} \right),$$

o qual nos dá um atlas folheado para  $\frac{\mathcal{F}}{G}$ . Para concluir sobre a folheação quociente temos,

$$\text{codim}\left(\frac{\mathcal{F}}{G}\right) = \text{codim}(\mathcal{F}) \quad \text{e} \quad T\left(\frac{\mathcal{F}}{G}\right) = d_p(T(\mathcal{F})).$$

### 2.4.1 Fibrados associado a folheações

Nessa parte do trabalho vamos mostrar como podemos construir fibrados a partir de uma folheação holomorfa sobre uma variedade complexa. A partir dessa construção apresentamos um resultado, que caracteriza certa aplicação entre esse fibrado construído, e o fibrado tangente à variedade.

Para construir esse fibrado, considere  $M$  uma variedade complexa e  $\mathcal{F}$  uma folheação holomorfa de dimensão 1 em  $M$ .

Seja  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  uma cobertura por abertos de  $M$  de forma que, a folheação restrita a cada aberto  $U_\alpha$ ,  $\mathcal{F}|_{U_\alpha}$  seja induzida por um campo de vetores holomorfos  $v_\alpha$ . Então, quando  $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$  existe uma aplicação holomorfa, que não se anula,

$$f_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_{\alpha\beta}),$$

de maneira que,

$$v_\alpha = f_{\alpha\beta} v_\beta.$$

Note que  $(f_{\alpha\beta})$  satisfaz as condições de cociclo. Com efeito, temos que,

$$\begin{aligned} v_\alpha &= f_{\alpha\beta} v_\beta \\ v_\beta &= f_{\beta\gamma} v_\gamma \\ v_\gamma &= f_{\gamma\alpha} v_\alpha \\ v_\beta &= f_{\beta\alpha} v_\alpha \end{aligned}$$

em seus respectivos domínios.

Logo  $v_\alpha = f_{\alpha\beta} v_\beta = f_{\alpha\beta} (f_{\beta\alpha} v_\alpha)$ , então  $f_{\alpha\beta} \cdot f_{\beta\alpha} = I$  em  $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ . Agora em  $U_{\alpha\beta\gamma} \neq \emptyset$ ,

$$v_\alpha = f_{\alpha\beta} v_\beta = f_{\alpha\beta} f_{\beta\gamma} v_\gamma = f_{\alpha\beta} f_{\beta\gamma} f_{\gamma\alpha} v_\alpha$$

logo devemos ter:  $f_{\alpha\beta} f_{\beta\gamma} f_{\gamma\alpha} = I$ .

Portanto  $(f_{\alpha\beta})$ , de fato, satisfaz as condições de cociclo. Sendo assim,  $(f_{\alpha\beta})$  induz um fibrado holomorfo em  $M$ . Esse fibrado será denotado por  $T^*\mathcal{F}$  e leva o nome de

fibrado cotangente a folheação. Sendo assim, definimos o fibrado tangente a  $\mathcal{F}$  como sendo o fibrado dual do cotangente, ou seja,  $T\mathcal{F} = (T^*\mathcal{F})^*$ .

**Observação:** É de grande interesse ressaltar que se tomarmos uma outra cobertura  $\{v_\beta\}_{\beta \in B}$  por abertos de  $M$ , construímos o fibrado tangente a folheação  $\tilde{T}\mathcal{F}$  que, por sua vez, é isomorfo ao fibrado  $T\mathcal{F}$ . Portanto, a construção acima é única, a menos de isomorfismos.

A seguinte proposição vem com o objetivo de nos dizer que, a menos de multiplicidade por uma aplicação holomorfa não nula, existe uma única aplicação entre os fibrados específicos.

**Proposição 2.4.2** *Existe uma aplicação de fibrados  $f : T\mathcal{F} \rightarrow TM$  tal que,*

1. *para todo  $p \in M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$ ,  $f|_{(T\mathcal{F})_p}$  é injetora e  $f((T\mathcal{F})_p)$  é a reta tangente à folheação  $\mathcal{F}$  em  $p$ ;*
2.  *$p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$  se, e somente se,  $f|_{(T\mathcal{F})_p} \equiv 0$ .*

*Além do mais, se  $\tilde{f} : T\mathcal{F} \rightarrow TM$  é uma outra aplicação de fibrados satisfazendo o item (1), então existe  $h \in \mathcal{O}(M)$  tal que  $\tilde{f} = h.f$ . Em particular,  $\tilde{f}$  também satisfaz o item (2).*

**Demonstração:** Seja  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  uma cobertura por abertos de  $M$  de forma que, a folheação  $\mathcal{F}$  restrita a cada aberto  $U_\alpha$  é induzida por um campo de vetores holomorfos  $v_\alpha$ . Defina,

$$A_0 := \{\alpha_0 \in A; U_{\alpha_0} \cap \text{Sing}(\mathcal{F}) \neq \emptyset\} \subset A$$

depois defina também,  $V_{\alpha_0} := U_{\alpha_0} \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$  para cada  $\alpha_0 \in A_0$  e para  $\alpha \notin A_0$  defina  $V_\alpha := U_\alpha$ .

Então conseguimos uma cobertura por abertos de  $M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$ . E pela definição de fibrados, temos a trivialização local,

$$T\mathcal{F}|_{V_\alpha} \cong V_\alpha \times \mathbb{C}$$

Logo, dado  $x \in T\mathcal{F}|_{V_\alpha}$  podemos associa-lo ao ponto  $(p, t)$ . Definimos a seguinte aplicação,

$$f_\alpha(p) = tv_\alpha(p) \quad \text{em} \quad V_\alpha.$$

Note que

$$\begin{aligned}
 f_\alpha(p) &= tv_\alpha(p) \\
 &= tf_{\alpha\beta}(p)v_\beta(p) \\
 &= f_{\alpha\beta}(p)tv_\beta(p) \\
 &= f_{\alpha\beta}(p)f_\beta(p).
 \end{aligned}$$

Logo a definição local de  $f$  se compartilha em  $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$  para um aplicação entre fibrados,

$$f : T\mathcal{F}|_{M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})} \longrightarrow TM.$$

Como o conjunto singular da folheação tem codimensão maior ou igual a 2, o teorema de Hartogs permite estender essa aplicação a uma outra aplicação, que por abuso ainda denotaremos por  $f$ .

$$f : T\mathcal{F} \longrightarrow TM$$

Se  $p \in M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$  então  $v_\alpha(p) \neq 0$  o que nos dá o item (1). Nas vizinhanças de tipo  $U_{\alpha_0} \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$ ,  $\alpha_0 \in A_0$ ,  $f$  é construída levando cada fibra sobre  $p \in U_{\alpha_0} \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$  na direção de  $TM$  definida por  $v_{\alpha_0}(p)$ . Uma vez que  $v_{\alpha_0}$  se anula sobre  $U_{\alpha_0} \cap \text{Sing}(\mathcal{F})$ , a extensão de  $f$  a esse conjunto é necessariamente nula, ou seja,

$$f|_{(T\mathcal{F})_p} \equiv 0 \quad \text{para todo } p \in \text{Sing}(\mathcal{F}).$$

Considere  $\tilde{f} : T\mathcal{F} \longrightarrow TM$  uma outra aplicação entre fibrados satisfazendo o item (1). Uma vez que  $f$  e  $\tilde{f}$  são lineares nas fibras, existe uma função holomorfa  $h$  definida em  $M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$ , que nunca se anula, tal que para todo  $p \in M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$ ,

$$\tilde{f}|_{(T\mathcal{F})_p} \equiv h(p)f|_{(T\mathcal{F})_p}$$

Pelo teorema de Hartogs  $h$  se estende a uma aplicação holomorfa que nunca se anula em  $M$ , de modo que a relação acima é válida em todos os pontos de  $M$ . □

**Corolário 2.4.3**  $\mathcal{F}$  é uma folheação não singular, ou seja,  $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \emptyset$ , se e somente se,  $T\mathcal{F}$  é um subfibrado de  $TM$ .

Para terminar a seção, fazemos a seguinte observação. Seja  $f : T\mathcal{F} \longrightarrow TM$  uma aplicação de fibrados como acima. Se  $U \subset M$  é um aberto e  $s$  é uma seção holomorfa de  $T\mathcal{F}$  em  $U$ , então  $f \circ s$  é um campo holomorfo que induz  $\mathcal{F}$  em  $U$ . Da mesma forma se tomarmos uma seção meromorfa.

## 2.5 Folheações em $\mathbb{P}^n$

Nessa seção vamos tratar de explorar o conceito de folheações de dimensão 1 em  $\mathbb{P}^n$  e alguns resultados relevantes nessa teoria. Por fim mostremos como é definido o grau de tais folheações.

Recorde que o espaço projetivo complexo de dimensão  $n$  é o quociente de  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  pela seguinte relação de equivalência:

Dados  $z, w \in M$  temos que,  $z \sim w$  se, e somente se, existe  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  tal que  $z = \lambda w$ .

Denotemos a classe de  $z$  por  $[z]$ , ou em coordenadas homogênea,  $(z_0 : z_1 : \dots : z_n)$ . Assim  $\mathbb{P}^n$  é interpretado, geometricamente, como o espaço de retas passando pela origem de  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Com isso, temos a aplicação quociente

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{P}^n \\ z &\longmapsto [z] \end{aligned}$$

Considere a folheação  $\mathcal{F}$  em  $\mathbb{C}^n$  induzida pelo seguinte campo de vetores polinomial,

$$X = \sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

onde  $(x_1, \dots, x_n)$  são coordenadas afins. Vamos exigir que  $Sing(X)$  tenha codimensão maior ou igual a 2.

Seja  $E_0 = \mathbb{C}^n \subset \mathbb{P}^n$ , então provemos que existe uma folheação  $\overline{\mathcal{F}}$  em  $\mathbb{P}^n$  tal que  $\overline{\mathcal{F}}|_{E_0} = \mathcal{F}$ , onde

$E_i := \{(z_0 : z_1 : \dots : z_n); z_i \neq 0\}$  são os abertos trivializadores de  $\mathbb{P}^n$ .

**Proposição 2.5.1** *Existe uma folheação (singular) em  $\mathbb{P}^n$  que coincide com a folheação induzida pelo campo  $X$  no espaço afim  $\mathbb{C}^n$ .*

**Demonstração:** Considere a mudança de coordenadas  $\phi^1$  entre  $E_0$  e  $E_1$ , a qual é da forma,

$$\phi^1(x) = \phi_1(x_1, \dots, x_n) = \left( \frac{1}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1} \right) = (y_1, \dots, y_n) = y.$$

Fazendo a mudança de coordenadas no campo  $X$ , obtemos,

$$\phi_*^1(X) = Y^1 = Y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + Y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + \dots + Y_n \frac{\partial}{\partial y_n}$$

onde

$$Y_1(y_1, y_2, \dots, y_n) = -y_1^2 X_1\left(\frac{1}{y_1}, \frac{y_2}{y_1}, \dots, \frac{y_n}{y_1}\right) \quad (2.4)$$

e

$$Y_j(y_1, \dots, y_n) = y_1 \left[ X_j\left(\frac{1}{y_1}, \dots, \frac{y_n}{y_1}\right) - y_j X_1\left(\frac{1}{y_1}, \dots, \frac{y_n}{y_1}\right) \right] \quad (2.5)$$

Como  $X$  é polinomial, as expressões em (2.4) e (2.5) implicam que  $Y^1$  é um campo meromorfo com polos no hiperplano  $\{y_1 = 0\}$ . Logo podemos escrever,

$$Y^1(y) = y_1^k X^1(y),$$

onde  $X^1$  é um campo polinomial e  $k$  é a ordem do polo. Observe que  $(y_1 = 0)$  é a equação do hiperplano do infinito, digamos  $H$ , de  $E_0$  na carta  $E_1$ .

De forma análoga, ao efetuarmos a mudança de variáveis  $\phi_j$  entre  $E_0$  e  $E_j$ , obteremos um campo  $Y^j = \phi_*^j(X) = z^{-k} X^j$  onde  $X^j$  é polinomial e  $(z = 0)$  é a equação de  $H$  na carta  $E_j$ . Podemos então definir uma folheação  $\overline{\mathcal{F}}$  em  $\mathcal{P}^n$  tal que  $\overline{\mathcal{F}}|_{E_j}$  é induzida por  $X_j$ . □

**Observação:** A folheação  $\overline{\mathcal{F}}$  obtida acima é chamada de compactificação de  $\mathcal{F}$  e denotaremos-la por:  $\mathcal{F}(X) = \overline{\mathcal{F}}$ .

Passaremos agora a definir o grau de uma folheação.

**Definição 2.5.2** *Sejam  $\mathcal{F}$  uma folheação em  $\mathbb{P}^n$  e considere  $M \subset \mathbb{P}^n$  uma subvariedade algébrica. Dado  $p \in M$ , dizemos que  $\mathcal{F}$  é **tangente** a  $M$  em  $p$  se  $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$  ou se  $p \notin \text{Sing}(\mathcal{F})$  e  $T_p \mathcal{F} \subset T_p M$ .*

**Definição 2.5.3** *Dizemos que  $M$  é **invariante** por  $\mathcal{F}$  se todo ponto  $p \in M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$  é um ponto de tangência de  $\mathcal{F}$  em  $M$ .*

**Definição 2.5.4** *Seja  $M$  uma variedade que não seja invariante por  $\mathcal{F}$ . O conjunto de tangência de  $\mathcal{F}$  com  $M$  é*

$$T(\mathcal{F}, M) = \{p \in M; p \in \text{Sing}(M) \text{ ou } T_p \mathcal{F} \subset T_p M\}.$$

Note que o conjunto de hiperplanos em  $\mathbb{P}^n$  é isomorfo a  $\mathbb{P}^n$ , já que um hiperplano  $H$ , pode ser escrito em coordenadas homogêneas por,

$$F(x) = \sum_{j=0}^n a_j x_j = 0$$

onde algum  $a_j \neq 0$ . Daí temos o seguinte resultado.

**Proposição 2.5.5** *Dada uma folheação  $\mathcal{F}$  em  $\mathbb{P}^n$ , cujo conjunto singular tem codimensão maior ou igual a 2, existe um subconjunto aberto, denso e conexo  $NI(\mathcal{F})$ , do conjunto de hiperplanos  $H \subset \mathbb{P}^n$  tal que para cada  $H \in NI(\mathcal{F})$  tem-se,*

1.  $H$  não é invariante por  $\mathcal{F}$ ;
2.  $T(\mathcal{F}, H)$  é um subconjunto algébrico de  $H$  definido por um polinômio de grau  $k = k(\mathcal{F})$  em  $H$ , que independe de  $H$ .

**Definição 2.5.6** *O número inteiro  $k(\mathcal{F}) = k$ , da Proposição 2.5.5, é chamado de **grau** da folheação  $\mathcal{F}$ .*

# Capítulo 3

## O Teorema de Baum-Bott

Apresentaremos nesse capítulo um resultado devido a Paul Frank Baum e a Raoul Bott. Para tal apresentação faremos uma pequena divisão no capítulo em duas seções, onde na primeira vamos tecer comentários sobre a primeira versão do teorema de Baum-Bott, assim como alguns conceitos preliminares. Já na segunda seção apresentamos a modificação feita pelo Márcio Gomes Soares na demonstração retirando a hipótese de não degenerescência do conjunto singular da folheação.

### 3.1 O Teorema de Baum-Bott: Primeira versão

Começamos tecendo alguns comentários de real importância na compreensão da cronologia desse teorema. Tendo em mente o teorema de Heinz Hopf em [19].

**Teorema 3.1.1** *Se  $M$  é uma variedade compacta, orientada (sem fronteira) e  $V$  é um campo de vetores tangentes a  $M$  com um número finito de zeros, então*

$$\sum_{\{p \in V(p)=0\}} \mathcal{I}_p(V) = \chi(M)$$

onde  $\mathcal{I}_p(V)$  é o Índice de Poincaré-Hopf da Definição 1.4.7.

Raoul Bott fez a seguinte observação “O que acontece no teorema de Hopf se  $V$  for um campo de vetores holomorfo?” Desse questionamento Bott provou um refinamento do teorema de Hopf para campos holomorfos.

**Teorema 3.1.2 (Bott)** *Seja  $V$  um campo de vetores holomorfos em  $M$ . Assuma que cada zero de  $V$  é não-degenerado. Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  indeterminadas e tome  $\phi(X_1, X_2, \dots, X_n)$  um polinômio simétrico no qual é homogêneo de grau  $n$ .  $\phi(X_1, X_2, \dots, X_n)$  pertence  $C[X_1, X_2, \dots, X_n]$ . Considere que  $\phi(X_1, X_2, \dots, X_n) = \tilde{\phi}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  onde  $\sigma_i$  são funções elementares simétricas em  $X_i$ . Então:*

$$\sum_{\{p \in \text{Zero}(V)\}} \frac{\phi(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)}{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \dots \lambda_n} = \int_M \tilde{\phi}(c_1, c_2, \dots, c_n).$$

Se  $\phi = X_1 \cdot X_2 \dots X_n$  então a igualdade acima nos dá o número de singularidade de  $V$ .

$$\#\text{Sing}(V) = \sum_{\{p \in \text{Sing}(V)\}} 1 = \int_M c_n.$$

J. Carrell e D. Lieberman mostraram em [10] que existem poucos campos de vetores holomorfos globais e em alguns casos são inexistentes, o que torna o primeiro resultado de Bott um tanto fraco, pois não pode ser aplicado na maioria dos casos. Segue abaixo esse resultado, assim como um ambiente ao qual, sob determinadas condições não existem tais campos.

**Teorema 3.1.3 (Carrell e Lieberman)** *Seja  $M$  uma variedade compacta de Kähler com um campo de vetores holomorfos  $V$ , onde o conjunto de zeros de  $V$  tem dimensão menor do que  $k$ . Então:*

$$H^p(M, \Omega^q) = 0 \text{ para } |p - q| \geq k.$$

Note que esse resultado, de Carrel e Lieberman, nos dá obstrução topológica à existência de campos de vetores holomorfos globais.

Em alguns casos não é conveniente usar a teoria de feixe. Assim migramos para a cohomologia de Dolbeault. Considere a seguinte dualidade.

**Teorema 3.1.4 (Dolbeault)** *Seja  $M$  uma variedade complexa. Então para todo  $p, q \geq 0$  temos:*

$$H^q(M, \Omega^p) \cong H^{p,q}(M),$$

$$\text{onde } H^{p,q}(M) := \frac{A^{p,q}(M)}{\bar{\partial}A^{p-1,q}(M)}.$$

Agora considere o seguinte resultado que irá nos ajudar a argumentar, pela escassez, o fato de termos pouco ou quase nada campos de vetores holomorfos globais.

**Proposição 3.1.5** *Seja  $V \subset \mathbb{P}^n$  uma hipersuperfície <sup>1</sup> de grau  $d$ , então:*

$$\dim H^{n-1,0}(V) = \binom{d-1}{n-1}.$$

---

<sup>1</sup>Ver referência [16].



**Demonstração:** Ver referência [1]. □

Mostremos, no seguinte corolário, que em hipersuperfícies algébricas de grau alto em  $\mathbb{P}^n$  não admitem campos de vetores holomorfos globais.

**Corolário 3.1.6** *Seja  $V \subset \mathbb{P}^n$  uma hipersuperfície com grau  $d > n$ . Então  $V$  não admite campos holomorfos globais.*

**Demonstração:** Suponha por absurdo que  $V$  admita um campo holomorfo global  $X$ , não identicamente nulo, então

$$\dim(\text{Sing}(X)) < n - 1 = k.$$

Pelo resultado de Carrell e Liebermann no Teorema 3.1.3 temos

$$H^{n-1,0}(V) = 0 \text{ pois } |n - 1 - 0| = n - 1 \geq k = n - 1$$

$$\text{logo } h^{n-1,0}(V) = \dim H^{n-1,0}(V) = 0 = \binom{d-1}{n-1}.$$

Assim  $d - 1 < n - 1$ , ou seja:  $d < n$ . Absurdo, pois  $d > n$ .

Portanto, hipersuperfícies em  $\mathbb{P}^n$  com grau maior do que  $n$  não admitem campos holomorfos globais. □

Considere agora a generalização feita por Baum e Bott do resultado de Bott, para campos meromorfos globais, que foi publicado em [2]. Resultado esse de grande importância, pois nos dá obstrução topológica para a existência de seções globais sem singularidades. Confere abaixo essa versão do resultado, assim como sua demonstração. Feito isso, apresentamos um exemplo com o objetivo de motivar a próxima seção.

**Teorema 3.1.7 (Baum-Bott)** *Sejam  $M$  uma variedade complexa compacta de dimensão  $n$ ,  $L$  um fibrado vetorial holomorfo de posto 1 sobre  $M$  e  $\xi$  uma seção holomorfa do fibrado  $T'M \otimes L$ , cujos zeros são isolados e não-degenerados. Considere as classes de Chern do fibrado virtual  $T'M - L^*$ :*

$$c^\nu(T'M - L^*) = c_1^{\nu_1}(T'M - L^*) \cdot c_2^{\nu_2}(T'M - L^*) \cdots c_n^{\nu_n}(T'M - L^*)$$

$$\text{onde } \nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \quad e \quad n = 1\nu_1 + 2\nu_2 + \dots + n\nu_n.$$

Então

$$\int_M e^\nu(T^*M - L^*) = \sum_{\{p:\xi(p)=0\}} \frac{C^\nu(J\xi(p))}{\det J\xi(p)}.$$

**Demonstração:** Como  $M$  é uma variedade complexa compacta, os zeros da seção  $\xi$  são isolados. Sejam  $p_1, p_2, \dots, p_k$  esses zeros.

Daí tome vizinhanças desses pontos disjuntas  $B_{2\epsilon}(p_i)$ , para  $i = 1, \dots, k$  e para cada uma dessas vizinhanças, tome também o referencial holomorfo:

$$\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n},$$

onde  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$  são as coordenadas locais. Considere  $h_i$  métrica hermitiana em  $B_{2\epsilon}(p_i)$ , para  $i = 1, \dots, k$ , definida por:

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial z_l} \right\rangle = \begin{cases} 1 & , \text{ se } j = l \\ 0 & , \text{ se } j \neq l. \end{cases}$$

Observe que, localmente, essa é uma métrica constante.

Agora, tome uma métrica hermitiana  $h_0$  em  $M \setminus \bigcup_{i=1}^k \{p_i\}$  e considere  $\{\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_k\}$

uma partição da unidade de  $M$  subordinada à cobertura  $U_0 = M \setminus \bigcup_{i=1}^k B_{2\epsilon}(p_i)$ ,

$$U_1 = B_{2\epsilon}(p_1), \dots, U_k = B_{2\epsilon}(p_k).$$

Observe a ilustração da cobertura na figura 3.1.

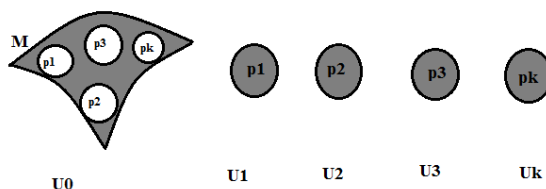


Figura 3.1: Cobertura de  $M$

Agora defina uma métrica hermitiana em  $M$  da seguinte maneira:

$$h = \rho_0 h_0 + \rho_1 h_1 + \dots + \rho_k h_k = \sum_{i=0}^k \rho_i h_i.$$

Mas temos que, localmente, a conexão métrica é "a grosso modo" o produto da derivada ( $\partial$ ) da métrica pela inversa da métrica, logo a conexão é nula. E a curvatura da conexão é a derivada ( $\bar{\partial}$ ) da conexão, logo também é nula. Então, para cada  $i = 0, \dots, k$ , a curvatura métrica  $K_h \equiv 0$  em  $B_\epsilon(p_i)$ .

Agora, de maneira análoga, define-se uma métrica hermitiana no fibrado de retas  $L$  escolhendo  $H_i = 1$  em  $B_{2\epsilon}(p_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$  e  $H_0$  qualquer valor constante em  $M \setminus \bigcup_{i=1}^k \{p_i\}$ .

Então, pelo mesmo motivo acima  $K_H \equiv 0$  em  $B_\epsilon(p_i)$ .

Seja  $P$  um polinômio invariante de grau  $n$ . Lembre-se que  $\Omega^\alpha = \Theta^\alpha + \Xi^\alpha$ , onde  $\Theta^\alpha$  representa a matriz da curvatura da conexão métrica em  $M$  em relação ao fibrado  $T'M$ ,  $\Xi_{ij}^\alpha = -dz_j^\alpha \wedge \psi_i^\alpha$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) e  $\Phi^\alpha = \sum_i (-\psi_i^\alpha \wedge dz_i^\alpha)$  é a matriz de 2-formas da curvatura  $K_{\nabla_H}$  da conexão do fibrado de retas  $L$ .

Isso nos diz que  $\Omega^\alpha$  nos dá informações sobre a matriz da curvatura da conexão do fibrado  $T'M \otimes L$ . Logo a localização de classes características nos diz que a  $(n, n)$ -forma  $P(\Omega)$  é exata(zero) fora dos zeros da seção holomorfa  $\xi$ , ou seja:

$$P(\Omega) = d\gamma \text{ em } M \setminus \bigcup_{i=1}^k \{p_i\}.$$

Daí  $[P(\Omega)] = 0 \in H_{DR}^{2n}(M \setminus \bigcup_{i=1}^k \{p_i\})$  ( $2n$ -ésimo grupo de cohomologia de De Rham)

Com essa discussão temos,

$$\int_{M \setminus \bigcup_{i=1}^k B_\epsilon(p_i)} P\left(\frac{i}{2\pi}\Omega\right) = \int_{M \setminus \bigcup_{i=1}^k B_\epsilon(p_i)} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n P(\Omega) = \int_{M \setminus \bigcup_{i=1}^k B_\epsilon(p_i)} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n d\gamma$$

E usando o teorema de Stokes temos,

$$\int_{M \setminus \bigcup_{i=1}^k B_\epsilon(p_i)} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n d\gamma = \int_{\partial M} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \gamma - \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_\epsilon(p_i)} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \gamma$$

Como  $M$  é uma variedade sem bordo, o primeiro termo do lado direito da igualdade acima é zero, logo:

$$\int_{M \setminus \cup B_\epsilon(p_i)} P\left(\frac{i}{2\pi}\Omega\right) = \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_\epsilon(p_i)} -\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \gamma.$$

Vamos estudar cada parcela  $\int_{\partial B_\epsilon(p_i)} -\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \gamma$ .

Temos que  $\gamma^\alpha = -\sum_{r=0}^{n-1} \Pi_r^\alpha$ , onde  $\Pi_r^\alpha = w^\alpha \wedge (\bar{\partial}w)^{n-r-1} \wedge P_r(\Omega^\alpha, E^\alpha)$  para  $1 \leq r \leq n-1$ .

Já vimos que  $E_{ij} = -\frac{\partial \xi_i}{\partial z_j} - \frac{\xi_i \partial \log H}{\partial z_j} - \sum_l \Gamma_{jl}^i \xi_l$ , mas em cada  $B_\epsilon(p_i)$  tem-se  $K_h = K_H \equiv 0$ , logo

$$E_{ij} = -\frac{\partial \xi_i}{\partial z_j} \text{ e } \Theta_{ij} = 0. \quad (3.1)$$

Daí

$$P_r(\Omega, E) = \binom{n}{r} \tilde{P}(\underbrace{E, E, \dots, E}_{n-r \text{ vezes}}, \underbrace{\Omega, \Omega, \dots, \Omega}_r \text{ vezes}) = 0 \quad \forall \quad 1 \leq r \leq n \quad (3.2)$$

pois  $\tilde{P}$  é  $n$ -linear.

Assim usando (3.1) temos,

$$P_0(\Omega, E) = P(E) = P\left(-\frac{\partial \xi_i}{\partial z_j}\right) = (-1)^n P(J\xi) \text{ onde } J\xi = \frac{\partial \xi_i}{\partial z_j}.$$

Sendo assim:  $\gamma = -\sum_{r=0}^{n-1} \Pi_r = -\Pi_0 - \Pi_1 - \dots - \Pi_{n-1}$

com  $\Pi_r = w \wedge (\bar{\partial}w)^{n-1} \wedge P_r(\Omega, E)$  para  $1 \leq r \leq n-1$ .

onde  $\omega$  é uma  $(1,0)$ -forma dual da seção. Então por (3.2) temos  $\Pi_r \equiv 0$  para  $1 \leq r \leq n-1$ . daí

$$\gamma = -\sum_{r=0}^{n-1} \Pi_r = -\Pi_0 = -w \wedge (\bar{\partial}w)^{n-1} \wedge P_0(\Omega, E) = -w \wedge (\bar{\partial}w)^{n-1} (-1)^n P(J\xi).$$

Assim,

$$\gamma = (-1)^{n+1} P(J\xi)w \wedge (\bar{\partial}w)^{n-1}.$$

Por outro lado

$$w = \frac{\sum_i \bar{\xi}_i dz_i}{\sum_i \bar{\xi}_i \xi_i} = \frac{\langle dz, \xi \rangle}{\langle \xi, \xi \rangle}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{\partial}w &= \bar{\partial} \left( \frac{\bar{\xi}_1 dz_1 + \dots + \bar{\xi}_n dz_n}{\bar{\xi}_1 \xi_1 + \dots + \bar{\xi}_n \xi_n} \right) \\ &= \frac{\bar{\partial}(\bar{\xi}_1 dz_1 + \dots + \bar{\xi}_n dz_n)}{\bar{\xi}_1 \xi_1 + \dots + \bar{\xi}_n \xi_n} - \frac{(\bar{\xi}_1 dz_1 + \dots + \bar{\xi}_n dz_n) \wedge \bar{\partial}(\bar{\xi}_1 \xi_1 + \dots + \bar{\xi}_n \xi_n)}{(\bar{\xi}_1 \xi_1 + \dots + \bar{\xi}_n \xi_n)^2} \end{aligned}$$

Mas

$$\bar{\partial}(\bar{\xi}_1 dz_1 + \dots + \bar{\xi}_n dz_n) = \bar{\partial}(\bar{\xi}_1 dz_1) + \dots + \bar{\partial}(\bar{\xi}_n dz_n) = (\bar{\partial} \bar{\xi}_1) \wedge dz_1 + \dots + (\bar{\partial} \bar{\xi}_n) \wedge dz_n.$$

E como  $\partial \bar{\xi}_i = 0$  temos  $\bar{\partial}(\bar{\xi}_i) \wedge dz_i = (d\bar{\xi}_i) \wedge dz_i \quad \forall \quad i = 1, \dots, n.$

Logo

$$\bar{\partial}(\bar{\xi}_1 dz_1 + \dots + \bar{\xi}_n dz_n) = d\bar{\xi}_1 \wedge dz_1 + \dots + d\bar{\xi}_n \wedge dz_n.$$

E também,

$$\bar{\partial}(\bar{\xi}_1 \xi_1 + \dots + \bar{\xi}_n \xi_n) = \bar{\partial}(\bar{\xi}_1 \xi_1) + \dots + \bar{\partial}(\bar{\xi}_n \xi_n)$$

com

$$\bar{\partial}(\bar{\xi}_i \xi_i) = \bar{\partial}(\bar{\xi}_i) \xi_i \quad \text{pois} \quad \bar{\partial} \xi_i = 0$$

uma vez que  $\xi_i$  é holomorfa e mais  $\partial \bar{\xi}_i = 0$ ,

logo

$$(\bar{\partial} \bar{\xi}_i) \xi_i = (d\bar{\xi}_i) \xi_i.$$

Com isso temos,

$$\begin{aligned}\bar{\partial}w &= \frac{(d\bar{\xi}_1) \wedge dz_1 + \dots + (d\bar{\xi}_n) \wedge dz_n}{\bar{\xi}_1\xi_1 + \dots + \bar{\xi}_n\xi_n} - \frac{(\bar{\xi}_1dz_1 + \dots + \bar{\xi}_ndz_n) \wedge (d\bar{\xi}_1\xi_1 + \dots + d\bar{\xi}_n\xi_n)}{(\bar{\xi}_1\xi_1 + \dots + \bar{\xi}_n\xi_n)^2} \\ &= -\left(\frac{dz_1 \wedge d\bar{\xi}_1 + \dots + dz_n \wedge d\bar{\xi}_n}{\bar{\xi}_1\xi_1 + \dots + \bar{\xi}_n\xi_n}\right) - \frac{(\bar{\xi}_1dz_1 + \dots + \bar{\xi}_ndz_n) \wedge (d\bar{\xi}_1\xi_1 + \dots + d\bar{\xi}_n\xi_n)}{(\bar{\xi}_1\xi_1 + \dots + \bar{\xi}_n\xi_n)^2}\end{aligned}$$

Então,

$$\bar{\partial}w = -\frac{\langle dz, d\xi \rangle}{\langle \xi, \xi \rangle} - \frac{\langle dz, \xi \rangle \wedge \langle \xi, d\xi \rangle}{\langle \xi, \xi \rangle^2},$$

assim,

$$\begin{aligned}(\bar{\partial}w)^{n-1} &= (\bar{\partial}w)^{n-1} = (-1)^{n-1} \left[ \frac{\langle dz, d\xi \rangle}{\langle \xi, \xi \rangle} + \frac{\langle dz, \xi \rangle \wedge \langle \xi, d\xi \rangle}{\langle \xi, \xi \rangle^2} \right]^{n-1} \\ &= (-1)^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left( \frac{\langle dz, d\xi \rangle}{\langle \xi, \xi \rangle} \right)^{n-1-j} \cdot \left( \frac{\langle dz, \xi \rangle \wedge \langle \xi, d\xi \rangle}{\langle \xi, \xi \rangle^2} \right)^j\end{aligned}$$

Mas  $\langle dz, \xi \rangle \wedge \langle dz, \xi \rangle = 0$ , logo o somatório acima se reduz à apenas as duas primeiras parcelas no desenvolvimento do binômio de Newton, ou seja,

$$(\bar{\partial}w)^{n-1} = (-1)^{n-1} \left( \frac{\langle dz, d\xi \rangle^{n-1}}{\langle \xi, \xi \rangle^{n-1}} + (n-1) \frac{\langle dz, d\xi \rangle^{n-2}}{\langle \xi, \xi \rangle^{n-2}} \wedge \frac{\langle dz, \xi \rangle \wedge \langle \xi, d\xi \rangle}{\langle \xi, \xi \rangle^2} \right),$$

sendo assim,

$$\begin{aligned}w \wedge (\bar{\partial}w)^{n-1} &= \frac{\langle dz, \xi \rangle}{\langle \xi, \xi \rangle} \wedge (-1)^{n-1} \frac{\langle dz, d\xi \rangle^{n-1}}{\langle \xi, \xi \rangle^{n-1}} + \\ &+ (n-1) \frac{\langle dz, \xi \rangle}{\langle \xi, \xi \rangle} (-1)^{n-1} \wedge \frac{\langle dz, d\xi \rangle^{n-2}}{\langle \xi, \xi \rangle^{n-2}} \wedge \frac{\langle dz, \xi \rangle \wedge \langle \xi, d\xi \rangle}{\langle \xi, \xi \rangle^2}.\end{aligned}$$

Mas pelo visto acima, o segundo termo do somatório, do lado direito da igualdade acima é zero, daí temos,

$$w \wedge (\bar{\partial}w)^{n-1} = (-1)^{n-1} \frac{\langle dz, \xi \rangle \wedge \langle dz, d\xi \rangle^{n-1}}{\langle \xi, \xi \rangle^n}.$$

Agora vamos estudar,

$$\langle dz, d\bar{\xi} \rangle^{n-1} = \left( \sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\bar{\xi}_i \right)^{n-1} = (dz_1 \wedge d\bar{\xi}_1 + \dots + dz_n \wedge d\bar{\xi}_n)^{n-1}.$$

Observe acima que temos um somatório de  $n$  parcelas para fazer o produto exterior  $(n - 1)$  - vezes. Mas

$$(dz_i \wedge d\bar{\xi}_i) \wedge (dz_j \wedge d\bar{\xi}_j) = 0 \text{ sempre que } i = j.$$

Logo esse produto resulta num somatório onde cada parcela é uma  $2(n-1)$  - forma, pois sempre faltará um dos índices  $(dz_i \wedge d\bar{\xi}_i)$ .

Por exemplo, no caso em que falta o termo  $(dz_1 \wedge d\bar{\xi}_1)$  temos,

$$(dz_{j_1} \wedge d\bar{\xi}_{j_1}) \wedge (dz_{j_2} \wedge d\bar{\xi}_{j_2}) \wedge \dots \wedge (dz_{j_i} \wedge d\bar{\xi}_{j_i}) \text{ com } j_i \in \{2, 3, \dots, n\}.$$

Onde na primeira posição tem-se  $(n - 1)$  possibilidades de escolher uma 2-forma.

Já na segunda posição temos  $(n - 2)$  possibilidades.

Portanto, teremos uma quantidade de  $(n - 1)!$  de  $2(n - 1)$ -formas que omitem o termo  $(dz_1 \wedge d\bar{\xi}_1)$ .

Da mesma maneira, temos também  $(n - 1)!$  de  $2(n - 1)$ -formas que omitem o termo  $(dz_2 \wedge d\bar{\xi}_2)$ . E assim segue até o índice  $n$ .

Agora note que em qualquer das formas acima é possível remanejar um índice com outro sem haver a troca de sinal da forma, pois cada  $(dz_i \wedge d\bar{\xi}_i)$  é uma 2 - forma. Logo podemos reordenar essas formas de maneira que os índices fiquem de maneira crescente. Reorganizando as fatos, temos uma quantidade de  $(n - 1)!$  de  $2(n - 1)$  forma do tipo

$$(dz_2 \wedge d\bar{\xi}_2) \wedge (dz_3 \wedge d\bar{\xi}_3) \wedge \dots \wedge (dz_n \wedge d\bar{\xi}_n).$$

Temos também uma quantidade de  $(n - 1)!$  de  $2(n - 1)$  forma do tipo

$$(dz_1 \wedge d\bar{\xi}_1) \wedge (dz_3 \wedge d\bar{\xi}_3) \wedge \dots \wedge (dz_n \wedge d\bar{\xi}_n),$$

e assim até o índice  $n$ .

Portanto, resumindo esses fatos temos que,

$$\left( \sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\bar{\xi}_i \right)^{n-1} = \sum_{i=1}^n (n - 1)! dz_1 \wedge d\bar{\xi}_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dz_i \wedge d\bar{\xi}_i} \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{\xi}_n.$$

Em cada termo do somatório acima, vamos isolar os produtos exteriores com  $dz$  de um lado e os  $d\bar{\xi}$  do outro,

para  $i = 1$  temos,

$$\begin{aligned} & (n-1)! dz_2 \wedge d\bar{\xi}_2 \wedge dz_3 \wedge d\bar{\xi}_3 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{\xi}_n = \\ & = (n-1)! (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} dz_2 \wedge dz_3 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{\xi}_2 \wedge d\bar{\xi}_3 \wedge \dots \wedge d\bar{\xi}_n, \end{aligned}$$

para  $i = 2$  temos,

$$\begin{aligned} & (n-1)! dz_1 \wedge d\bar{\xi}_1 \wedge dz_3 \wedge d\bar{\xi}_3 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{\xi}_n = \\ & = (n-1)! (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} dz_1 \wedge dz_3 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{\xi}_1 \wedge d\bar{\xi}_3 \wedge \dots \wedge d\bar{\xi}_n. \end{aligned}$$

Em geral vale

$$\langle dz, d\xi \rangle^{n-1} = \sum_{i=1}^n (n-1)! (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} dz_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dz_i} \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{\xi}_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\bar{\xi}_i} \wedge \dots \wedge d\bar{\xi}_n.$$

Mas

$$\langle dz, \xi \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{\xi}_i dz_i = \bar{\xi}_1 dz_1 + \dots + \bar{\xi}_n dz_n,$$

daí,

$$\begin{aligned} & \langle dz, \xi \rangle \wedge \langle dz, d\xi \rangle^{n-1} = (\bar{\xi}_1 dz_1 + \dots + \bar{\xi}_n dz_n) \wedge \\ & \wedge \sum_{i=1}^n (n-1)! (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} dz_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dz_i} \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{\xi}_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\bar{\xi}_i} \wedge \dots \wedge d\bar{\xi}_n = \\ & = (n-1)! (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} (\bar{\xi}_1 dz_1 + \dots + \bar{\xi}_n dz_n) \wedge [dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{\xi}_2 \wedge \dots \wedge d\bar{\xi}_n + \\ & + dz_1 \wedge dz_3 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{\xi}_1 \wedge d\bar{\xi}_3 \wedge \dots \wedge d\bar{\xi}_n + \dots + dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{n-1} \wedge d\bar{\xi}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{\xi}_{n-1}] \\ & = (n-1)! (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} [\bar{\xi}_1 dz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{\xi}_2 \wedge d\bar{\xi}_3 \wedge \dots \wedge d\bar{\xi}_n + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & +\bar{\xi}_2 \wedge dz_2 \wedge dz_1 \wedge dz_3 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{\xi}_1 \wedge d\bar{\xi}_3 \wedge \dots \wedge d\bar{\xi}_n + \dots + \\
 & +\bar{\xi}_n dz_n \wedge dz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_{n-1} \wedge d\bar{\xi}_1 \wedge d\bar{\xi}_2 \wedge \dots \wedge d\bar{\xi}_{n-1}]. \\
 & = \sum_{i=1}^n (n-1)! (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \bar{\xi}_i dz_i \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dz_i} \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{\xi}_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\bar{\xi}_i} \wedge \dots \wedge d\bar{\xi}_n \\
 & = \sum_{i=1}^n (n-1)! (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} (-1)^{i-1} \bar{\xi}_i dz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{\xi}_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\bar{\xi}_i} \wedge \dots \wedge d\bar{\xi}_n.
 \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
 & (-1)^{n-1} \langle dz, \xi \rangle \wedge \langle dz, d\xi \rangle^{n-1} = \\
 & = (n-1)! (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \bar{\xi}_i d\bar{\xi}_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\bar{\xi}_i} \wedge \dots \wedge d\bar{\xi}_n,
 \end{aligned}$$

$$\text{pois } (-1)^{n-1} (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Sendo assim temos,

$$\begin{aligned}
 & w \wedge (\bar{\partial}w)^{n-1} = \langle \xi, \xi \rangle^{-n} (-1)^{n-1} \langle dz, \xi \rangle \wedge \langle dz, d\xi \rangle^{n-1} \\
 & = \langle \xi, \xi \rangle^{-n} (n-1)! (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \bar{\xi}_i d\bar{\xi}_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\bar{\xi}_i} \wedge \dots \wedge d\bar{\xi}_n \\
 & = \langle \xi, \xi \rangle^{-n} (n-1)! (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \bar{\xi}_i d\bar{\xi}_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\bar{\xi}_i} \wedge \dots \wedge d\bar{\xi}_n \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n,
 \end{aligned}$$

$$\text{pois } n(n-1) \text{ é sempre par, logo } (-1)^{n(n-1)} = 1.$$

Note que, por hipótese, as singularidades de  $\xi$  são não-degeneradas, portanto

$$\det J\xi(p) \neq 0 \text{ para todo } p \text{ tal que } \xi(p) = 0.$$

Assim, como  $\dim M = n$  temos

$$dz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n = \frac{1}{\det J\xi} \cdot d\xi_1 \wedge d\xi_2 \wedge \dots \wedge d\xi_n,$$

substituindo essa igualdade em  $w \wedge (\bar{\partial}w)^{n-1}$  acima, temos

$$w \wedge (\bar{\partial}w)^{n-1} = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n-1)!}{\langle \xi, \xi \rangle^n \det J\xi} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \bar{\xi}_i d\bar{\xi}_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\bar{\xi}_i} \wedge \dots \wedge d\bar{\xi}_n \wedge d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_n.$$

Lembre-se que o núcleo de Bochner-Martinelle é dado por

$$B_n(0, \xi) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n-1)!}{(2\pi i)^n \langle \xi, \xi \rangle^n} \sum_{i=1}^n \bar{\xi}_i d\bar{\xi}_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\bar{\xi}_i} \wedge \dots \wedge d\bar{\xi}_n \wedge d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_n,$$

ou seja,

$$B_n(0, \xi)(2\pi i)^n = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n-1)!}{\langle \xi, \xi \rangle^n} \sum_{i=1}^n \bar{\xi}_i d\bar{\xi}_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\bar{\xi}_i} \wedge \dots \wedge d\bar{\xi}_n \wedge d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_n.$$

Sendo assim, temos que

$$w \wedge (\bar{\partial}w)^{n-1} = \frac{(2\pi i)^n B_n(0, \xi)}{\det(J\xi)}.$$

$$\text{Então, } \gamma = (-1)^{n+1} P(J\xi) w \wedge (\bar{\partial}w)^{n-1} = (-1)^{n+1} P(J\xi) \frac{(2\pi i)^n B_n(0, \xi)}{\det(J\xi)}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} -\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \gamma &= \frac{(-1)^1 i^n}{(2\pi)^n} (-1)^{n+1} (2\pi)^n (i)^n \frac{P(J\xi)}{\det(J\xi)} B_n(0, \xi) \\ &= (-1)(-1)^n (-1)^{n+1} \frac{P(J\xi)}{\det(J\xi)} B_n(0, \xi) \\ &= (-1)^{2n+2} \frac{P(J\xi)}{\det(J\xi)} B_n(0, \xi). \end{aligned}$$

Logo,

$$-\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \gamma = \frac{P(J\xi)}{\det(J\xi)} B_n(0, \xi).$$

Daí

$$\int_{\partial B_\epsilon(p_i)} -\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \gamma = \int_{\partial B_\epsilon(p_i)} \frac{P(J\xi)}{\det(J\xi)} B_n(0, \xi).$$

Lembre-se que o núcleo de Bochner - Martinelli normaliza a área de esferas

$$\int_{\partial B_\epsilon(p_i)} B_n(0, \xi) = 1.$$

Então

$$\int_{\partial B_\epsilon(p_i)} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \gamma = \frac{P(J\xi)}{\det(J\xi)}.$$

Sendo assim,

$$\int_{M \setminus \cup B_\epsilon(p_i)} P\left(\frac{i}{2\pi}\Omega\right) = \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_\epsilon(p_i)} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \gamma = \sum_{i=1}^k \frac{P(J\xi(p_i))}{\det(J\xi(p_i))}.$$

Então,

$$\int_M P\left(\frac{i}{2\pi}\Omega\right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{M \setminus \cup B_\epsilon(p_i)} P\left(\frac{i}{2\pi}\Omega\right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k \frac{P(J\xi(p_i))}{\det(J\xi(p_i))} = \sum_{i=1}^k \frac{P(J\xi(p_i))}{\det(J\xi(p_i))}.$$

Portanto

$$\int_M P\left(\frac{i}{2\pi}\Omega\right) = \sum_{i=1}^k \frac{P(J\xi(p_i))}{\det(J\xi(p_i))}. \quad (3.3)$$

Mas

$$c^\nu(T'M - L^*) = c_1^{\nu_1}(T'M - L^*) \cdot c_2^{\nu_2}(T'M - L^*) \cdot \dots \cdot c_n^{\nu_n}(T'M - L^*),$$

com  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  e  $n = 1\nu_1 + 2\nu_2 + \dots + n\nu_n$ .

A igualdade em (3.3) é válida para todo polinômio invariante  $P$ , em particular para  $c^\nu$ . Além disso,

$$\left[ \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n c^\nu(\Omega) \right] = c^\nu(T'M - L^*).$$

Usando 3.3 temos

$$\int_M c^\nu(T^*M - L^*) = \int_M \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n c^\nu(\Omega) = \sum_{i=1}^k \frac{c^\nu(J\xi(p_i))}{\det(J\xi(p_i))}.$$

Onde termina a demonstração do teorema de Baum-Bott. □

**Exemplo 3.1.8** Considere a variedade compacta  $M = \mathbb{P}^n$  e  $\mathcal{F}$  uma folheação de grau  $d$  em  $\mathbb{P}^n$  induzida, na coordenada afim  $\{z_0 = 1\}$  pelo campo

$$X = \sum_{i=1}^n Z_i^d \frac{\partial}{\partial Z_i} = Z_1^d \frac{\partial}{\partial Z_1} + Z_2^d \frac{\partial}{\partial Z_2} + \dots + Z_n^d \frac{\partial}{\partial Z_n}.$$

As singularidades desse campo são degeneradas, pois a única singularidade é  $p = (0, 0, \dots, 0)$  e  $\det JX(p) = 0$ , uma vez que:

$$JX = \begin{bmatrix} dZ_1^{d-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & dZ_2^{d-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & dZ_n^{d-1} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Assim  $\det JX = d^n (Z_1^{d-1} \cdot Z_2^{d-1} \cdot \dots \cdot Z_n^{d-1}) = d^n (Z_1 \cdot Z_2 \cdot \dots \cdot Z_n)^{d-1}$ . Então

$$\det JX(p) = 0.$$

Observe que para esse exemplo, não é possível aplicar o teorema de Baum-Bott demonstrado acima, pois possui uma singularidade degenerada. Essa fato que nos motiva apresentar a próxima seção, onde Márcio Soares retira a hipótese de degenerescência das singularidades.

### 3.2 O Teorema de Baum-Bott: Segunda versão

Nessa parte do capítulo vamos apresentar o assunto principal do artigo de M. Soares em [31], que nos diz que a hipótese sobre as singularidades da folheação serem não degeneradas, exposta na seção precedente, pode ser retirada.

**Teorema 3.2.1 (Baum-Bott)** *Sejam  $M$  uma variedade complexa compacta de dimensão  $n$ ,  $L$  um fibrado de retas holomorfo sobre  $M$  e  $\xi$  uma seção holomorfa do fibrado  $TM \otimes L$ , com zeros isolados. Considere as classes de Chern:*

$$c^\nu(TM \otimes L) = c_1^{\nu_1}(TM \otimes L) \cdot c_2^{\nu_2}(TM \otimes L) \cdot \dots \cdot c_n^{\nu_n}(TM \otimes L)$$

$$\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \text{ e } n = 1\nu_1 + 2\nu_2 + \dots + n\nu_n.$$

$$\text{Então } \int_M c^\nu(TM \otimes L) = \sum_{\{p: \xi(p)=0\}} \text{Res}_p \left\{ \frac{c^\nu(J\xi) dz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n}{\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \dots \cdot \xi_n} \right\}.$$

**Demonstração:** Para provar esse resultado agimos do mesmo modo como no teorema anterior. Mas num certo ponto usaremos o seguinte resultado que relaciona o núcleo de Bocher-Martinelli com o resíduo de Grothendieck.

Para isso considere a  $n$ -forma  $\zeta = g(z) \frac{dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{\xi_1(z) \cdot \dots \cdot \xi_n(z)}$ , onde  $g$  é holomorfa e  $(z_1, \dots, z_n)$  é um sistema de coordenadas locais.

Sendo assim, temos a representação distinguida de Dolbeault da forma  $\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \zeta$

$$\eta_\zeta = g(z) \left[ \frac{l_n \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \bar{\xi}_i d\bar{\xi}_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\bar{\xi}_i} \wedge \dots \wedge d\bar{\xi}_n \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{\langle \xi, \xi \rangle^n} \right]$$

onde  $l_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}$  é uma constante que depende unicamente de  $n$ .

Por outro lado, considere a aplicação

$$F : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \\ z \longmapsto F(z) = (z + \xi(z), z),$$

e o núcleo de Bochner-Martinelli em  $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$

$$B_n(z, u) = \frac{l_n}{|z - u|^{2n}} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (\bar{z}_i - \bar{u}_i) \cdot \left[ \bigwedge_{j \neq i} (d\bar{z}_j - d\bar{u}_j) \wedge du_1 \wedge \dots \wedge du_n \right].$$

Então o pull-back do núcleo de Bochner-Martinelli pela  $F$  é

$$F^*B_n = \frac{l_n}{|\xi|^{2n}} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \bar{\xi}_i \left[ \bigwedge_{j \neq i} d\bar{\xi}_j \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \right].$$

Logo,

$$\eta_\zeta = gF^*B_n.$$

Seja  $\Gamma$  o  $n$ -ciclo real definido por  $\Gamma = \{|\xi_i(z)| = \epsilon\}$ , onde  $\epsilon > 0$ , e munido da orientação dada por  $d(\arg \xi_1) \wedge \dots \wedge d(\arg \xi_n) \geq 0$ . Tem-se

$$Res_p \zeta = \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_{\Gamma} g(z) \frac{dz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n}{\xi_1(z) \cdot \xi_2(z) \dots \xi_n(z)} = \int_{S^{2n-1}(p)} gF^*B_n. \quad (3.4)$$

Suponha que os zeros de  $\xi$  sejam isolados. Tome vizinhanças disjuntas de cada zero, um referencial holomorfo, métricas hermitianas em cada vizinhança e use a partição da unidade para estender a métrica para todo  $M$ .

Então, a localização das classes características nos diz que

$$P(\Omega) = d\gamma \quad \text{em} \quad M \setminus \{p; \xi(p) = 0\}$$

para  $P$  um polinômio invariante.

Daí, temos que

$$\int_{M \setminus \cup B_\epsilon(p_i)} P\left(\frac{i}{2\pi}\Omega\right) = \int_{M \setminus \cup B_\epsilon(p_i)} \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n d\gamma = \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_\epsilon(p_i)} -\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \gamma.$$

Mas  $\gamma = (-1)^{n+1} P(J\xi)w \wedge (\bar{\partial}w)^{n-1}$  onde

$$w \wedge (\bar{\partial}w)^{n-1} = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n-1)!}{\langle \xi, \xi \rangle^n} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \bar{\xi}_i d\bar{\xi}_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\bar{\xi}_i} \wedge \dots \wedge d\bar{\xi}_n \wedge dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n.$$

Agora, observando o pull-back do núcleo de Bochner-Martinelli pela  $F$ , temos

$$F^*B_n = \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^n \omega \wedge (\bar{\partial}\omega)^{n-1}.$$

Daí

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial B_\epsilon(p_i)} -\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \gamma &= \int_{\partial B_\epsilon(p_i)} -\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n (-1)^{n+1} P(J\xi) w \wedge (\bar{\partial}w)^{n-1} \\
 &= \int_{\partial B_\epsilon(p_i)} \frac{(-1)^{n+2} (i)^n}{(2\pi)^n} P(J\xi) (2\pi)^n (i)^n F^* B_n \\
 &= \int_{\partial B_\epsilon(p_i)} P(J\xi) F^* B_n.
 \end{aligned}$$

Usando o resultado (3.4) temos

$$\int_{\partial B_\epsilon(p_i)} -\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \gamma = \text{Res}_{p_i} \left[ \frac{P(J\xi(p)) \cdot dz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n}{\xi_1 \cdot \xi_2 \dots \xi_n} \right].$$

Como esse resultado é válido para todo polinômio invariante  $P$ , é válido então para  $c^\nu$ , então

$$\begin{aligned}
 \int_{M \setminus \cup B_\epsilon(p_i)} c^\nu \left( \frac{i}{2\pi} \Omega \right) &= \sum_{i=1}^k \int_{\partial B_\epsilon(p_i)} -\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \gamma \\
 &= \sum_{i=1}^k \text{Res}_{p_i} \left( \frac{c^\nu(J\xi(p_i)) dz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n}{\xi_1 \cdot \xi_2 \dots \xi_n} \right).
 \end{aligned}$$

Tomando o limite com  $\epsilon \rightarrow 0$  e observando que

$$\int_M c^\nu(TM \otimes L) = \int_M \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n c^\nu(\Omega)$$

temos

$$\int_M c^\nu(TM \otimes L) = \sum_{\{p: \xi(p)=0\}} \text{Res}_p \left( \frac{c^\nu(J\xi(p)) dz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n}{\xi_1 \cdot \xi_2 \dots \xi_n} \right).$$

O que finaliza essa belíssima demonstração. □

Retomando o Exemplo 3.1.8, podemos agora aplicar o Teorema de Baum-Bott segunda versão, onde não exige que as singularidades da seção sejam não degeneradas.



## Capítulo 4

# O problema de Poincaré para hipersuperfícies

Nesse último capítulo do trabalho, trataremos de aplicar resultados do capítulo precedente, assim como outros já conhecidos, com o objetivo de atacar uma questão levantada há mais de um século.

Começaremos apresentando o clássico problema de Poincaré para hipersuperfícies invariantes por folheação de dimensão um. É nesse contexto que se desenrola o restante do capítulo com algumas abordagens.

Henri Poincaré, apresentou esse problema em [28], no ano de 1891, nos estudos sobre integrabilidade algébrica de folheações, onde foi profundamente motivado pelo trabalho de Darboux. Acompanhe abaixo a questão desse matemático,

*"É possível limitar o grau de uma curva algébrica plana, irredutível, invariante por uma folheação holomorfa  $\mathcal{F}$ , em  $\mathbb{P}^2$ , em termos do grau da folheação?"*

Posteriormente, apresentamos alguns conceitos com o foco em responder negativamente Poincaré, isso é feito através de um exemplo. Assim podemos dizer que, em geral, o problema de Poincaré não se verifica.

Problema esse que perdurou por cerca de 100 anos, até que alguns autores conseguiram apresentar uma resposta positiva. No entanto, para isso, foi preciso restringir a alguns casos um tanto particulares, onde as vezes dá-se restrições à curva e outras à folheação.

O primeiro resultado relevante nesse sentido foi apresentado por Cerveau e Lins Neto em [12], no ano de 1991, onde é exigido que as singularidades da curva sejam, no máximo, nodais. Com isso, obteve-se que o grau da curva é menor ou igual ao grau da folheação mais dois. No mesmo sentido M. Carnicer em [9] obteve em 1994 a mesma limitação para o grau da curva, só que exigindo a hipótese de que a folheação não tenha singularidades dicríticas ao longo da curva invariante.

Os resultados que foram traçados acima tiveram uma abordagem em  $\mathbb{P}^2$ . Assim, Márcio Soares em [32], no ano de 1997, trabalhando em  $\mathbb{P}^n$ , apresentou uma majoração melhor para o grau de hipersuperfícies invariantes.

## 4.1 O problema de Poincaré para hipersuperfícies

Começamos com a definição de hipersuperfícies invariantes por folheações. Assim vamos construindo toda a teoria com o objetivo de mostrar o resultado de Márcio Soares.

**Definição 4.1.1** *Sejam  $V$  uma hipersuperfície em  $\mathbb{P}^n$  e  $\mathcal{F}$  uma folheação de dimensão um. Dizemos que  $V$  é **invariante** pela folheação quando:*

$$T_p\mathcal{F} \subset T_pV \text{ para todo } p \in V - (\text{Sing}(\mathcal{F}) \cap V).$$

A proposição a seguir caracteriza hipersuperfícies algébricas invariantes por folheações.

**Proposição 4.1.2** *Sejam  $X$  um campo polinomial de grau  $d$  em  $\mathbb{C}^n$  e  $V = \{f = 0\}$  uma hipersuperfície irreduzível invariante em  $\mathbb{C}^n$ . Então  $V$  é invariante por  $X$  se, e somente se, existe  $h \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$  tal que  $df(X) = h.f$ .*

**Demonstração:** Suponha que  $V$  seja invariante por  $X$ , então:

$$X(p) \in T_pV \text{ para todo } p \in V - \text{Sing}(V)$$

mas  $T_pV = \text{Ker}(df_p)$ , então  $df_p(X(p)) = 0$  para todo  $p \in V$ . Logo  $df(X)$  pertence ao ideal gerado por  $V$ , ou seja,

$$df(X) \in I(V).$$

Pelo teorema dos zeros de Hilbert temos,

$$I(V) = \sqrt{\langle f \rangle}$$

Mas como  $f$  é irreduzível, o ideal  $\langle f \rangle$  é radical, ou seja,  $\sqrt{\langle f \rangle} = \langle f \rangle$ . Disso segue que  $df(X) \in \langle f \rangle$ . Então existe  $h \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$  tal que  $df(X) = hf$ .

Reciprocamente, suponha que exista  $h \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$  tal que:

$$df(X) = h.f$$

Daí, note que  $T_pV = \text{Ker}(df_p)$  para todo  $p \in V - \text{sing}(V)$ . Então tomando  $p \in V - \text{sing}(V)$  temos

$df_p(X(p)) = h(p).f(p) = 0$ , pois  $f(p) = 0$ , pelo fato de  $p \in V$  e  $f$  ser a função que define a hipersuperfície  $V$ . Assim,

$$X(p) \in \text{Ker}df_p = T_pV.$$

Portanto  $V$  é invariante por  $X$ . □

**Exemplo 4.1.3** Considere a folheação induzida pelo campo,

$$X = px \frac{\partial}{\partial x} + qy \frac{\partial}{\partial y} \text{ (com } p \neq q \text{ inteiros positivos)}$$

e tome a seguinte curva  $C = y^p - x^q = 0$ .

Seja  $\mathcal{F}$  essa folheação induzida pelo campo  $X$ . Note que o grau de  $\mathcal{F}$  é 1, pelas funções coordenadas do campo  $X$ .

Por outro lado, o grau da curva  $C$  é o maior inteiro entre  $p$  e  $q$ . E mais, esse grau é estritamente maior do que 1, pois  $p$  e  $q$  são números inteiros positivos e diferentes. Agora vamos verificar que a curva  $C$  é invariante pela folheação  $\mathcal{F}$ .

Para isso é suficiente, pela Proposição 4.1.2, verificar que existe uma função  $h \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$  tal que  $df(X) = h.f$ , onde  $f = y^p - x^q$ . Daí temos que,

$$X(f) = px \frac{\partial(f)}{\partial x} + qy \frac{\partial(f)}{\partial y}$$

$$X(f) = px(-qx^{q-1}) + qy(py^{p-1})$$

$$X(f) = -pqx^q + pqy^p$$

$$X(f) = pq(y^p - x^q)$$

$$X(f) = h.f,$$

onde  $h = pq$ . Portanto nossa curva é invariante pela folheação. Logo temos uma curva  $C$  invariante pela folheação  $\mathcal{F}$  no qual não é possível limitar o grau da curva em função do grau da folheação, pois como vimos acima, o grau de  $C$  pode ser extremamente maior do que o grau da folheação.

Esse exemplo nos mostra que nem sempre é possível limitar o grau de uma curva em função do grau da folheação. Continuando discorrendo sobre o exemplo é de valia observar que as singularidades desse campo de vetores são dicríticas<sup>1</sup>.

Passamos agora à apresentar o primeiro resultado relevante ao problema de Poincaré, o qual é devido à Cerveau e Lins Neto e foi exposto em 1991, que nos dá a limitação do grau da curva em função do grau da folheação, desde que as singularidades da curva sejam do tipo nodais<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Ver página 81, **Definição 2.2.10**

<sup>2</sup>Ver página 81, **Definição 2.2.11**

**Teorema 4.1.4 (Cerveau e Lins Neto)** *Seja  $C$  uma curva irredutível em  $\mathbb{P}^2$  onde as singularidades são do tipo nodais. Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação tendo  $C$  com sua separatriz e tal que todo ponto singular de  $\mathcal{F}$  em  $C$  tem multiplicidade 1. Então temos:*

$$\partial C \leq \partial \mathcal{F} + 2.$$

Onde  $\partial C$  e  $\partial \mathcal{F}$  representam o grau da curva  $C$  e o grau da folheação  $\mathcal{F}$  respectivamente.

No mesmo caminho que Cerveau e Lins Neto, Manuel M. Carnicer também obteve o mesmo resultado. A exigência de Carnicer foi diferente de Cerveau e Lins Neto pelo fato dele estipular condições à folheação de que as singularidades de  $\mathcal{F}$  sejam não dicríticas ao longo da curva invariante. Confere o resultado abaixo.

**Teorema 4.1.5 (Carnicer)** *Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação em  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  e  $C$  uma curva algébrica em  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ . Suponha que  $C$  seja invariante por  $\mathcal{F}$  e não há singularidades dicríticas de  $\mathcal{F}$  em  $C$ . Então*

$$\partial C \leq \partial \mathcal{F} + 2.$$

Vamos usando o teorema de Baum-Bott, abordar também esse problema. Mostremos uma melhora na desigualdade estudada acima, para hipersuperfícies suaves e invariantes por folheação holomorfa de dimensão 1 em  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ , de grau maior ou igual a dois. Para tal fato usaremos o teorema de anulamento de Lehmann que segue abaixo.

**Teorema 4.1.6 (Lehmann)** *Se  $\mathcal{F}$  é uma folheação holomorfa de dimensão 1, numa variedade complexa  $M$ , não singular ao longo de  $V$ , onde  $V \subset M$  é uma subvariedade compacta invariante por  $\mathcal{F}$ . Então o anel  $Chern^*(\nu_{V/M})$  é nulo em dimensão  $*$   $> 2s$ , onde  $s$  é a codimensão da folheação induzida por  $\mathcal{F}$  em  $V$  e  $\nu_{V/M}$  é o fibrado normal de  $V$  em  $M$ .*

Em nossa abordagem do problema de Poincaré, necessitaremos do resultado contido no Teorema 4.1.8. Resultado esse de grande importância, pois calcula o número de singularidades de uma tal folheação em  $V$ , contadas com multiplicidades. Antes porém apresentamos o seguinte lema.

**Lema 4.1.7** *Considere  $i : V \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  uma hipersuperfície lisa, de grau  $d_0$ . Tome uma folheação de dimensão 1 e grau  $d \geq 2$ ,  $\mathcal{F}^d$  tal que  $V$  seja invariante pela folheação  $\mathcal{F}^d$ . Então*

$$Sing(\mathcal{F}^d) \cap V \neq \emptyset.$$

**Demonstração:** Com efeito, a folheação  $\mathcal{F}^d$  induz uma folheação  $\mathcal{F}_V^d$  em  $V$  de dimensão 1 também. Logo como a dimensão da hipersuperfície  $V$  é  $n - 1$ , temos que a codimensão de  $\mathcal{F}_V^d$  em  $V$  é  $(n - 1) - 1 = n - 2$ .

O anel de Chern do fibrado normal  $\nu_{V/\mathbb{P}^n}$  é gerado pelas classes de Chern desse fibrado, ou seja, é gerado por  $c_0(\nu_{V/\mathbb{P}^n}) = 1$  e  $c_1(\nu_{V/\mathbb{P}^n})$ .

Então se a folheação  $\mathcal{F}_V^d$  não tem singularidades em  $V$ , ou seja, se  $\text{Sing}(\mathcal{F}_V^d) \cap V = \emptyset$ , temos pelo Teorema 4.1.6, de anulamento de Lehmann, que

$$\text{Chern}^{n-1}(\nu_{V/\mathbb{P}^n}) = 0 \text{ pois } n - 1 > n - 2,$$

mas isso implica que  $c_1(\nu_{V/\mathbb{P}^n})^{n-1} = 0$ , o que é um absurdo.

De fato,  $c_1(\nu_{V/\mathbb{P}^n}) = d_0 h$ , onde  $h = c_1(T\mathbb{P}^n)|_V$ . Como  $\int_V h^{n-1} = d_0$ , teríamos

$$0 = \int_V c_1(\nu_{V/\mathbb{P}^n})^{n-1} = \int_V (d_0 h)^{n-1} = d_0^{n-1} \int_V h^{n-1} = d_0^n \neq 0.$$

Portanto  $\text{sing}(\mathcal{F}^d) \cap V \neq \emptyset$ . □

Suponha que  $\text{sing}(\mathcal{F}^d) \cap V = \{p_1, \dots, p_k\}$  e considere a restrição da folheação  $\mathcal{F}^d$  a  $V$  denotada por  $i^*\mathcal{F}^d$ . Essa última folheação é dada, numa vizinhança de cada ponto  $p_i \in \text{Sing}(\mathcal{F}^d) \cap V$ , por um campo holomorfo  $X_i$  tangente a  $V$ , com  $X_i(p_i) = 0$ .

Apresentemos agora o resultado que nos estabelece o número de singularidades de uma folheação em uma hipersuperfície invariante em função do grau da folheação e da hipersuperfície. Resultado esse que será de fundamental importância para provar a majoração de Márcio Soares do grau da curva em função do grau da folheação.

**Teorema 4.1.8** *Seja  $V$  uma hipersuperfície algébrica em  $\mathbb{P}^n$  ( $n \geq 2$ ) irredutível, não singular de grau  $d_0$ , invariante por uma folheação holomorfa  $\mathcal{F}^d$  de dimensão 1 e grau  $d$ , então o número de singularidades de  $\mathcal{F}^d$  em  $V$ , contadas com multiplicidades é*

$$\sum_p \mu_p = \sum_{i=0}^{n-1} [1 + (-1)^i (d_0 - 1)^{i+1}] d^{n-1-i}$$

e esse número é positivo.

**Demonstração:** Escolha um hiperplano em  $\mathbb{P}^n$  que seja transversal a  $V$  e que não intercepta  $\text{sing}(\mathcal{F}^d) \cap V$ , denotado por  $H_\infty$ .

Em  $\mathbb{C}^n = \mathbb{P}^n \setminus H_\infty$ , a folheação  $\mathcal{F}^d$  é dada por um campo polinomial  $X$ , isto é

$$X = G \left( z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \dots + z_n \frac{\partial}{\partial z_n} \right) + Q_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + Q_n \frac{\partial}{\partial z_n},$$

onde o polinômio  $G \not\equiv 0$  é homogêneo de grau  $d$  e os  $Q_{i's}$  são polinômios de grau  $\leq d$ .

Além disso, esse campo  $X$  restrito a  $V \setminus H_\infty$  induz a folheação restrição  $i^* \mathcal{F}^d|_{V \setminus H_\infty}$ . O fibrado tangente à  $\mathcal{F}^d$  é  $\mathcal{T}_{\mathcal{F}} \cong \mathbb{L}(1-d) = \mathbb{L}^{*\otimes(-1+d)} = \underbrace{\mathbb{L}^* \otimes \mathbb{L}^* \otimes \dots \otimes \mathbb{L}^*}_{d-1 \text{ vezes}}$ .

Então o fibrado tangente à  $i^* \mathcal{F}^d$  é o pull-back  $i^* \mathbb{L}(1-d)$ .

Como  $X$  tem um polo de ordem  $d-1$  ao longo do hiperplano  $H_\infty$ , a restrição de  $X$  a  $V$  induz uma seção holomorfa de  $T'V \otimes i^* \mathbb{L}(d-1)$  tal que os zeros são isolados.

Usando o Teorema 3.2.1 temos,

$$\int_V c_{n-1}(T'V - i^* \mathbb{L}(1-d)) = \sum_p \text{Res}_p \left\{ \frac{c_{n-1}(JX) dz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n}{X_1 \cdot X_2 \dots X_n} \right\},$$

onde  $c_{n-1}(JX) = \det(JX)$ .

Por outro lado,

$$\text{Res}_p \left\{ \frac{\det(JX) dz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n}{X_1 \cdot X_2 \dots X_n} \right\} = \lim_{\zeta \rightarrow p} \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\det(JX(\xi_i))}{\det(JX(\xi_i))} = \lim_{\zeta \rightarrow p} \sum_{i=1}^{\mu} 1 = \mu_p(X),$$

onde  $X^{-1}(\zeta) = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\mu\}$  e  $\mu_p(X)$  é o número de Milnor de  $X$  em  $p$ , ou seja, a multiplicidade de  $X$  em  $p$ .

Daí,

$$\sum_p \mu_p(X) = \int_V c_{n-1}(T'V - i^* \mathbb{L}(1-d)).$$

O fibrado normal<sup>3</sup> a  $V$  é  $N_V = [V]_{|V}$ . Em  $V$  temos a sequência exata,

$$0 \longrightarrow T'V \xrightarrow{\psi} i^* T' \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \xrightarrow{\phi} [V]_{|V} \longrightarrow 0$$

Sendo assim,

$$[V]_{|V} \cong \frac{i^* T' \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n}{T'V}, \text{ ou seja, } i^* T' \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \cong T'V \oplus [V]_{|V}.$$

Então, pela soma de Whitney temos,

$$c(i^* T' \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n) = c(T'V \oplus [V]_{|V}) = c(T'V) \cdot c([V]_{|V})$$

$$c(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n) = c(V) \cdot c([V]_{|V})$$

<sup>3</sup>Consulte na referência [17], página 71.

ou seja,

$$\begin{aligned} (c_0(\mathbb{P}^n) + c_1(\mathbb{P}^n) + \dots + c_n(\mathbb{P}^n)) &= (c_0(V) + c_1(V) + \dots + c_{n-1}(V))(c_0([V]_{|V}) + \\ &c_1([V]_{|V})) \\ &= [c_0(V)c_0([V]_{|V})] + [c_1(V) + c_0(V)c_1([V]_{|V})] + \dots + [c_{n-1}(V) + c_{n-2}(V)c_1([V]_{|V})] + \\ &[c_{n-1}(V)c_1([V]_{|V})]. \end{aligned}$$

Daí temos que

$$c_i(\mathbb{P}^n) = c_i(V) + c_{i-1}(V)c_1([V]_{|V}) \text{ para } 1 \leq i \leq n-1.$$

Considere a sequência de Euler em  $\mathbb{P}^n$

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{L}^{\oplus(n+1)} \longrightarrow T'\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \longrightarrow 0.$$

Logo

$$\mathbb{L}^{\oplus(n+1)} \cong T'\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \oplus \mathbb{C}.$$

Novamente pela fórmula de Whitney,

$$c(\mathbb{L}^{\oplus(n+1)}) = c(\mathbb{L} \oplus \dots \oplus \mathbb{L}) = c(\mathbb{L})^{n+1} = [c_0(\mathbb{L}) + c_1(\mathbb{L})]^{n+1}.$$

Então  $c(\mathbb{L}^{\oplus(n+1)}) = (1+h)^{n+1}$ , onde  $h = c_1(\mathbb{L})$  é o dual de Poincaré de um hiperplano.

Por outro lado  $c(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \oplus \mathbb{C}) = c(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n) \cdot c(\mathbb{C}) = c(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n)$ , pois  $c(\mathbb{C}) = 1$ . Então,

$$\begin{aligned} c(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n) &= 1 + c_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n) + c_2(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n) + \dots + c_n(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n) = c(\mathbb{L}^{\oplus(n+1)}) = (1+h)^{n+1} = \\ &\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} h^i \end{aligned}$$

Logo  $c_i(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n) = \binom{n+1}{i} h^i$ , para  $0 \leq i \leq n$ , são as classes de Chern de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ .

Como  $V$  é uma hypersuperfície de grau  $d_0$  temos,

$$N_V = [V]_{|V} \cong \mathbb{L}(d_0) = \mathbb{L} \otimes \dots \otimes \mathbb{L},$$

logo,

$$\begin{aligned} c_1([V]_{|V}) &= c_1([V]_{|V}) = c_1(\underbrace{\mathbb{L} \otimes \dots \otimes \mathbb{L}}_{(d_0) \text{ - vezes}}) = c_1(\underbrace{\mathbb{L} \otimes \mathbb{L} \otimes \dots \otimes \mathbb{L}}_{(d_0-1) \text{ - vezes}}) + 1 \cdot c_1(\mathbb{L}) \\ &= c_1(\underbrace{\mathbb{L} \otimes \mathbb{L} \otimes \dots \otimes \mathbb{L}}_{(d_0-2) \text{ - vezes}}) + 1 \cdot c_1(\mathbb{L}) + 1 \cdot c_1(\mathbb{L}) = d_0 c_1(\mathbb{L}). \end{aligned}$$

Então  $c_1([V]_V) = d_0 \cdot h$ . Calculando os  $c_i(V)$  para  $1 \leq i \leq n-1$ ,

$$\begin{aligned} c_1(V) &= c_1(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n) - c_0(V)c_1([V]_V) = \binom{n+1}{1} h - d_0 h \\ &= (-1)^0 \binom{n+1}{1-0} d_0^0 h^1 + (-1)^1 \binom{n+1}{1-1} d_0^1 h^1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2(V) &= c_2(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n) - c_1(V)c_1([V]_V) \\ &= \binom{n+1}{2} h^2 - d_0 h \left( (-1)^0 \binom{n+1}{1-0} d_0^0 h^1 + (-1)^1 \binom{n+1}{1-1} d_0^1 h^1 \right) \\ &= (-1)^0 \binom{n+1}{2-0} d_0^0 h^2 + (-1)^1 \binom{n+1}{2-1} d_0^1 h^2 + (-1)^2 \binom{n+1}{2-2} d_0^2 h^2. \end{aligned}$$

Então, em geral temos

$$c_i(V) = \left[ \sum_{k=0}^i \binom{n+1}{i-k} (-1)^k d_0^k \right] h^i \text{ para } 1 \leq i \leq n-1.$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} c_{n-1}(T'V - i^*\mathbb{L}(1-d)) &= c_{n-1}(T'V) + c_{n-2}(T'V)c_1(i^*\mathbb{L}(1-d)^*)^1 + \dots + c_1(i^*\mathbb{L}(1-d)^*)^{n-1} \\ &= c_{n-1}(V) + c_{n-2}(V)c_1(\mathbb{L}(d-1))^1 + \dots + c_1(\mathbb{L}(d-1))^{n-1} \\ &= c_{n-1}(V) + c_{n-2}(V)(d-1)c_1(\mathbb{L})^1 + \dots + (d-1)^{n-1}c_1(\mathbb{L})^{n-1} \\ &= c_{n-1}(V) + (d-1)c_{n-2}(V)h + \dots + (d-1)^{n-1}h^{n-1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i(V)h^{n-1-i}(d-1)^{n-1-i}. \end{aligned}$$

Daí,

$$c_{n-1}(T'V - i^*\mathbb{L}(1-d)) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \sum_{k=0}^i (-1)^k \binom{n+1}{i-k} d_0^k \right] h^i h^{n-1-i} (d-1)^{n-1-i}$$

Logo

$$c_{n-1}(T'V - i^*\mathbb{L}(1-d)) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \left( \sum_{k=0}^i (-1)^k \binom{n+1}{i-k} d_0^k \right) h^{n-1} \right] (d-1)^{n-1-i}.$$

Mas  $h$  é o dual de Poincaré de um hiperplano em  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  e daí  $h^{n-1}$  é o dual de Poincaré da intersecção de  $(n-1)$  hiperplanos genéricos em  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ , ou seja,  $h^{n-1}$  é o dual de



Poincaré de uma reta em  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ .

Como  $V$  tem codimensão 1,  $\int_V h^{n-1}$  conta as intersecções de  $V$  com uma reta genérica em  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ . Mas esse valor é exatamente  $d_0$ , que é o grau de  $V$ . Daí

$$\begin{aligned}
 \int_V c_{n-1}(T^*V - i^*\mathbb{L}(1-d)) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \left( \sum_{k=0}^i (-1)^k \binom{n+1}{i-k} d_0^k \right) \int_V h^{n-1} \right] (d-1)^{n-1-i} \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \sum_{k=0}^i (-1)^k \binom{n+1}{i-k} d_0^{k+1} \right] (d-1)^{n-1-i} \\
 \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \sum_{k=0}^i (-1)^k \binom{n+1}{i-k} d_0^{k+1} \right] (d-1)^{n-1-i} &= \\
 = \left[ \binom{n+1}{0} d_0 \right] (d-1)^{n-1} + \left[ \binom{n+1}{1} d_0 - \binom{n+1}{0} d_0^2 \right] (d-1)^{n-2} + \\
 + \left[ \binom{n+1}{2} d_0 - \binom{n+1}{1} d_0^2 + \binom{n+1}{0} d_0 \right] (d-1)^{n-3} + \\
 + \left[ \binom{n+1}{n-1} d_0 - \binom{n+1}{n-2} d_0^2 + \binom{n+1}{n-3} d_0^3 - \dots - (-1)^{n-1} \binom{n+1}{0} d_0^n \right] (d- \\
 1)^0 \\
 = \left[ 1 \cdot d_0 \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j d^{n-1-j} \right] + \\
 + \left[ \binom{n+1}{1} d_0 \sum_{j=0}^{n-2} (-1)^j d^{n-2-j} - \binom{n+1}{0} d_0^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} (-1)^j d^{n-2-j} \right] + \\
 + \left[ \binom{n+1}{2} d_0 - \binom{n+1}{1} d_0^2 + \binom{n+1}{0} d_0^3 \right] \sum_{j=0}^{n-3} \binom{n-3}{j} (-1)^j d^{n-3-j} + \\
 \dots + \\
 + \left[ \binom{n+1}{n-1} d_0 - \binom{n+1}{n-2} d_0^2 + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n+1}{0} d_0^n \right] (d-1)^0 =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & d_0 \left[ \binom{n-1}{0} d^{n-1} - \binom{n-1}{1} d^{n-2} + \binom{n-1}{2} d^{n-3} - \dots + (-1)^{n-1} \binom{n-1}{n-1} d^0 \right] + \\
 & + \left[ \binom{n+1}{1} d_0 - \binom{n+1}{0} d_0^2 \right] \left[ \binom{n-2}{0} d^{n-2} - \binom{n-2}{1} d^{n-3} + \dots + (-1)^{n-2} d^0 \right] + \\
 & + \left[ \binom{n+1}{2} d_0 - \binom{n+1}{1} d_0^2 + \binom{n+1}{0} d_0^3 \right] \cdot \\
 & \cdot \left[ \binom{n-3}{0} d^{n-3} - \binom{n-3}{1} d^{n-4} + \dots + (-1)^{n-3} d^0 \right] + \dots + \\
 & + \left[ \binom{n+1}{n-1} d_0 - \binom{n+1}{n-2} d_0^2 + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n+1}{0} d_0^n \right] (d-1)^0.
 \end{aligned}$$

Agora coloque  $d^{n-1}, d^{n-2}, \dots, d, d^0$  em evidência na igualdade acima,

$$\begin{aligned}
 & d^{n-1} \left[ d_0 \binom{n-1}{0} \right] + d^{n-2} \left[ -d_0 \binom{n-1}{1} + \binom{n+1}{1} d_0 - d_0^2 - d_0^2 \right] + \\
 & + d^{n-3} \left[ d_0 \binom{n-1}{2} - (n-2)(n+1)d_0 + (n-2)d_0^2 + \right. \\
 & \left. + \binom{n+1}{2} d_0 - (n+1)d_0^2 + d_0^3 \right] + \dots + d^0 \left[ d_0(-1)^{n-1} + (-1)^{n-2}(n+1)d_0 - \right. \\
 & \left. - (-1)^{n-2}d_0^2 + (-1)^{n-3} \left( d_0 \binom{n+1}{2} - \binom{n+1}{1} d_0^2 + d_0^3 \right) + \dots + \right. \\
 & \left. + \binom{n+1}{n-1} d_0 - \binom{n+1}{n-2} d_0^2 + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n+1}{0} d_0^n \right]
 \end{aligned}$$

Agora note que,

- $d_0 \binom{n-1}{0} = d_0 = 1 - 1 + d_0 = 1 + (d_0 - 1) = 1 + (-1)^0(d_0 - 1)^1;$

- $d_0 \binom{n-1}{1} + \binom{n+1}{1} d_0 - d_0^2 = 1 + (-1)^1(d_0 - 1)^2;$
- $d_0 \binom{n-1}{2} - (n-2)(n+1)d_0 + (n-2)d_0^2 + \binom{n+1}{2} d_0 - (n+1)d_0^2 + d_0^3 =$   
 $= 3d_0 - 3d_0^2 + d_0^3 = 1 + (-1)^2(d_0 - 1)^3;$

e por fim

$$\begin{aligned} & \bullet d_0^2 \left( d_0(-1)^{n-1} + (-1)^{n-2}(n+1)d_0 - (-1)^{n-2}d_0^2 + (-1)^{n-3} \left[ d_0 \binom{n+1}{2} - \right. \right. \\ & \left. \left. \binom{n+1}{1} d_0^2 + d_0^3 \right] + \dots + \binom{n+1}{n-1} d_0 - \binom{n+1}{n-2} d_0^2 + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n+1}{0} d_0^n \right) = \\ & = 1 + (-1)^{n-2}(d_0 - 1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Com essas ideias concluímos que,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n-1} \left( \sum_{k=0}^i (-1)^k \binom{n+1}{i-k} d_0^{k+1} \right) (d-1)^{n-1-j} = \\ & = d^{n-1} \left[ 1 + (-1)^0(d_0 - 1)^1 \right] + d^{n-2} \left[ 1 + (-1)^1(d_0 - 1)^2 \right] + \dots + d^0 \left[ 1 + (-1)^{n-2}(d_0 - \right. \\ & \left. 1)^{n-1} \right] \\ & = \sum_{i=0}^{n-1} \left[ 1 + (-1)^i(d_0 - 1)^{i+1} \right] d^{n-1-i}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_p \mu_p = \sum_{i=0}^{n-1} \left[ 1 + (-1)^i(d_0 - 1)^{i+1} \right] d^{n-1-i}.$$

A positividade de  $\sum_p \mu_p$  segue do Lema 4.1.7. Pois  $Sing(\mathcal{F}) \cap V \neq \emptyset$  implica que existe  $p$ , um ponto singular, tal que  $\mu_p \geq 1$ . Uma vez que  $\mu_p = 0$  se, e somente se,  $p$  é um ponto não singular de  $\mathcal{F}$ .

□

Trataremos agora de encontrar uma resposta positiva para o problema de Poincaré. Para isso exigiremos algumas hipóteses à hipersuperfície  $V$ . Mostremos então que a desigualdade,

$$d_0 \leq d + 1,$$

onde  $d_0$  e  $d$  são respectivamente, o grau da curva e da folheação, se verifica para uma hipersuperfície não singular e invariante por uma folheação holomorfa, não-degenerada, de dimensão 1 em  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ .

**Teorema 4.1.9 (Soares)** *Seja  $V$  uma hipersuperfície algébrica em  $\mathbb{P}^n$  ( $n \geq 2$ ) irreduzível, não singular de grau  $d_0$ , invariante por uma folheação holomorfa  $\mathcal{F}^d$  de dimensão 1 e grau  $d$ , então:*

$$d_0 \leq d + 1.$$

**Demonstração:** Nesse resultado estamos considerando uma folheação  $\mathcal{F}$  holomorfa, não-degenerada de dimensão 1 em  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ . Então observe que aplicando o Teorema 4.1.8 para um hipersuperfície de grau 1, temos que o número de singularidades de  $\mathcal{F}$ , contadas com multiplicidades é

$$\sum_p \mu_p = \sum_{i=0}^{n-1} d^{n-1-i} > 0,$$

onde  $d$  é o grau da folheação  $\mathcal{F}$ .

Provemos esse teorema em dois casos, um onde  $n$  é par e o outro onde  $n$  é ímpar.

**1º Caso:** Suponha  $n$  um número par, ou seja,  $n = 2m$  com  $m \in \mathbb{N}$ .

Agora observando o Teorema 4.1.8, defina a função auxiliar:

$$\varphi(x) := \sum_{i=0}^{2m-1} \left( 1 + (-1)^i x^{i+1} \right) d^{2m-1-i} \text{ com } x \in \mathbb{R}.$$

**Afirmção I:** Para a função  $\varphi$ , definida acima temos,

$$\varphi(d+1) = \begin{cases} = 0 & , \text{ se } m = 1 \\ < 0 & , \text{ se } m > 1 \end{cases}$$

Observe que na função auxiliar temos uma quantidade par de termos, logo vamos agrupá-los de dois em dois.

$$\left( 1 + (-1)^i x^{i+1} \right) d^{2m-1-i} + \left( 1 + (-1)^{i+1} x^{i+2} \right) d^{2m-2-i}$$

Sem perda de generalidade, vamos assumir  $i + 1$  um número ímpar. Então fazendo  $x = d + 1$  acima temos,

$$\left(1 + (-1)^i(d+1)^{i+1}\right)d^{2m-1-i} + \left(1 + (-1)^{i+1}(d+1)^{i+2}\right)d^{2m-2-i}.$$

Com a suposição acima,  $(-1)^i = 1$  e  $(-1)^{i+1} = -1$  daí,

$$\left(1 + (d+1)^{i+1}\right)d^{2m-1-i} + \left(1 - (d+1)^{i+2}\right)d^{2m-2-i}.$$

Fazendo a distributiva do produto temos,

$$d^{2m-1-i} + (d+1)^{i+1}d^{2m-1-i} + d^{2m-2-i} - d^{2m-2-i}(d+1)^{i+2}.$$

Agora agrupe o termo  $(d+1)^{i+1}$ ,

$$(d+1)^{i+1} \left[ d^{2m-1-i} - d^{2m-2-i}(d+1) \right] + d^{2m-1-i} + d^{2m-2-i}.$$

Resolvendo o termo dentro do colchete temos,

$$(d+1)^{i+1} \left[ d^{2m-1-i} - d^{2m-1-i} - d^{2m-2-i} \right] + d^{2m-1-i} + d^{2m-2-i}.$$

Isto é,

$$(d+1)^{i+1} \left[ -d^{2m-2-i} \right] + d^{2m-1-i} + d^{2m-2-i}.$$

Coloque agora o termo  $d^{2m-2-i}$  em evidência,

$$d^{2m-2-i} \left( (1+d) - (d+1)^{i+1} \right) = \begin{cases} = 0 & , \text{ se } i = 0 \\ < 0 & , \text{ se } 2m-2 > i > 0 \end{cases}$$

e para  $i = 2m - 2$  com  $m > 1$  temos

$$d^0 \left( (1+d) - (d+1)^{2m-1} \right) < 0.$$

O que prova a afirmação I.

**Afirmação II:**  $\varphi'(x) < 0$  para todo  $x \geq d$ .

De fato, derivando  $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{2m-1} \left(1 + (-1)^i x^{i+1}\right) d^{2m-1-i}$  com  $x \in \mathbb{R}$  temos,

$$\varphi'(x) = \sum_{i=0}^{2m-1} (i+1)(-1)^i x^i d^{2m-1-i}.$$

Novamente vamos agrupar os termos do somatório em pares.

$$\left( (i+1)(-1)^i x^i d^{2m-1-i} \right) + \left( (i+2)(-1)^{i+1} x^{i+1} d^{2m-2-i} \right).$$

Lembre-se que estamos adotando  $i+1$  ímpar,

$$\left( (i+1)x^i d^{2m-1-i} \right) + \left( - (i+2)x^{i+1} d^{2m-2-i} \right) = x^i d^{2m-2-i} \left( d(i+1) - (i+2)x \right).$$

Sendo assim, para  $x > d$  temos que

$$-(i+2)x + (i+1)d < 0.$$

Então  $\varphi'(x) < 0$  para  $x \geq d$ , ou seja,  $\varphi$  é decrescente para  $x \geq d$ . Mas  $\varphi(d+1) \leq 0$ , como provamos acima. Segue que

$$\varphi(x) \leq 0 \text{ para todo } x \geq d+1.$$

Agora note que  $\varphi(d_0 - 1) = \sum_p \mu_p = \sum_{i=0}^{n-1} \left[ 1 + (-1)^i (d_0 - 1)^{i+1} \right] d^{n-1-i} > 0$ .

Segue que  $d_0 - 1 < d + 1$ , ou seja,  $d_0 < d + 2$ . Portanto  $d_0 \leq d + 1$ .

**2º Caso:** Suponha agora  $n = 2m + 1$ , ou seja, ímpar.

Nesse caso, defina a seguinte função auxiliar

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^{2m} (1 + (-1)^i x^{i+1}) d^{2m-i} - \sum_{i=0}^{2m+1} d^{2m+1-i} \text{ com } x \in \mathbb{R}$$

Note que o número de singularidades da folheação é

$$\#(\text{Sing}(\mathcal{F})) = \sum_{i=0}^{2m+1} d^{2m+1-i}.$$

Daí temos que

$$\psi(d) = \sum_{i=0}^{2m} d^{2m-i} + \sum_{i=0}^{2m} (-1)^i d^{2m+1} - \sum_{i=0}^{2m+1} d^{2m+1-i} = 0, \text{ pois}$$

- $\sum_{i=0}^{2m} d^{2m-i} = d^{2m} + d^{2m-1} + \dots + d + 1,$
- $\sum_{i=0}^{2m} (-1)^i d^{2m+1} = d^{2m+1} - d^{2m+1} + \dots + d^{2m+1} = d^{2m+1},$
- $\sum_{i=0}^{2m+1} d^{2m+1-i} = d^{2m+1} + d^{2m} + \dots + d + 1.$

Então,  $\psi(d) = (d^{2m} + d^{2m-1} + \dots + d + 1) + (d^{2m+1}) - (d^{2m+1} + d^{2m} + \dots + d + 1) = 0.$

**Afirmção III:**  $\psi'(x) > 0$  para todo  $x \geq d.$

A derivada da função  $\psi$  é

$$\psi'(x) = \sum_{i=0}^{2m} (i+1)(-1)^i x^i d^{2m-i}.$$

Observe que temos uma quantidade ímpar ( $2m+1$ ) de termos nesse somatório, isolando o primeiro termo  $d^{2m}$  e agrupando o restante em pares temos

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= d^{2m} + [-2xd^{2m-1} + 3x^2d^{2m-2}] + \dots + [(i+1)(-1)^i x^i d^{2m-i} + (i+2)(-1)^{i+1} x^{i+1} d^{2m-i-1}] + \\ &+ \dots + [2m(-1)^{2m-1} x^{2m-1} d + (2m+1)(-1)^{2m} x^{2m}] \end{aligned}$$

Agora vamos analisar cada parcela com  $i$  e  $i+1$  no colchete.

$$[(i+1)(-1)^i x^i d^{2m-i} + (i+2)(-1)^{i+1} x^{i+1} d^{2m-i-1}].$$

Supondo  $i$  ímpar temos

$$-(i+1)x^i d^{2m-i} + (i+2)x^{i+1} d^{2m-i-1}.$$

Agora coloque o termo  $x^i d^{2m-i-1}$  em evidência;

$$x^i d^{2m-i-1} \left( -(i+1)d + (i+2)x \right) > 0 \text{ para } x \geq d.$$

Segue que a função  $\psi$  é crescente para  $x \geq d$ . Mas por outro lado,  $\psi(d) = 0$ , portanto devemos ter:  $\psi(x) > 0$  para todo  $x \geq d$ . Temos também que

$$\begin{aligned} \psi(d_0 - 1) &= \sum_{i=0}^{2m} (1 + (-1)^i (d_0 - 1)^{i+1}) d^{2m-i} - \sum_{i=0}^{2m+1} d^{2m+1-i} \\ &= \sum_p \mu_p - \#Sing(\mathcal{F}) \leq 0. \end{aligned}$$

Logo  $d_0 - 1 \leq d$ , ou seja,  $d_0 \leq d + 1$ . □

Note que esse Teorema de Soares nos dá uma limitação melhor do grau da hipersuperfície em relação ao grau da folheação. Por outro lado a exigência é maior, comparado com os Teoremas 4.1.4 e 4.1.5, pois não admite singularidades na hipersuperfície.



## Referências Bibliográficas

- [1] ARAPURA, D. *Algebraic Geometry over the Complex Numbers*, Springer, December 7, 2010.
- [2] BAUM, P. & BOTT, R. *On the zeros of meromorphic vector fields*, Essays on Topology and Related Topics, Springer-Verlag, New York, (1970), 29-47.
- [3] BAUM, P. & BOTT, R. *Singularities of holomorphic foliations*, J. Diff. Geom. 7(1972), 279-342.
- [4] BAUM, P. F. *Vector Fields and Gauss-Bonnet*, Bull. Amer. Math. Soc. Volume 76, Number 6 (1970), 1202-1211.
- [5] BOTT, R. & TU, W. L. *Differential Forms in Algebraic Topology*, 1982 by Springer-Verlag, New York Inc. Heidelberg Berlin.
- [6] BOTT, R. *Vector fields and Characteristic Numbers*, Mich. Math. J. 14(1967), 231-244.
- [7] CAMACHO, C. & LINS NETO, A. *Geometric theory of foliations*, Birkhäuser Boston, Inc., 1985.
- [8] CAMACHO, C. & SAD, P. *Pontos singulares de equações diferenciais analíticas*, 16º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1987.
- [9] CARNICER M. M. *The Poincaré problem in the nondicritical case*. Ann. Math. 140 (1994), 289-294.
- [10] CARRELL, J. & LIEBERMANN, D. *Holomorphic vector fields and Kähler manifolds*, Inv. Math. 21(1973), 303-309.
- [11] CASAVECCHIA, T., NISOLI, I., RAISSY, J., RUGGIERO, M., *Local dynamics of singular holomorphic foliations*, Notas, Pisa, February 17, 2009.
- [12] CERVEAU, D. & LINS NETO, A. *Holomorphic foliations in  $\mathbb{P}^2$  having an invariant algebraic curve* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 41 (1991), 883-903.
- [13] DARBOUX, G. *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré (Mélanges)* Bulletin Sciences Mathématiques 2 ème série 2 (1878), 60-96; 123-144; 151-200.
- [14] ESTEVES, E. & KLEIMAN S. *Bounds on leaves of one-dimensional foliations*, Bull Braz Math Soc, New Series 34(1), 145-169 © 2003, Sociedade Brasileira de Matemática.

- [15] FLANDERS, H. *Differential forms*, Studies in Global Geometry and Analysis, Math. Assoc. Amer., distributed by Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1967, pp. 57-95. MR 35 #3583.
- [16] FULTON, W. *Algebraic Curves*, New York, 1969.
- [17] GRIFFITHS P. & HARRIS J. *Principles of algebraic geometry*. John Wiley & Sons, New York, 1978.
- [18] HICKS, N. *Notes on differential geometry*, Math. Studies, no. 3, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1965. MR 31 #3936.
- [19] HOPF, H. *Vectorfelder in n-dimensionalen mannigfaltigkeiten*. Math. Ann. 96 (1926), 225-250.
- [20] LANG, S. & Addison-Wesley *Algebra*, Massachusetts, 1965.
- [21] LIMA, L. E. *Introdução à Topologia Diferencial*, Publicações Matemáticas do IMPA, ISBN 85-244-0157-5, 2001.
- [22] LINS NETO, A. *Some examples for the Poincaré and Painlevé problems*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4e série, t. 35, 2002, p. 231 à 266.
- [23] LINS NETO, A. & SCÁRDUA, A. B. *Folheações algébricas complexas*, 21º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1997.
- [24] MILNOR, W. J. & STASHEFF, D. J. *Characteristic Classes*, 1974 Princeton, New Jersey.
- [25] MILNOR, W. J. *Topology from the differentiable viewpoint*, The University Press of Virginia, ISBN 0-8139-0181-2, 1978.
- [26] MOL, R. S. & SOARES, M. G. *Índices de Campos Holomorfos e Aplicações*, Notas de aula, maio de 2001.
- [27] O'NEILL, B. *Elementary differential geometry*, Academic Press, New York, 1966. MR 34 #3444.
- [28] POINCARÉ H. *Sur l'Intégration Algébrique des Équations Differentielles du Premier Ordre et du Premier Degré*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 5 (1891), 161-169.
- [29] SEIDENBERG, A. *Reduction of singularities of the differential equation  $Ady = Bdx$* , Amer. J. Math. 90(1968), 248-269.
- [30] SOARES, M. G. *Lectures on Point Residues*, Monografias del IMCA N° 28, Instituto de Matemática y Ciencias Afines (IMCA), Peru(2002), 108pp., ISBN 9972-899-09-8.
- [31] SOARES, M. G. *On Chern's proof of Baum-Bott's theorem*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 333 I, p. 757-761, 2001.
- [32] SOARES, M. G. *The Poincaré problem for hypersurfaces invariant by one-dimensional foliations*. Inv. math. 128 (1997), 495-500.
- [33] TU, W. L. *An introduction to manifolds*, 2ed. Springer, 2010.