

ANA PAULA DA SILVA COTA

ÁLGEBRAS BISSERIAIS ESPECIAIS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

VIÇOSA
MINAS GERAIS - BRASIL
2012

**Ficha catalográfica preparada pela Seção de Catalogação e
Classificação da Biblioteca Central da UFV**

T

C843a Cota, Ana Paula da Silva, 1988-
2012 Álgebras bisseriais especiais / Ana Paula da Silva Cota. –
Viçosa, MG, 2012.
vi, 83f. : il. (algumas col.) ; 29cm.

Orientador: Rogério Carvalho Picanço.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f. 82-83

1. Álgebra. 2. Módulos (Álgebra). 3. Representações dos grafos. I. Universidade Federal de Viçosa. II. Título.

CDD 22. ed. 512

ANA PAULA DA SILVA COTA

ÁLGEBRAS BISSERIAIS ESPECIAIS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Matemática, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 27 de fevereiro de 2012

Viktor Bekkert

Viviane Ribeiro Tomaz da Silva

Marinês Guerreiro
(Co-orientadora)

Sônia Maria Fernandes
(Co-orientadora)

Rogério Carvalho Picanço
(Orientador)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por estar sempre presente!

Aos meus pais, *Paulo* e *Aparecida*, pelos princípios, pela educação e pelo apoio contínuos.

Ao meu esposo, *Alessandro*, por ser meu maior incentivador e por me acalmar nos vários momentos de angústia com o mestrado.

A minha irmã, Ana Carolina, pelo exemplo de pessoa e de profissional.

Aos companheiros de batalha, *Fred*, *Fernando*, *Vinícius*, *Paulo*, *Isaque* e *Artur*, por serem amigos ímpares que me proporcionaram momentos inesquecíveis.

Ao meu orientador, *Rogério*, pelo exemplo de profissional, apoio, aprendizado incalculável e pela paciência. A minha co-orientadora, *Sônia*, pelos incentivos constantes. A minha co-orientadora, *Marinês*, pelas sugestões.

Aos professores, *Viktor* e *Viviane*, por se demonstrarem tão solícitos em participarem da minha banca, apesar dos contratemplos.

A CAPES, pelo incentivo financeiro.

SUMÁRIO

RESUMO	v
ABSTRACT	vi
1 Conceitos Básicos	3
1.1 Álgebras e Módulos	3
1.2 Quivers e Álgebras de Caminhos	8
1.3 Módulos e Representações de Quivers	11
1.3.1 Representações Simples, Projetivas e Injetivas	14
1.4 Teoria de Auslander-Reiten	16
2 Álgebras Bisseriais Especiais	23
2.1 Módulos <i>String</i>	25
2.2 Módulos <i>Band</i>	28
3 Álgebras <i>String</i>	33
3.1 Módulos Indecomponíveis	34
3.1.1 Projetivos e Injetivos Indecomponíveis	34
3.2 Morfismos Irredutíveis	36
3.3 Sequências de Auslander-Reiten	39
3.4 Morfismos entre Módulos <i>String</i>	46
4 De Álgebras <i>String</i> para Bisseriais Especiais	51
5 Álgebras de Grupo	57
5.1 Representações de Álgebras de Grupo	57

5.2	Álgebras de Grupo de Representação Finita	58
5.3	Exemplos	67
5.3.1	Grupo Cíclico	67
5.3.2	Grupo de Klein	68
5.3.3	Grupo Diedral	72
5.3.4	Outros Exemplos	79

RESUMO

COTA, Ana Paula da Silva, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro, 2012. **Álgebras bisseriais especiais**. Orientador: Rogério Carvalho Picanço. Coorientadoras: Marinês Guerreiro e Sônia Maria Fernandes.

Álgebras bisseriais especiais formam uma classe de álgebras que aparecem em diferentes contextos. A aplicabilidade destas álgebras que estamos interessados é no estudo de representações de algumas álgebras de grupo não semissimples sobre corpos algebricamente fechados. Para isso, descrevemos, a menos de isomorfismos, seus módulos indecomponíveis e seus morfismos irredutíveis. Tal descrição é feita através de uma bela apresentação combinatória, dada por Butler e Ringel [6], dos módulos indecomponíveis e dos morfismos irredutíveis de um caso particular de álgebras bisseriais especiais, as álgebras *string*. No caso geral, de álgebras bisseriais especiais que não são *string*, mostramos que são acrescentados apenas um módulo projetivo-injetivo indecomponível para cada relação binomial. Apresentamos a sequência de Auslander-Reiten em que estes módulos aparecem e verificamos que, a menos destas sequências, o restante do quiver de Auslander-Reiten é obtido como feito por Butler e Ringel [6] para álgebras *string*. Para módulos *string*, apresentamos ainda uma descrição gráfica de uma base dos espaços de morfismos, de acordo com Crawley-Boevey [7]. Finalizamos o trabalho aplicando os resultados acima para obter as representações das álgebras de grupos cíclicos finitos e para as álgebras do grupo de Klein e dos grupos dihedrais sobre corpos algebricamente fechados de característica 2.

ABSTRACT

COTA, Ana Paula da Silva, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2012.
Special biserial algebras. Adviser: Rogério Carvalho Picanço. Co-advisers:
Marinês Guerreiro and Sônia Maria Fernandes.

Special biserial algebras are a class of algebras that appear in many contexts. Butler and Ringel [6] made a description of indecomposable modules and irreducible morphisms of algebras string, a subclass of special biserial algebras. We show that special biserial algebras which are not string, have only one module projective-injective indecomposable for each binomial relation. We are present the Auslander-Reiten sequence in which these modules appear. Then we verify that the remainder of Auslander-Reiten quiver of special biserial algebras is obtained as done by Butler and Ringel [6] for string algebras. We conclude this work by applying the above results for the representations of the algebras of finite cyclic groups and algebras of the Klein group and dihedral groups over algebraically closed field of characteristic 2.

Introdução

Álgebras bisseriais especiais formam uma classe importante de álgebras, uma vez que aparecem em diferentes contextos. Por exemplo, toda álgebra de grupo de um grupo finito possui tipo de representação finito e muitas que têm tipo de representação manso são bisseriais especiais, como constatamos em [10], [16], [19] e [20]. Em 1968, Gel'fand e Ponomarev [11], com o intuito de construir as representações do grupo de Lorentz, introduziram o método de filtração funtorial que foi aplicado para classificar os módulos indecomponíveis de um caso particular de álgebras bisseriais especiais. Em 1983, esta classe de álgebras foi estudada por Skowronski e Waschbüsch [19], os quais provaram que toda álgebra bisserial de tipo de representação finito é bisserial especial. Sua estrutura foi obtida por Wald e Waschbüsch [20] em 1985. Erdmann [9] provou, em 1987, que todo bloco de uma álgebra de grupo cujo grupo *defect* é um grupo cíclico ou diedral é uma álgebra bisserial especial. Em 1992, Baues e Hennes [3] utilizaram a classificação dos módulos indecomponíveis de álgebras bisseriais especiais para classificar os tipos de homotopia do poliedro $(n - 1)$ -conexo de dimensão $(n + 3)$, para $n \geq 4$. Por outro lado, em 2001, Drozd e Greuel [8] perceberam forte relação entre a classificação de feixes sobre certas configurações de linhas projetivas e a classificação dos módulos indecomponíveis sobre alguma álgebra bisserial especial associada. Nosso interesse nas álgebras bisseriais especiais é utilizar a descrição de seus módulos indecomponíveis e seus morfismos irredutíveis para estudar representações de algumas álgebras de grupo não semissimples.

Álgebras *string* são um caso particular de álgebras bisseriais especiais. A diferença entre suas definições está no fato de que a bisserial especial é isomorfa a uma álgebra de caminhos de um quiver com relações cujo ideal admissível admite relações monomiais e binomiais, enquanto nas álgebras *string* este ideal só pode ser gerado por relações monomiais. Um dos objetivos deste trabalho é descrever os módulos indecomponíveis e os espaços de morfismos irredutíveis de uma álgebra bisserial especial. Os módulos indecomponíveis e os morfismos irredutíveis foram encontrados por Wald e Waschbüsch em [20]. Estes são módulos *string*, *band* e, para cada relação binomial, um módulo projetivo-injetivo que não pode ser descrito por meio de *string* e *band*. Para descrevermos uma base dos espaços de morfismos irredutíveis e, conseqüentemente, as sequências de Auslander-Reiten de álgebras bisseriais especiais, partiremos de uma bela descrição combinatória dada por Butler e Ringel [6] para álgebras *string*.

Este trabalho está estruturado em cinco capítulos. No primeiro capítulo, apresentamos os conceitos e resultados preliminares que se farão necessários ao longo

do texto e fixamos notações. Iniciamos o Capítulo 2 definindo álgebras bisseriais especiais. Apresentamos os conceitos de *string* e *band* que serão utilizados ao longo de todo o texto e aproveitamos uma técnica combinatória, obtida por Butler e Ringel [6] para álgebras *string*, para construir módulos associados a *string* e *band* em álgebras bisseriais especiais. O Capítulo 3 é destinado às álgebras *string*. Apresentamos seus módulos indecomponíveis, obtidos por Gelf'and e Ponomarev [11], e damos um esboço de como garantir que estes são os módulos *string* e os *band*, a menos de isomorfismos. Abordamos uma técnica combinatória, desenvolvida por Butler e Ringel [6], aplicada diretamente no quiver da álgebra, para obtermos morfismos irredutíveis. Descrevemos todas as sequências de Auslander-Reiten e concluímos que não existem morfismos irredutíveis além dos que aparecem nas mesmas. Apresentamos uma descrição gráfica de uma base dos espaços de morfismos $\text{Hom}_A(X, Y)$ entre módulos *string*, de acordo com Crawley-Boevey [7]. No Capítulo 4, descrevemos uma técnica para obter o quiver de Auslander-Reiten de uma álgebra bisserial especial a partir da descrição feita no Capítulo 3. Esta técnica foi desenvolvida observando diferenças e semelhanças de uma álgebra bisserial especial para uma certa álgebra *string* cuja categoria de módulos é bem parecida. No Capítulo 5, aplicamos as técnicas vistas nos capítulos anteriores para estudar algumas álgebras de grupo. Álgebras de grupo semissimples, em geral, são estudadas pela Teoria Clássica de Representações de Álgebras de Grupo. Uma classificação das álgebras de grupo semissimples é feita pelo Teorema de Maschke. Os tipos de representações de álgebras de grupo estão classificados por um teorema devido a Bondarenko e Drozd [5]. Baseados nestas classificações, encerramos o trabalho desenvolvendo exemplos de representações de álgebras de grupo não semissimples, mais explicitamente, a de um grupo cíclico, a do grupo de Klein e a dos grupos dihedrais.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Neste capítulo introduziremos alguns conceitos e resultados preliminares e fixaremos notações. Para demonstrações e maiores detalhes dos resultados abordados sugerimos como referências [1] e [2]. Mesmo que não esteja explícito, estamos considerando K um corpo algebricamente fechado.

1.1 Álgebras e Módulos

Definição: Uma K -álgebra A é um anel $(A, +, \cdot)$ com unidade (não necessariamente comutativo) que possui uma estrutura de K -espaço vetorial compatível com a multiplicação do anel, isto é, tal que para todo $\lambda \in K$ e para todos $a, b \in A$ temos:

$$\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b).$$

Dizemos que uma K -álgebra A tem *dimensão finita* se possui dimensão finita como espaço vetorial. Caso contrário, dizemos que A tem *dimensão infinita*. Ao longo deste texto consideraremos apenas álgebras de dimensão finita.

Um *homomorfismo* $\varphi : A \rightarrow B$ entre K -álgebras é um homomorfismo de anéis que, simultaneamente, é uma transformação linear.

Exemplo 1 Seja K um corpo e considere $M_n(K)$ o conjunto das matrizes quadradas $n \times n$ com entradas em K . Sabemos que $(M_n(K), +, \cdot)$, onde $+$ e \cdot são as respectivas adição e multiplicação usuais de matrizes, é um anel. Além disso, $M_n(K)$ é um espaço vetorial sobre K . Uma base para este espaço vetorial é dada pelas matrizes elementares $\{e_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$, logo este espaço tem dimensão finita. Pode-se verificar que estas estruturas são compatíveis e, conseqüentemente, $M_n(K)$ é uma K -álgebra de dimensão finita.

Exemplo 2 O anel de polinômios $K[x]$ sobre um corpo K , com a adição e a multiplicação usuais de polinômios, possui uma estrutura de K -espaço vetorial de dimensão infinita, no qual uma base é o conjunto $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$. Verifique-se que estas estruturas são compatíveis e, portanto, $K[x]$ é uma K -álgebra de dimensão infinita.

Exemplo 3 Sejam K um corpo e V um K -espaço vetorial de dimensão n . O anel de homomorfismos de V (endomorfismos de V), o qual representamos por $(\text{End}(V), +, \circ)$, com a soma e a composição usuais, é um K -espaço vetorial. É fácil ver que $(\text{End}(V), +, \circ)$ é uma K -álgebra.

As álgebras dos exemplos anteriores são bem conhecidas. Porém, nem sempre os elementos e as operações em uma álgebra são fáceis de manipular. Um dos interesses da Teoria de Representações de Álgebras é traduzir estas últimas álgebras em outras que possuam elementos e operações com as quais estamos mais habituados a trabalhar. Por exemplo, representar seus elementos e suas operações como matrizes.

Definição: Uma *representação* de uma K -álgebra A é um homomorfismo de álgebras $\mathcal{R} : A \longrightarrow \text{End}(V)$, para algum K -espaço vetorial V .

Observe que se \mathcal{R} for um homomorfismo injetor (resp. sobrejetor), obtemos uma imersão (resp. projeção) da álgebra A em $\text{End}(V)$. Neste caso, dizemos que a representação é *fiel* (resp. *plena*). Fixada uma base para o espaço V , obtemos um isomorfismo $\text{End}(V) \cong M_n(K)$, onde n é a dimensão de V . A partir disso, uma representação passa a ser um homomorfismo $\mathcal{R} : A \longrightarrow M_n(K)$. Para obtermos uma independência com relação a escolha da base, identificamos duas representações \mathcal{R} e \mathcal{R}' se estas levarem elementos de A em matrizes semelhantes.

De outro ponto de vista, uma representação pode ser vista como uma ação da álgebra A sobre o espaço vetorial V , isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : A &\longrightarrow \text{End}(V) \\ a &\longmapsto \mathcal{R}(a) := a : V \longrightarrow V . \end{aligned}$$

As propriedades da ação \mathcal{R} nos levam à seguinte definição:

Definição: Sejam K um corpo e A uma K -álgebra. Um A -módulo à direita é um espaço vetorial M com uma operação

$$\begin{aligned} M \times A &\longrightarrow M \\ (m, a) &\longmapsto m \cdot a \end{aligned}$$

que satisfaz, para todos $x, y \in M$, $a, b \in A$ e $\lambda \in K$, as propriedades:

- (i) $(x + y) \cdot a = x \cdot a + y \cdot a$
- (ii) $x \cdot (a + b) = x \cdot a + x \cdot b$
- (iii) $x \cdot 1_A = x$
- (iv) $(\lambda x) \cdot a = x \cdot (\lambda a) = \lambda(x \cdot a)$.

De modo análogo, definimos os A -módulos à esquerda. Dizemos que um A -módulo M tem *dimensão finita* se possui dimensão finita como espaço vetorial. Caso contrário, dizemos que M tem *dimensão infinita*. Podemos introduzir uma estrutura de A -módulos na soma e no produto direto de espaços vetoriais.

Comparando as definições, verifica-se que o estudo das representações de uma álgebra A é equivalente ao estudo de seus A -módulos.

Definição: Um A -módulo não nulo M é um módulo *indecomponível* se qualquer decomposição $M \cong L \oplus N$, implica que ou L ou N é o A -módulo nulo. Dizemos que um A -módulo é *decomponível* se este não for indecomponível.

Podemos fazer uma analogia dos módulos indecomponíveis de uma K -álgebra com os números primos no conjunto dos inteiros positivos. O Teorema Fundamental da Aritmética nos garante que todo número natural maior que 1 pode ser decomposto num produto de números primos, sendo que esta decomposição é única, a menos de permutação dos fatores.

Teorema 4 (*Krull-Schmidt, veja [1] ou [2]*) *Seja A uma K -álgebra de dimensão finita. Então todo A -módulo M tem uma decomposição única, a menos de permutação de índices e de isomorfismos,*

$$M \cong M_1 \oplus \dots \oplus M_m,$$

onde M_1, \dots, M_m são A -módulos indecomponíveis.

Desta forma, o estudo dos A -módulos pode ser reduzido ao estudo dos A -módulos indecomponíveis. Dizemos que uma K -álgebra A de dimensão finita tem *tipo de representação finito* se o número de classes de isomorfismo de A -módulos indecomponíveis é finito. Se A não tem tipo de representação finito, dizemos que A tem *tipo de representação infinito*.

Sejam M e N dois A -módulos à direita. Um *morfismo de A -módulos* (ou simplesmente morfismo) $\phi : M \rightarrow N$ é uma transformação linear tal que $\phi(ma) = \phi(m)a$, para quaisquer $m \in M$ e $a \in A$. Denotamos por $\text{Hom}_A(M, N)$ o conjunto de todos os morfismos de M para N , enquanto no caso $M = N$

denotamos $\text{End}_A(M) := \text{Hom}_A(M, M)$. O morfismo identidade é determinado pela aplicação identidade 1_M de M . A composição de dois morfismos é definida de maneira usual. Desta forma, obtemos a categoria $\text{mod } A$ dos A -módulos à direita. Ao leitor familiarizado com a linguagem de categorias, pode-se provar que $\text{mod } A$ é uma categoria abeliana.

Um morfismo $\phi : M \rightarrow N$ é um *monomorfismo* (resp. *epimorfismo*) se é injetor (resp. sobrejetor). Um *isomorfismo* $\phi : M \rightarrow N$ é um morfismo bijetor e, neste caso, dizemos que o módulo M é isomorfo a N . De maneira dual, é possível obter a categoria de A -módulos à esquerda $A - \text{mod}$. Ao longo deste texto trataremos os A -módulos à direita e, muitas vezes, os chamaremos apenas de A -módulos a fim de simplificar a escrita.

Lembrando que uma álgebra A é dita *local* se, para todo $a \in A$, tivermos a ou $1_A - a$ invertível, obtemos a seguinte caracterização de A -módulos indecomponíveis que associa objetos e morfismos.

Proposição 5 (veja [1] ou [2]) *Seja A uma K -álgebra. Um A -módulo M é indecomponível se, e somente se, sua álgebra de endomorfismos $\text{End}_A(M)$ é local.*

Seja M um A -módulo. Um *submódulo* $N \subset M$ é um subespaço fechado para a multiplicação pelos elementos de A . Dizemos que um módulo é *simples* se seus únicos submódulos são os triviais.

Existem duas classes de A -módulos bastante importantes, os projetivos e os injetivos, cuja aplicabilidade será vista na Seção 1.4.

Definição: Um A -módulo P é *projetivo* se, e somente se, dado qualquer epimorfismo $\phi : M \rightarrow N$ de A -módulos, para todo morfismo $\gamma : P \rightarrow N$ existe um (não necessariamente único) morfismo $\psi : P \rightarrow M$ tal que $\psi\phi = \gamma$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P & & \\
 & \swarrow \psi & \downarrow \gamma & & \\
 M & \xrightarrow{\phi} & N & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

O conceito dual é chamado *injetivo*.

Definição: Um A -módulo I é *injetivo* se, e somente se, para cada monomorfismo $\phi : M \rightarrow N$ de A -módulos, dado um morfismo $\gamma : M \rightarrow I$ existe um (não necessariamente único) morfismo $\psi : N \rightarrow I$ tal que $\phi\psi = \gamma$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & I & & \\
 & \uparrow \gamma & \swarrow \psi & & \\
 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\phi} & N
 \end{array}$$

Seja A uma K -álgebra de dimensão finita e seja $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ um conjunto de elementos de A . Dizemos que ele é um *conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos* de A , se $e_1 + e_2 + \dots + e_n = 1_A$, $e_i^2 = e_i$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $e_i e_j = 0$ se $i \neq j$ e, ainda, se $e_i = e' + e''$ com e' e e'' idempotentes, então $e' = 0$ ou $e'' = 0$. Toda álgebra tem pelo menos dois idempotentes, 0 e 1, chamados *idempotentes triviais*. Se e é um idempotente não trivial de A , então $1 - e$ também é um idempotente não trivial e, ainda, e e $1 - e$ são ortogonais. Além disso, $A_A = eA \oplus (1 - e)A$ é uma decomposição não trivial em A -módulos à direita. Como A tem dimensão finita, o A -módulo à direita A_A admite uma decomposição em A -módulos indecomponíveis, digamos

$$A_A = P_1 \oplus \dots \oplus P_n$$

Consequentemente, $P_i = e_i A$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, onde $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos de A . Reciprocamente, um conjunto de idempotentes ortogonais primitivos induz uma decomposição $A_A = P_1 \oplus \dots \oplus P_n$, onde $P_i = e_i A$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Por outro lado, se $A_A = P_1 \oplus P_2$ é uma decomposição não trivial e $e_1 \oplus e_2 = 1_A$, $e_i \in P_i$, então e_1 e e_2 são idempotentes ortogonais de A e P_i é indecomponível se, e somente se, e_i é primitivo.

Suponha que $A_A = e_1 A \oplus \dots \oplus e_n A$ seja uma decomposição em submódulos indecomponíveis. Se P é um A -módulo projetivo à direita, então $P = P_1 \oplus \dots \oplus P_n$, onde todo somando P_j é indecomponível e $P_j \cong e_t A$, para algum $t \in \{1, \dots, n\}$.

Adiante, veremos uma maneira gráfica de obter os projetivos e injetivos indecomponíveis.

Um morfismo $\phi : X \rightarrow Y$ de A -módulos é uma *seção* (resp. *retração*) se existe um morfismo $\psi : Y \rightarrow X$ tal que $\phi\psi = 1_X$ (resp. $\psi\phi = 1_Y$). Uma sequência de morfismos

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0 \quad (1.1)$$

em $\text{mod } A$ é uma *sequência exata curta* se f é um monomorfismo, g um epimorfismo e $\text{Ker}(g) = \text{Im}(f)$. Se g é uma retração ou f é uma seção na sequência exata curta 1.1, então $Y \cong X \oplus Z$. Neste caso, dizemos que a sequência *cinde*. Mais adiante veremos exemplos de sequências que não cindem.

Observação 6 Não é difícil verificar que, para toda sequência exata curta de A -módulos como 1.1, temos $\dim_K(Y) = \dim_K(X) + \dim_K(Z)$ (ver [1], página 87). Temos ainda que toda sequência exata curta de A -módulos terminando (resp. começando) num módulo projetivo (resp. injetivo) cinde.

Na Seção 1.5, veremos que sequências exatas curtas desempenham um importante papel no estudo dos módulos de uma álgebra.

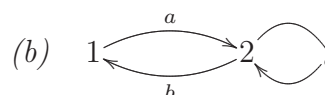
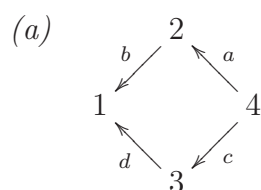
1.2 Quivers e Álgebras de Caminhos

Um grafo é uma representação gráfica de um conjunto de pontos (vértices) ligados por arestas. Um grafo é conexo se, para quaisquer dois vértices, existe uma sequência de arestas que os une. Quando as arestas possuem uma orientação, ou seja, quando os pontos são ligados por flechas, dizemos grafo orientado. Um quiver nada mais é do que um grafo orientado. Uma justificativa para utilização desta denominação é para diferenciar a Teoria de Representações de Quivers da Teoria de Grafos que estuda propriedades gerais de grafos, orientados ou não. De maneira formal, temos a definição a seguir.

Definição: Um *quiver* $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ é uma quádrupla que consiste de um conjunto de vértices Q_0 , um conjunto de flechas Q_1 e duas aplicações $s, t: Q_1 \rightarrow Q_0$ que determinam, para cada flecha $\alpha \in Q_1$, o seu “começo” $s(\alpha)$ e o seu “término” $t(\alpha)$.

Geralmente denotamos o quiver $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ apenas por Q . Um quiver Q é *finito* se os conjuntos Q_0 e Q_1 são finitos e é *conexo* se o seu grafo subjacente for conexo. Os quivers tratados ao longo deste trabalho serão todos finitos e conexos. Neste texto, os vértices serão denotados por números naturais. Se uma flecha $\alpha \in Q_1$ tem começo em $i = s(\alpha)$ e término em $j = t(\alpha)$, graficamente a denotamos por $\alpha: i \rightarrow j$ ou $i \xrightarrow{\alpha} j$.

Exemplos 7 São exemplos de quivers:



Um *caminho* C de comprimento $n \geq 1$ num quiver Q é uma justaposição de flechas $C = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$ de modo que $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$, para todo $1 \leq i < n$. Graficamente o caminho C pode ser representado como segue.

$$s(\alpha_1) \xrightarrow{\alpha_1} s(\alpha_2) \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} s(\alpha_n) \xrightarrow{\alpha_n} t(\alpha_n)$$

Para cada vértice $i \in Q_0$, definimos um caminho de comprimento zero que começa e termina em i , o qual chamamos *caminho trivial* e denotamos por e_i , isto

é, $s(e_i) = t(e_i) = i$. Definimos o começo e o término do caminho C como $s(C) = s(\alpha_1)$ e $t(C) = t(\alpha_n)$, respectivamente. Um caminho C que possui mesmo começo e mesmo término $s(C) = t(C)$ é chamado *loop* se seu comprimento for igual a 1 ou *ciclo* se for maior que 1. Sejam $C = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ e $D = \beta_1\beta_2\cdots\beta_m$ dois caminhos não triviais em Q tais que $t(C) = s(D)$, então denotamos por $CD = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\beta_1\beta_2\cdots\beta_m$ o caminho formado pela justaposição deles. Caso $C = e_{s(D)}$ ou $D = e_{t(C)}$ sejam os caminhos triviais, definimos $e_{s(D)}D = D$ e $Ce_{t(C)} = C$, respectivamente. Para quaisquer dois vértices $i, j \in Q_0$, denotamos por $Q(i, j)$ o conjunto de todos os caminhos C tais que $s(C) = i$ e $t(C) = j$. Para cada vértice $i \in Q_0$ e cada caminho C , a justaposição de caminhos induz as aplicações

$$Q(i, C) : Q(i, s(C)) \longrightarrow Q(i, t(C)) \quad \text{e} \quad Q(C, i) : Q(t(C), i) \longrightarrow Q(s(C), i)$$

$$\mu \longmapsto \mu C \quad \text{e} \quad \mu \longmapsto C\mu$$

que serão úteis mais adiante.

Sejam K um corpo e Q um quiver. Considere o conjunto \mathbf{Pa} de todos os caminhos, triviais ou não, do quiver Q . Denotamos por $KQ := K[\mathbf{Pa}]$ o espaço vetorial gerado pelo conjunto de caminhos em Q . Em outras palavras, os elementos de KQ são combinações lineares formais $\sum_j \lambda_j C_j$ tais que $C_j \in \mathbf{Pa}$, $\lambda_j \in K$ e $\lambda_j \neq 0$ para um número finito de índices j . Definiremos sobre o conjunto de caminhos \mathbf{Pa} (base de KQ) uma multiplicação induzida por justaposições. Para cada par de caminhos (C, D) em \mathbf{Pa} , defina

$$C \cdot D = \begin{cases} CD, & \text{se } t(C) = s(D); \\ 0, & \text{se } t(C) \neq s(D). \end{cases}$$

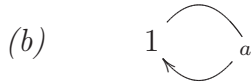
Estendemos esta multiplicação para o espaço vetorial KQ por linearidade. Com esta multiplicação, pode-se verificar que obtemos uma K -álgebra associativa cuja unidade é $1 = \sum_{i \in Q_0} e_i$. Esta álgebra é chamada *álgebra de caminhos do quiver* Q . Se Q é um quiver sem ciclos, o conjunto de caminhos \mathbf{Pa} é finito, com isso, KQ é uma K -álgebra de dimensão finita.

Exemplo 8 *Sejam K um corpo e Q o quiver que segue.*

$$(a) \quad 1 \xleftarrow{b} 2 \xleftarrow{a} 3$$

Uma base para a álgebra de caminhos KQ é dada por $\{e_1, e_2, e_3, a, b, ab\}$, cuja tabela de multiplicação consta abaixo.

\cdot	e_1	e_2	e_3	a	b	ab
e_1	e_1	0	0	0	0	0
e_2	0	e_2	0	0	b	0
e_3	0	0	e_3	a	0	ab
a	0	a	0	0	ab	0
b	b	0	0	0	0	0
ab	ab	0	0	0	0	0



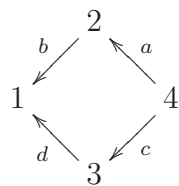
O seu conjunto de caminhos $\mathbf{Pa} = \{e_1, a, a^2, a^3, \dots, a^n, \dots\}$ é infinito. Portanto, a álgebra de caminhos KQ tem dimensão infinita. Podemos verificar que existe um isomorfismo entre KQ e a álgebra de polinômios $K[x]$ na variável x sobre o corpo K . O isomorfismo é definido de forma natural, nas respectivas bases, levando e_1 em 1 e a^n em x^n , para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja Q um quiver finito. Uma *relação* em Q com coeficientes em K é uma combinação linear de caminhos de comprimento maior ou igual a 2 com mesmo início e fim, ou seja, uma relação ρ é um elemento de KQ tal que

$$\rho = \sum_{i=1}^m \lambda_i C_i,$$

onde λ_i são escalares (não todos nulos) e C_i são caminhos em Q de comprimento maior ou igual a 2 e que possuem mesmo início e fim. Se $m = 1$ a relação é chamada *relação monomial* e no caso em que $m = 2$ é chamada *relação binomial*. Dada uma relação binomial $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$, com $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ não nulos, chamamos C_1 e C_2 de *subcaminhos maximais da relação binomial*. Dizemos que um ideal \mathcal{I} de KQ é *admissível* se puder ser finitamente gerado por relações ou se for o ideal nulo. A álgebra quociente KQ/\mathcal{I} é dita *álgebra de caminhos do quiver com relações* (Q, \mathcal{I}) e a denotamos por $K(Q, \mathcal{I})$.

Exemplo 9 Seja o quiver com relações abaixo.



$$\mathcal{I} = \langle ab - cd \rangle$$

Em palavras, a relação binomial $ab - cd \in \mathcal{I}$ quer dizer que, na álgebra de caminhos $K(Q, \mathcal{I})$, temos $ab - cd = 0$. Intuitivamente, o leitor pode pensar que, graficamente, percorrer o caminho ab é o mesmo que percorrer cd .

É natural nos perguntarmos se toda K -álgebra associativa é isomorfa à álgebra de caminhos de um dado quiver. Em geral, a resposta é não. No entanto, para uma certa classe de álgebras temos uma resposta afirmativa.

Dizemos que uma álgebra A é *básica* se, como A -módulos, $e_i A \not\cong e_j A$, para todo $i \neq j$. Dizemos que A é uma K -álgebra *conexa* se 0 e 1 são seus únicos idempotentes centrais, o que equivale a dizer que A não é produto de duas álgebras. Prova-se que a álgebra de caminhos $K(Q, \mathcal{I})$ de um quiver conexo com relações é básica e conexa. Reciprocamente:

Teorema 10 (veja [1]) *Seja A uma K -álgebra básica, conexa e de dimensão finita. Então existe um quiver Q_A e um ideal admissível $\mathcal{I} \triangleleft KQ_A$ tal que $A \cong K(Q_A, \mathcal{I})$.*

Como estamos interessados no estudo da categoria de A -módulos, temos o teorema seguinte.

Teorema 11 (veja [1]) *Seja A uma K -álgebra associativa conexa de dimensão finita. Então existe uma K -álgebra básica A^b tal que a categoria de módulos $\text{mod } A$ é equivalente à categoria de módulos $\text{mod } A^b$.*

Os resultados desta seção nos garantem que, dada uma K -álgebra A associativa conexa de dimensão finita, existe um quiver com relações (Q, \mathcal{I}) tal que a categoria de módulos $\text{mod } A$ é equivalente à categoria de módulos $\text{mod } K(Q, \mathcal{I})$ da respectiva álgebra de caminhos sobre K . Desta forma, é suficiente estudar as representações de álgebras de caminhos de quivers com relações.

1.3 Módulos e Representações de Quivers

Já que estudar as representações de uma K -álgebra é equivalente a estudar os seus A -módulos, nesta seção, veremos como associar a categoria de A -módulos com a de representações de um quiver com relações $\text{rep}_K(Q, \mathcal{I})$.

Sejam K um corpo e Q um quiver. A categoria $\text{rep}_K(Q)$ de representações de Q sobre o corpo K é a categoria em que os objetos e os morfismos são como segue.

Objetos: Uma representação $V = (V_i, T_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ consiste de um espaço vetorial de dimensão finita V_i , para cada vértice $i \in Q_0$, e de uma transformação linear $T_\alpha : V_{s(\alpha)} \rightarrow V_{t(\alpha)}$, para cada flecha $\alpha \in Q_1$. Em geral, fixamos bases para os espaços e explicitamos estas transformações pelas respectivas matrizes associadas.

Morfismos: Sejam $U = (U_i, S_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ e $V = (V_i, T_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ duas representações de um quiver Q . Um *morfismo* $\phi : U \rightarrow V$ é uma coleção $\phi = \{\phi_i\}_{i \in Q_0}$

de aplicações lineares $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$, para cada vértice $i \in Q_0$, tais que, para cada flecha $\alpha \in Q_1$, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} U_{s(\alpha)} & \xrightarrow{S_\alpha} & U_{t(\alpha)} \\ \phi_{s(\alpha)} \downarrow & & \downarrow \phi_{t(\alpha)} \\ V_{s(\alpha)} & \xrightarrow{T_\alpha} & V_{t(\alpha)} \end{array}$$

é comutativo, ou seja, $S_\alpha \phi_{t(\alpha)} = \phi_{s(\alpha)} T_\alpha$.

O morfismo identidade $1_V : V \rightarrow V$ é a coleção $1_V = \{1_{V_i}\}_{i \in Q_0}$ das aplicações identidades de cada espaço vetorial V_i . A composição entre dois morfismos $\phi : U \rightarrow V$ e $\psi : V \rightarrow W$ é o morfismo $\phi\psi : U \rightarrow W$ definido pela coleção $\phi\psi = \{\phi_i\psi_i\}_{i \in Q_0}$. Com isso, obtemos a categoria $\text{rep}_K(Q)$ de representações de um quiver Q sobre um corpo K . Denotamos o conjunto de morfismos entre duas representações por $\text{Hom}(U, V) := \{\phi : U \rightarrow V\}$. Um morfismo $\phi : V \rightarrow V$ é chamado *endomorfismo* de V e denotamos o conjunto dos endomorfismos de V por $\text{End}(V) := \text{Hom}(V, V)$. Um morfismo $\phi : U \rightarrow V$ é um *monomorfismo* (resp. *epimorfismo*) se cada aplicação linear ϕ_i é injetora (resp. sobrejetora). Um morfismo $\phi : U \rightarrow V$ é um *isomorfismo* se existe um morfismo $\psi : V \rightarrow U$ tal que $\phi\psi = 1_U$ e $\psi\phi = 1_V$. Pode-se provar que se Q é um quiver finito, então $\text{rep}_K(Q)$ é uma categoria abeliana¹, em que o núcleo, o conúcleo, o objeto nulo e a soma são definidos naturalmente. Por exemplo, a representação nula $0 \in \text{rep}_K(Q)$ é obtida atribuindo-se a cada vértice do quiver o espaço vetorial nulo e a aplicação nula a cada flecha do mesmo. O núcleo de um morfismo $\phi : U \rightarrow V$, cuja coleção de aplicações lineares é $\{\phi_i\}_{i \in Q_0}$, é dado pela coleção dos respectivos núcleos $\{\text{Ker}\phi_i\}_{i \in Q_0}$ e respectivas restrições. Para simplificar a notação, omitiremos os conjuntos percorridos pelos índices da representação, isto é, uma representação $U = (U_i, S_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ será denotada apenas por $U = (U_i, S_\alpha)$.

Exemplo 12 *Sejam K um corpo e Q o quiver abaixo.*

$$\begin{array}{ccccc} & & 4 & & \\ & & \downarrow c & & \\ 1 & \xleftarrow{a} & 2 & \xleftarrow{b} & 3 \end{array}$$

Tomando como bases as canônicas, a seguir temos exemplos de duas representações do quiver Q sobre o corpo K .

¹Ao leitor não familiarizado com a linguagem de categoria, consultar [11].

$$(a) \quad \begin{array}{c} 0 \\ \downarrow 0 \\ K^2 \xleftarrow{\text{Id}} K^2 \xleftarrow{(1 \ 0)} K \end{array}$$

$$(b) \quad \begin{array}{c} K \\ \downarrow 1 \\ K^3 \xleftarrow{(1 \ 3 \ 1)} K \xleftarrow{(1 \ 1)^T} K^2 \end{array}$$

Seja Q um quiver finito e seja $V = (V_i, T_\alpha)$ uma representação de Q . Dado um caminho não trivial $C = \alpha_1 \dots \alpha_n$ em Q com início no vértice i e término no vértice j , definimos a *avaliação de V sobre o caminho C* como a aplicação K -linear de V_i para V_j definida por

$$T_C = T_{\alpha_1} T_{\alpha_2} \dots T_{\alpha_{n-1}} T_{\alpha_n} .$$

Estendemos a definição acima para combinações lineares formais de caminhos com mesmo início e mesmo final. Dada uma relação $\rho = \sum_{k=1}^m \lambda_k C_k$, a avaliação da

combinação é $T_\rho = \sum_{k=1}^m \lambda_k T_{C_k}$.

Definição: Sejam Q um quiver finito e \mathcal{I} um ideal admissível de KQ . Uma representação $V = (V_i, T_\alpha)$ de Q é *uma representação de (Q, \mathcal{I})* se, para cada relação $\rho \in \mathcal{I}$, tivermos $T_\rho = 0$.

Denotamos por $\text{rep}_K(Q, \mathcal{I})$ a subcategoria completa² de $\text{rep}_K(Q)$ que consiste das representações de (Q, \mathcal{I}) . Seja $V = (V_i, T_\alpha) \in \text{rep}_K(Q, \mathcal{I})$ uma representação de (Q, \mathcal{I}) . Definimos o *vetor dimensão* de V como sendo o vetor $\dim(V) \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ cujas coordenadas são $(\dim(V))_i = \dim_K(V_i)$, isto é, as dimensões dos espaços vetoriais em cada vértice do quiver.

Exemplo 13 *Seja o quiver do exemplo 12 com ideal admissível $\mathcal{I} = \langle ca \rangle$. Então*

$$V : \quad \begin{array}{c} K \\ \downarrow (0 \ 1) \\ K \xleftarrow{(1 \ 0)^T} K^2 \xleftarrow{(1 \ 1)} K \end{array}$$

é uma representação de (Q, \mathcal{I}) , pois $(0 \ 1)(1 \ 0)^T = 0$. Além disso, possui vetor dimensão $\dim(V) = (1211)$.

Um teorema importante, devido a Gabriel, nos garante que o estudo dos A -módulos é equivalente ao estudo das representações do quiver com relações (Q, \mathcal{I}) , no qual $A \cong K(Q, \mathcal{I})$.

²Se $\mathcal{C} = \text{rep}_K(Q)$ e $\mathcal{C}' = \text{rep}_K(Q, \mathcal{I})$, então $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, para quaisquer X, Y objetos de \mathcal{C}' .

Teorema 14 (Gabriel, veja [1]) *Sejam K um corpo e A uma K -álgebra (básica e conexa) tal que $A \cong K(Q, \mathcal{I})$, para algum quiver finito e conexo Q e algum ideal admissível \mathcal{I} de KQ . Existe uma equivalência K -linear entre a categoria de módulos $\text{mod } A$ e a de representações $\text{rep}_K(Q, \mathcal{I})$.*

Com a equivalência $\text{mod } A \simeq \text{rep}_K(Q, \mathcal{I})$, de agora em diante, abordaremos representações de quivers como módulos e vice-versa, de acordo com o que for mais conveniente no contexto. Esta equivalência também nos garante que, para conhecermos os objetos da categoria $\text{rep}_K(Q, \mathcal{I})$, basta conhecermos as representações indecomponíveis, assim como em $\text{mod } A$. Uma das vantagens em se estudar a categoria $\text{rep}_K(Q, \mathcal{I})$ é que podemos determinar algumas representações indecomponíveis por uma técnica combinatória aplicada ao quiver como veremos a seguir.

1.3.1 Representações Simples, Projetivas e Injetivas

Definimos as representações $S(i)$, para cada vértice $i \in Q_0$, por

$$S(i)_j = \begin{cases} K, & \text{se } j = i \\ 0, & \text{se } j \neq i \end{cases}$$

e cujas aplicações lineares, referentes a cada flecha do quiver, são as aplicações nulas. Podemos verificar que estas representações correspondem a A -módulos simples. No caso em que Q é um quiver sem ciclos, prova-se que toda representação simples é da forma $S(i)$, para algum $i \in Q_0$. Caso contrário, podem existir outras representações simples além dessas (veja [1], página 77). Além disso, pode-se provar que as representações da forma $S(i)$ são indecomponíveis, para todo vértice $i \in Q_0$.

Exemplo 15 *O quiver $2 \xrightarrow{a} 1 \xleftarrow{b} 3$ possui as três representações simples listadas abaixo.*

$$S(1) : 0 \xrightarrow{0} K \xleftarrow{0} 0 \quad S(2) : K \xrightarrow{0} 0 \xleftarrow{0} 0 \quad S(3) : 0 \xrightarrow{0} 0 \xleftarrow{0} K$$

Sejam K um corpo e (Q, \mathcal{I}) um quiver com relações. Para cada vértice $i \in Q_0$, considere a representação $P(i)$, cujos espaços vetoriais referentes a cada vértice $j \in Q_0$ são dados $P(i)_j = K[Q(i, j)]$ e cujas aplicações lineares referentes a cada flecha α são dadas nas respectivas bases por $Q(i, \alpha)$, como abordamos na página 9. Prova-se que as representações $P(i)$'s são duas a duas não isomorfas e estas representações são projetivas indecomponíveis.

Exemplo 16 *Seja o quiver de Kronecker*

$$1 \begin{array}{c} \xleftarrow{a} \\ \xleftarrow{b} \end{array} 2 .$$

Temos $Q(1,1) = \{e_1\}$ e $Q(1,2) = \emptyset$ e, com isso, $P(1)_1 = K[\{e_1\}] \cong K$ e $P(1)_2 = K[\emptyset] = 0$. Assim, a representação projetiva $P(1)$ é dada por

$$P(1) : K \begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} 0 .$$

Por outro lado, $Q(2,1) = \{a, b\}$ e $Q(2,2) = \{e_2\}$. Daí, $P(2)_1 = K[\{a, b\}] \cong K^2$ e $P(2)_2 = K[\{e_2\}] \cong K$. E mais, $Q(2,a)(e_2) = a$ e $Q(2,b)(e_2) = b$. Portanto, considerando a base de $P(2)_1$ como ordenada acima, temos $P(2)_a = (1, 0)$ e $P(2)_b = (0, 1)$. Assim,

$$P(2) : K^2 \begin{array}{c} \xleftarrow{(1 \ 0)} \\ \xleftarrow{(0 \ 1)} \end{array} K .$$

Seja (Q, \mathcal{I}) um quiver com relações, denotamos por $(Q^{op}, \mathcal{I}^{op})$ o quiver oposto a (Q, \mathcal{I}) , ou seja, o quiver que possui o mesmo conjunto de vértices $Q_0^{op} = Q_0$ de Q , cujas flechas em Q_1^{op} são as flechas de Q com sentido oposto e cujas relações em \mathcal{I}^{op} são induzidas pela inversão das flechas. Por exemplo,

$$Q : 1 \begin{array}{c} \xleftarrow{b} \\ \xleftarrow{a} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xleftarrow{a} \\ \xleftarrow{b} \end{array} 3 \quad \mathcal{I} = \langle ab \rangle \quad Q^{op} : 1 \xrightarrow{b} 2 \xrightarrow{a} 3 \quad \mathcal{I}^{op} = \langle ba \rangle$$

Se $U = (U_i, T_\alpha)$ é uma representação de (Q, \mathcal{I}) sobre um corpo K , pode-se verificar que $DU = (DU_i, DT_\alpha)$ é uma representação do quiver oposto $(Q^{op}, \mathcal{I}^{op})$, onde $D = \text{Hom}(-, K)$ denota dualidade. Seja $\overline{P}(i) \in \text{rep}_K(Q^{op}, \mathcal{I}^{op})$ a representação projetiva indecomponível do quiver oposto associada ao vértice $i \in Q_0^{op} = Q_0$. A representação $I(i) = D\overline{P}(i) \in \text{rep}_K(Q)$ é denominada *representação injetiva* do quiver (Q, \mathcal{I}) associada ao vértice $i \in Q_0$. Assim, com base nas propriedades de dualidade, prova-se que, para cada $i \in Q_0$, a representação injetiva $I(i)$ é indecomponível e as $I(i)$'s são duas a duas não isomorfas.

Exemplo 17 *O quiver oposto ao de Kronecker é*

$$1 \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{array} 2$$

Assim, temos $Q(1,1) = \{e_1\}$ e $Q(1,2) = \{a, b\}$. Logo $I(1)_1 = K[\{e_1\}] \cong K$ e $I(1)_2 = K[\{a, b\}] \cong K^2$. Ainda, $Q(2,1) = \emptyset$ e $Q(2,2) = \{e_2\}$, daí $I(2)_1 =$

$K[\emptyset] = 0$ e $I(2)_1 = K[\{e_2\}] \cong K$. Consequentemente, os injetivos do quiver de Kronecker são

$$I(1) : K \begin{array}{c} \xleftarrow{(0 \ 1)^T} \\ \xleftarrow{(1 \ 0)^T} \end{array} K^2 \quad e \quad I(2) : 0 \xleftarrow{\quad} K .$$

Diante disso, concluímos que cada vértice $i \in Q_0$ determina 3 classes de representações indecomponíveis, a representação simples $S(i)$, a projetiva $P(i)$ e a injetiva $I(i)$, as quais sabemos determinar. Assim, pela equivalência $\text{mod } A \simeq \text{rep}_K(Q, \mathcal{I})$, as representações $S(i)$, $P(i)$ e $I(i)$ estão associadas aos A -módulos simples, projetivo e injetivo, respectivamente. Algumas vezes, denotaremos $S(i)$, $P(i)$ e $I(i)$ por S_i , P_i e I_i para simplificar a notação.

Contudo, em geral, estes não são os únicos módulos indecomponíveis. Abordaremos a seguir uma das principais técnicas que podem ser usadas para obter (quando possível) os demais indecomponíveis. Ela nos permite ainda o estudo dos espaços de morfismos irredutíveis da categoria de A -módulos.

1.4 Teoria de Auslander-Reiten

Sejam K um corpo e A uma K -álgebra. Pelo Teorema de Krull-Schmidt 4, todo A -módulo pode ser decomposto em uma soma direta de A -módulos indecomponíveis e esta decomposição é única a menos de isomorfismos e de ordem. Desta forma, um morfismo entre dois A -módulos pode ser escrito como uma matriz, cujas entradas são morfismos entre os respectivos indecomponíveis. Assim, para conhecermos os morfismos entre dois A -módulos, basta encontrarmos os morfismos entre os A -módulos indecomponíveis. Sejam X e Y dois A -módulos indecomponíveis. Se um morfismo não nulo $\varphi : X \rightarrow Y$ é uma seção ou uma retração, então claramente φ é um isomorfismo. Agora, estamos interessados nos morfismos entre módulos indecomponíveis que não sejam invertíveis, uma vez que desejamos classificar as classes de isomorfismos de módulos indecomponíveis.

Definição: Um morfismo $\varphi : X \rightarrow Y$ entre dois módulos $X, Y \in \text{mod } A$ é *irredutível* se φ não é seção, não é retração e toda fatoração $\varphi = \psi\theta$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ & \searrow \psi & \nearrow \theta \\ & Z & \end{array}$$

implica que ψ é seção ou θ é retração.

Alguns conceitos nos auxiliam a descrever a categoria de A -módulos, como é o caso do radical da categoria $\text{mod } A$, denotado por rad_A , e suas potências rad_A^m , para $m \geq 2$.

Definição: O *radical de Jacobson* da categoria de A -módulos é o ideal bilateral rad_A em $\text{mod } A$ definido pelos morfismos $h \in \text{rad}_A(X, Y)$, para todos os objetos X e Y em $\text{mod } A$, onde

$$\text{rad}_A(X, Y) = \{f \in \text{Hom}_A(X, Y) : 1_X - fg \text{ é invertível}, \forall g \in \text{Hom}_A(Y, X)\} .$$

No caso em que X e Y são indecomponíveis, $\text{rad}_A(X, Y)$ é o K -espaço vetorial formado por todos os morfismos não invertíveis de X para Y .

Dado $m \geq 1$, definimos por $\text{rad}_A^m(X, Y)$ o subespaço de $\text{rad}_A(X, Y)$ gerado por todos os morfismos da forma

$$X = X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} X_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_{m-1} \xrightarrow{f_m} X_m = Y ,$$

onde $f_i \in \text{rad}_A(X_{i-1}, X_i)$, para todo $i \in \{1, \dots, m\}$. A m -ésima potência do radical de Jacobson $\text{rad}_A^m \subseteq \text{rad}_A$ é formada pelos morfismos $f \in \text{rad}_A^m(X, Y)$, para todos A -módulos X e Y .

Em outras palavras, quando $m = 2$, $\text{rad}_A^2(X, Y)$ consiste de todos os morfismos da forma fg , com $f \in \text{rad}_A(X, Z)$ e $g \in \text{rad}_A(Z, Y)$, para algum A -módulo Z .

A partir destas definições, podemos utilizar a caracterização a seguir para garantir que um morfismo é irredutível.

Lema 18 (veja [1]) *Sejam X e Y dois A -módulos indecomponíveis. Um morfismo $f : X \longrightarrow Y$ é irredutível se, e somente se, $f \in \text{rad}_A(X, Y) \setminus \text{rad}_A^2(X, Y)$.*

Desta forma, o espaço quociente $\text{Irr}_A(X, Y) = \text{rad}_A(X, Y) / \text{rad}_A^2(X, Y)$ determina representantes de morfismos irredutíveis entre os módulos indecomponíveis X e Y . Este espaço é chamado *espaço de morfismos irredutíveis*. Além disso, se um morfismo estiver definido numa soma direta, temos o seguinte resultado.

Lema 19 (veja [1]) *Seja A uma K -álgebra. Então*

(a) *Para cada $m \geq 1$, temos rad_A^m um ideal bilateral de $\text{mod } A$.*

(b) *Dados $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_k$ A -módulos. Um morfismo*

$$f = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1k} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nk} \end{pmatrix} : \bigoplus_{i=1}^n X_i \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^k Y_j$$

em $\text{mod } A$ pertence a $\text{rad}_A(\oplus_{i=1}^n X_i, \oplus_{j=1}^k Y_j)$ se, e somente se, o morfismo $f_{ij} : X_i \rightarrow Y_j$ pertence ao ideal $\text{rad}_A(X_i, Y_j)$ para todo $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, k\}$.

Assim, o morfismo f é irredutível se, e somente se, cada componente f_{ij} o for, onde $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, k\}$.

Definição: Uma seqüência exata curta de A -módulos

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

é uma *seqüência de Auslander-Reiten* se não cinde e satisfaz as duas condições seguintes:

(AR1) X e Z são indecomponíveis.

(AR2) Se $u : W \rightarrow Z$ não é uma retração, então existe $v : W \rightarrow Y$ tal que $vg = u$.³

Uma caracterização das seqüências de Auslander-Reiten é dada pelo teorema a seguir.

Teorema 20 (veja [1]) *Uma seqüência exata curta de A -módulos*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

é uma seqüência de Auslander-Reiten (S.A.R.) se, e somente se, X e Z são A -módulos indecomponíveis e os morfismos f e g são irredutíveis.

Como as seqüências de Auslander-Reiten não cindem, pela considerações da página 7, não existem seqüências de Auslander-Reiten começando em módulos injetivos ou terminando em módulos projetivos. O resultado a seguir é um dos principais resultados da Teoria de Auslander-Reiten.

Teorema 21 (veja [1]) *Seja A uma K -álgebra. Existe uma aplicação bijetora τ da classe dos módulos não projetivos para a classe dos não injetivos tal que, para todo A -módulo não projetivo $Y \in \text{mod } A$, existe uma única seqüência de Auslander-Reiten*

$$0 \longrightarrow \tau Y \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} Y \longrightarrow 0.$$

a menos de isomorfismos.

³Prova-se que (AR2) equivale a dizer que se $u' : X \rightarrow W$ não é seção, então existe $v' : Y \rightarrow W$ tal que $fv' = u'$.

A aplicação τ é chamada *translação de Auslander-Reiten*. As classes de A -módulos indecomponíveis e os “geradores” de morfismos irreduzíveis entre representantes deles podem ser descritos pelas seqüências de Auslander-Reiten em $\text{mod } A$. Estas seqüências podem ser visualizadas graficamente em um quiver Γ_A , em que os vértices correspondem às classes de A -módulos indecomponíveis e as flechas representam morfismos que formam uma base para espaços de morfismos irreduzíveis $\text{Irr}(X, Y)$ entre dois módulos indecomponíveis X e Y . Construído dessa maneira o quiver Γ_A é chamado *Quiver de Auslander-Reiten*. Assim, todos os morfismos irreduzíveis em $\text{mod } A$ podem ser obtidos como combinações lineares dos expostos em Γ_A . Enquanto isso, os morfismos redutíveis que são produtos finitos de irreduzíveis aparecem em Γ_A como seqüências de flechas. Contudo, podem existir morfismos redutíveis que são “produtos infinitos” de irreduzíveis que não aparecem em Γ_A , estes necessitam de outras técnicas para serem encontrados. Um resultado importante para a construção de Γ_A é dado a seguir.

Corolário 22 (veja [1] ou [2]) *Seja Y um A -módulo indecomponível não projetivo. Dada uma seqüência de Auslander-Reiten*

$$0 \longrightarrow \tau Y \xrightarrow{(a_1, \dots, a_t)} \bigoplus_{i=1}^t E_i \xrightarrow{(b_1, \dots, b_t)^T} Y \longrightarrow 0,$$

onde E_1, \dots, E_t são A -módulos indecomponíveis, então os morfismos a_1, \dots, a_t e b_1, \dots, b_t podem ser escolhidos como flechas de Γ_A e, neste caso, estas são todas as flechas que partem de τY e chegam em Y , respectivamente.

Seja X um A -módulo. Definimos o *radical do módulo X* como sendo a interseção dos submódulos maximais de X e o denotamos por $\text{rad } X$. O *socle de X* é o submódulo gerado por todos os submódulos simples de X , o qual é um módulo semissimples e é denotado por $\text{soc } X$. Uma descrição das representações correspondentes ao radical e ao socle de um A -módulo são dadas a seguir.

Lema 23 (veja [1]) *Seja $V = (V_i, T_\alpha)$ uma representação de (Q, \mathcal{I}) .*

(a) *V é semissimples se, e somente se, $T_\alpha = 0$ para toda flecha $\alpha \in Q_1$;*

(b) *$\text{rad } V = (U_i, S_\alpha)$, onde $U_i = \sum_{\alpha: j \rightarrow i} \text{Im}(T_\alpha)$ e $S_\alpha = T_\alpha|_{U_{s(\alpha)}}$, para toda flecha com início no vértice $i \in Q_0$;*

(c) *$\text{soc } V = (W_i, R_\alpha)$, onde $W_i = V_i$ se i não possui nenhuma flecha começando nele e $W_i = \bigcap_{\alpha: i \rightarrow k} \text{Ker}(T_\alpha)$ caso contrário, e $R_\alpha = T_\alpha|_{W_i} = 0$ para toda flecha α com início em $i \in Q_0$.*

Proposição 24 (veja [1]) Sejam K um corpo e (Q, \mathcal{I}) um quiver com relações. Se $A \cong K(Q, \mathcal{I})$, para todo vértice $i \in Q_0$, temos $\text{rad } P(i) \in \text{rep}_K(Q, \mathcal{I})$ e

(a) $\text{rad } P(i) \subset P(i)$ é um submódulo e a inclusão $\text{rad } P(i) \hookrightarrow P(i)$ é irreduzível;

(b) se $\text{rad } P(i) = \bigoplus_j X_j^{n_j}$ é a decomposição do radical em representações indecomponíveis duas a duas não isomorfas, então $n_j = \dim_K \text{Irr}(X_j, P(i))$;

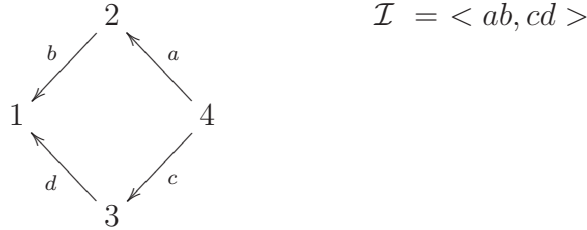
(c) se $\text{rad } P(i) \xrightarrow{(f_1, \dots, f_r)^T} P(i)$ é a inclusão, então as flechas f_1, \dots, f_r são todas as flechas que terminam em $P(i)$ no quiver Γ_A .

Para mais detalhes veja em [1] observação 4.3, páginas 127-128.

Por dualidade, para cada vértice $i \in Q_0$, $\text{soc } I(i) \subset I(i)$ é uma subrepresentação e a projeção $I(i) \longrightarrow \frac{I(i)}{\text{soc } I(i)}$ é irreduzível.

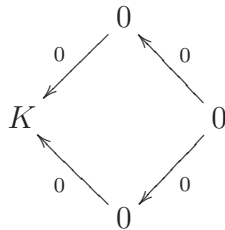
Vejamos um exemplo onde se aplicam as caracterizações dadas acima.

Exemplo 25 Seja $A = K(Q, \mathcal{I})$ a álgebra de caminhos do quiver com relações abaixo.



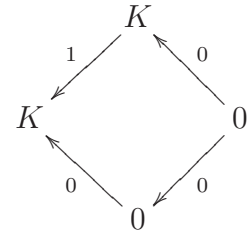
Suas representações projetivas e injetivas indecomponíveis e os respectivos vetores dimensão estão listados abaixo.

$P(1) :$



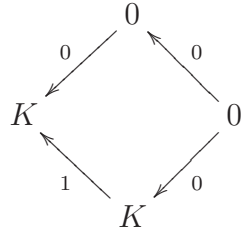
$$\dim P(1) = (1000)$$

$P(2) :$



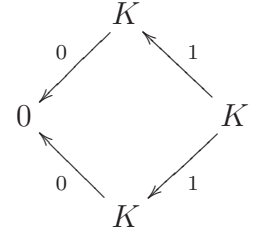
$$\dim P(2) = (1100)$$

$P(3) :$



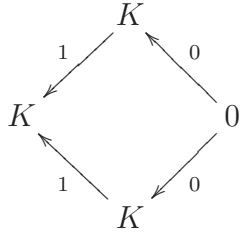
$$\dim P(3) = (1010)$$

$P(4) :$



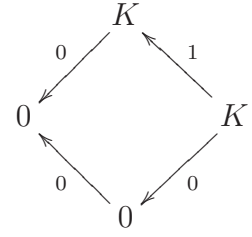
$$\dim P(4) = (0111)$$

$I(1) :$



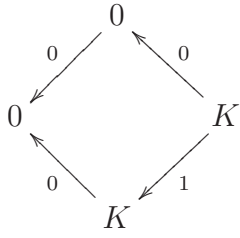
$$\dim I(1) = (1110)$$

$I(2) :$



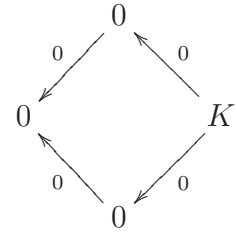
$$\dim I(2) = (0101)$$

$I(3) :$



$$\dim I(3) = (0011)$$

$I(4) :$



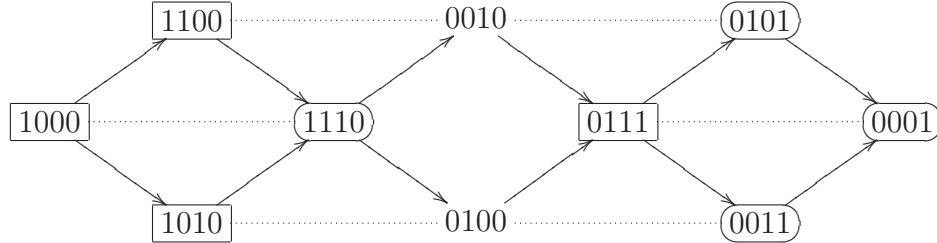
$$\dim I(4) = (0001)$$

Os radicais das representações projetivas são:

$$\text{rad } P(1) = 0; \quad \text{rad } P(2) = P(1); \quad \text{rad } P(3) = P(1); \quad \text{rad } P(4) = S(2) \oplus S(3) .$$

Assim, pela Proposição 24, obtemos as inclusões $P(1) \subset P(2)$, $P(1) \subset P(3)$ e $S(2) \oplus S(3) \subset P(4)$. Pelo Corolário 22, todas as flechas do quiver de Auslander-Reiten Γ_A que terminam num módulo indecomponível não projetivo $M \in \text{mod } A$ podem ser tomadas na (única) sequência de Auslander-Reiten que termina em M . Desta forma, a partir dos dois primeiros termos desta sequência, o vetor dimensão de M pode ser calculado através da diferença entre o vetor dimensão do termo central pelo vetor dimensão do primeiro termo, como segue da observação 6. Depois de começado, o quiver vai sendo construído, da esquerda para a direita, num processo parecido com a feitura de tricô (como diz [2]), denominado método de tricotamento. Desta forma, o(s) módulo(s) que aparece(em) no começo deste quiver, à esquerda, não possui(em) sequência de Auslander-Reiten terminando nele(s), conseqüentemente, segue da observação 6 que estes devem ser projetivos. As inclusões obtidas pela Proposição 24 e os demais itens da mesma nos garantem que

não existem morfismos irreduzíveis terminando no módulo projetivo cujo vetor dimensão é (1000) . Com isso, vamos construindo o quiver Γ_A até chegarmos num módulo injetivo que não possui morfismos irreduzíveis partindo dele. Em Γ_A , indicaremos as translações de Auslander-Reiten por linhas pontilhadas.



Neste caso, observe que os módulos simples, os projetivos e os injetivos são todos os A -módulos indecomponíveis, uma vez que não aparece nenhum módulo diferente destes no quiver acima.

No quiver de Auslander-Reiten distinguiremos os módulos injetivos dos projetivos apresentando os injetivos numa moldura arredondada enquanto os projetivos, numa moldura retangular. No caso de um módulo que seja injetivo e também projetivo, este será envolto por uma moldura retangular dupla. A categoria de representações de um quiver com relações (Q, \mathcal{I}) pode ser estudada a partir do quiver de Auslander-Reiten. Pela equivalência $\text{mod } A \simeq \text{rep}_K(Q, \mathcal{I})$, o quiver de Auslander-Reiten nos fornece as classes de módulos indecomponíveis e uma base para os espaços de morfismos irreduzíveis entre estes. Neste exemplo, temos finitas classes de módulos indecomponíveis. Em geral, não é fácil obter o quiver de Auslander-Reiten de uma álgebra.

No caso em que temos número finito de classes de isomorfismos de módulos indecomponíveis e $\tau(M) = M$, para todo módulo M , obtemos uma superfície cilíndrica, a qual chamamos *cilindro*. No caso em que temos um cilindro infinito e $\tau(M) = M$, para todo módulo M , o denominamos *tubo homogêneo de posto 1* ou, simplesmente, *1-tubo*. Uma componente do quiver de Auslander-Reiten que não contém módulos projetivos e injetivos é chamada *componente regular*. Uma componente que possui módulos projetivos ou injetivos é chamada *componente não regular*.

Capítulo 2

Álgebras Bisseriais Especiais

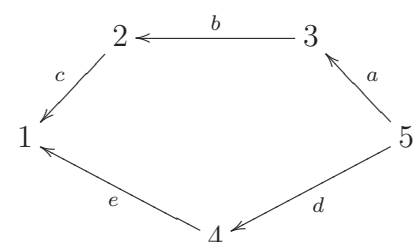
Neste capítulo, apresentaremos alguns módulos indecomponíveis das álgebras bisseriais especiais. Estes podem ser descritos através de uma técnica combinatória aplicada diretamente no quiver da álgebra. O diferentes contextos em que estas álgebras apareceram foi relatado na introdução deste trabalho, o leitor interessado pode retornar à página 1. Nosso interesse nas álgebras bisseriais especiais é utilizar a descrição de seus módulos indecomponíveis e seus morfismos irredutíveis para estudar representações de algumas álgebras de grupo, o que será feito no Capítulo 5.

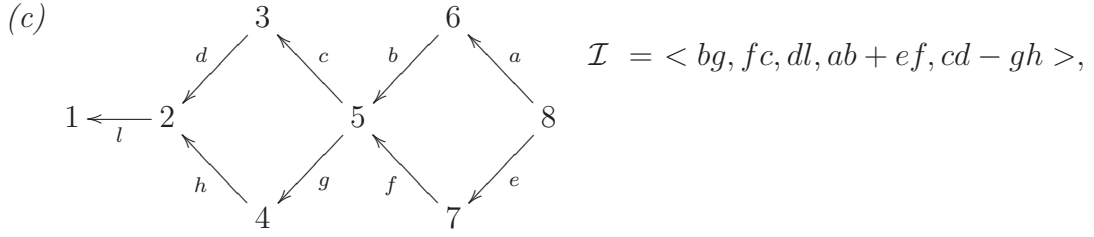
Definição: Uma álgebra A é *biserial especial* se é isomorfa à álgebra de caminhos de um quiver com relações (Q, \mathcal{I}) satisfazendo

- (i) Cada vértice $i \in Q_0$ é início ou término de no máximo duas flechas;
- (ii) Para cada flecha $\beta \in Q_1$, existe no máximo uma flecha $\alpha \in Q_1$ tal que $\alpha\beta \notin \mathcal{I}$ e no máximo uma flecha $\gamma \in Q_1$ tal que $\beta\gamma \notin \mathcal{I}$;
- (iii) O ideal admissível \mathcal{I} é nulo ou gerado por relações monomiais ou binomiais.

Exemplo 26 Os quivers com relações abaixo definem álgebras de caminhos bisseriais especiais.

(a)  $\mathcal{I} = \langle a^2, b^2, ab - ba \rangle$

(b)  $\mathcal{I} = \langle abc - de \rangle$



Em geral, não é possível obter o quiver de Auslander-Reiten de uma álgebra bisserial especial com a técnica de tricotamento do Capítulo 1. Por exemplo, a álgebra do item (a) possui infinitas classes de módulos indecomponíveis, como veremos em breve.

Seja $A \cong K(Q, \mathcal{I})$ uma álgebra bisserial especial. Para cada flecha $\alpha \in Q_1$, definimos sua *inversa formal* α^{-1} de modo que $s(\alpha^{-1}) = t(\alpha)$ e $t(\alpha^{-1}) = s(\alpha)$. Note que $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$. Um *passeio* p em (Q, \mathcal{I}) de comprimento $l(p) = n > 0$ é uma justaposição $p = p_1 \dots p_n$, onde $p_i \in Q_1$ ou $p_i^{-1} \in Q_1$ e $s(p_i) = t(p_{i-1})$, para todo $1 < i \leq n$. Seu *inverso formal* é o passeio $p^{-1} = p_n^{-1} \dots p_1^{-1}$.

Definição: Uma *string* $S = s_1 \dots s_n$ de comprimento $l(S) = n > 0$ é um passeio em (Q, \mathcal{I}) tal que $s_i \neq s_{i-1}^{-1}$, para todo $1 < i \leq n$, e tal que nenhum subcaminho de S ou de S^{-1} é uma relação monomial ou é um subcaminho maximal de uma relação binomial. Para cada vértice $i \in Q_0$, definimos a *string trivial* e_i e sua inversa e_i^{-1} , cujos comprimentos são nulos.

Uma *string* é *direta* (resp. *inversa*) se é uma justaposição de flechas (resp. de inversas de flechas). Dadas duas *string* S e S' , a justaposição de *string* SS' está definida se, e somente se, SS' é uma *string*.

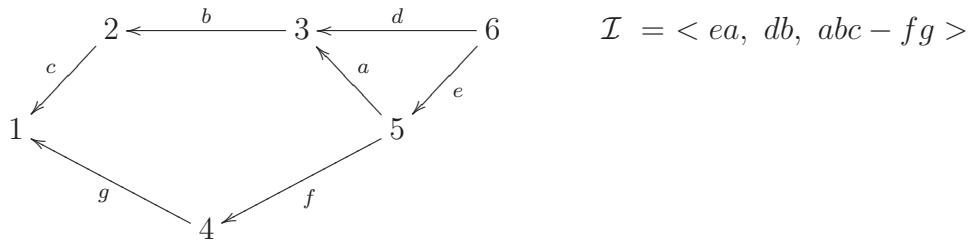
Exemplo 27 No quiver do item (b) do exemplo anterior, os passeios $p_1 = abce^{-1}$ e $p_2 = aa^{-1}de$ não são *string*, visto que abc é um subcaminho maximal da relação binomial $abc - de \in \mathcal{I}$ em p_1 e a flecha a se encontra seguida da sua flecha inversa, em p_2 . Já os passeios $p_3 = d^{-1}ab$ e $p_4 = b^{-1}a^{-1}$ são *string*. Esta última é um exemplo de *string inversa*.

Seja $A \cong K(Q, \mathcal{I})$ uma álgebra bisserial especial. Considere $\underline{\mathcal{S}}$ o conjunto de todas as *string*. Definimos sobre $\underline{\mathcal{S}}$ uma relação de equivalência \sim_s tal que $S \sim_s S'$ se, e somente se, $S' = S$ ou $S' = S^{-1}$. Denotamos \mathcal{S} um conjunto de representantes das classes $\underline{\mathcal{S}} / \sim_s$. A partir de uma *string* $S \in \underline{\mathcal{S}}$ é possível obter um módulo $M(S)$ associado a essa *string*, conforme veremos a seguir.

2.1 Módulos *String*

Seja uma *string* $S \in \underline{\mathcal{S}}$, vamos construir um módulo $M(S)$ associado a S . Se $S = e_i$ é a *string* trivial, então $M(S)$ é a representação de (Q, \mathcal{I}) que possui um K -espaço vetorial unidimensional no vértice i e o espaço vetorial nulo nos demais vértices, já as aplicações entre tais espaços são, obviamente, todas nulas. Neste caso, temos o A -módulo simples $S(i)$. O caso em que $S = e_i^{-1}$ é igual. Se $S = s_1 \dots s_n \in \underline{\mathcal{S}}$ é uma *string* não trivial, vejamos a construção no exemplo ilustrativo abaixo e, posteriormente, façamos a formalização.

Exemplo Ilustrativo: Seja A a álgebra de caminhos do quiver com relações abaixo.



É fácil ver que esta álgebra é bisserial especial. Considere a *string* $S = f^{-1}ad^{-1}ef$. Representemos S graficamente na forma linear de maneira compatível com o passeio percorrido no quiver, de modo que uma flecha α seja representada para a direita $s(\alpha) \xrightarrow{\alpha} t(\alpha)$ e uma inversa de flecha β^{-1} seja representada para a esquerda $t(\beta) \xleftarrow{\beta} s(\beta)$.

Representação Gráfica.

$$4 \xleftarrow{f} 5 \xrightarrow{a} 3 \xleftarrow{d} 6 \xrightarrow{e} 5 \xrightarrow{f} 4 \quad (2.1)$$

Considere o K -espaço vetorial gerado por $\{z_1, z_2, \dots, z_6\}$ e a seguinte representação gráfica associada à anterior

$$z_1 \xleftarrow{f} z_2 \xrightarrow{a} z_3 \xleftarrow{d} z_4 \xrightarrow{e} z_5 \xrightarrow{f} z_6 \quad (2.2)$$

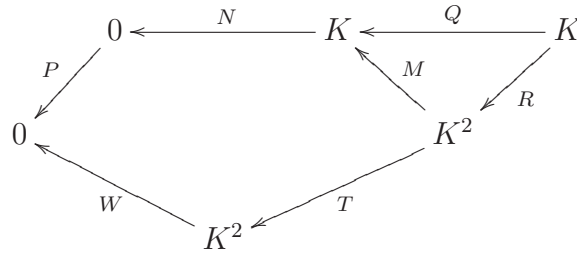
Para cada vértice $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$, tomamos o K -espaço vetorial $M(S)_i$ gerado pelos elementos z_j 's da representação gráfica (2.2) correspondentes ao respectivo vértice i . No caso do vértice não aparecer em (2.1), definimos o espaço como o gerado pelo conjunto vazio. Por exemplo, ao vértice 5 estão associados os elementos z_2 e z_5 , portanto, $M(S)_5 = \langle z_2, z_5 \rangle$, já o vértice 1 não aparece em (2.1), logo $M(S)_1 = \langle \emptyset \rangle$. De forma similar, obtemos os demais K -espaços vetoriais referentes a cada vértice da representação

$$\begin{aligned}
M(S)_1 &= \langle \emptyset \rangle = 0 & M(S)_4 &= \langle z_1, z_6 \rangle \cong K^2 \\
M(S)_2 &= \langle \emptyset \rangle = 0 & M(S)_5 &= \langle z_2, z_5 \rangle \cong K^2 \\
M(S)_3 &= \langle z_3 \rangle \cong K & M(S)_6 &= \langle z_4 \rangle \cong K.
\end{aligned}$$

As aplicações entre estes espaços são construídas pela ação das flechas que aparecem em (2.2). Por exemplo, vamos construir a aplicação $M : M(S)_5 \rightarrow M(S)_3$ que corresponde à flecha a do quiver. Como a base de $M(S)_5$ é dada por $\{z_2, z_5\}$ veremos qual é a ação da flecha a sobre estes elementos em (2.2). Temos que o elemento z_2 é levado em z_3 e z_5 não sofre ação desta flecha. Portanto, a matriz associada à respectiva aplicação linear é dada por $M = (1 \ 0)^T$. De forma similar, obtemos as matrizes associadas às demais aplicações lineares, nas respectivas bases de cada espaço, como listamos abaixo.

$$M = (1 \ 0)^T, \quad N = P = W = 0, \quad Q = (1), \quad R = (0 \ 1), \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O módulo (como representação) $M(S)$ é dado como segue



O leitor pode verificar que existe um isomorfismo entre os módulos correspondentes a uma *string* e a sua inversa $M(S) \cong M(S^{-1})$.

Formalizaremos a construção feita no exemplo ilustrativo. Seja $S = s_1 \dots s_n$ uma *string*. Considere a aplicação

$$\begin{aligned}
u : \{1, 2, \dots, n+1\} &\longrightarrow Q_0 \\
i &\longmapsto \begin{cases} u(1) = s(s_1) \\ u(i+1) = t(s_i), \quad 1 \leq i \leq n \end{cases}
\end{aligned}$$

Representemos S graficamente na forma linear de maneira compatível com o passeio percorrido no quiver, de modo que se s_i for uma inversa de flecha, então seja representada por $t(s_i^{-1}) \xleftarrow{s_i^{-1}} s(s_i^{-1})$, mas se s_i for uma flecha, seja representada por $s(s_i) \xrightarrow{s_i} t(s_i)$. A seguir omitiremos o sentido das flechas visto que estamos lidando com um caso arbitrário.

Representação Gráfica

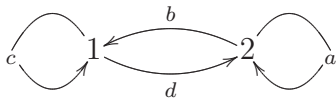
$$u(1) \xrightarrow{s_1} u(2) \xrightarrow{s_2} \dots \xrightarrow{s_{n-1}} u(n) \xrightarrow{s_n} u(n+1)$$

Definimos uma representação $M(S)$ do quiver (Q, \mathcal{I}) como segue. Para cada vértice $v \in Q_0$, considere o conjunto $I_v = u^{-1}(v) \subset \{1, 2, \dots, n+1\}$. Considerando $\{z_1, \dots, z_{n+1}\}$ como uma base de um espaço vetorial de dimensão $n+1$, para cada vértice $v \in Q_0$, tomaremos o espaço vetorial $M(S)_v$ cuja base é $\{z_j : j \in I_v\}$, isto é, $M(S)_v \cong K^{\#I_v}$, onde $\#I_v$ é a cardinalidade de I_v . Para toda flecha $\alpha \in Q_1$ tal que $M(S)_{s(\alpha)} \neq 0$ e $M(S)_{t(\alpha)} \neq 0$, definimos a aplicação linear γ_α , nas respectivas bases, por

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha : M(S)_{s(\alpha)} &\longrightarrow M(S)_{t(\alpha)} \\ z_i &\longmapsto \gamma_\alpha(z_i) = \begin{cases} z_{i+1}, & \text{se } s_i = \alpha \\ z_{i-1}, & \text{se } s_{i-1} = \alpha^{-1} \\ 0, & \text{se } s_i \neq \alpha \text{ e } s_{i-1} \neq \alpha^{-1} \end{cases} \end{aligned}$$

Pode-se verificar que $M(S) = (M(S)_v, \gamma_\alpha)$ é uma representação do quiver (Q, \mathcal{I}) . Além disso, mostra-se que $M(S) \cong M(S')$ se, e somente se, $S' = S^{\pm 1}$. Desta forma, a construção do módulo $M(S)$ está bem definida no conjunto de representantes de S . Da equivalência $\text{mod } A \sim \text{rep}_K(Q, \mathcal{I})$, obtemos um A -módulo, o qual denominamos *módulo string*.

Exemplo 28 *Seja a álgebra bisserial especial definida pela álgebra de caminhos do quiver com relações abaixo.*



$$\mathcal{I} = \langle a^3, c^2, ab, bc, da, a^2 - bd \rangle$$

Considere a string $S = ad^{-1}cb^{-1}$. A aplicação

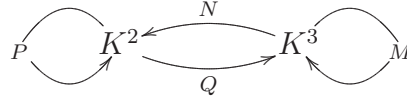
$$\begin{aligned} u : \{1, 2, 3, 4, 5\} &\longrightarrow Q_0 = \{1, 2\} \\ 1 &\longmapsto u(1) = s(a) = 2 \\ 2 &\longmapsto u(2) = t(a) = 2 \\ 3 &\longmapsto u(3) = t(d^{-1}) = 1 \\ 4 &\longmapsto u(4) = t(c) = 1 \\ 5 &\longmapsto u(5) = t(b^{-1}) = 2 \end{aligned}$$

nos induz a representação gráfica abaixo.

$$2 \xrightarrow{a} 2 \xleftarrow{d} 1 \xrightarrow{c} 1 \xleftarrow{b} 2 \quad (2.3)$$

$$z_1 \xrightarrow{a} z_2 \xleftarrow{d} z_3 \xrightarrow{c} z_4 \xleftarrow{b} z_5 \quad (2.4)$$

Daí, obtemos $I_1 = \{3, 4\}$ e $I_2 = \{1, 2, 5\}$. Com isso, temos $M(S)_1 \cong K^2$ e $M(S)_2 \cong K^3$, cujas bases são $\{z_3, z_4\}$ e $\{z_1, z_2, z_5\}$, respectivamente. De acordo com (2.4), construímos as matrizes associadas às respectivas transformações lineares. Portanto, obtemos o seguinte módulo



onde

$$\begin{array}{ccc} \gamma_a : M(S)_2 & \longrightarrow & M(S)_2 \\ z_1 & \longmapsto & z_2 \\ z_2 & \longmapsto & 0 \\ z_5 & \longmapsto & 0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \gamma_b : M(S)_2 & \longrightarrow & M(S)_1 \\ z_1 & \longmapsto & 0 \\ z_2 & \longmapsto & 0 \\ z_5 & \longmapsto & z_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \gamma_c : M(S)_1 & \longrightarrow & M(S)_1 \\ z_3 & \longmapsto & z_4 \\ z_4 & \longmapsto & 0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \gamma_d : M(S)_1 & \longrightarrow & M(S)_2 \\ z_3 & \longmapsto & z_2 \\ z_4 & \longmapsto & 0 \end{array} .$$

Estas aplicações, nas respectivas bases, são dadas pelas matrizes

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

2.2 Módulos *Band*

Seja $A \cong K(Q, \mathcal{I})$ uma álgebra bisserial especial. Considere $\underline{\mathcal{S}}' \subset \underline{\mathcal{S}}$ o conjunto das *string* S não triviais tais que a composição S^n está definida, para todo $n \in \mathbb{N}$, e que S não é potência de uma *string* de comprimento menor. Se $S \in \underline{\mathcal{S}}'$, então S é denominada *band*. Definimos uma relação de equivalência \sim_b em $\underline{\mathcal{S}}'$, tal que $S \sim_b S'$ se, e somente se, $S' = S^{\pm 1}$ ou S' é uma permutação cíclica de S ou uma inversa de uma permutação cíclica de S . Em outras palavras, se $S = s_1 \dots s_n$ e $S \sim_b S'$, então $S' = S^{\pm 1}$ ou $S' = s_t \dots s_n s_1 \dots s_{t-1}$ para algum $t \in \{2, \dots, n\}$ ou S' é inversa de uma permutação cíclica. Denotamos \mathcal{S}' um conjunto de representantes das classes de $\underline{\mathcal{S}}' / \sim_b$.

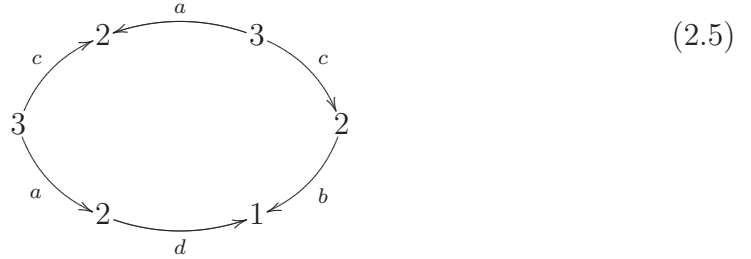
Seja $S = s_1 s_2 \dots s_n \in \underline{\mathcal{S}}'$ uma *band*. Dados um espaço vetorial V e um automorfismo $\varphi : V \rightarrow V$, o par (V, φ) induz uma estrutura de $K[T, T^{-1}]$ -módulo em V , onde a ação (à direita) é definida nos geradores T e T^{-1} por $(T, v) \mapsto \varphi(v)$ e $(T^{-1}, v) \mapsto \varphi^{-1}(v)$, para todo $v \in V$. A partir da *band* S e do automorfismo φ construiremos um módulo $M(S, \varphi)$.

Exemplo Ilustrativo: Seja A a álgebra bisserial especial definida pela álgebra de caminhos do quiver com relações abaixo.

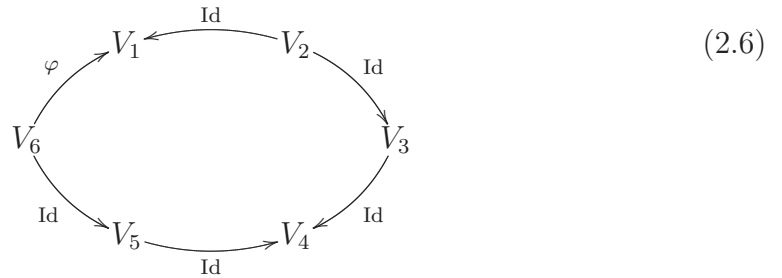
$$1 \begin{array}{c} \xleftarrow{b} \\ \xleftarrow{d} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xleftarrow{a} \\ \xleftarrow{c} \end{array} 3 \quad \mathcal{I} = \langle ab, cd \rangle$$

Considere a *band* $S = a^{-1}cbd^{-1}a^{-1}c$. Como as potências S^n estão definidas para todo $n \in \mathbb{N}$, representaremos graficamente a *band* como um ciclo, o qual será percorrido no sentido horário.

Representação Gráfica.



A esta representação gráfica associamos o diagrama



onde $V_i = V$, para todo $i \in \{1, \dots, 6\}$, e Id é aplicação identidade. O automorfismo φ é colocado em uma única flecha, que pode ser escolhida aleatoriamente.

Para cada vértice $i \in \{1, 2, 3\}$, tomamos o K -espaço vetorial $M(S)_i$ como a soma direta dos espaços V_j 's de (2.6) que estão associados ao respectivo vértice i . No caso em que o vértice não aparece em (2.5), tomamos o espaço gerado pelo conjunto vazio. Por exemplo, ao vértice 2 estão associados os espaços V_1, V_3 e V_5 , portanto $M(S, \varphi)_2 = V_1 \oplus V_3 \oplus V_5$. Desta forma, obtemos os demais K -espaços vetoriais, referentes a cada vértice da representação, que são $M(S, \varphi)_1 = V_4$ e $M(S, \varphi)_3 = V_2 \oplus V_6$.

As aplicações entre estes espaços são construídas pela ação que as flechas de (2.5) “desempenham” em (2.6). Por exemplo, vamos construir a aplicação $P : M(S)_3 \rightarrow M(S)_2$ que está associada à flecha c do quiver. Como $M(S)_3 = V_2 \oplus V_6$, veremos qual ação a flecha c exerce sobre cada espaço de (2.6). O espaço V_2 é levado pela identidade em V_3 (segundo espaço da soma direta em $M(S, \varphi)_2$) e V_6 é levado por φ no espaço V_1 (primeiro espaço da soma direta em $M(S, \varphi)_2$). Portanto, na ordem em que escrevemos, a matriz em bloco associada à respectiva aplicação linear é dada por $P = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} & 0 \\ \varphi & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Fixada tal ordem e uma base de V , as aplicações estão associadas às matrizes blocos listadas abaixo, onde φ denota a matriz associada ao automorfismo φ na base fixada para V .

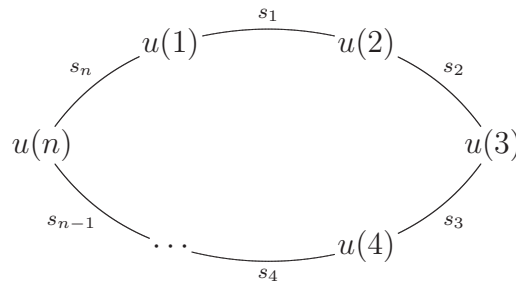
$$M = \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{Id} \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{Id} \\ 0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} & 0 \\ \varphi & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \text{Id} \end{pmatrix}$$

Em resumo, o módulo (como representação) $M(S, \varphi)$ é dado por

$$M(S, \varphi) : \quad V \begin{array}{c} \xleftarrow{N} \\ \xleftarrow{Q} \end{array} V^3 \begin{array}{c} \xleftarrow{M} \\ \xleftarrow{P} \end{array} V^2$$

Formalizaremos a construção da representação associada à *band* feita no exemplo ilustrativo. Seja $A \cong K(Q, \mathcal{I})$ uma álgebra bisserial especial e sejam $S = s_1 s_2 \dots s_n \in \underline{\mathcal{S}}'$ uma *band*, V um K -espaço vetorial e φ um automorfismo de V . Para cada vértice $v \in Q_0$, considere $I_v = u^{-1}(v)$ e $I'_v = I_v \cap \{1, 2, \dots, n\}$. Na representação gráfica da *band* S indicaremos a boa definição de suas potências representando-a na forma de um diagrama cíclico, de modo que se s_i for uma flecha, a representaremos no sentido horário $u(i) \xrightarrow{s_i} u(i+1)$, e se s_i for a inversa da flecha s_i^{-1} será representada no sentido anti-horário $u(i+1) \xleftarrow{s_i^{-1}} u(i)$.

Representação Gráfica.



Para cada vértice $v \in Q_0$, definimos $M(S, \varphi)_v = \bigoplus_{i \in I'_v} V_i$, onde $V_j = V$, para todo $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Para todo $1 \leq i \leq n$, denotemos por f_i os seguintes

morfismos

$$f_i = \begin{cases} \text{Id} : V_i \longrightarrow V_{i+1}, & \text{se } s_i \in Q_1 \text{ e } i < n \\ \text{Id} : V_{i+1} \longrightarrow V_i, & \text{se } s_i^{-1} \in Q_1 \text{ e } i < n \\ \varphi : V_n \longrightarrow V_1, & \text{se } s_n \in Q_1 \text{ e } i = n \\ \varphi : V_1 \longrightarrow V_n, & \text{se } s_n^{-1} \in Q_1 \text{ e } i = n \end{cases}$$

Considerando a ordem dos naturais para os conjuntos de índices $\{i \in I'_{s(\beta)}\}$ e $\{j \in I'_{t(\beta)}\}$, obtemos uma ordem para as somas diretas $\bigoplus_{i \in I'_{s(\beta)}} V_i$ e $\bigoplus_{j \in I'_{t(\beta)}} V_j$, respectivamente. Defina a matriz em bloco

$$J_\beta = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1k} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mk} \end{pmatrix},$$

onde m e k são as cardinalidades de $I'_{s(\beta)}$ e $I'_{t(\beta)}$, respectivamente, de modo que $g_{rs} = f_i$, se $s(f_i)$ é a r -ésima componente de $\bigoplus_{i \in I'_{s(\beta)}} V_i$ e $t(f_i)$ é a s -ésima componente de $\bigoplus_{j \in I'_{t(\beta)}} V_j$, e $g_{rs} = 0$, caso contrário. Dessa forma, para cada $\beta \in Q_1$, J^β é a matriz associada à aplicação linear $\gamma_\beta : \bigoplus_{i \in I'_{s(\beta)}} V_i \longrightarrow \bigoplus_{j \in I'_{t(\beta)}} V_j$.

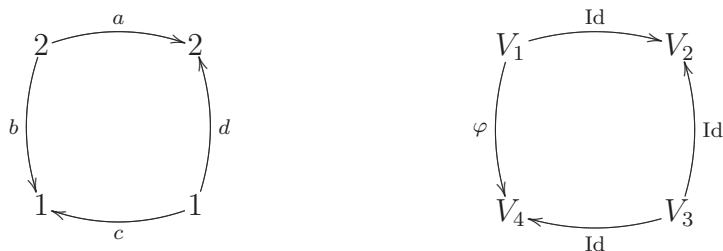
Pode-se verificar que $M(S, \varphi)$ é uma representação do quiver com relações (Q, \mathcal{I}) . Além disso, $M(S, \varphi) \cong M(S', \varphi')$ se, e somente se, (V, φ) e (V', φ') são isomorfos (como $K[T, T^{-1}]$ -módulos) e $S \sim_b S'$. Assim, a construção do módulo *band* está bem definida em \mathcal{S}' . Da equivalência $\text{mod } A \sim \text{rep}_K(Q, \mathcal{I})$, temos $M(S, \varphi)$ um A -módulo, o qual denominamos *módulo band*.

Exemplo 29 *Seja A a álgebra bisserial especial definida pela álgebra de caminhos do quiver com relações abaixo.*

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \text{c} \curvearrowright 1 \curvearrowleft \\ \text{b} \curvearrowright 1 \curvearrowleft 2 \curvearrowright \\ \text{d} \curvearrowright 2 \curvearrowleft 1 \curvearrowleft \\ \text{a} \curvearrowright 2 \curvearrowleft \end{array} & & \mathcal{I} = \langle a^3, c^2, ab, bc, da, a^2 - bd \rangle \end{array}$$

Considere a *band* $S = ad^{-1}cb^{-1}$ e $\varphi : K^2 \longrightarrow K^2$ o automorfismo cuja matriz associada na base canônica é $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, com $0 \neq \lambda \in K$.

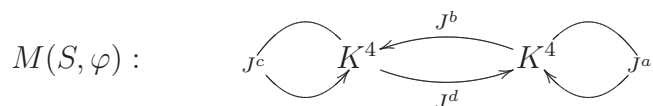
Representação Gráfica.



Temos $I'_1 = \{3, 4\}$ e $I'_2 = \{1, 2\}$, logo $M(S, \varphi)_1 = V_3 \oplus V_4$ e $M(S, \varphi)_2 = V_1 \oplus V_2$. Agora, vamos construir as matrizes em bloco associadas às respectivas aplicações lineares $\gamma_a : M(S, \varphi)_2 \rightarrow M(S, \varphi)_2$, $\gamma_b : M(S, \varphi)_2 \rightarrow M(S, \varphi)_1$, $\gamma_c : M(S, \varphi)_1 \rightarrow M(S, \varphi)_1$ e $\gamma_d : M(S, \varphi)_1 \rightarrow M(S, \varphi)_2$. Temos os seguintes morfismos $f_1 = \text{Id} : V_1 \rightarrow V_2$, $f_2 = \text{Id} : V_3 \rightarrow V_2$, $f_3 = \text{Id} : V_3 \rightarrow V_4$ e $f_4 = \varphi : V_1 \rightarrow V_4$. Daí, obtemos as matrizes

$$J_a = J_c = J_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad J_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Com isso, obtemos o módulo band associado à representação abaixo.



No Capítulo 4, veremos que módulos *string* e *band* são quase todos os módulos indecomponíveis de uma álgebra bisserial especial.

Capítulo 3

Álgebras *String*

Álgebras *string* são um caso particular das álgebras bisseriais especiais.

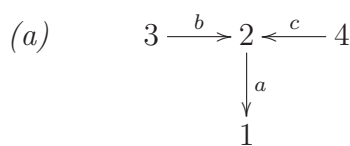
Definição: Uma álgebra A é *string* se é isomorfa à álgebra de caminhos de um quiver (Q, \mathcal{I}) satisfazendo

- (i) Cada vértice $i \in Q_0$ é início ou término de no máximo duas flechas;
- (ii) Para cada flecha $\beta \in Q_1$, existe no máximo uma flecha $\alpha \in Q_1$ tal que $\alpha\beta \notin \mathcal{I}$ e no máximo uma flecha $\gamma \in Q_1$ tal que $\beta\gamma \notin \mathcal{I}$;
- (iii) O ideal admissível \mathcal{I} é nulo ou gerado apenas por relações monomiais.

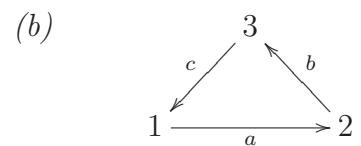
Observe que a única diferença entre a definição de álgebras bisseriais especiais e a de *string* é o item (iii). Um dos objetivos deste trabalho é descrever os módulos indecomponíveis e os espaços de morfismos irredutíveis de uma álgebra bisserial especial. Para descrevermos uma base destes espaços e, conseqüentemente, as sequências de Auslander-Reiten, partiremos de uma bela descrição combinatória dada por Butler e Ringel [6] para álgebras *string*. Desta forma, neste capítulo abordaremos tal descrição e, no próximo capítulo, a estenderemos para o caso em que a álgebra é bisserial especial.

Como podemos perceber, álgebras *string* são de fato um caso particular de álgebras bisseriais especiais.

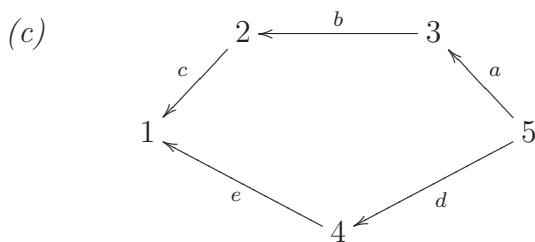
Exemplo 30 As álgebras de caminhos dos quivers com relações dos itens (a), (b) e (c) definem álgebras *string*, enquanto a do item (d) não, pois não satisfaz a condição (i) da definição.



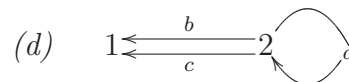
$$\mathcal{I} = \langle ca \rangle$$



$$\mathcal{I} = \langle abc \rangle$$



$$\mathcal{I} = \langle abc, de \rangle$$



$$\mathcal{I} = \langle a^2, ac \rangle$$

No item (c), como álgebra bisserial especial, os passeios $p_1 = abce^{-1}$ e $p_2 = aa^{-1}de$ não são *string*, visto que abc é uma relação monomial em p_1 e, em p_2 , a flecha a se encontra seguida da sua flecha inversa. Já os passeios $p_3 = d^{-1}ab$ e $p_4 = b^{-1}a^{-1}$ são *string*. Observe que as *string* da álgebra de caminhos deste exemplo são as mesmas da álgebra de caminhos do mesmo quiver com ideal admissível $\mathcal{I} = \langle abc - de \rangle$. Isso decorre do fato de que os subcaminhos maximais da relação binomial $abc - de$ daquele exemplo se tornaram relações monomiais nesta álgebra *string*. Portanto, como os passeios que contêm subcaminhos maximais não são *string*, também não os serão nesta álgebra. A relação entre estas álgebras, bisserial especial e *string*, será fundamental no próximo capítulo.

3.1 Módulos Indecomponíveis

Como um caso particular de álgebras bisseriais especiais, também podemos construir módulos *string* e módulos *band* de álgebras *string*. Se A for uma álgebra *string*, veremos que estes módulos são todos os A -módulos indecomponíveis, a menos de isomorfismos. Esse resultado foi primeiramente obtido por Gel'fand e Ponomarev [11], em 1968, num outro contexto.

Teorema 31 (veja [6] e [16]) *Seja $A \cong K(Q, \mathcal{I})$ uma álgebra *string*. Os módulos *string* $M(S)$, com $S \in \mathcal{S}$, e os módulos *band* $M(S', \varphi)$, com $S' \in \mathcal{S}'$ e φ um automorfismo de um K -espaço vetorial V , formam um conjunto completo de A -módulos indecomponíveis, a menos de isomorfismos.*

3.1.1 Projetivos e Injetivos Indecomponíveis

Seja $A \cong K(Q, \mathcal{I})$ uma álgebra *string*. Para cada vértice $i \in Q_0$, sabemos que a representação $P(i)$, cujos espaços vetoriais referentes a cada vértice $j \in Q_0$ são dados por $P(i)_j = K[Q(i, j)]$ e cujas aplicações lineares referentes a cada flecha α , nas respectivas bases, são dadas por $Q(i, \alpha)$ (como abordamos na página 14) é uma representação projetiva. Portanto, da equivalência $\text{mod } A \sim \text{rep}_K(Q, \mathcal{I})$, esta representação corresponde a um módulo projetivo. Veremos que ele é um módulo *string* e como caracterizá-lo.

Exemplo 32 Seja A a álgebra string definida pelo quiver com relações a seguir.

$$1 \begin{array}{c} \xleftarrow{b} \\ \xleftarrow{d} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xleftarrow{a} \\ \xleftarrow{c} \end{array} 3 \quad \mathcal{I} = \langle ab, cd \rangle$$

Aplicando os resultados da Subseção 1.3.1, o módulo projetivo $P(3)$ é dado por

$$P(3) : \quad K^2 \begin{array}{c} \xleftarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \\ \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \end{array} K^2 \begin{array}{c} \xleftarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \\ \xleftarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}} \end{array} K$$

O cálculo dos caminhos partindo de 3 para os demais vértices pode ser visualizado na representação gráfica abaixo.

$$1 \xleftarrow{d} 2 \xleftarrow{a} 3 \xrightarrow{c} 2 \xrightarrow{b} 1$$

Esta representação gráfica está associada à string $S = d^{-1}a^{-1}cb$ e corresponde a string de comprimento maximal formados à esquerda e à direita partindo do vértice 3. Observe que o módulo string $M(S)$ é exatamente $P(3)$ e isto segue da construção de módulos string. Isto não é uma coincidência.

Proposição 33 (veja [6]) Para cada vértice $i \in Q_0$, os correspondentes módulos projetivo P_i e injetivo I_i são módulos string determinados por string S e S' de comprimento maximal da forma abaixo.

$P_i = M(S)$, onde $S = S_1S_2$, com S_1 inversa ou trivial, S_2 direta ou trivial e $t(S_1) = i = s(S_2)$.

$I_i = M(S')$, onde $S' = S'_1S'_2$, com S'_1 direta ou trivial, S'_2 inversa ou trivial e $t(S'_1) = i = s(S'_2)$.

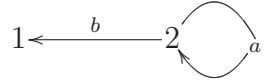
Exemplos 34 Considere as álgebras string definidas pelos quivers com relações (Q, \mathcal{I}) abaixo.

$$(a) \quad 1 \begin{array}{c} \xleftarrow{b} \\ \xleftarrow{d} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xleftarrow{a} \\ \xleftarrow{c} \end{array} 3 \quad \mathcal{I} = \langle ab, cd \rangle$$

Observe que a string inversa $S_1 = d^{-1}a^{-1}$ termina no vértice 3 e não pode ser composta à esquerda por nenhuma inversa de flecha. Por outro lado, a string $S_2 = cb$ começa no vértice 3 e possui comprimento maximal como string direta.

Portanto, pela Proposição 33, o módulo projetivo $P_3 = M(d^{-1}a^{-1}cb)$. Com esse raciocínio, os módulos abaixo são seus projetivos e injetivos indecomponíveis.

$$\begin{array}{ll} P_1 = M(e_1) & I_1 = M(adb^{-1}c^{-1}) \\ P_2 = M(b^{-1}d) & I_2 = M(ac^{-1}) \\ P_3 = M(d^{-1}a^{-1}cb) & I_3 = M(e_3) \end{array}$$

(b)  $\mathcal{I} = \langle a^2 \rangle$

Note que a string direta de comprimento maximal que termina no vértice 1 é $S_1 = ab$. No entanto, não existe string não trivial inversa que composta com S_1 continue sendo uma string. Portanto, pela proposição 33 o módulo injetivo $I_1 = M(ab)$. De maneira análoga, obtemos seus módulos projetivos e os demais injetivos, como listados abaixo.

$$\begin{array}{ll} P_1 = M(e_1) & I_1 = M(ab) \\ P_2 = M(b^{-1}ab) & I_2 = M(a) \end{array}$$

3.2 Morfismos Irredutíveis

Para descrevermos os morfismos irredutíveis em álgebras *string* será necessário compreendermos como acontece a composição de uma string com as *string* triviais. Para isso, definiremos duas aplicações que “polarizam” o quiver.

Polarização do Quiver: Seja $A \cong K(Q, \mathcal{I})$ uma álgebra bisserial especial. Uma polarização do quiver é formada por duas aplicações de polarização (não únicas) $\sigma, \varepsilon : Q_1 \longrightarrow \{-1, 1\}$ que satisfazem:

- (i) dadas duas flechas $\alpha_1 \neq \alpha_2$ tais que $s(\alpha_1) = s(\alpha_2)$, então $\sigma(\alpha_1) = -\sigma(\alpha_2)$;
- (ii) dadas duas flechas $\beta_1 \neq \beta_2$ tais que $t(\beta_1) = t(\beta_2)$, então $\varepsilon(\beta_1) = -\varepsilon(\beta_2)$;
- (iii) se α e β são duas flechas tais que $t(\alpha) = s(\beta)$ e $\alpha\beta \notin \mathcal{I}$, então $\varepsilon(\alpha) = -\sigma(\beta)$;
- (iv) seja $i \in Q_0$ um vértice em que existe uma única flecha $\alpha \in Q_1$ tal que $t(\alpha) = i$ e uma única flecha $\beta \in Q_1$ tal que $s(\beta) = i$. Se $\alpha\beta \in \mathcal{I}$, então $\varepsilon(\alpha) = \sigma(\beta)$.

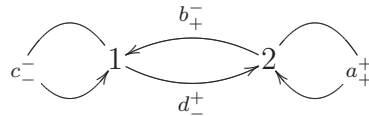
Para simplificar a notação, os sinais $+$ e $-$ serão usados no lugar de $+1$ e -1 da polarização, respectivamente. Desse modo, adotaremos a notação gráfica $\alpha_{\varepsilon(\alpha)}^{\sigma(\alpha)}$ para indicar a polarização de uma flecha α . Definimos também a polarização da

sua inversa formal por $\sigma(\alpha^{-1}) = \varepsilon(\alpha)$ e $\varepsilon(\alpha^{-1}) = \sigma(\alpha)$, denotando graficamente por $(\alpha^{-1})_{\sigma(\alpha)}^{\varepsilon(\alpha)}$. Estendemos estas aplicações para *string*. Para a *string* trivial definimos $\sigma(e_i) = +1$ e $\varepsilon(e_i) = -1$, enquanto para sua inversa $\sigma(e_i^{-1}) = -1$ e $\varepsilon(e_i^{-1}) = +1$. Dada uma *string* não trivial $S = s_1 \dots s_n$, definimos $\sigma(S) = \sigma(s_1)$ e $\varepsilon(S) = \varepsilon(s_n)$. Já vimos que a justaposição de duas *string* não triviais S e S' está bem definida se, e somente se, SS' é uma *string*. Podemos verificar que isso é coerente com a definição de polarização, pois SS' é uma *string* se, e somente se, $\varepsilon(S) = -\sigma(S')$. Assim, neste caso, definimos a composição $S \cdot S' = SS'$. Estendemos a composição para o caso em que S ou S' são triviais. Se $S = e_i$, $s(S') = i$ e $\sigma(S') = +1$, então definimos $e_i \cdot S' = S'$. Se $S' = e_i$, $t(S) = i$ e $\varepsilon(S) = -1$, definimos $S \cdot e_i = S$. De modo similar, definimos as composições pela inversa da *string* trivial.

Exemplo 35 *Seja A a álgebra string definida pela álgebra de caminhos do quiver com relações a seguir.*



Vamos polarizar o quiver. Definimos $\sigma, \varepsilon : Q_0 \longrightarrow \{-1, +1\}$ duas aplicações que satisfazem as condições da definição. Como as flechas a e b têm início no mesmo vértice ($s(a) = s(b) = 2$), temos $\sigma(a) = -\sigma(b)$. De forma análoga, $\sigma(c) = -\sigma(d)$. Por outro lado, as flechas a e d possuem o mesmo final ($t(a) = t(d) = 2$), assim $\varepsilon(a) = -\varepsilon(d)$. Analogamente para as flechas b e c , obtemos $\varepsilon(b) = -\varepsilon(c)$. Além disso, $ab, bc, cd, da \notin \mathcal{I}$, logo $\varepsilon(a) = -\sigma(b)$, $\varepsilon(b) = -\sigma(c)$, $\varepsilon(c) = -\sigma(d)$ e $\varepsilon(d) = -\sigma(a)$, respectivamente. Como as aplicações de polarização σ e ε não são únicas, podemos escolher $\sigma(a) = +1$, conseqüentemente, $\sigma(b) = -1$ e $\varepsilon(d) = -1$. Desta última, temos $\varepsilon(a) = +1$. Como não há mais nenhuma condição que dependa da escolha realizada, devemos efetuar uma nova escolha. Escolhendo $\sigma(c) = -1$, obtemos que $\sigma(d) = +1$, conseqüentemente, $\varepsilon(c) = -1$ e $\varepsilon(b) = +1$. Desta forma, obtemos o quiver polarizado abaixo.



Alguns conceitos serão necessários para descrevermos morfismos irredutíveis de uma álgebra *string*.

Definição (cume e abismo): Seja $A \cong K(Q, \mathcal{I})$ uma álgebra *string*. Seja S uma *string*.

(a) Dizemos que S começa em um cume (resp. S termina em um cume) se não existe uma flecha $\alpha \in Q_1$ tal que $\alpha \cdot S$ (resp. $S \cdot \alpha^{-1}$) é uma *string*.

(b) Dizemos que S começa em um abismo (resp. S termina em um abismo) se não existe uma flecha $\beta \in Q_1$ tal que $\beta^{-1} \cdot S$ (resp. $S \cdot \beta$) é uma *string*.

Exemplo 36 Seja A a álgebra string definida pela álgebra de caminhos do quiver com relações a seguir, já polarizado.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{1} \\ \curvearrowleft \end{array} & \xleftarrow{b_+^-} & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{2} \\ \curvearrowleft \end{array} \\
 c_-^- & & a_+^+
 \end{array} \quad \mathcal{I} = \langle a^2, c^2 \rangle \quad (3.1)$$

Observe que a *string* e_1 não começa em um cume, pois como $\varepsilon(c) = -\sigma(e_1)$, temos $c \cdot e_1 = c$ é *string*, e também não termina em um cume, uma vez que $e_1 \cdot b^{-1} = b^{-1}$ também é *string*. Por outro lado, a *string* e_1^{-1} também não começa nem termina em um cume, pois $b \cdot e_1^{-1} = b$ e $e_1^{-1} \cdot c^{-1} = c^{-1}$ são *string*, respectivamente. A *string* e_2 começa mas não termina em um cume, já que $e_2 a^{-1} = a^{-1}$ é *string*. Agora, a *string* e_2^{-1} não começa mas termina em um cume, visto que $a e_2^{-1} = a$ é *string*. Neste exemplo, podemos perceber quais flechas podem ser compostas com as *string* triviais. Veremos mais adiante a importância dessa verificação.

Sejam duas *string* $E = s_1 \dots s_m$ e $F = c_1 \dots c_n$, com $m, n > 0$ e seja β uma flecha tal que $E\beta F$ é uma *string* que, conseqüentemente, tem comprimento $m + n + 1$. De acordo com a construção dos módulos *string* $M(F)$ e $M(E\beta F)$, considere que os elementos z_1, z_2, \dots, z_{n+1} estejam associados aos vértices de E e que $z'_1, z'_2, \dots, z'_{m+n+2}$ correspondem aos vértices de $E\beta F$. Assim, obtemos uma imersão $\langle z_1, z_2, \dots, z_{n+1} \rangle \hookrightarrow \langle z'_1, z'_2, \dots, z'_{m+n+2} \rangle$ que leva cada elemento z_i em z'_i , para $1 \leq i \leq n + 1$. Esta imersão induz uma inclusão em cada subespaço (de cada vértice) e pode-se verificar que tais inclusões formam um morfismo $M(F) \hookrightarrow M(E\beta F)$ chamado *imersão canônica*.

Por outro lado, se fizermos o quociente $M(E\beta F)/M(F)$ obteremos exatamente o módulo $M(E)$, o que induz um morfismo de $M(E\beta F)$ em $M(E)$ que leva cada elemento z'_{n+1+i} em \bar{z}_i , para $1 \leq i \leq m + 1$. Tal aplicação é denominada *projeção canônica*. Vamos constatar, no próximo lema, que algumas imersões e projeções canônicas são morfismos irredutíveis.

Seja S uma *string* que não começa (resp. não termina) em um cume, então existe uma flecha $\beta_0 \in Q_1$ tal que $\beta_0 S$ (resp. $S\beta_0^{-1}$) é uma *string*, a qual levamos a começar (resp. terminar) em um abismo acrescentando, se possível, todas as composições de inversas flechas (resp. flechas) permitidas. Assim, obtemos o operador

$${}_h S := \beta_r^{-1} \dots \beta_1^{-1} \beta_0 \cdot S \quad (\text{resp. } S_h := S \cdot \beta_0^{-1} \beta_1 \dots \beta_r) .$$

Dualmente, se S não começa (resp. não termina) em um abismo, temos $\gamma_0^{-1}S$ (resp. $S\gamma_0$) é uma *string*, para alguma $\gamma_0 \in Q_1$, levando-a a começar (resp. terminar) em um cume, obtemos o operador abaixo.

$${}_cS := \gamma_r \dots \gamma_1 \gamma_0^{-1} \cdot S \quad (\text{resp. } S_c := S \cdot \gamma_0 \gamma_1^{-1} \dots \gamma_r^{-1})$$

Lema 37 (veja [6]) *Seja $A \cong K(Q, \mathcal{I})$ uma álgebra string.*

(a) *Se S é uma string que não começa (resp. não termina) em um cume, então a imersão canônica $0 \rightarrow M(S) \rightarrow M({}_hS)$ (resp. $0 \rightarrow M(S) \rightarrow M(S_h)$) é irredutível na categoria de A -módulos.*

(b) *Se S é uma string que não começa (resp. não termina) em um abismo, então a projeção canônica $M({}_cS) \rightarrow M(S) \rightarrow 0$ (resp. $M(S_c) \rightarrow M(S) \rightarrow 0$) é irredutível na categoria de A -módulos.*

Em [6], a demonstração deste lema foi baseada em propriedades de certos funtores que foram obtidas por Ringel em [16].

Exemplo 38 *Na álgebra de caminhos do exemplo 36, já sabemos que a string $S = e_1$ não começa nem termina em cume. Com isso, temos*

$${}_hS = c \cdot e_1 = c \quad e \quad S_h = e_1 \cdot b^{-1}abc = b^{-1}abc.$$

Observe que a string c já começa em um abismo, por isso, não foi necessário compô-la com inversas de flechas à esquerda. A imersão canônica no vértice 1 é dada por $f_1 : \langle z_1 \rangle \rightarrow \langle z'_1, z'_2 \rangle$ tal que $f_1(z_1) = z'_2$, daí obtemos

$$\begin{array}{ccc} M(S) : & \begin{array}{ccc} \textcircled{K} & \xleftarrow{0} & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \textcircled{K} & \xleftarrow{(0 \ 1)} & 0 \end{array} \\ & & \\ M({}_hS) : & \begin{array}{ccc} \textcircled{K^2} & \xleftarrow{0} & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \textcircled{K^2} & \xleftarrow{0} & 0 \end{array} \end{array}$$

3.3 Sequências de Auslander-Reiten

Nesta seção, vamos descrever sequências de Auslander-Reiten em álgebras *string*. Como vimos, na Seção 3.1 deste capítulo, na categoria de módulos de uma álgebra *string*, os módulos *string* e os *band* formam um conjunto completo de módulos indecomponíveis, a menos de isomorfismos. Descreveremos separadamente as sequências de Auslander-Reiten envolvendo módulos *string* das que envolvem módulos *band*.

Sequências com 1 termo central indecomponível: Sejam $A \cong K(Q, \mathcal{I})$ uma álgebra *string* e $\beta \in Q_1$ uma flecha. Como A tem dimensão finita, podemos compor a flecha β quantas vezes for possível de modo a obtermos uma *string* de comprimento maximal da forma

$$\beta_{uv} := \underbrace{\alpha_1^{-1} \dots \alpha_r^{-1}}_u \cdot \beta \cdot \underbrace{\gamma_1^{-1} \dots \gamma_k^{-1}}_v,$$

ou seja, de modo que β_{uv} começa em um abismo e termina em um cume, podendo u e v serem triviais. Como a *string* u não termina em um abismo, já que $u\beta$ é *string*, temos $u_c = u \cdot \beta \cdot v$. Pelo Lema 37, obtemos que o morfismo $M(u \cdot \beta \cdot v) \rightarrow M(u) \rightarrow 0$ é irreduzível em mod A . Por outro lado, como βv é *string*, a *string* v não começa em um cume. Logo, ${}_h v = u \cdot \beta \cdot v$, conseqüentemente, $0 \rightarrow M(v) \rightarrow M(u \cdot \beta \cdot v)$ é irreduzível em mod A . Portanto, cada flecha $\beta \in Q_1$ induz uma seqüência

$$0 \longrightarrow M(v) \xrightarrow{i} M(u\beta v) \xrightarrow{p} M(u) \longrightarrow 0,$$

que é exata curta, pois as aplicações i e p são imersão e projeção, respectivamente, e $\text{Im } i = M(v) = \text{Ker } p$. Além disso, pelo Teorema 20 esta seqüência é de Auslander-Reiten, uma vez que é formada por morfismos irreduzíveis e os módulos $M(v)$ e $M(u)$ são indecomponíveis. Desta forma, obtemos a seguinte proposição.

Proposição 39 *Seja $A \cong K(Q, \mathcal{I})$ uma álgebra string. Cada flecha $\beta \in Q_1$ induz uma seqüência de Auslander-Reiten*

$$0 \longrightarrow M(v) \longrightarrow M(u \cdot \beta \cdot v) \longrightarrow M(u) \longrightarrow 0,$$

onde u e v são *string* inversas, tais que $u \cdot \beta \cdot v$ é uma *string* que começa em abismo e termina em cume.

Posteriormente, constataremos que as seqüências de Auslander-Reiten induzidas por flechas são as únicas que contêm módulos *string* onde o termo central é indecomponível.

Exemplo 40 *Considere a álgebra de caminhos do exemplo 36. Para a flecha a , temos*

$$a_{uv} = \underbrace{c^{-1}b^{-1}}_u \cdot a \cdot \underbrace{e_2^{-1}}_v.$$

Note que a *string* a_{uv} começa em um abismo e termina em um cume. Como $e_2^{-1} \sim e_2$, $c^{-1}b^{-1} \sim_s bc$ e $c^{-1}b^{-1}a \sim_s a^{-1}bc$, obtemos a seqüência de Auslander-Reiten abaixo

$$0 \longrightarrow M(e_2) \longrightarrow M(a^{-1}bc) \longrightarrow M(bc) \longrightarrow 0.$$

Para a flecha b , temos

$$b_{uv} = \underbrace{a^{-1}}_u \cdot b \cdot \underbrace{c^{-1}b^{-1}a^{-1}}_v$$

e, conseqüentemente, a seqüência de Auslander-Reiten

$$0 \longrightarrow M(abc) \longrightarrow M(abc b^{-1}a) \longrightarrow M(a) \longrightarrow 0 .$$

Similarmente, para a flecha c , obtemos

$$c_{uv} = \underbrace{e_1^{-1}}_u \cdot c \cdot \underbrace{b^{-1}a^{-1}}_v .$$

Logo,

$$0 \longrightarrow M(ab) \longrightarrow M(abc^{-1}) \longrightarrow M(e_1) \longrightarrow 0$$

é a seqüência de A.R. induzida pela flecha c .

Seqüências com dois termos centrais indecomponíveis: Agora, obteremos as seqüências de Auslander-Reiten que começam com um determinado módulo *string* $M(S)$, que não é o primeiro termo de uma seqüência induzida por flecha (visto que estas seqüências já foram descritas). Estas seqüências estão compreendidas em quatro casos.

Caso 1: S não começa e não termina em cume.

Como S não começa em um cume, $M(S)$ não é injetivo, uma vez que os injetivos são determinados por *string* $S' = S'_1 S''_2$ de comprimento maximal, onde S'_1 é direta ou trivial e S''_2 é inversa ou trivial. Logo, existe uma seqüência de Auslander-Reiten começando com o módulo $M(S)$. Se $M(S)$ fosse o primeiro termo de uma seqüência induzida por flecha, deveríamos ter $S \sim_s v$, onde v é uma *string* inversa de comprimento maximal ou trivial. Mas pelo fato de S não terminar em um cume, S ainda pode ser composta, à direita, por uma inversa de flecha. Conseqüentemente, $M(S)$ não pode ser primeiro termo de uma seqüência induzida por flecha. Podemos verificar facilmente que $({}_h S)_h = {}_h(S_h)$, assim defina ${}_h S_h = ({}_h S)_h = {}_h(S_h)$. Temos um isomorfismo $\frac{M({}_h S) \oplus M(S_h)}{M(S)} \cong M({}_h S_h)$ e, conseqüentemente, obtemos que a seqüência abaixo, cujos morfismos são induzidos por imersões canônicas, é exata.

$$0 \longrightarrow M(S) \longrightarrow M({}_h S) \oplus M(S_h) \longrightarrow M({}_h S_h) \longrightarrow 0$$

Além disso, a seqüência acima também é uma seqüência de Auslander-Reiten, pois

pelos Lemas 37, 19 e 18 seus morfismos são irredutíveis e, como já sabemos que $M(S)$ e $M({}_hS_h)$ são indecomponíveis, pelo Teorema 20, segue o resultado.

Caso 2: S não começa mas termina em cume.

Como S não começa em um cume, então existe uma flecha $\alpha \in Q_1$ tal que αS é *string*. Além disso, S não pode ser inversa de comprimento maximal ou trivial, pois caso contrário $M(S)$ é o primeiro termo da sequência induzida pela flecha α . Assim, S tem a forma $S = D\beta_0\beta_1^{-1} \dots \beta_r^{-1}$, onde β_0 é a última flecha (não inversa) de S , as β_i 's são flechas ou *string* triviais, para $1 \leq i \leq r$, e D é uma *string* (pode ser trivial). Daí, D não termina em um abismo, pois $D\beta_0$ é *string*. Logo, podemos levar $D\beta_0$ a terminar em um cume, de modo a obtermos $S = D_c$, o que nos garante que os morfismos $M(S) \rightarrow M(D) \rightarrow 0$ e $M({}_hS) \rightarrow M({}_hD) \rightarrow 0$ são irredutíveis. Como $s(S) = s(D)$ e S não começa em um cume, D também não começa. Logo, podemos levar αD a começar em um abismo, obtendo a *string* ${}_hD$. De forma similar ao Caso 1, a sequência

$$0 \rightarrow M(S) \rightarrow M({}_hS) \oplus M(D) \rightarrow M({}_hD) \rightarrow 0$$

é uma sequência exata. De novo, pelos Lemas 37, 19 e 18, os morfismos são irredutíveis e como $M(S)$ e $M({}_hD)$ são indecomponíveis, segue do Teorema 20 que a sequência acima também é uma sequência de Auslander-Reiten.

Caso 3: S começa mas não termina em cume.

Este caso é dual ao anterior, de modo que a *string* S deve ter a forma $S = \beta_1 \dots \beta_t \beta_0^{-1} D$, onde β_0^{-1} é a última inversa de flecha, as β_i 's são flechas ou *string* triviais, para $1 \leq i \leq t$, e D é uma *string* (pode ser trivial). Assim, $S =_c D$ e, conseqüentemente, os morfismos $M(S) \rightarrow M(D) \rightarrow 0$ e $M(S_h) \rightarrow M(D_h) \rightarrow 0$ são irredutíveis. Assim, temos a sequência exata

$$0 \rightarrow M(S) \rightarrow M(S_h) \oplus M(D) \rightarrow M(D_h) \rightarrow 0$$

começando com o módulo $M(S)$. De forma similar, esta sequência é de Auslander-Reiten.

Caso 4: S começa e termina em cume.

Como S começa e termina em cume, deve ser da forma $S = \alpha_1 \dots \alpha_k E \beta_1^{-1} \dots \beta_r^{-1}$, onde E é uma *string* e as composições entre as α 's e as β 's são maximais. Do fato de $M(S)$ não ser injetivo, a *string* E não pode ser trivial e, pela maximalidade das composições à direita e à esquerda de C , esta deve ter a forma $E = \alpha_0^{-1} D \beta_0$, onde D é uma *string* (pode ser trivial) e α_0, β_0 são flechas de Q_1 . Com isso, temos $S = \alpha_1 \dots \alpha_k \alpha_0^{-1} D \beta_0 \beta_1^{-1} \dots \beta_r^{-1}$. Logo, podemos levar $\alpha_0^{-1} D$ a começar em um cume e $D\beta_0$ a terminar em um cume, obtendo $S =_c D_c$. Conseqüentemente,

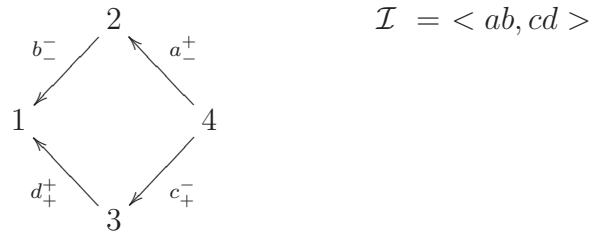
pelo Lema 37, $M(S) \rightarrow M({}_cD) \rightarrow 0$ e $M(S) \rightarrow M(D_c) \rightarrow 0$ são morfismos irredutíveis. Como no Caso 1, constatamos que

$$0 \rightarrow M(S) \rightarrow M({}_cD) \oplus M(D_c) \rightarrow M(D) \rightarrow 0$$

é uma seqüência exata. Além disso, de forma análoga aos casos anteriores, esta é uma seqüência de Auslander-Reiten.

As seqüências descritas nos quatro casos acima e as da Proposição 39 são todas as seqüências de Auslander-Reiten contendo módulos *string*. De fato, basta observar que se $M(S)$ não é um módulo injetivo, então a *string* S possui uma das formas acima. Diante disso, as seqüências de Auslander-Reiten contendo módulos *string*, com termo central indecomponível, são as seqüências induzidas por flechas, uma vez que as descritas nos quatro casos possuem dois termos centrais.

Exemplo 41 *Seja $A \cong K(Q, \mathcal{I})$ a álgebra string definida pelo quiver com relações abaixo, já polarizado.*



Da Proposição 33, os módulos projetivos e injetivos são

Projetivos

$$\begin{aligned} P_1 &= M(e_1) \\ P_2 &= M(b) \\ P_3 &= M(d) \\ P_4 &= M(a^{-1}c) \end{aligned}$$

Injetivos

$$\begin{aligned} I_1 &= M(bd^{-1}) \\ I_2 &= M(a) \\ I_3 &= M(c) \\ I_4 &= M(e_4). \end{aligned}$$

Pela Proposição 39 também obtemos as seqüências induzidas pelas flechas.

- **Flecha a :** *A string que começa em abismo e termina em cume obtida pela flecha a é $\underbrace{c^{-1}}_u \cdot a \cdot \underbrace{e_2}_v$. Desse modo obtemos a seqüência de Auslander-Reiten abaixo.*

$$0 \longrightarrow M(e_2) \longrightarrow M(a^{-1}c) \longrightarrow M(c) \longrightarrow 0$$

- **Flecha b:** $0 \longrightarrow M(d) \longrightarrow M(bd^{-1}) \longrightarrow M(e_2^{-1}) \longrightarrow 0$
- **Flecha c:** $0 \longrightarrow M(e_3^{-1}) \longrightarrow M(a^{-1}c) \longrightarrow M(a) \longrightarrow 0$
- **Flecha d:** $0 \longrightarrow M(b) \longrightarrow M(bd^{-1}) \longrightarrow M(e_3) \longrightarrow 0$.

Obtidas as seqüências induzidas pelas flechas, encontremos as demais seqüências começando em um módulo *string*. Como já conhecemos os módulos injetivos, não existem seqüências de Auslander-Reiten começando com os módulos $M(bd^{-1})$, $M(a)$, $M(c)$ e $M(e_4)$. Vamos aos demais.

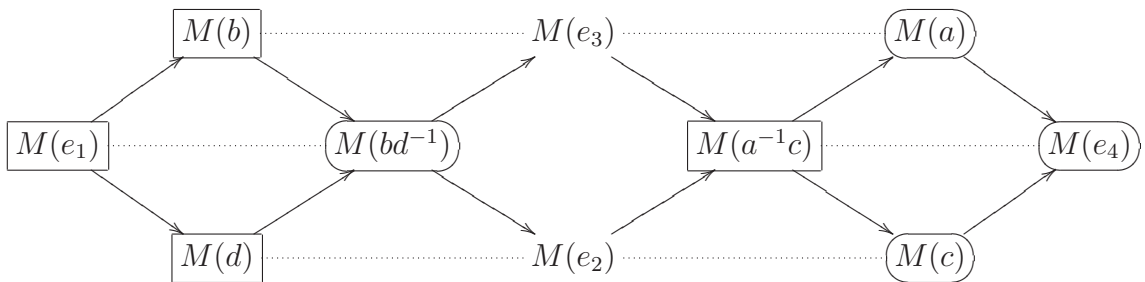
- A *string* $S = e_1$ não começa nem termina em um cume. Como ${}_h S = b \cdot e_1 = b$, $S_h = e_1 \cdot d^{-1} = d^{-1}$ e ${}_h S_h = b \cdot e_1 \cdot d^{-1} = bd^{-1}$, obtemos

$$0 \longrightarrow M(e_1) \longrightarrow M(b) \oplus M(d^{-1}) \longrightarrow M(bd^{-1}) \longrightarrow 0 \text{ .}$$

- A *string* $S = a^{-1}c$ começa e termina em cume. Fazendo $D = e_4^{-1}$, temos ${}_c D_c = a^{-1}e_4^{-1}c = S$. Daí,

$$0 \longrightarrow M(a^{-1}c) \longrightarrow M(a) \oplus M(c) \longrightarrow M(e_4^{-1}) \longrightarrow 0 \text{ .}$$

Como esta álgebra não possui band, os módulos *string* são os únicos indecomponíveis. Portanto, já temos todas as seqüências de Auslander-Reiten e o quiver de Auslander-Reiten abaixo.



De maneira dual à descrição dos quatro casos anteriores, podemos obter as seqüências de Auslander-Reiten que terminam em um módulo *string* $M(S)$, de modo que este não seja último termo de uma seqüência induzida por flecha nem um módulo projetivo. Esta descrição também está compreendida em quatro casos da forma abaixo.

Caso D1: S não começa nem termina em abismo.

$$0 \longrightarrow M({}_c S_c) \longrightarrow M({}_c S) \oplus M(S_c) \longrightarrow M(S) \longrightarrow 0$$

Caso D2: S não começa mas termina em abismo.

S tem a forma $S = D\gamma_0^{-1}\gamma_1 \dots \gamma_r$, onde γ_0^{-1} é a última inversa de flecha de S , as γ_i 's são flechas ou *string* triviais, $1 \leq i \leq r$, e D é uma *string* (pode ser trivial).

$$0 \longrightarrow M({}_c D) \longrightarrow M({}_c S) \oplus M(D) \longrightarrow M(S) \longrightarrow 0$$

Caso D3: S começa mas não termina em abismo.

S deve ter a forma $S = \gamma_1^{-1} \dots \gamma_t^{-1} \gamma_0 D$, onde as γ_i 's são flechas ou *string* triviais, para $1 \leq i \leq r$, γ_0 é a última flecha de S e D é uma *string* (pode ser trivial).

$$0 \longrightarrow M(D_c) \longrightarrow M(S_c) \oplus M(D) \longrightarrow M(S) \longrightarrow 0$$

Caso D4: S começa e termina em abismo.

S tem a forma $S = \beta_1^{-1} \dots \beta_k^{-1} \beta_0 D \gamma_0^{-1} \gamma_1 \dots \gamma_r$, onde β_0, γ_0 são flechas de Q_1 .

$$0 \longrightarrow M(D) \longrightarrow M({}_h D) \oplus M(D_h) \longrightarrow M(S) \longrightarrow 0 .$$

Já descrevemos as sequências de Auslander-Reiten envolvendo módulos *string*. Um fato conhecido (veja [6]) é que não existem morfismos irredutíveis entre módulos *band* e *string*, embora possam haver morfismos (redutíveis) entre módulos *string* e *band*, mas estes não aparecem no quiver de Auslander-Reiten. A seguir descreveremos as sequências de Auslander-Reiten que envolvem módulos *band*.

Proposição 42 *Se $M(S, \varphi)$ um módulo *band*, então $\tau M(S, \varphi) = M(S, \varphi)$.*

Daí, podemos afirmar que $T(N)$ é um módulo *band*. Fazendo a “colagem” dos primeiros e últimos termos, as componentes conexas contendo módulos *band* são formadas por 1-tubos, como veremos em breve. Os exemplos do Capítulo 5 ilustram estes fatos, os quais serão abordados com mais detalhes.

3.4 Morfismos entre Módulos *String*

Na seção anterior, dada uma álgebra *string* $A \cong K(Q, \mathcal{I})$, descrevemos morfismos irredutíveis entre A -módulos *string*. Nesta seção, apresentamos uma bonita técnica gráfica que permite construir bases para os espaços de morfismos $\text{Hom}_A(X, Y)$ entre dois A -módulos *string* X e Y quaisquer. Estas bases são formadas pelas chamadas “aplicações grafo”. Tal descrição foi obtida por Crawley-Boevey [7], em 1989, para o caso das álgebras de relação zero, nas quais as álgebras *string* são um caso particular.

Antes da formalização, ilustremos a construção de uma aplicação grafo.

Exemplo Ilustrativo. Seja $A \cong K(Q, \mathcal{I})$ a álgebra *string* definida pelo quiver com relações

$$1 \begin{array}{c} \xleftarrow{b} \\ \xleftarrow{c} \end{array} 2 \xleftarrow{a} 3 \qquad \mathcal{I} = \langle ac \rangle$$

Sejam as *string* $S = bc^{-1}b$ e $T = cb^{-1}a^{-1}$. Lembre que a construção dos respectivos módulos *string* é feita por meio dos gráficos abaixo.

$$\begin{array}{ccc} 2 \xrightarrow{b} 1 \xleftarrow{c} 2 \xrightarrow{b} 1 & 2 \xrightarrow{c} 1 \xleftarrow{b} 2 \xleftarrow{a} 3 \\ z_1 \xrightarrow{b} z_2 \xleftarrow{c} z_3 \xrightarrow{b} z_4 & z'_1 \xrightarrow{c} z'_2 \xleftarrow{b} z'_3 \xleftarrow{a} z'_4 \end{array}$$

Juntando as informações, obtemos os gráficos abaixo.

$$2_{z_1} \xrightarrow{b} 1_{z_2} \xleftarrow{c} 2_{z_3} \xrightarrow{b} 1_{z_4} \qquad 2_{z'_1} \xrightarrow{c} 1_{z'_2} \xleftarrow{b} 2_{z'_3} \xleftarrow{a} 3_{z'_4} .$$

Observe que as *string* $S' = bc^{-1}$ e $T' = cb^{-1}$ são *string* contidas em S e T , respectivamente, e ainda temos $S' \sim_s T'$. Além disso, note que toda flecha em S que termina num vértice de S' pertence a S' e que toda flecha em T que começa num vértice de T' pertence a T' . Um par (S', T') com essas propriedades é chamado *par admissível*. Construiremos a aplicação grafo f de $M(S)$ para $M(T)$ associada ao par admissível (S', T') exibindo, para cada vértice $i \in Q_0$, uma aplicação linear $f_i : M(S)_i \rightarrow M(T)_i$, definida nas suas respectivas bases.

- Vértice 1: Definimos $f_1 : \langle z_2, z_4 \rangle \rightarrow \langle z'_2 \rangle$ da seguinte forma: como os elementos z_2 e z'_2 se relacionam por \sim_s , pois seus respectivos vértices do quiver estão relacionados, fazemos $f_1(z_2) = z'_2$. Por outro lado, z_4 não está associado a um vértice de S' , assim fazemos $f_1(z_4) = 0$. Logo, a aplicação linear f_1 pode ser dada pela matriz $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Vértice 2: Definimos $f_2 : \langle z_1, z_3 \rangle \longrightarrow \langle z'_1, z'_3 \rangle$ como segue: de acordo com a relação de equivalência \sim_s , temos z_1 relacionado a z'_3 e z_3 relacionado a z'_1 . Assim, fazemos $f_2(z_1) = z'_3$ e $f_2(z_3) = z'_1$. Daí, f_2 pode ser dada pela $f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- Vértice 3: Como $f_3 : 0 \longrightarrow \langle z_4 \rangle$, temos $f_3 = 0$.

De acordo com o gráfico, olhando da esquerda para a direita, o par admissível S', T' está definido por $z_1 z_3 z'_1$, pois de z_1 até z_3 , temos a *string* S' , enquanto z'_1 é o início de T' , cujo comprimento é determinado pela equivalência $S' \sim_s T'$. Denotamos esta aplicação grafo associada ao par admissível (S', T') por $f(z_1 z_3 z'_1)$. Se dois elementos z_i e z'_k se relacionam, escreveremos $z_i \sim_s z'_k$. Deste modo, a aplicação grafo $f(z_1 z_3 z'_1) : M(S) \longrightarrow M(T)$ é dada por

$$\begin{array}{ccc}
 M(S) : & & K^2 \xleftarrow{\quad} K^2 \xleftarrow{\quad} 0 \\
 \downarrow f(z_1 z_3 z'_1) & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \quad \downarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \downarrow 0 \\
 M(T) & & K \xleftarrow{\quad} K^2 \xleftarrow{\quad} K
 \end{array}$$

É fácil ver que $f(z_1 z_3 z'_1)$ é um morfismo. Para cada par admissível, podemos construir uma aplicação grafo, de maneira similar. Neste exemplo temos apenas mais um par admissível, a saber o par (b, b^{-1}) definido por $z_3 z_4 z'_2$.

A formalização deste exemplo é dada a seguir. Sejam S' e T' duas *string* (podem ser triviais) contidas nas *string* S e T , respectivamente, tais que $S' \sim_s T'$. Se $S' = T'$, definimos que os vértices da *string* S' se relacionam com os vértices de T' a ordem em que estes aparecem (da esquerda para a direita). Se $S' = T'^{-1}$, definimos que os vértices de S' na ordem em que aparecem se relacionam com os de T' na ordem contrária, ou seja, da direita para a esquerda. Estendemos tais definições para os respectivos elementos z_i 's e z'_j 's.

A aplicação grafo $f(z_j z_k z'_p) : M(S) \longrightarrow M(T)$ correspondente ao par admissível (S', T') é dada em cada vértice $i \in Q_0$ por

$$\begin{aligned}
 f_i : M(S)_i &\longrightarrow M(T)_i \\
 z_r &\longmapsto \begin{cases} z'_t, & \text{se existe } z'_t \text{ tal que } z_r \sim_s z'_t \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}
 \end{aligned}$$

onde z_r e z'_t são elementos das bases de $M(S)_i$ e $M(T)_i$, respectivamente.

Crawley-Boevey mostrou que as aplicações grafos associadas aos pares admissíveis formam uma base para o espaço de morfismos entre dois módulos *string*.

Teorema 43 (veja [7]) *Seja $A \cong K(Q, \mathcal{I})$ uma álgebra string e sejam S e T duas string. O espaço de morfismos $\text{Hom}_A(M(S), M(T))$ entre os módulos string $M(S)$ e $M(T)$ tem como base as aplicações grafos da forma $f(z_j z_k z'_p)$ associadas ao pares admissíveis.*

Veja que os pares admissíveis podem ser visualizados no gráfico nas formas

$$\begin{array}{ccc} \leftarrow \alpha & \xrightarrow{S'} & \beta \rightarrow \\ \\ \gamma \rightarrow & \xrightarrow{T'} & \leftarrow \delta \end{array}$$

onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são flechas ou caminhos triviais e $S' \sim_s T'$.

Exemplo 44 *Considere a álgebra de caminhos do quiver com relações abaixo.*

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} 1 & \xleftarrow{b} & 2 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \\ & & \mathcal{I} = \langle a^2, c^2 \rangle \end{array}$$

Esta álgebra já foi abordada na página 38 e é uma álgebra string. Considere as string $S = b^{-1}abc$ e $T = abc^{-1}b^{-1}a$ que podem ser representadas graficamente por

$$S : 1_{z_1} \xleftarrow{b} 2_{z_2} \xrightarrow{a} 2_{z_3} \xrightarrow{b} 1_{z_4} \xrightarrow{c} 1_{z_5}$$

$$T : 2_{z'_1} \xrightarrow{a} 2_{z'_2} \xrightarrow{b} 1_{z'_3} \xleftarrow{c} 1_{z'_4} \xleftarrow{b} 2_{z'_5} \xrightarrow{a} 2_{z'_6}$$

Vamos obter uma base para o espaço $\text{Hom}_A(M(S), M(T))$. Observe que o par (b^{-1}, b) definido por $z_1 z_2 z'_2$ é admissível, pois

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xleftarrow{b} & \xrightarrow{a} \\ & S' & \\ \\ \xrightarrow{a} & \xrightarrow{b} & \xleftarrow{c} \\ & T' & \end{array}$$

Os demais pares admissíveis são encontrados de maneira similar. Assim, pelo Teorema 43, uma base de morfismos de $M(S)$ para $M(T)$ é dada por $\{f(z_2 z_2 z'_6)\}$,

$f(z_1z_2z'_2), f(z_2z_4z'_1)\}$, onde estas aplicações grafos são dadas, respectivamente, por

$$\begin{array}{ccc}
 M(S) : & \begin{array}{c} \curvearrowright K^3 \longleftarrow K^2 \curvearrowright \\ \downarrow \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \\
 f(z_2z_2z'_6) & & \\
 M(T) : & \begin{array}{c} \curvearrowright K^2 \longleftarrow K^4 \curvearrowright \\ \downarrow \\ 0 \end{array} &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 M(S) : & \begin{array}{c} \curvearrowright K^3 \longleftarrow K^2 \curvearrowright \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \\
 f(z_1z_2z'_2) & & \\
 M(T) : & \begin{array}{c} \curvearrowright K^2 \longleftarrow K^4 \curvearrowright \\ \downarrow \\ 0 \end{array} &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 M(S) : & \begin{array}{c} \curvearrowright K^3 \longleftarrow K^2 \curvearrowright \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} & \begin{array}{c} \\ \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \\
 f(z_2z_4z'_1) & & \\
 M(T) : & \begin{array}{c} \curvearrowright K^2 \longleftarrow K^4 \curvearrowright \\ \downarrow \\ 0 \end{array} &
 \end{array}$$

Exemplo 45 Seja A a álgebra de caminhos do quiver com relações abaixo.

$$\begin{array}{c} \curvearrowright \quad \curvearrowright \\ a \quad 1 \quad b \\ \curvearrowleft \quad \curvearrowleft \end{array} \quad \mathcal{I} = \langle a^3, b^3, ab, ba \rangle$$

Esta álgebra é uma álgebra string. Considere as string $S = b^2a^{-2}b^2$ e $T = a^{-2}ba^{-1}b^2$ representadas graficamente por

$$S : 1_{z_1} \xrightarrow{b} 1_{z_2} \xrightarrow{b} 1_{z_3} \xleftarrow{a} 1_{z_4} \xleftarrow{a} 1_{z_5} \xrightarrow{b} 1_{z_6} \xrightarrow{b} 1_{z_7}$$

$$T : 1_{z'_1} \xleftarrow{a} 1_{z'_2} \xleftarrow{a} 1_{z'_3} \xrightarrow{b} 1_{z'_4} \xleftarrow{a} 1_{z'_5} \xrightarrow{b} 1_{z'_6} \xrightarrow{b} 1_{z'_7} .$$

Pelo Teorema 43, uma base para o espaço de morfismos $\text{Hom}_A(M(S), M(T))$ é dada por

$$\{f(z_1 z_1 z'_1), f(z_1 z_1 z'_4), f(z_1 z_1 z'_7), f(z_5 z_5 z'_1), f(z_5 z_5 z'_4),$$

$$f(z_5 z_5 z'_7), f(z_1 z_2 z'_6), f(z_4 z_5 z'_1), f(z_4 z_7 z'_4), f(z_5 z_6 z'_6)\} .$$

Uma descrição gráfica similar para uma base do espaço de morfismos $\text{Hom}_A(M(S, \varphi), M(T, \psi))$ entre módulos *band* foi obtida, dois anos depois, por Henning Krause. O leitor interessado pode encontrá-la em [13].

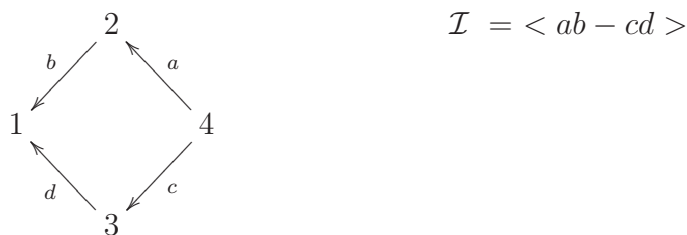
Capítulo 4

De Álgebras *String* para Bisseriais Especiais

Neste capítulo, vamos apresentar uma descrição dos módulos indecomponíveis e dos morfismos irredutíveis de álgebra bisseriais especiais. Para isso, partiremos da descrição realizada por Butler e Ringel [6] para álgebras *string* que foi abordada no Capítulo 3.

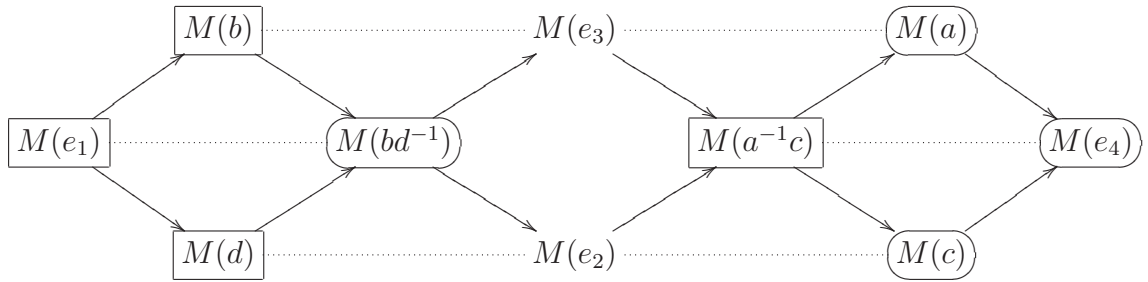
Veremos que a descrição de uma álgebra bisserial especial difere da descrição de uma determinada álgebra *string* a menos de suas relações binomiais, o que torna o estudo destas bem próximo. Vamos começar ilustrando a passagem de *string* para bisseriais especiais a partir de um exemplo simples.

Seja $A \cong K(Q, \mathcal{I})$ a álgebra bisserial especial definida pelo quiver com relações abaixo.

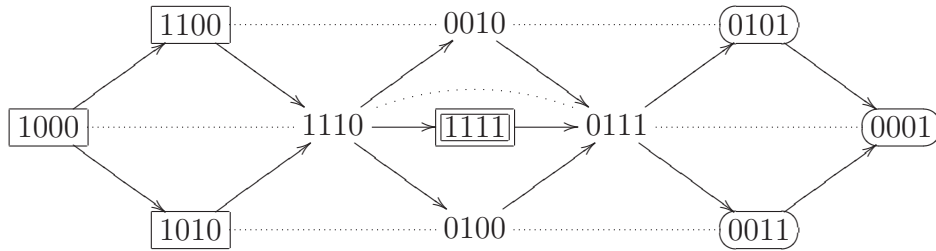


Observe que se S é uma *string*, então não possui como subcaminhos os subcaminhos maximais da relação binomial, isto é, os caminhos ab , cd e suas inversas não são subcaminhos de S (veja definição na página 24). Agora, considere a álgebra $\bar{A} \cong K(Q, \mathcal{I}')$, onde $\mathcal{I}' = \langle ab, cd \rangle$. Já descrevemos seu quiver de Auslander-Reiten no exemplo 41. Como as *string*, em \bar{A} , são aquelas que não contêm as relações monomiais ab e cd , as *string*, em A , são as mesmas de \bar{A} e, conseqüentemente, os módulos *string* também. Por outro lado, podemos descrever o quiver de Auslander-Reiten da álgebra A utilizando o método de tricotamento. Veja abaixo os quivers das duas álgebras.

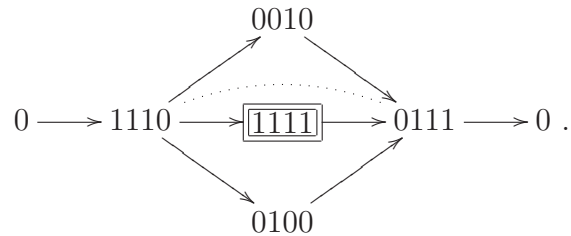
\bar{A} :



A :



Se compararmos os dois quivers de Auslander-Reiten percebemos que estes possuem uma estrutura muito parecida. Podemos verificar que os vetores dimensão de todos os A -módulos, exceto o módulo projetivo-injetivo $\boxed{1111}$, correspondem aos respectivos \bar{A} -módulos descritos em termos de *string*. Observe que, em A , temos uma sequência de Auslander-Reiten a mais do que em \bar{A} , a saber,

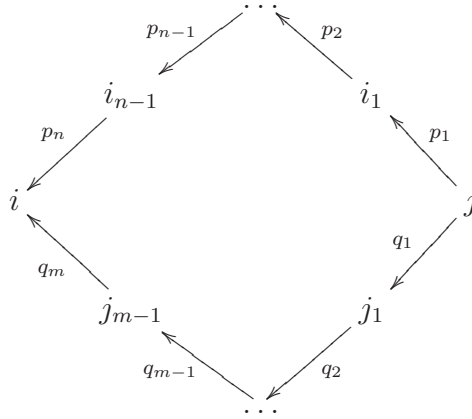


Em \bar{A} , o módulo correspondente ao vetor dimensão (1110) é o módulo *string* $M(bd^{-1})$, que é injetivo, o que justifica o fato de não existir sequência de Auslander-Reiten começando nele. De maneira dual, isto ocorre para o caso do módulo projetivo $M(a^{-1}c)$ cujo vetor dimensão correspondente é (0111) . Repare ainda que, em A , eles deixam de ser injetivo e projetivo e surge um novo módulo projetivo-injetivo.

Estes fatos não são coincidências. Veremos que, numa álgebra bisserial especial, para cada relação binomial, aparece um módulo projetivo-injetivo que não existia numa determinada álgebra *string* cuja categoria de módulos é parecida e este é o único a mais.

Lema 46 *Seja $A \cong K(Q, \mathcal{I})$ uma álgebra bisserial especial. Para cada relação binomial $\lambda p + \mu q \in \mathcal{I}$, com $\lambda, \mu \in K$ não nulos, existe um módulo projetivo-injetivo indecomponível $M(\lambda p + \mu q) = P_j = I_i$, onde $j = s(p) = s(q)$ e $i = t(p) = t(q)$.*

Demonstração: Sejam p e q caminhos em (Q, \mathcal{I}) tais que $p = p_1 \dots p_n$ e $q = q_1 \dots q_m$ contêm os vértices i_r, j_s 's (não necessariamente distintos), como no diagrama abaixo.



Suponha que exista um vértice $k \in Q_0$, tal que $k \notin \{i, j, i_r, j_s : 1 \leq r \leq n-1; 1 \leq s \leq m-1\}$. Vamos mostrar que não existem caminhos em (Q, \mathcal{I}) que partem do vértice j e chegam ao vértice k . Do fato de A ser bisserial especial, concluímos que qualquer caminho partindo de j deve passar por p_1 ou por q_1 , uma vez que o vértice j já é a origem dessas duas flechas. Além disso, a partir de um vértice i_r , $1 \leq r \leq n-1$, só se pode passar pela flecha p_{r+1} , pois qualquer outra composição $p_r \beta$, com $p_{r+1} \neq \beta \in Q_1$, deve pertencer ao ideal \mathcal{I} . De forma análoga ocorre para o caminho q . Logo qualquer caminho partindo de j deve conter todo o caminho p ou todo o caminho q . Por outro lado, se existir uma flecha $\alpha \in Q_1$ tal que $s(\alpha) = i$, $p_n \alpha \in \mathcal{I}$ ou $q_m \alpha \in \mathcal{I}$, digamos $p_n \alpha \in \mathcal{I}$, então $q \alpha = -\frac{\lambda}{\mu}(p \alpha) \in \mathcal{I}$. Com isso, não se pode chegar ao vértice $k \in Q_0$, se partirmos do vértice j . Portanto, não existem caminhos de j para k . E mais, do vértice j para um vértice i_r , $1 \leq r \leq n-1$, só existe o caminho $p_1 \dots p_r$, visto que $p_1 \dots p_{r-1} \gamma \in \mathcal{I}$, para qualquer $p_r \neq \gamma \in Q_1$. Por fim, de j para i , temos só o caminho $p = -(\frac{\mu}{\lambda})q$, enquanto de j para j apenas o caminho trivial e_j . Com um raciocínio similar, usando fortemente o fato de A ser bisserial especial, concluímos que não existem caminhos partindo de $k \in Q_0$, $k \notin \{i, j, i_r, j_s : 1 \leq r \leq n-1; 1 \leq s \leq m-1\}$ e chegando em i , enquanto de i_r ou j_s , $1 \leq r \leq n-1$ e $1 \leq s \leq m-1$, só existe um único caminho. Conseqüentemente, obtemos que o módulo projetivo P_j é igual ao injetivo I_i .

Observe que a demonstração do lema contém uma “receita” para construir o módulo projetivo-injetivo $I_i = P_j = M(\lambda p + \mu q)$.

Seja $A \cong K(Q, \mathcal{I})$ uma álgebra bisserial especial. Defina o conjunto ρ dos caminhos em Q que são subcaminhos maximais de relações binomiais ou são relações monomiais em \mathcal{I} . Considere o ideal \mathcal{I}' gerado por ρ . Claramente, $\overline{A} = K(Q, \mathcal{I}')$ é uma álgebra *string* e $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}'$, o que nos garante que todo \overline{A} -módulo pode ser visto como um A -módulo.

Do Capítulo 3, sabemos que os \overline{A} -módulos indecomponíveis são os módulos *string* e *band*. Em [20], Wald e Waschbüsch mostraram que, além destes, os indecomponíveis que aparecem em A são os projetivos-injetivos do Lema 46. A versão abaixo pode ser encontrada em [12].

Teorema 47 *Seja $A \cong K(Q, \mathcal{I})$ uma álgebra bisserial especial. Então os A -módulos indecomponíveis são os módulos *string*, os módulos *band* e um projetivo-injetivo $M(\lambda p + \mu q)$ correspondente a cada relação binomial $\lambda p + \mu q \in \mathcal{I}$.*

A comparação que fizemos no exemplo ilustrativo nos mostra ainda que os morfismos irredutíveis da álgebra *string* \overline{A} são irredutíveis na bisserial especial A . Este fato também é geral e pode ser constatado pelo resultado a seguir.

Lema 48 (veja [18]) *Se $f : X \rightarrow Y$ é um morfismo entre \overline{A} -módulos indecomponíveis, então $f \in \text{rad}_{\overline{A}}^n$ se, e somente se, $f \in \text{rad}_A^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

De acordo com o Lema 18, um morfismo f é irredutível se, e somente se, $f \in \text{rad}_A(X, Y) \setminus \text{rad}_A^2(X, Y)$. Pelo Lema 48, os morfismos irredutíveis em \overline{A} permanecem irredutíveis em A . Os demais morfismos irredutíveis de uma álgebra bisserial especial também foram descritos por Wald e Waschbüsch [20]. A versão abaixo pode ser encontrada em [18].

Lema 49 *O módulo projetivo-injetivo $M(\lambda p + \mu q)$ do Lema 46 aparece na sequência de Auslander-Reiten*

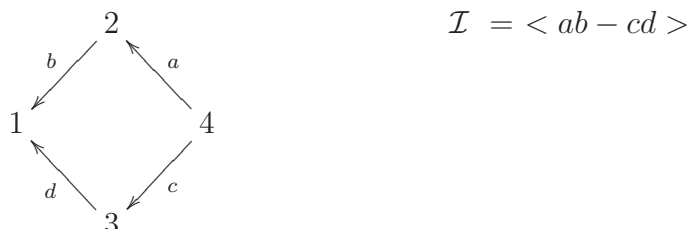
$$0 \longrightarrow M(C) \longrightarrow M(C_1) \oplus M(\lambda p + \mu q) \oplus M(C_2) \longrightarrow M(C') \longrightarrow 0$$

onde $C = p_2 \dots p_n q_m^{-1} \dots q_2^{-1}$, $C_1 = q_{m-1}^{-1} \dots q_2^{-1}$ ou *trivial*, $C_2 = p_2 \dots p_{n-1}$ ou *trivial* e $C' = q_{m-1}^{-1} \dots q_1^{-1} p_1 \dots p_{n-1}$ são *string* e os morfismos entre eles são os canônicos.

Demonstração: Para verificar que a sequência é exata, basta proceder como no Caso 1 da página 41. Pelo Lema 23, temos $\text{rad } M(\lambda p + \mu q) = M(C)$ e $\frac{M(\lambda p + \mu q)}{\text{soc } M(\lambda p + \mu q)} = M(C')$. Assim, a Proposição 24 nos garante que a imersão $M(C) \rightarrow M(\lambda p + \mu q)$ e a projeção $M(\lambda p + \mu q) \rightarrow M(C')$ são irredutíveis. Os demais morfismos são irredutíveis pelo fato de serem irredutíveis na álgebra *string*

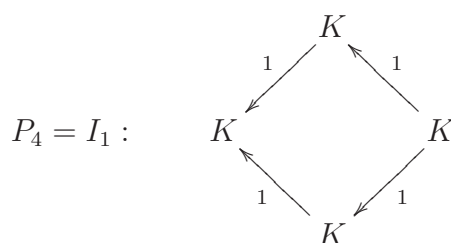
\overline{A} , como vimos no Lema 48. Concluimos que a sequência é de Auslander-Reiten pelo Teorema 20 e pelo Lema 19.

Exemplo 50 Já descrevemos o quiver de Auslander-Reiten da álgebra bisserial especial $A \cong K(Q, \mathcal{I})$



pelo método de tricotamento, que nem sempre é eficaz. Para simplificar, consideremos $\rho = ab - cd$ a relação binomial. Agora, ilustraremos o procedimento para encontrar seu quiver de Auslander-Reiten em termos de módulos string e do módulo $M(\rho)$, de acordo com os resultados desta seção. No Capítulo 5, utilizaremos este procedimento.

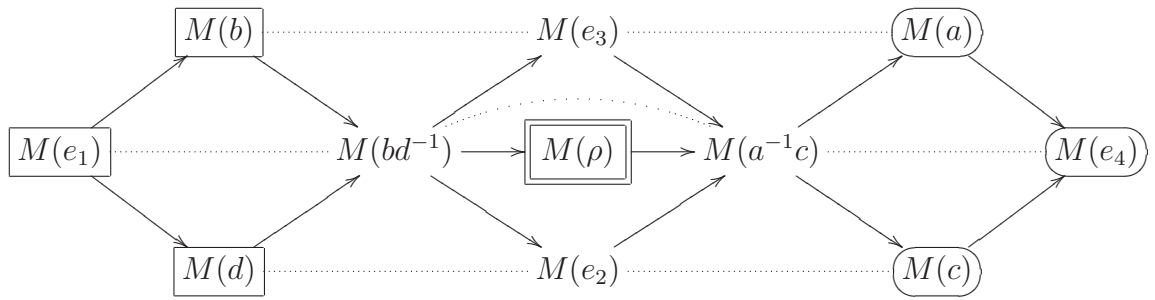
Pelo Lema 46, existe um módulo projetivo-injetivo indecomponível $M(\rho)$ referente à única relação binomial $\rho \in \mathcal{I}$. A demonstração deste lema nos mostra que o módulo $M(\rho)$ é equivalente à representação



O Lema 49 nos garante que este módulo aparece na seguinte sequência de Auslander-Reiten

$$0 \longrightarrow M(bd^{-1}) \longrightarrow M(e_3) \oplus M(\rho) \oplus M(a^{-1}c) \longrightarrow M(e_2) \longrightarrow 0$$

Por outro lado, os demais módulos indecomponíveis e demais morfismos irreduzíveis entre eles são os mesmos da álgebra string \overline{A} (descrição do Capítulo 3). Assim, basta “adicionarmos” a sequência de Auslander-Reiten acima ao quiver de A e obtemos



No próximo capítulo, aplicaremos esta técnica (como fizemos no último exemplo) para obter os módulos indecomponíveis e representantes de morfismos irredutíveis de algumas álgebras de grupo não semissimples.

Capítulo 5

Álgebras de Grupo

Neste capítulo, aplicaremos as técnicas de Teoria de Representações vistas nos capítulos anteriores para estudar as representações de algumas álgebras de grupo. As álgebras de grupo semissimples são aquelas cujas representações indecomponíveis são simples. Para estas álgebras de grupo, em geral, são aplicadas técnicas da Teoria Clássica de Representações. Veremos alguns exemplos de álgebras de grupo não semissimples. Uma classificação das álgebras de grupo semissimples é dada pelo Teorema de Maschke, enquanto o tipo de representação de uma álgebra de grupo é obtido pelo Teorema de Bondarenko e Drozd. Nas duas primeiras seções, abordaremos alguns resultados sobre álgebras de grupo, enquanto na terceira desenvolveremos uma aplicação em exemplos de álgebras de grupo que são bisseriais especiais.

5.1 Representações de Álgebras de Grupo

Neste capítulo, K denota um corpo algebricamente fechado, G um grupo finito e A uma K -álgebra. Considere o conjunto

$$AG = \left\{ \sum_{g \in G} a_g g : a_g \in A \right\}.$$

Neste conjunto, defina as respectivas operações de soma e multiplicação por:

$$\alpha + \beta = \left(\sum_{g \in G} a_g g \right) + \left(\sum_{g \in G} b_g g \right) = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g$$

e

$$\alpha \cdot \beta = \sum_{g \in G} \left(\sum_{h_1 h_2 = g \in G} a_{h_1} b_{h_2} \right) g.$$

Com essas operações, $(AG, +, \cdot)$ é um anel, o qual denominamos *anel de grupo de G sobre A* . Considerando ainda a multiplicação de um elemento $\lambda \in K$ por um elemento de AG dada por

$$\lambda \sum_{g \in G} a_g g = \sum_{g \in G} \lambda a_g g,$$

obtemos que AG possui uma estrutura de K -espaço vetorial induzida por A e, conseqüentemente, AG é uma K -álgebra de dimensão finita, cuja unidade é $1_{AG} = 1_A 1_G$. No caso em que $A = K$, dizemos que KG é uma *álgebra de grupo de G sobre K* . Dizemos que uma álgebra de grupo KG possui *tipo de representação finito* se possui um número finito de classes de isomorfismos de módulos indecomponíveis. Se KG não possui tipo de representação finito, dizemos que possui *tipo de representação infinito*. Estas são divididas em dois casos: as mansas e as selvagens. As álgebras de grupo do *tipo manso* são álgebras que possuem representações infinitas, mas “controláveis”, isto é, são possíveis de serem estudadas (parametrizadas). As do *tipo selvagem* são muito complicadas, estas são praticamente impossíveis de serem estudadas.

5.2 Álgebras de Grupo de Representação Finita

Nesta seção, vamos classificar as álgebras de grupo de tipo de representação finito. Os resultados desta seção foram baseados na quinta seção do Capítulo 5 de [1].

Seja H um subgrupo de G . Então a álgebra de grupo AH pode ser identificada como uma subálgebra da álgebra AG . Assim, temos uma restrição $\text{mod } AG \rightarrow \text{mod } AH$, definida naturalmente, levando um AG -módulo M em um AH -módulo, pela multiplicação (como AG -módulo) de um elemento $x \in AH$ por um elemento $m \in M$. Dado um AG -módulo M , ao longo do texto, ainda denotaremos por M o correspondente AH -módulo, porém deixaremos claro a estrutura do módulo pela qual o estaremos considerando.

Lema 51 *Sejam A uma K -álgebra, G um grupo finito e H um subgrupo de G . As seguintes implicações são válidas:*

(a) *Se AG tem tipo de representação finito, então AH também tem tipo de representação finito.*

(b) *Seja o índice $[G : H] = n$ de H em G . Se $s := n \cdot 1_A$ é um elemento invertível de A , então todo AG -módulo M_{AG} é isomorfo a um somando direto de $M \otimes_{AH} AG$. Em particular, se AH tem tipo de representação finito, então AG também tem tipo de representação finito.*

Demonstração: (a) Seja $\{M_1, \dots, M_t\}$ um conjunto completo de representantes das classes de isomorfismos de AG -módulos indecomponíveis. Considerando cada M_i como um AH -módulo e aplicando o Teorema de Krull-Schmidt para cada M_i , temos uma decomposição única (a menos de permutação de índices e de isomorfismos)

$$M_i \cong N_{i1} \oplus \dots \oplus N_{it_i},$$

onde cada N_{ij} é um AH -módulo indecomponível. Vamos mostrar que todo AH -módulo N indecomponível é isomorfo a um N_{ij} , para algum par (i, j) , com $1 \leq i \leq t$, $1 \leq j \leq t_i$. Em outras palavras, mostraremos que os AH -módulos N_{ij} 's formam um conjunto completo de representantes dos AH -módulos indecomponíveis, a menos de isomorfismos. Daí, teremos um número finito de indecomponíveis, conseqüentemente, AH terá tipo de representação finito. Para tanto, considere a aplicação K -linear:

$$p: \quad AG \quad \longrightarrow \quad AH$$

$$\sum_{g \in G} a_g g \quad \longmapsto \quad \sum_{h \in H} a_h h$$

Claramente, p é um epimorfismo. Além disso, p é uma retração de AH -módulos, já que no diagrama abaixo, onde i é a inclusão,

$$\begin{array}{ccc} & AH & \\ & \swarrow i & \parallel \\ AG & \xrightarrow{p} & AH \end{array}$$

temos $ip = 1_{AH}$. Se N é um AH -módulo indecomponível, aplicando o funtor (exato à direita) $N \otimes_{AH} -$, obtemos o epimorfismo de AH -módulos

$$1_N \otimes p: \quad N \otimes_{AH} AG_{AH} \longrightarrow N \otimes_{AH} AH_{AH} \cong N$$

que também é uma retração, o que pode ser verificado no diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} & N & \\ & \swarrow 1_N \otimes i & \parallel \\ N \otimes_{AH} AG_{AH} & \xrightarrow{1_N \otimes p} & N \end{array}$$

Daí, obtemos que N é isomorfo a um somando direto de $N \otimes_{AH} AG_{AH}$. No-

vamente, pelo Teorema de Krull-Schmidt, como o AG -módulo $N \otimes_{AH} AG_{AG}$ é isomorfo a uma soma direta dos módulos M_i 's, sendo que cada um destes, como um AH -módulo, é isomorfo a uma soma $N_{i1} \oplus \dots \oplus N_{it_i}$. Pela unicidade no Teorema de Krull-Schmidt e pelo fato de N ser indecomponível, temos $N \cong N_{ij}$, para algum par (i, j) , com $1 \leq i \leq t$, $1 \leq j \leq t_i$.

(b) Seja o índice $n = [G : H]$ de H em G e seja $s = n.1_A$. Considere $\{g_1, \dots, g_n\}$ um conjunto completo de representantes das classes laterais à esquerda de H em G . Dado um AG -módulo M_{AG} , definamos duas aplicações

$$f : M_{AG} \longrightarrow M \otimes_{AH} AG_{AG} \quad \text{e} \quad f' : M \otimes_{AH} AG_{AG} \longrightarrow M_{AG}$$

$$x \longmapsto \sum_{i=1}^n xg_i \otimes g_i^{-1} \qquad x \otimes g \longmapsto xgs^{-1}$$

onde $x \in M$ e $g \in G$. Observe que definimos f' sobre G , mas esta se estende para AG por linearidade. Mostremos que f' está bem definida no produto tensorial. Para isso, considere $\overline{f'} : M \times_{AH} AG_{AG} \longrightarrow M_{AG}$ tal que $(x, g) \longmapsto xgs^{-1}$, mostraremos que $\overline{f'}$ é balanceada. Sejam $a \in AG$, $x \in M$ e $g \in G$, então

$$\overline{f'}(xa, g) = xags^{-1} = xgas^{-1} = x(ga)s^{-1} = \overline{f'}(x, ga).$$

Segue da definição que f e f' são lineares. Mostremos que f e f' são AG -homomorfismos. De fato, podemos verificar que $s^{-1} \in Z(AG)$ e isso nos garante que, dado $b \in AG$, temos

$$f(xb) = \sum_{i=1}^n xbg_i \otimes g_i^{-1} = \sum_{i=1}^n x(bg_i) \otimes g_i^{-1} = \sum_{i=1}^n xg_i \otimes (g_i^{-1}b) = \left(\sum_{i=1}^n xg_i \otimes g_i^{-1} \right) b = f(x)b$$

$$\text{e } f'(x \otimes \overline{g}b) = x\overline{g}bs^{-1} = x\overline{g}s^{-1}b = f'(x \otimes \overline{g})b.$$

Além disso, temos $ff' = 1_M$. Com efeito, dado $x \in M$, temos

$$f'f(x) = f' \left(\sum_{i=1}^n xg_i \otimes g_i^{-1} \right) = \sum_{i=1}^n xg_i g_i^{-1} s^{-1} = xns^{-1} = x(n.1_A)s^{-1} = xss^{-1} = x.$$

Assim, f é seção e, portanto, M_{AG} é isomorfo a um somando direto de $M \otimes_{AH} AG_{AG}$.

Agora, suponhamos que AH tenha tipo de representação finito e seja $\{N_1, \dots, N_t\}$ um conjunto completo de representantes de classes de isomorfismos de AH -módulos indecomponíveis. Seja M um AG -módulo indecomponível. O Teorema de Krull-Schmidt nos garante que, como AH -módulo, temos

$$M_{AH} \cong N_1^{n_1} \oplus \dots \oplus N_t^{n_t},$$

onde $n_i \geq 0$ para cada $1 \leq i \leq t$. Como M_{AG} é isomorfo a um somando direto de $M \otimes_{AH} AG_{AG}$, temos M_{AG} isomorfo a um somando direto indecomponível de $\bigoplus_{i=1}^t (N_i \otimes_{AH} AG_{AG})^{n_i}$. Portanto, como a decomposição em AG -módulos é única, temos

$$(N_i \otimes_{AH} AG_{AG})^{n_i} \cong M_{i_1} \oplus \dots \oplus M_{i_{t_i}},$$

onde cada $M_{ij} \in \text{mod } AG$ é indecomponível. Consequentemente, $M \cong M_{ij}$, para algum par (i, j) , com $1 \leq i \leq t_i$. Com isso, a álgebra AG tem tipo de representação finito.

O Lema 51 permite uma prova rápida de uma condição suficiente para que uma álgebra de grupo seja semissimples, como mostra o corolário a seguir.

Corolário 52 *Seja G um grupo finito e K um corpo de característica p . Se p não divide a ordem de G , então a álgebra de grupo KG é semissimples.*

Demonstração: Aplicando o Lema 51 para $A = K$ e $H = \{e\}$, obtemos $AH \cong K$. Suponha $|G| = n$, então $[G : H] = n$. Seja $s = n \cdot 1_K$, como p não divide n , temos s não nulo em K e, como estamos em um corpo, temos s invertível. Consequentemente, podemos usar o item (b) do Lema 51 para garantir que todo KG -módulo indecomponível é isomorfo a um somando direto indecomponível de $K \otimes_K KG_{KG} \cong KG_{KG}$. Como KG_{KG} é projetivo, todo KG -módulo é semissimples, logo KG é semissimples (veja Teorema Wedderburn-Artin em [1], páginas 14-15).

Embora a recíproca do corolário não tenha sido demonstrada, vale ressaltar que a mesma também é válida. As condições necessária e suficiente formam o Teorema de Maschke que é uma caracterização das álgebras de grupo semissimples.

Teorema 53 *(Maschke, veja [15]) Sejam G um grupo finito e K um corpo de característica p . A álgebra de grupo KG é semissimples se, e somente se, p não divide a ordem de G .*

A Teoria Clássica de Representações de Álgebras de Grupo estuda os casos semissimples, nas quais as representações indecomponíveis são simples. Para algumas álgebras de grupo não semissimples, podemos aplicar os resultados obtidos nos

capítulos anteriores para álgebras bisseriais especiais, como faremos em breve. Agora, ainda estamos interessados em uma caracterização para álgebras de grupo de tipo de representação finito.

Nos lemas a seguir denotaremos o grupo cíclico de ordem p^m por C_{p^m} .

Lema 54 *Sejam K um corpo de característica $p > 0$. Então*

(a) *existe um isomorfismo de K -álgebras tal que $K(C_{p^m} \times C_{p^n}) \cong \frac{K[t_1, t_2]}{(t_1^{p^m}, t_2^{p^n})}$;*

(b) *existe um isomorfismo de K -álgebras tal que $KC_{p^m} \cong \frac{K[t]}{(t^{p^m})}$;*

(c) *a álgebra de grupo $K(C_p \times C_p)$ tem tipo de representação infinito.*

Demonstração:

(a) Sejam a e b geradores dos grupos cíclicos C_{p^m} e C_{p^n} , respectivamente. Considere o homomorfismo definido nos geradores

$$\begin{aligned} f : K[T_1, T_2] &\longrightarrow K(C_{p^m} \times C_{p^n}) \\ T_1 &\longmapsto (a, 1) \\ T_2 &\longmapsto (1, b) \end{aligned}$$

onde 1 representa o elemento neutro do grupo (ora em C_{p^m} ora em C_{p^n}). Daí, $f\left(\sum_{i,j} \lambda_{ij} T_1^i T_2^j\right) = \sum_{i,j} \lambda_{ij} (a^i, b^j)$, onde $\lambda_{ij} \in K$, para todo par (i, j) . Note que f é uma aplicação sobrejetora.

Além disso, o ideal $(T_1^{p^m} - 1, T_2^{p^n} - 1)$ está contido no núcleo de f . Com efeito, dado um elemento $p(T_1, T_2)(T_1^{p^m} - 1) + q(T_1, T_2)(T_2^{p^n} - 1)$ em $(T_1^{p^m} - 1, T_2^{p^n} - 1)$, onde $p(T_1, T_2), q(T_1, T_2) \in K[T_1, T_2]$ temos

$$\begin{aligned} f(p(T_1, T_2)(T_1^{p^m} - 1) + q(T_1, T_2)(T_2^{p^n} - 1)) &= f(p(T_1, T_2)T_1^{p^m} + q(T_1, T_2)T_2^{p^n} - \\ &= f(p(T_1, T_2)) - q(T_1, T_2)) = \\ &= f(p(T_1, T_2))(a^{p^m}, 1) + f(q(T_1, T_2))(1, b^{p^n}) - f(p(T_1, T_2))(1, 1) - f(q(T_1, T_2))(1, 1) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Desta forma, f induz um K -epimorfismo

$$\bar{f} : \frac{K[T_1, T_2]}{(T_1^{p^m} - 1, T_2^{p^n} - 1)} \longrightarrow K(C_{p^m} \times C_{p^n}).$$

Além disso, obtemos

$$\dim_K \frac{K[T_1, T_2]}{(T_1^{p^m} - 1, T_2^{p^n} - 1)} = p^{m+n} = \dim_K K(C_{p^m} \times C_{p^n}).$$

Portanto, \bar{f} é um isomorfismo. Fazendo a mudança de variáveis $t_1 = T_1 - 1$ e $t_2 = T_2 - 1$ e, como a característica do corpo K é p , temos $t_1^{p^m} = (T_1 - 1)^{p^m} = T_1^{p^m} - 1$ e $t_2^{p^n} = (T_2 - 1)^{p^n} = T_2^{p^n} - 1$. ¹

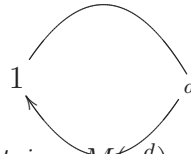
Daí, obtemos o isomorfismo $K(C_{p^m} \times C_{p^n}) \cong \frac{K[t_1 + 1, t_2 + 1]}{(t_1^{p^m}, t_2^{p^n})} \cong \frac{K[t_1, t_2]}{(t_1^{p^m}, t_2^{p^n})}$.

(b) Segue do item (a) quando fazemos $n = 0$.

(c) A inclusão $(t_1^p, t_2^p) \subseteq (t_1, t_2)^2$ induz um K -homomorfismo sobrejetor

$$K(C_p \times C_p) \cong \frac{K[t_1, t_2]}{(t_1^p, t_2^p)} \longrightarrow \frac{K[t_1, t_2]}{(t_1, t_2)^2} = A$$

que, por sua vez, induz uma imersão plena e fiel $\text{mod } A \rightarrow \text{mod } K(C_p \times C_p)$. Com isso, para mostrar que $\text{mod } K(C_p \times C_p)$ tem tipo de representação infinito, basta mostrar que $\text{mod } A$ o tem. Para isso, construiremos uma família infinita $\{M_d\}_{d \geq 1}$ de A -módulos indecomponíveis dois a dois não isomorfos. Seja $d \in \mathbb{N}$, com $d \geq 1$, considere o $K[t]$ -módulo $N_d = \frac{K[t]}{(t^d)}$ de dimensão d . Pode-se verificar que N_d é indecomponível como $K[t]$ -módulo, basta notar que $K[t]$ é uma álgebra string, pois é isomorfa à álgebra de caminhos



e que N_d é isomorfo ao módulo *string* $M(a^d)$. Além disso, temos $\text{End}_{K[t]} N_d \cong \frac{K[t]}{(t^d)}$. Agora, vamos definir uma estrutura de $K[t_1, t_2]$ -módulo sobre o espaço vetorial $M_d = N_d \oplus N_d$ por

$$\begin{aligned} M_d \times K[t_1, t_2] &\longrightarrow M_d \\ ((r, q), t_i) &\longmapsto \begin{cases} (r, q)t_i = (0, rt), & \text{se } i = 1 \\ (r, q)t_i = (0, r), & \text{se } i = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

¹Observe que $(T - 1)^m = \sum_{k=0}^m C_k^m T^{m-k} (-1)^k$. Se $m = p^n$ e $\text{car } K = p$, obtemos que $(T - 1)^{p^n} = T^{p^n} + (-1)^{p^n}$. Se $p \neq 2$, temos $(T - 1)^{p^n} = T^{p^n} - 1$. Agora, se $p = 2$, então $(T - 1)^{p^n} = T^{p^n} + 1 = T^{p^n} - 1$, pois como $\text{car } K = 2$, temos $+1 = -1$.

Para todo $(r, q) \in M_d$, temos $(r, q)t_1^2 = (0, rt)t_1 = (0, 0.t) = (0, 0)$, $(r, q)t_2^2 = (0, r)t_2 = (0, 0)$ e ainda $(r, q)t_1t_2 = (0, rt)t_2 = (0, 0)$. Assim, M_d é anulado pelo ideal $(t_1, t_2)^2$ e obtemos uma estrutura natural de A -módulos. Além disso, $\dim_K M_d = \dim_K N_d \oplus N_d = 2d$, logo os módulos M_d são dois a dois não isomorfos. Mostremos agora que, para qualquer $d \geq 1$, a álgebra de endomorfismos $\text{End}_A M_d$ é local, isto é, M_d é indecomponível como um A -módulo. Seja

$$f = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} : N_d \oplus N_d \longrightarrow N_d \oplus N_d$$

um K -endomorfismo linear do A -módulo $M_d = N_d \oplus N_d$, onde $f_{ij} : N_d \longrightarrow N_d$ são K -endomorfismos lineares de N_d . Sabemos que f é um A -homomorfismo se, e somente se, para quaisquer $r, q \in N_d$ tivermos $f((r, q)t_1) = (f(r, q))t_1$ e $f((r, q)t_2) = (f(r, q))t_2$. Como

$$f((r, q)t_1) = f(0, rt) = (f_{11}(0) + f_{12}(rt), f_{21}(0) + f_{22}(rt)) = (f_{12}(rt), f_{22}(rt))$$

$$(f(r, q))t_1 = (f_{11}(r) + f_{12}(q), f_{21}(r) + f_{22}(q))t_1 = (0, (f_{11}(r) + f_{12}(q))t),$$

temos f um A -homomorfismo desde que $f_{12} = 0$ e $f_{11} = f_{22}$ e f_{11} é um endomorfismo de N_d visto como um $K[t]$ -módulo. Analogamente para t_2 , obtemos as mesmas condições. Considere o K -homomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \varphi : & \text{End}_A M_d & \longrightarrow & \text{End}_{K[t]} N_d \cong \frac{K[t]}{(t^d)} \\ & f & \longmapsto & f_{11} \end{array} .$$

Note que φ é sobrejetora. De fato, dado $g \in \text{End}_{K[t]} N_d$, para $\bar{f} = \begin{bmatrix} g & 0 \\ f_{21} & g \end{bmatrix} \in \text{End}_A M_d$, temos $\varphi(\bar{f}) = g$. E mais, $\text{Ker}\varphi = \{f \in \text{End}_A M_d : f_{11} = f_{12} = f_{22} = 0\}$, daí

$$f \in \text{Ker}\varphi \Rightarrow f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ f_{21} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow f^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{0} . \quad (5.1)$$

Para mostrar que $\text{End}_A M_d$ é local, é suficiente mostrar que seus únicos idempotentes são o zero e a identidade. Seja $e \in \text{End}_A M_d$ um idempotente. Como $\varphi(e)$

é um idempotente da álgebra local $\text{End}_{K[t]} N_d$, temos $\varphi(e) = 0$ ou $\varphi(e) = 1_{N_d}$. Se $\varphi(e) = 0$, isto é, $e \in \text{Ker}\varphi$, da equação (5.1), temos $e^2 = 0$, logo $e = 0$. Caso $\varphi(e) = 1_{N_d}$, então $1_{M_d} - e \in \text{Ker}\varphi$ daí $1_{M_d} - e = (1_{M_d} - e)^2 = 0$ e, assim, $e = 1_{M_d}$.

Pela demonstração do item (c) do Lema 54, concluímos que $K(C_{p^m} \times C_{p^n})$ tem tipo de representação infinito, para quaisquer $m, n \geq 1$, uma vez que $(t_1^{p^m}, t_2^{p^n}) \subseteq (t_1, t_2)^2$. O isomorfismo do item (a) do Lema 54, nos será útil, em breve, para construir quivers com relações cujas álgebras de caminhos são isomorfas a álgebras de grupo da forma $K(C_{p^m} \times C_{p^n})$.

Finalmente, podemos caracterizar álgebras de grupo não semissimples de tipo de representação finito.

Teorema 55 (Higman, veja [1]) *Sejam G um grupo finito e K um corpo de característica $p > 0$ tal que p divide a ordem de G . A álgebra de grupo KG tem tipo de representação finito se, e somente se, os p -subgrupos de Sylow G_p de G são cíclicos.*

Demonstração: Sejam G um grupo finito e G_p um p -subgrupo de Sylow. Sendo $n = [G : G_p]$, considere o elemento $s = n \cdot 1_K$. Pela definição do p -subgrupo de Sylow G_p , p não divide n . Como $\text{car}(K) = p$, temos s invertível em K . Pelo Lema 51 (b), é suficiente mostrar que KG_p tem tipo de representação finito. Suponha então, sem perda de generalidade, $|G| = p^m$, $m > 0$. Se G_p é cíclico, então $G_p \cong C_{p^m}$. Daí, pelo Lema 54 (b), $KG_p \cong \frac{K[t]}{(t^{p^m})}$. É fácil verificar que esta álgebra é *string*, possui um número finito de representantes de *string* e não possui *band*, portanto KG_p tem tipo de representação finito.

Reciprocamente, suponha que G_p não é um grupo cíclico. Provaremos que KG_p tem tipo de representação infinito. Para tanto, provaremos que existe um epimorfismo $f : G \rightarrow C_p \times C_p$. Se G_p for um grupo abeliano, pelo Teorema Fundamental de Grupos Abelianos, temos $G \cong C_{p^{\alpha_1}} \times C_{p^{\alpha_2}} \times \dots \times C_{p^{\alpha_k}}$, onde ao menos duas potências distintas $\alpha_i, \alpha_j \geq 1$. Sem perda de generalidade, podemos supor $\alpha_1, \alpha_2 \geq 1$ e, daí, o epimorfismo é natural. Agora, no caso em que G_p não é um grupo abeliano, então $m \geq 3$. Provaremos a existência deste epimorfismo por indução sobre m . Se $m = 3$, então $G/Z(G)$ é não cíclico, daí $G/Z(G) \cong C_p \times C_p$. Logo $G \rightarrow G/Z(G)$ é o epimorfismo procurado. Suponha, por hipótese de indução, que existe um epimorfismo $f : H \rightarrow C_p \times C_p$, para todo grupo H tal que $|H| = p^t$, onde $3 \leq t < m$. Como G_p não é abeliano e $\bar{G} = \frac{G}{Z(G)}$ é um grupo não cíclico e não trivial de ordem p^k , onde $k < m$, por hipótese de indução, existe um epimorfismo $h : \bar{G} \rightarrow C_p \times C_p$. Assim, temos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f=\pi h} & C_p \times C_p \\ & \searrow \pi & \nearrow h \\ & \bar{G} & \end{array}$$

onde π é a projeção canônica. Como $f = \pi h$ é composição de epimorfismos, f é um epimorfismo. Assim, f induz um homomorfismo sobrejetor

$$KG \longrightarrow K(C_p \times C_p)$$

$$\sum_{g \in G} a_g g \longmapsto \sum_{g \in G} a_g f(g)$$

Consequentemente, induz um funtor K -linear pleno e fiel

$$\text{mod } K(C_p \times C_p) \longrightarrow \text{mod } KG$$

Pelo Lema 54(c), $K(C_p \times C_p)$ tem tipo de representação infinito, portanto KG também tem tipo de representação infinito.

Veremos a seguir uma classificação completa dos tipos de representação de álgebras de grupo não semissimples sobre corpos algebricamente fechados.

Teorema 56 (Bondarenko e Drozd [5], veja também [4]) *Sejam K um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$ e G um grupo finito tal que p divide $|G|$.*

(i) *Se os p -subgrupos de Sylow de G são cíclicos, então a álgebra de grupo KG tem tipo de representação finito.*

(ii) *Se $p = 2$ e os p -subgrupos de Sylow de G são diedrais, semidiedrais ou quartênios, então KG tem tipo de representação manso.*

(iii) *Em todos os outros casos, KG tem tipo de representação selvagem.*

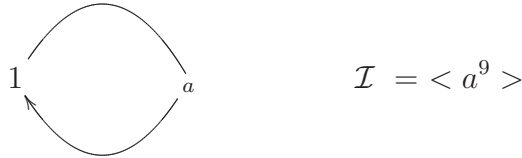
Observe que a maioria das álgebras de grupo são do tipo selvagem. Vamos a alguns exemplos finitos e mansos.

5.3 Exemplos

Baseados na classificação do Teorema 56, aplicaremos as técnicas de representações de álgebras bisseriais especiais abordadas nos capítulos anteriores para obtermos uma descrição dos módulos indecomponíveis e dos morfismos irreduzíveis de algumas álgebras de grupo.

5.3.1 Grupo Cíclico

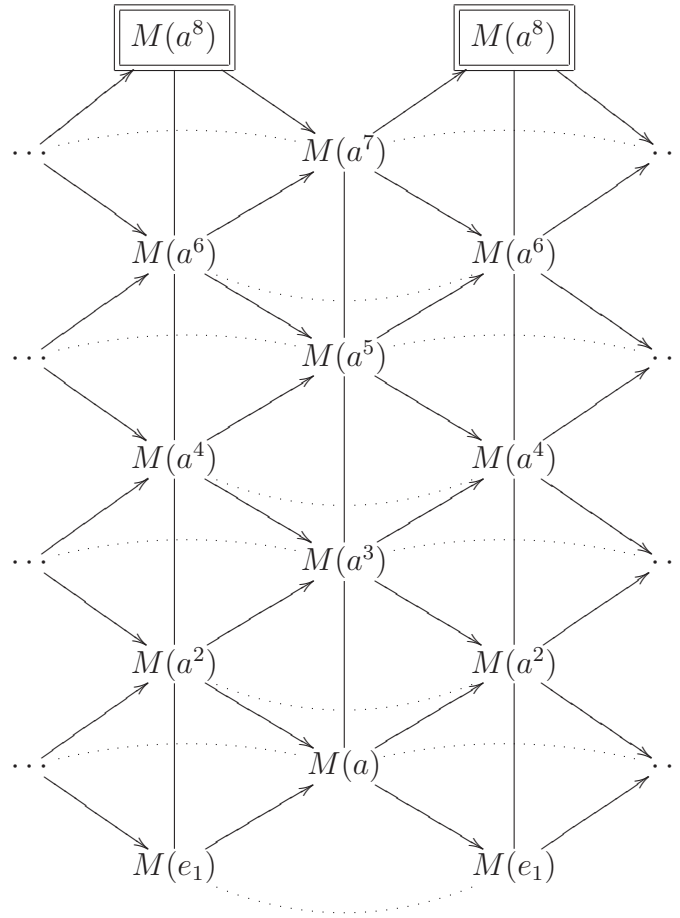
Seja K um corpo algebricamente fechado de característica $p = 3$. Considere o grupo cíclico C_9 de ordem 9. Pelo Teorema 53, a álgebra de grupo KC_9 é não semissimples, uma vez que a característica do corpo $p = 3$ divide a ordem de C_9 . Por outro lado, devido ao Teorema 56, esta álgebra de grupo possui tipo de representação finito, os 3-subgrupos de Sylow de C_9 são o próprio grupo. Pelo Lema 54 (b), temos o isomorfismo $KC_9 \cong \frac{K[t]}{(t^9)}$. A álgebra de polinômios $\frac{K[t]}{(t^9)}$ é isomorfa à álgebra de caminhos do quiver com relações



Observe que esta é uma álgebra *string*, cujos módulos indecomponíveis são módulos *string* e *band*. Um conjunto de representantes de *string* é dado por

$$\mathcal{S} = \{e_1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8\}$$

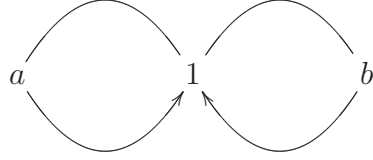
Além disso, não existem *band*, pois para nenhuma *string* (não trivial) S as potências S^n são *string* para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, a menos de isomorfismo, a álgebra de grupo KC_9 possui 9 módulos indecomponíveis. Pelas técnicas do Capítulo 3, obtemos que o quiver de Auslander-Reiten de KC_9 é descrito por



Em cada linha, aparecem repetições do mesmo módulo, ou seja, $\tau(M) = M$, para todo módulo M . Assim, se os identificarmos, obteremos um cilindro. Neste exemplo, temos uma única componente do quiver de Auslander-Reiten e esta é, obviamente, não regular.

5.3.2 Grupo de Klein

Consideremos a álgebra do grupo de Klein $K(C_2 \times C_2)$ sobre um corpo algebricamente fechado K de característica $p = 2$. Pelo Teorema 53, esta álgebra de grupo é não semissimples. Observe também que os 2-subgrupos de Sylow de $C_2 \times C_2$ são o próprio grupo, que é, em particular, o 2-grupo diedral de ordem 4. Portanto, a álgebra $K(C_2 \times C_2)$ tem tipo de representação manso, de acordo com o Teorema 56. Além disso, pelo Lema 54 (a) temos o isomorfismo $K(C_2 \times C_2) \cong \frac{K[t_1, t_2]}{(t_1^2, t_2^2)}$. Podemos verificar que ainda existe um isomorfismo entre a álgebra $\frac{K[t_1, t_2]}{(t_1^2, t_2^2)}$ e a álgebra de caminhos do quiver com relações a seguir



$$\mathcal{I} = \langle a^2, b^2, ab - ba \rangle \quad (5.2)$$

o qual é dado levando t_1 em a e t_2 em b . Conseqüentemente, a álgebra do grupo de Klein $K(C_2 \times C_2)$ sobre um corpo algebricamente fechado de característica 2 é isomorfa à álgebra de caminhos do quiver com relações (5.2). A álgebra de caminhos (5.2) é uma álgebra bisserial especial. Vamos obter os seus módulos indecomponíveis e os morfismos irredutíveis entre eles a partir da técnica apresentada no Capítulo 4. Como esta álgebra possui apenas uma relação binomial, a saber $\rho = ab - ba$, existe um único módulo que não pode ser descrito em termos de *string* ou *band*. Pelo Lema 46, o módulo $M(\rho)$, referente à relação binomial, é projetivo e injetivo. Além disso, o Lema 49 nos garante que tal módulo aparece na seqüência de Auslander-Reiten abaixo.

$$0 \longrightarrow M(ba^{-1}) \longrightarrow M(e_1) \oplus M(\rho) \oplus M(e_1) \longrightarrow M(a^{-1}b) \longrightarrow 0$$

Os demais módulos desta componente são *string* e estão compreendidos em seqüências de Auslander-Reiten da forma abordada no Capítulo 3 para a álgebra *string* $\bar{A} = \langle a^2, b^2, ab, ba \rangle$. Na linguagem de álgebras *string*, polarizando as flechas da forma a_+^+ e b_-^- , obtemos os seguintes conjuntos de representantes de *string* e *band*, respectivamente, $\mathcal{S} = \{e_1, (a^{-1}b)^n a^{-1}, (b^{-1}a)^n b^{-1}, (b^{-1}a)^n, (ba^{-1})^n : n \in \mathbb{N}, n \geq 0\}$ e $\mathcal{S}' = \{b^{-1}a\}$.

As respectivas seqüências de Auslander-Reiten induzidas pelas flechas a e b são

$$0 \longrightarrow M(b) \longrightarrow M(b^{-1}ab^{-1}) \longrightarrow M(b) \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow M(a) \longrightarrow M(a^{-1}ba^{-1}) \longrightarrow M(a) \longrightarrow 0 .$$

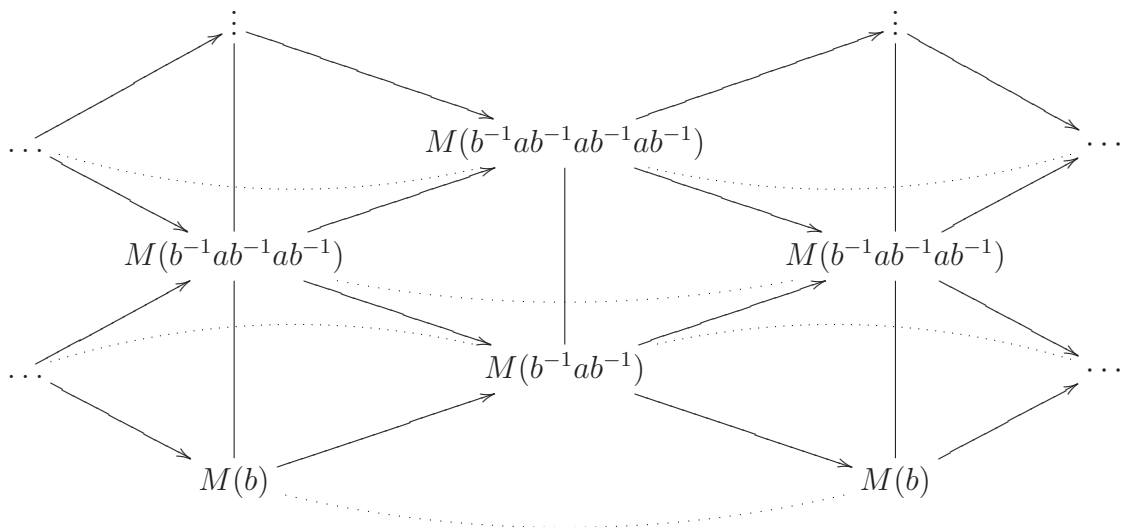
No caso da seqüência induzida pela flecha a , devemos notar que ainda não conhecemos a seqüência de Auslander-Reiten que se inicia no módulo $M(b^{-1}ab^{-1})$, e a mesma existe pelo fato de que este módulo não é injetivo, pois existe um único módulo injetivo e este não é um módulo *string*. Como a *string* $S = b^{-1}ab^{-1}$ não começa mas termina em um cume (Caso 2), obtemos a seguinte seqüência de Auslander-Reiten

$$0 \longrightarrow M(b^{-1}ab^{-1}) \longrightarrow M(b) \oplus M(b^{-1}ab^{-1}ab^{-1}) \longrightarrow M(b^{-1}ab^{-1}) \longrightarrow 0 .$$

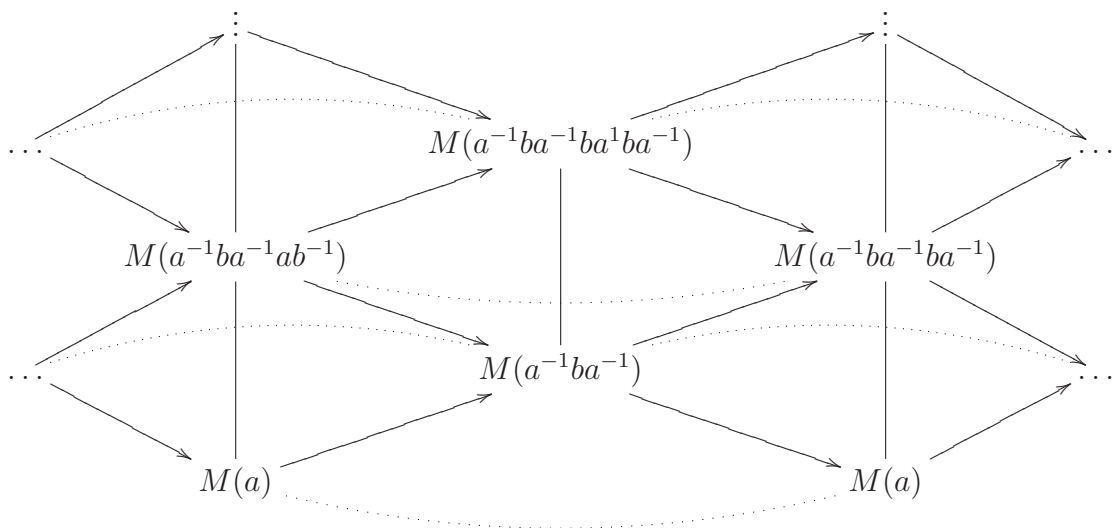
Já conhecemos a sequência que tem o módulo $M(b)$ como seu primeiro termo, embora ainda não conheçamos a que começa em $M(b^{-1}ab^{-1}ab^{-1})$. De forma análoga, a *string* $S = b^{-1}ab^{-1}ab^{-1}$ também não começa mas termina em um cume, daí obtemos

$$0 \longrightarrow M(S) \longrightarrow M(b^{-1}ab^{-1}) \oplus M(b^{-1}aS) \longrightarrow M(S) \longrightarrow 0 .$$

Prosseguindo dessa maneira, teremos

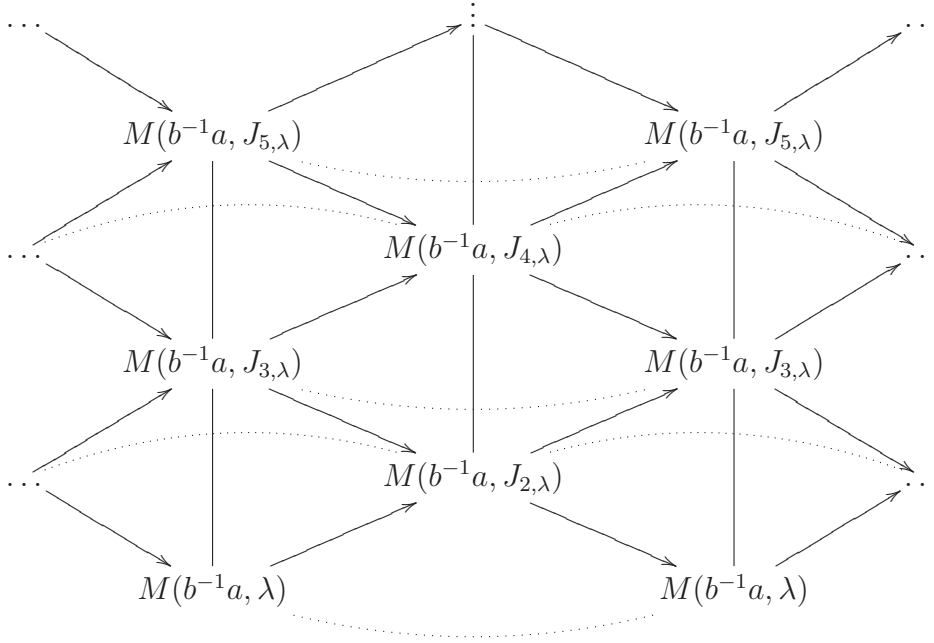


que origina um tubo homogêneo de posto 1. Similarmente, a sequência induzida pela flecha b também induz a formação de outro 1-tubo, como podemos verificar a seguir.



Dizemos que os tubos induzidos pelas flechas são *tubos string*. Além disso, a única

(a menos de representantes) *band* desta álgebra é $b^{-1}a$. Assim, dado o espaço vetorial K e um automorfismo $0 \neq \lambda \in K$, obtemos o respectivo módulo $M(b^{-1}a, \lambda)$. Portanto, obtemos



que também origina um 1-tubo para cada $0 \neq \lambda \in K$. Os tubos obtidos a partir da *band* e automorfismos são chamados *tubos band*.

Por outro lado, como $M(e_1)$ não é um módulo projetivo nem um módulo injetivo, pelo Teorema 21, existe uma sequência de Auslander-Reiten em que $M(e_1)$ aparece como primeiro termo e uma outra em que ele aparece como último termo. De fato, e_1 é uma *string* que não começa nem termina em um cume (*Caso 1*) e também não começa nem termina em um abismo (*Caso D1*), logo obtemos as respectivas sequências

$$0 \longrightarrow M(e_1) \longrightarrow M(a^{-1}b) \oplus M(a^{-1}b) \longrightarrow M(a^{-1}ba^{-1}b) \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow M(ba^{-1}ba^{-1}) \longrightarrow M(ba^{-1}) \oplus M(ba^{-1}) \longrightarrow M(e_1) \longrightarrow 0 .$$

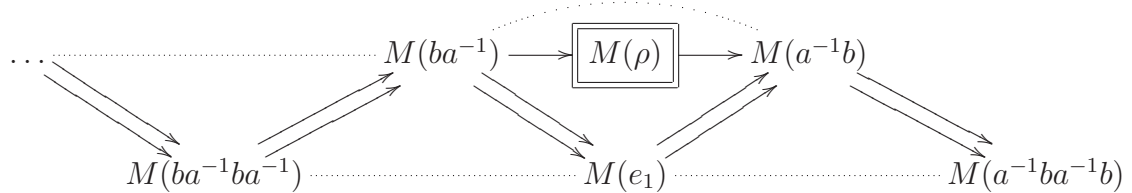
Notemos que a *string* $a^{-1}b$ não começa nem termina em um cume (*Caso 1*) enquanto a *string* ba^{-1} não começa nem termina em um abismo (*Caso D1*), daí obtemos as respectivas sequências

$$0 \longrightarrow M(a^{-1}b) \longrightarrow M(a^{-1}ba^{-1}b) \oplus M(a^{-1}ba^{-1}b) \longrightarrow M(a^{-1}ba^{-1}ba^{-1}b) \longrightarrow 0$$

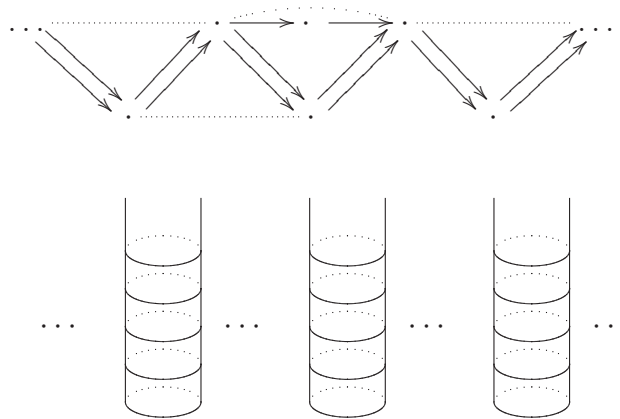
e

$$0 \longrightarrow M(ba^{-1}ba^{-1}ba^{-1}) \longrightarrow M(ba^{-1}ba^{-1}) \oplus M(ba^{-1}ba^{-1}) \longrightarrow M(ba^{-1}) \longrightarrow 0 .$$

Seguindo este mesmo raciocínio, obtemos a componente não regular do quiver de Auslander-Reiten desta álgebra bisserial especial



Observe que, a menos do módulo projetivo-injetivo, os termos centrais das sequências de Auslander-Reiten que aparecem nesta componente se repetem, por isso, ao invés de repetí-los, o representamos uma única vez com duas flechas chegando e/ou partindo deles. Concluimos que o quiver de Auslander-Reiten da álgebra do grupo de Klein é formado por dois 1-tubos *string*, um número infinito de 1-tubos *band* e a componente não regular infinita acima. Um esboço desta descrição é ilustrado na figura abaixo.



5.3.3 Grupo Dihedral

Seja K um corpo algebricamente fechado de característica $p = 2$ e considere o grupo diedral infinito

$$G = \langle X, Y : X^2 = Y^2 = 1 \rangle .$$

Seja a álgebra $A = \frac{K \langle x, y \rangle}{(x^2, y^2)}$, onde $K \langle x, y \rangle$ é a álgebra de polinômios não comutativos

nas variáveis x e y , então $A \cong KG$. De fato, considere o homomorfismo de álgebras

$$\begin{aligned} f: K \langle x, y \rangle &\longrightarrow KG \\ x &\longmapsto X - 1 \\ y &\longmapsto Y - 1. \end{aligned}$$

Mostremos que $\text{Ker} f = (x^2, y^2)$. Com efeito, como $\text{car } K = 2$, se $p(x, y) = x^2 p_1(x, y) + y^2 p_2(x, y) \in (x^2, y^2)$ então

$$f(p(x, y)) = f(x^2)f(p_1(x, y)) + f(y^2)f(p_2(x, y)) = f(x)^2 f(p_1(x, y)) + f(y)^2 f(p_2(x, y))$$

e, por outro lado, temos $f(x)^2 = (X - 1)(X - 1) = X^2 + 1 = X^2 - 1 = 0$ e, similarmente, $f(y)^2 = 0$. Consequentemente, $f(p(x, y)) = 0$. Logo, $\text{Ker} f \supset (x^2, y^2)$. Por outro lado, suponha que exista $p(x, y) \in \text{Ker} f \setminus (x^2, y^2)$, então, sem perda de generalidade, podemos supor $p(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy + a_4 yx$, com nem todos os a_i 's nulos. Daí, $f(p(x, y)) = a_0 + a_1 f(x) + a_2 f(y) + a_3 f(x)f(y) + a_4 f(y)f(x) = 0$ se, e somente se, $a_i = 0$ para todo $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. O que é uma contradição. Com isso, $\text{Ker} f \subset (x^2, y^2)$. Além disso, para os geradores X e Y , temos $f(x + 1) = X$ e $f(y + 1) = Y$. Portanto, f é sobrejetora. Assim, pelo Teorema do Isomorfismo de Álgebras, obtemos $A \cong KG$.

Agora, considere o 2-grupo diedral de ordem 8

$$D_8 = \langle X, Y : X^2 = Y^2 = 1, (XY)^2 = (YX)^2 \rangle$$

Sobre um corpo algebricamente fechado de característica $p = 2$, KD_8 é não semissimples, pelo Teorema 53. Pelo Teorema 56, a álgebra de grupo KD_8 possui tipo de representação manso, uma vez que os 2-subgrupos de Sylow de D_8 são isomorfos a todo o grupo.

Lema 57 *Sejam K um corpo algebricamente fechado de característica $p = 2$ e $A = \frac{K \langle x, y \rangle}{(x^2, y^2)}$, então*

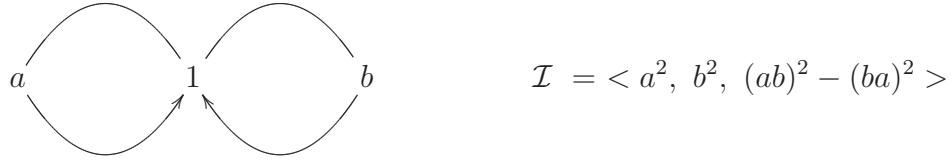
$$KD_8 \cong \frac{A}{((xy)^2 - (yx)^2)}.$$

Demonstração: Usando o fato de que $\text{car } K = 2$, em KD_8 , temos

$$\begin{aligned}
0 &= (XY)^2 - (YX)^2 = (XY - YX)^2 = ((X - 1)(Y - 1) - (Y - 1)(X - 1))^2 = \\
&= ((X - 1)(Y - 1))^2 - ((Y - 1)(X - 1))^2 = \\
&= (\bar{f}^{-1}(x)\bar{f}^{-1}(y))^2 - (\bar{f}^{-1}(y)\bar{f}^{-1}(x))^2 = \\
&= \bar{f}^{-1}((xy)^2 - (yx)^2),
\end{aligned}$$

onde $\bar{f} : A \longrightarrow KG$ é o isomorfismo $A \cong KG$ induzido por f .

Portanto, a álgebra do grupo diedral D_8 é isomorfa à álgebra de caminhos do quiver com relações abaixo.



Esta álgebra é bisserial especial e possui uma única relação binomial. Pelo Lema 46, existe um módulo que é projetivo e injetivo $M((ab)^2 - (ba)^2) = M(\rho)$ referente à relação binomial. Definindo $A := aba$ e $B := bab$, pelo Lema 49, tal módulo aparece na sequência de Auslander-Reiten abaixo.

$$0 \longrightarrow M(AB^{-1}) \longrightarrow M(ab) \oplus M((ab)^2 - (ba)^2) \oplus M(ba) \longrightarrow M(A^{-1}B) \longrightarrow 0$$

O Teorema 47 nos garante que os demais módulos indecomponíveis desta álgebra são *string* e *band*, sendo que estes estão compreendidos nas sequências de Auslander-Reiten como descritas no Capítulo 3. Na linguagem de álgebras *string*, polarizemos as flechas a e b por a_+^+ e b_-^- . As sequências induzidas pelas flechas a e b são, respectivamente,

$$0 \longrightarrow M(B) \longrightarrow M(B^{-1}aB^{-1}) \longrightarrow M(B) \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow M(A) \longrightarrow M(A^{-1}bA^{-1}) \longrightarrow M(A) \longrightarrow 0 .$$

A *string* $B^{-1}aB^{-1}$ não começa mas termina em um cume (*Caso 2*). Fazendo $D = B^{-1}$, obtemos a sequência de Auslander-Reiten iniciando no módulo $M(B^{-1}aB^{-1})$

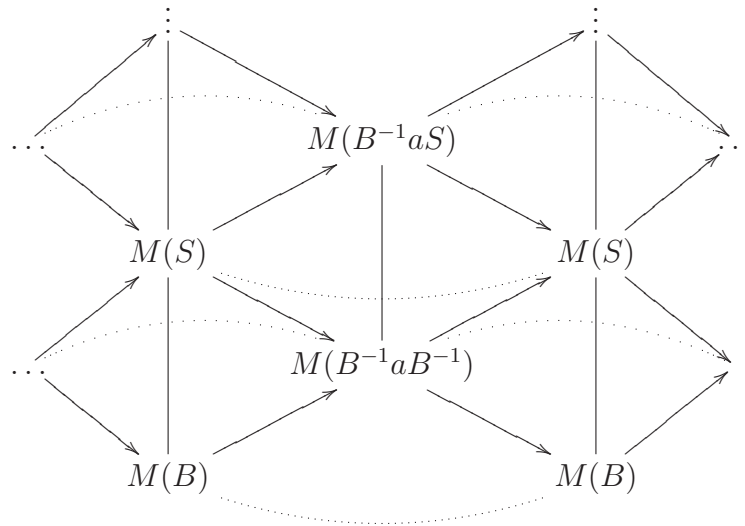
$$0 \longrightarrow M(B^{-1}aB^{-1}) \longrightarrow M(B^{-1}aB^{-1}aB^{-1}) \oplus M(B) \longrightarrow M(B^{-1}aB^{-1}) \longrightarrow 0 .$$

A *string* $S = B^{-1}aB^{-1}aB^{-1}$ também não começa mas termina em um cume

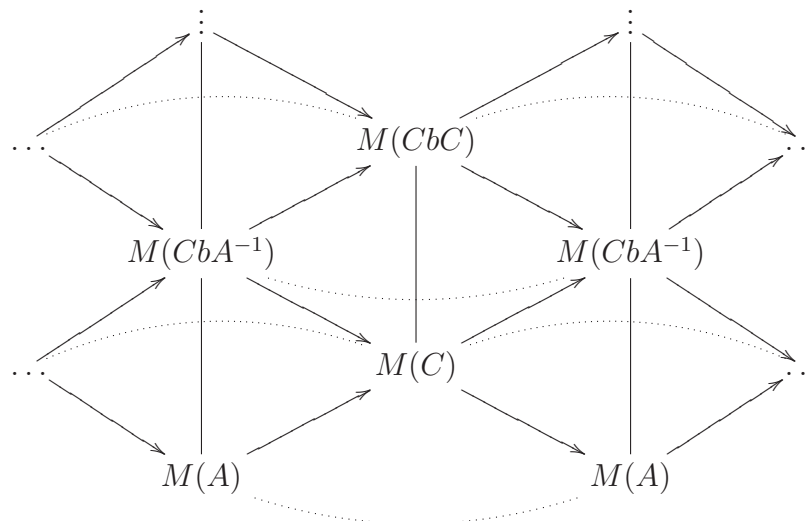
(*Caso 2*). Daí, iniciando no módulo $M(S)$ obtemos a seqüência de Auslander-Reiten

$$0 \longrightarrow M(S) \longrightarrow M(B^{-1}aS) \oplus M(B^{-1}aB^{-1}) \longrightarrow M(S) \longrightarrow 0 .$$

Podemos observar que as *string* que vão aparecendo nestas seqüências não começam mas terminam em um cume. Com esse raciocínio, obtemos



o que nos dá origem a um tubo homogêneo de posto 1. Similarmente, a partir da seqüência induzida pela flecha b também obtemos um tubo homogêneo de posto 1. Considere $C = A^{-1}bA^{-1}$



Agora, vamos obter a seqüência de Auslander-Reiten em que o módulo $M(AB^{-1})$ aparece como último termo. A *string* $S' = AB^{-1}$ não começa nem termina em um abismo (*Caso D1*). Daí, obtemos a seguinte seqüência de Auslander-Reiten

$$0 \longrightarrow M(Ab^{-1}S'aB^{-1}) \longrightarrow M(Ab^{-1}S') \oplus M(S'aB^{-1}) \longrightarrow M(S') \longrightarrow 0 .$$

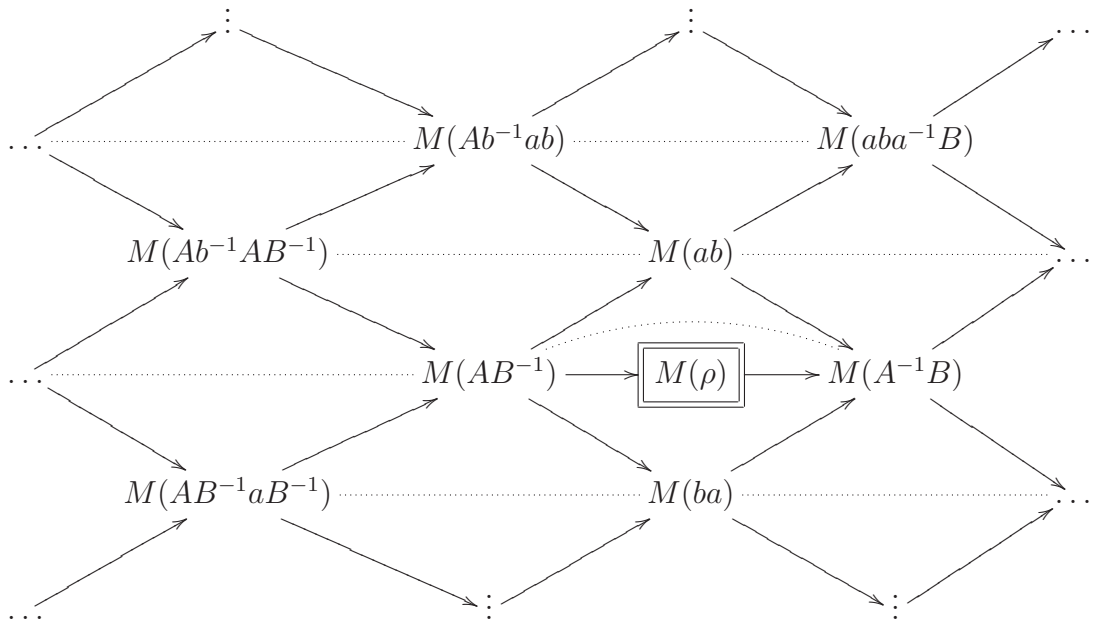
A partir dessa sequência, utilizamos a descrição das sequências de Auslander-Reiten terminando em módulos *string* (páginas 45–45) para obtermos as sequências que terminam com os módulos $M(Ab^{-1}AB^{-1})$, $M(AB^{-1}aB^{-1})$ e $M(Ab^{-1}AB^{-1}aB^{-1})$. Como estes módulos não são injetivos nem projetivos, pelo Teorema 21, existe uma sequência de Auslander-Reiten começando e uma terminando neles. A partir dos módulos que aparecem nestas sequências seguimos o mesmo raciocínio. O módulo $M(A^{-1}B)$ aparece como um dos termos centrais da sequência

$$0 \longrightarrow M(ab) \longrightarrow M(aba^{-1}B) \oplus M(A^{-1}B) \longrightarrow M(A^{-1}Ba^{-1}B) \longrightarrow 0 .$$

Já conhecemos a sequência de Auslander-Reiten que termina nele (veja página 74), vamos encontrar a sequência em que ele aparece como primeiro termo. Como a *string* $S'' = A^{-1}B$ não começa nem termina em um cume (*Caso 1*), obtemos a sequência de Auslander-Reiten

$$0 \longrightarrow M(S'') \longrightarrow M(S''a^{-1}B) \oplus M(A^{-1}bS'') \longrightarrow M(A^{-1}bS''a^{-1}B) \longrightarrow 0 .$$

De modo análogo, podemos partir desta sequência e da descrição das sequências de Auslander-Reiten começando em módulos *string* (veja páginas 41–42) para obter as demais sequências começando nos módulos que aparecem a partir da mesma. Com isso, obtemos a seguinte componente não regular do quiver de Auslander-Reiten.



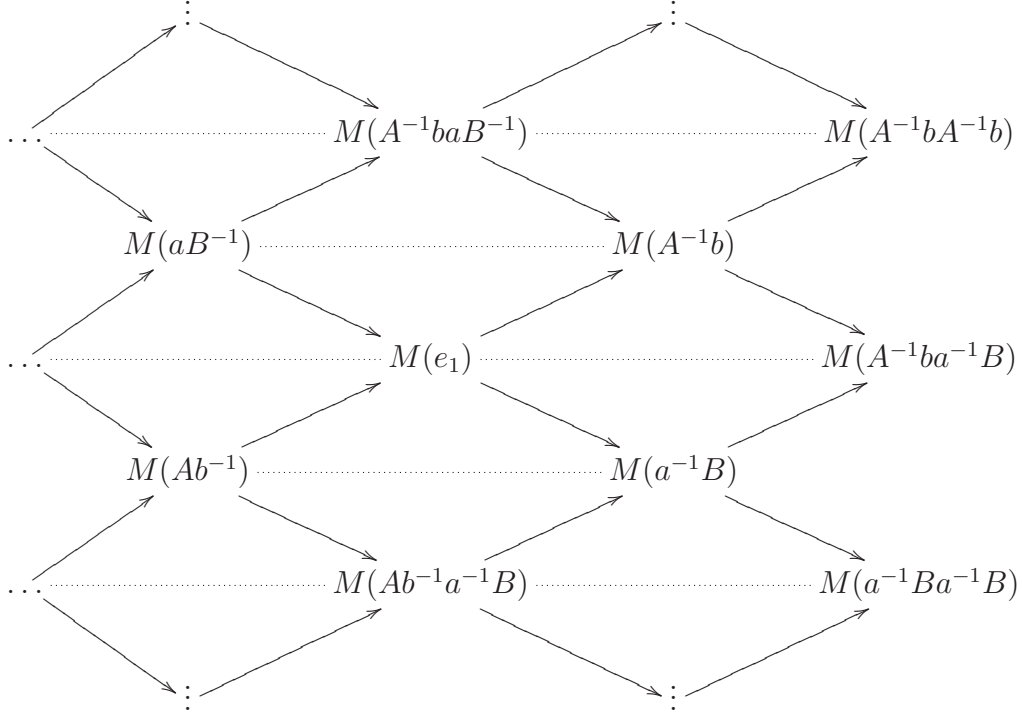
Notemos também que a *string* $S = e_1$ não apareceu em nenhuma das três componentes de Auslander-Reiten anteriores. O módulo $M(e_1)$ não é projetivo nem injetivo, portanto existem seqüências de Auslander-Reiten começando e terminando nele. A *string* $S = e_1$ não começa nem termina em um cume (*Caso 1*), e mais, $S = e_1$ também não começa nem termina em um abismo (*Caso D1*). Dessa forma, obtemos que as seqüências de Auslander-Reiten começando em $M(e_1)$ e terminando em $M(e_1)$ são, respectivamente,

$$0 \longrightarrow M(e_1) \longrightarrow M(A^{-1}b) \oplus M(a^{-1}B) \longrightarrow M(A^{-1}ba^{-1}B) \longrightarrow 0$$

e

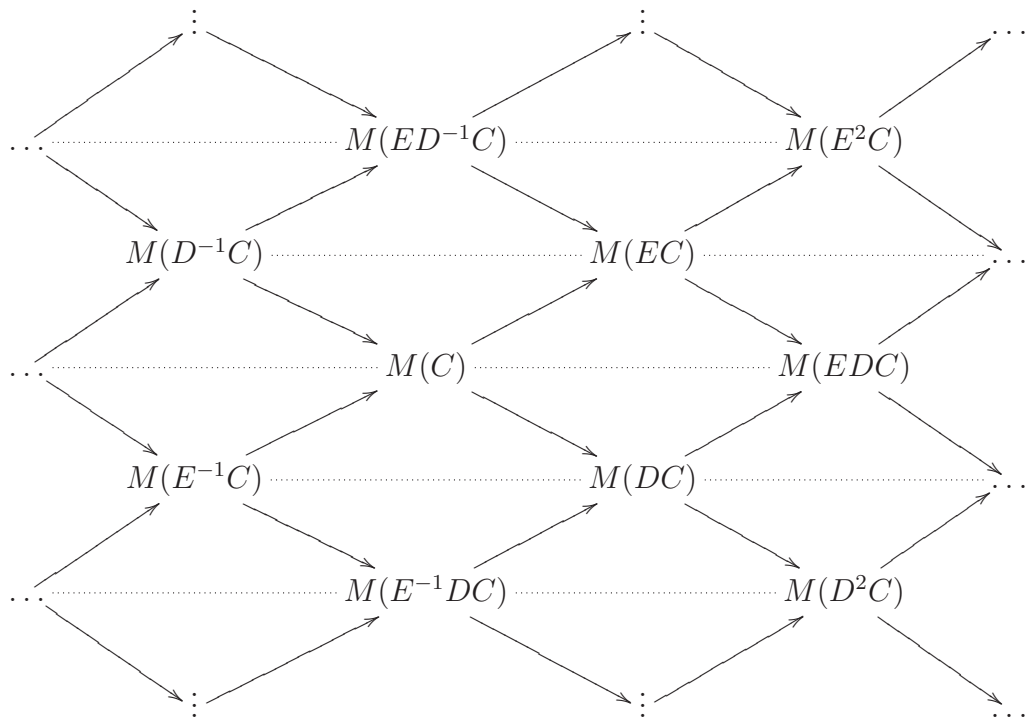
$$0 \longrightarrow M(Ab^{-1}aB^{-1}) \longrightarrow M(aB^{-1}) \oplus M(Ab^{-1}) \longrightarrow M(e_1) \longrightarrow 0 .$$

Prosseguindo com esse raciocínio para os demais módulos, obtemos

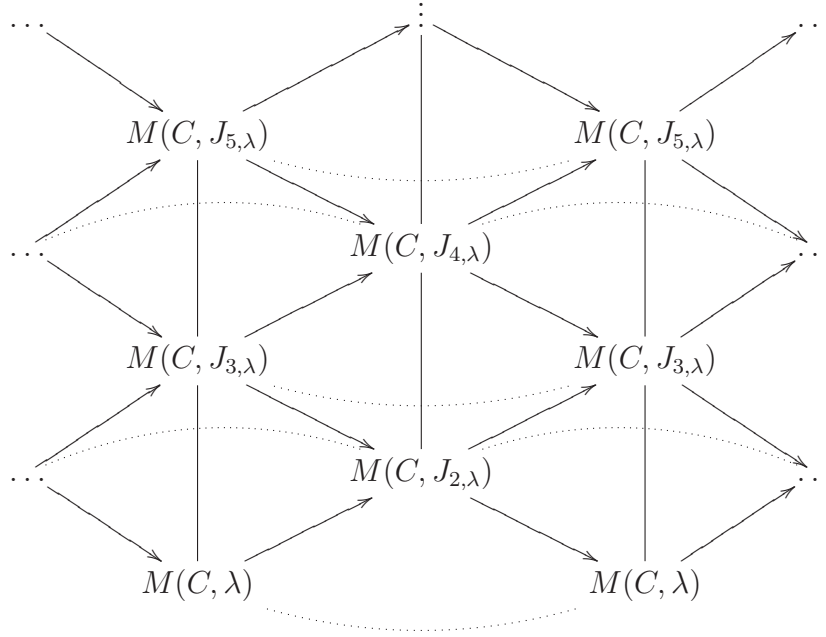


Definimos duas aplicações $D, E : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ como segue. Se C é uma *string* tal que $C = SaB^{-1}$ ou $C = SbA^{-1}$, para alguma *string* S , então $D(C) := S$. Caso contrário, $D(C) := Ca^{-1}B$ ou $D(C) := Cb^{-1}A$, dependendo da composição (ou polarização) que “preserva” *string*. Agora, se C é uma *string* tal que $C = Ab^{-1}S$ ou $C = Ba^{-1}S$, para alguma *string* S , então $E(C) := S$. Caso contrário, $E(C) := A^{-1}bC$ ou $E(C) := B^{-1}aC$, dependendo da composição (ou polarização) que “preserva” *string*. Podemos observar que as aplicações D e E são bijeções. E mais, temos $ED = DE$. Com isso, as aplicações inversas a D e a E , respectivamente, são dadas como segue. Se $S \in \mathcal{S}$ é tal que $S = Ca^{-1}B$ ou $S = Cb^{-1}A$, para alguma $C \in \mathcal{S}$, então $D^{-1}(S) := C$. Caso

contrário, $D^{-1}(S) := SaB^{-1}$ ou $D^{-1}(S) := SaB^{-1}$, dependendo da composição (ou polarização) que “preserva” *string*. Por outro lado, se $S \in \mathcal{S}$ é tal que $S = A^{-1}bC$ ou $S = B^{-1}aC$, para alguma $C \in \mathcal{S}$, então $E^{-1}(S) := C$. Caso contrário, $E^{-1}(S) := Ab^{-1}S$ ou $E^{-1}(S) := Ba^{-1}S$, dependendo da composição (ou polarização) que “preserva” *string*. A partir disso, se C é uma *string* tal que C e C^{-1} são diferentes das *string* que aparecem nas componentes induzidas por flechas (veja página 75) e diferentes das que aparecem na componente não regular (veja página 76), temos



Por outro lado, temos um número infinito de *band*, por exemplo, ab^{-1} , $aba^{-1}b^{-1}$, Ab^{-1} , Ba^{-1} , AB^{-1} , $a(B^{-1}A^{-1})^n B^{-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Com isso, dados um espaço vetorial V e um automorfismo $\varphi : V \rightarrow V$, obtemos o respectivo módulo $M(C, \varphi)$, onde C é uma *band*. E daí, obtemos



Logo, para cada $0 \neq \lambda \in K$, temos um tubo homogêneo de posto 1.

Concluimos que o quiver de Auslander-Reiten desta álgebra bisserial especial é formado por dois 1-tubos *string*, um número infinito de 1-tubos *band*, um número infinito de componentes planas (como fizemos na página 78) e uma componente não regular mostrada na página 76.

Sobre um corpo K algebricamente fechado de característica 2, o caso dos 2-grupos diedrais finitos de ordem $4q$, sendo q uma potência de 2, são similares a este. Podemos provar o isomorfismo

$$KD_{4q} \cong \frac{A}{((xy)^q - (yx)^q)}$$

e, daí, a álgebra de grupo KD_{4q} é isomorfa a álgebra de caminhos do quiver com relações $K(Q, \mathcal{I}')$, onde $\mathcal{I}' = \langle a^2, b^2, (ab)^q - (ba)^q \rangle$. Definindo $A := (ab)^{q-1}a$ e $B := (ba)^{q-1}b$ encontramos a mesma descrição para a componente de *string* C tais que C e C^{-1} são diferentes de A , B , AB^{-1} e $A^{-1}B$. As componentes planas, os tubos *string* e os *band* também serão similares. Uma pequena alteração ocorre na componente não regular, embora o raciocínio seja o mesmo.

5.3.4 Outros Exemplos

Considere o grupo alternado de 4 elementos A_4 , cuja ordem é $|A_4| = 2^2 \cdot 3$. Se K é um corpo algebricamente fechado de característica 3, já que os 3-subgrupos

de Sylow de A_4 são isomorfos ao grupo cíclico C_3 , segue do Teorema 56 que a álgebra de grupo KA_4 tem tipo de representação finito.

Por outro lado, sobre um corpo K de característica 2, um dos 2-subgrupos de Sylow de A_4 é formado por $\{Id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, ou seja, os seus 2-subgrupos de Sylow são isomorfos ao grupo de Klein $C_2 \oplus C_2$. Daí, segue do Teorema 56, que a álgebra de grupo KA_4 tem tipo de representação infinito manso. Suas representações podem ser obtidas por meio da Teoria de Clifford (veja [4], página 112).

Observação: Nos casos em que a álgebra de grupo possui tipo de representação selvagem, podemos decompô-la em blocos e descrever o quiver de Auslander-Reiten de alguns destes. Ao leitor interessado, temos a seguir uma classificação do tipo de representação destes blocos. Observe a semelhança com o Teorema de Bondarenko e Drozd (página 66).

Teorema 58 (veja [10]) *Sejam K um corpo algebricamente fechado de característica p e G um grupo, tal que p divide a ordem $|G|$ de G . Seja B um bloco da álgebra de grupo KG .*

(i) *Se o grupo defect² de B é cíclico, então B tem tipo de representação finito.*

(ii) *Se $p = 2$ e o grupo defect de B é diedral, semidiedral ou quatérnio, então B tem tipo de representação manso.*

(iii) *Em todos os outros casos, B tem tipo de representação selvagem.*

²Pode-se fazer uma analogia dos grupos *defect* dos blocos com os subgrupos de Sylow de um grupo.

Referências Bibliográficas

- [1] I. Assem, D. Simson, A. Skowroński. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*. London Math. Soc. Student Texts **65**, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [2] M. Barot. *Representations of Quivers*. Notes ICTP. Disponível em: http://www.matem.unam.mx/barot/articles/notes_ictp.pdf
- [3] H. J. Baues, M. Hennes. *The homotopy classification of $(n-1)$ -connected $(n+3)$ -dimensional polyhedra, $n \geq 4$* . *Topology* **30** (1992) 373–408.
- [4] D. J. Benson. *Representations and cohomology*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [5] V. M. Bondarenko, Y. A. Drozd. *Representations Type of Finite Groups*. *J. Soviet Math.* **20** (1982) 2515–2528.
- [6] M. C. R. Butler, C. M. Ringel. *Auslander-Reiten sequences with few middle terms and applications to string algebras*. *Comm. Algebra* **15** (1-2) (1987) 145–179.
- [7] W. W. Crawley-Boevey. *Maps between representations of zero-relation algebras*. *J. Algebra* **126** (1989) 259–263.
- [8] Y. A. Drozd, G. M. Greuel. *Vector bundles on singular projective curves*. In: *Applications of Algebraic Geometry to Coding Theory, Physics and Computation*. Kluwer Academic Publishers (2001) 1–15.
- [9] K. Erdmann. *Algebras and dihedral defect groups*. *Proc. London Math. Soc.* **54** (1987) 88–114.
- [10] Erdmann K. *Blocks of tame representation type and related algebras*. *Lecture Notes in Mathematics*, Vol 1428. Berlin: Springer-Verlag, (1990).

- [11] I. M. Gel'fand, V. A. Ponomarev. *Indecomposable representation of the Lorentz group*. Russian Mathematical Surveys **23** (1968) 1–58.
- [12] F. Huard, S. Liu. *Tilted special biserial algebras*. J. Algebra **217** (1999) 679–700.
- [13] H. Krause. *Maps between tree and band modules*. J. Algebra **126** (1991) 186–194.
- [14] L. A. Nazarova, A. V. Roiter. *A problem I.M. Gelfand's*. Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya **7** (1973) 54–69.
- [15] C. Polcino Milies, S. K. Sehgal. *An Introduction to Group Rings*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.
- [16] C. M. Ringel. *The indecomposable representations of the dihedral 2-groups*. Math. Ann. **214** (1975) 19–34.
- [17] J. Schröer, A. Zimmermann. *Stable endomorphism algebras of modules over special biserial algebras*. Math. Z. **244** (3) (2003) 515–530.
- [18] J. Schröer. *On the infinite radical of a module category*. Proc. London Math. Soc. **81** (3) (2000) 651–674.
- [19] A. Skowronski, J. Waschbüsch. *Representation-finite biserial algebras*. J. für Reine und Angewandte Mathematik **345** (1983) 172–181.
- [20] B. Wald and J. Waschbüsch. *Tame biserial algebras*. J. Algebra **95** (1985) 480–500.