

**RAFAEL BOTELHO BARBOSA**

**MONITORAMENTO DA MÉDIA E DA VARIABILIDADE PONDERADAS  
EXPONENCIALMENTE POR GRÁFICOS DE CONTROLE  
UNIVARIADOS**

**Dissertação apresentada à Universidade  
Federal de Viçosa, como parte das  
exigências do Programa de Pós Graduação  
em Estatística Aplicada e Biometria, para  
obtenção do título de *Magister Scientiae*.**

**VIÇOSA  
MINAS GERAIS – BRASIL  
2015**

**Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca Central da Universidade  
Federal de Viçosa - Câmpus Viçosa**

T

B238m  
2015

Barbosa, Rafael Botelho, 1988-  
Monitoramento da média e da variabilidade ponderadas  
exponencialmente por gráficos de controle univariados / Rafael  
Botelho Barbosa. – Viçosa, MG, 2015.  
xiv, 83f. : il. (algumas color.) ; 29 cm.

Orientador: José Ivo Ribeiro Júnior.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.  
Referências bibliográficas: f. 79-83.

1. Distribuição (Teoria da probabilidade). 2. Variáveis  
(Matemática). 3. Estatística - Métodos gráficos. 4. Controle de  
processo - Métodos estatísticos. I. Universidade Federal de  
Viçosa. Departamento de Estatística. Programa de  
Pós-graduação em Estatística Aplicada e Biometria. II. Título.

CDD 22. ed. 519.24

RAFAEL BOTELHO BARBOSA

MONITORAMENTO DA MÉDIA E DA VARIABILIDADE PONDERADAS  
EXPONENCIALMENTE POR GRÁFICOS DE CONTROLE  
UNIVARIADOS

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós Graduação em Estatística Aplicada e Biometria, para obtenção do título de *Magister Scientiae*.

APROVADA: 15 de dezembro de 2015.




---

Alexandre Navarro da Silva



---

Carlos Henrique Osório Silva



---

José Ivo Ribeiro Júnior  
(Orientador)

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por me guiar em todos os meus caminhos.

À minha mãe, Solange, pelo amor incondicional, que sempre me apoiou nas minhas decisões, me auxiliou nas dúvidas e me motivou a manter o foco nos estudos.

À Universidade Federal de Viçosa, pela oportunidade de ser aluno de uma das melhores instituições de ensino do país.

A Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), pela concessão da bolsa durante o período de realização deste mestrado.

Ao professor José Ivo Ribeiro Júnior, excelente orientador e grande conselheiro para a minha vida profissional e pessoal.

Aos professores membros da banca, Carlos Henrique Osório Silva e Alexandre Navarro da Silva, por ajudarem nas melhorias de meu trabalho.

Aos professores do Departamento de Estatística da Universidade Federal de Viçosa, pelo conhecimento passado.

Ao doutorando Rodrigo Lara, pelo apoio e colaboração na programação e simulação no software R.

Aos companheiros de mestrado, tanto da minha turma como de outras.

Aos funcionários do DET, Anita e Carla, pela simpatia e boa vontade em me ajudar sempre.

Aos amigos de Visconde do Rio Branco, pelos momentos de distração.

A todos os amigos da graduação, pelo companheirismo.

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS .....	v
LISTA DE TABELAS .....	vii
LISTA DE SIGLAS E SÍMBOLOS .....	ix
RESUMO .....	xi
ABSTRACT .....	xiii
1. INTRODUÇÃO.....	1
2. OBJETIVOS.....	3
2.1. Geral .....	3
2.2. Específicos .....	3
3. REVISÃO DE LITERATURA .....	3
3.1. Controle estatístico de processo .....	3
3.2. Ciclos.....	5
3.3. Gráficos de controle de Shewhart.....	7
3.4. Gráficos de controle ponderados exponencialmente.....	14
3.4.1. EWMA.....	15
3.4.2. EWMSD .....	22
3.4.3. EWMMR .....	24
3.4.4. EWMS .....	26
3.4.5. EWMSV .....	29
4. MATERIAL E MÉTODOS.....	31
4.1. Simulação de dados.....	31
4.2. Gráficos de controle .....	32
4.2.1. EWMA.....	32
4.2.2. EWMSD .....	33
4.2.3. EWMMR .....	34
4.2.4. EWMS .....	35
4.2.5. EWMSV .....	36
4.3. Processo sob controle estatístico.....	36
4.4. Processo fora de controle estatístico .....	39
4.5. Análises estatísticas.....	42
4.5.2. Efeitos dos termos dos gráficos de controle .....	43

4.5.3. Comparação entre os gráficos de controle .....	46
5. RESULTADOS E DISCUSSÃO .....	47
5.1. Processo sob controle estatístico.....	47
5.1.1. Efeito da ordem do subgrupo racional.....	47
5.1.2. Efeitos dos termos dos gráficos de controle .....	51
5.1.3. Comparação dos gráficos de controle.....	54
5.2. Processo fora de controle estatístico .....	56
5.2.1. Deslocamento da média.....	56
5.2.2. Aumento da variabilidade .....	63
5.2.3. Deslocamento da média e aumento da variabilidade.....	70
6. CONCLUSÕES.....	77
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	79

## LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 - Ciclo PDCA.....	6
Figura 3.2 - Ciclo DMAIC.....	6
Figura 3.3 - Representação por gráfico de controle de um processo sob controle estatístico.....	11
Figura 3.4 - Representação por gráfico de controle de um processo fora de controle estatístico.....	12
Figura 5.1 - Estimativas das probabilidades dos alarmes falsos em função da ordem do subgrupo racional, de acordo com as combinações dos níveis dos fatores <i>A</i> e <i>B</i> para os gráficos de controle EWMA ( $\lambda_1 = 0,1$ e $k_1 = 2,5$ , $\lambda_1 = 0,1$ e $k_2 = 3$ , $\lambda_2 = 0,3$ e $k_1 = 2,5$ e $\lambda_2 = 0,3$ e $k_2 = 3$ ), EWMASD ( $\lambda_1 = 0,1$ e $c_1 = 2,5$ , $\lambda_1 = 0,1$ e $c_2 = 3$ , $\lambda_2 = 0,3$ e $c_1 = 2,5$ e $\lambda_2 = 0,3$ e $c_2 = 3$ ), EWMAMR ( $\lambda_1 = 0,1$ e $\alpha_1 = 0,0027$ , $\lambda_1 = 0,1$ e $\alpha_2 = 0,0124$ , $\lambda_2 = 0,3$ e $\alpha_1 = 0,0027$ e $\lambda_2 = 0,3$ e $\alpha_2 = 0,0124$ ), EWMS ( $\lambda_1 = 0,1$ e $\alpha_1 = 0,0027$ , $\lambda_1 = 0,1$ e $\alpha_2 = 0,0124$ , $\lambda_2 = 0,3$ e $\alpha_1 = 0,0027$ e $\lambda_2 = 0,3$ e $\alpha_2 = 0,0124$ ) e EWMSV ( $\lambda_1 = 0,1$ e $h_1^* = 3$ , $\lambda_1 = 0,1$ e $h_2^* = 6$ , $\lambda_2 = 0,3$ e $h_1^* = 3$ e $\lambda_2 = 0,3$ e $h_2^* = 6$ ).....	48
Figura 5.2 - Estimativas dos efeitos principais e da interação <i>AB</i> para os gráficos de controle EWMA ( $\lambda$ e $k$ ), EWMASD ( $\lambda$ e $c$ ), EWMAMR ( $\lambda$ e $\alpha$ ), EWMS ( $\lambda$ e $\alpha$ ) e EWMSV ( $\lambda$ e $h^*$ ).....	52
Figura 5.3 - Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros em função da ordem do subgrupo racional, de acordo com as combinações dos níveis dos fatores <i>A</i> e <i>B</i> para os gráficos de controle EWMA ( $\lambda_1 = 0,1$ e $k_1 = 2,5$ , $\lambda_1 = 0,1$ e $k_2 = 3$ , $\lambda_2 = 0,3$ e $k_1 = 2,5$ e $\lambda_2 = 0,3$ e $k_2 = 3$ ), EWMASD ( $\lambda_1 = 0,1$ e $c_1 = 2,5$ , $\lambda_1 = 0,1$ e $c_2 = 3$ , $\lambda_2 = 0,3$ e $c_1 = 2,5$ e $\lambda_2 = 0,3$ e $c_2 = 3$ ), EWMAMR ( $\lambda_1 = 0,1$ e $\alpha_1 = 0,0027$ , $\lambda_1 = 0,1$ e $\alpha_2 = 0,0124$ , $\lambda_2 = 0,3$ e $\alpha_1 = 0,0027$ e $\lambda_2 = 0,3$ e $\alpha_2 = 0,0124$ ), EWMS ( $\lambda_1 = 0,1$ e $\alpha_1 = 0,0027$ , $\lambda_1 = 0,1$ e $\alpha_2 = 0,0124$ , $\lambda_2 = 0,3$ e $\alpha_1 = 0,0027$ e $\lambda_2 = 0,3$ e $\alpha_2 = 0,0124$ ) e EWMSV ( $\lambda_1 = 0,1$ e $h_1^* = 3$ , $\lambda_1 = 0,1$ e $h_2^* = 6$ , $\lambda_2 = 0,3$ e $h_1^* = 3$ e $\lambda_2 = 0,3$ e $h_2^* = 6$ ).....	57
Figura 5.4 - Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros em função da ordem do subgrupo racional, de acordo com as combinações dos níveis dos fatores <i>A</i> e <i>B</i> para os gráficos de controle EWMA ( $\lambda_1 = 0,1$ e $k_1 = 2,5$ , $\lambda_1 = 0,1$ e $k_2 = 3$ , $\lambda_2 = 0,3$ e $k_1 = 2,5$ e $\lambda_2 = 0,3$ e $k_2 = 3$ ), EWMASD ( $\lambda_1 = 0,1$ e $c_1 = 2,5$ , $\lambda_1 = 0,1$ e $c_2 = 3$ , $\lambda_2 = 0,3$ e $c_1 = 2,5$ e $\lambda_2 = 0,3$ e $c_2 = 3$ ), EWMAMR ( $\lambda_1 = 0,1$ e $\alpha_1 = 0,0027$ , $\lambda_1 = 0,1$ e $\alpha_2 = 0,0124$ , $\lambda_2 = 0,3$ e $\alpha_1 = 0,0027$ e $\lambda_2 = 0,3$ e $\alpha_2 = 0,0124$ ),	

EWMS ( $\lambda_1 = 0,1$  e  $\alpha_1 = 0,0027$ ,  $\lambda_1 = 0,1$  e  $\alpha_2 = 0,0124$ ,  $\lambda_2 = 0,3$  e  $\alpha_1 = 0,0027$  e  $\lambda_2 = 0,3$  e  $\alpha_2 = 0,0124$ ) e EWMSV ( $\lambda_1 = 0,1$  e  $h_1^* = 3$ ,  $\lambda_1 = 0,1$  e  $h_2^* = 6$ ,  $\lambda_2 = 0,3$  e  $h_1^* = 3$  e  $\lambda_2 = 0,3$  e  $h_2^* = 6$ ).....64

Figura 5.5 - Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros em função da ordem do subgrupo racional, de acordo com as combinações dos níveis dos fatores A e B para os gráficos de controle EWMA ( $\lambda_1 = 0,1$  e  $k_1 = 2,5$ ,  $\lambda_1 = 0,1$  e  $k_2 = 3$ ,  $\lambda_2 = 0,3$  e  $k_1 = 2,5$  e  $\lambda_2 = 0,3$  e  $k_2 = 3$ ), EWMSD ( $\lambda_1 = 0,1$  e  $c_1 = 2,5$ ,  $\lambda_1 = 0,1$  e  $c_2 = 3$ ,  $\lambda_2 = 0,3$  e  $c_1 = 2,5$  e  $\lambda_2 = 0,3$  e  $c_2 = 3$ ), EWMAMR ( $\lambda_1 = 0,1$  e  $\alpha_1 = 0,0027$ ,  $\lambda_1 = 0,1$  e  $\alpha_2 = 0,0124$ ,  $\lambda_2 = 0,3$  e  $\alpha_1 = 0,0027$  e  $\lambda_2 = 0,3$  e  $\alpha_2 = 0,0124$ ), EWMS ( $\lambda_1 = 0,1$  e  $\alpha_1 = 0,0027$ ,  $\lambda_1 = 0,1$  e  $\alpha_2 = 0,0124$ ,  $\lambda_2 = 0,3$  e  $\alpha_1 = 0,0027$  e  $\lambda_2 = 0,3$  e  $\alpha_2 = 0,0124$ ) e EWMSV ( $\lambda_1 = 0,1$  e  $h_1^* = 3$ ,  $\lambda_1 = 0,1$  e  $h_2^* = 6$ ,  $\lambda_2 = 0,3$  e  $h_1^* = 3$  e  $\lambda_2 = 0,3$  e  $h_2^* = 6$ ).....71



## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 - Características de alguns gráficos de controle ponderados exponencialmente.....	15
Tabela 3.2 - $ARL$ para diversos esquemas de EWMA com $ARL_0 = 500$ .....	20
Tabela 3.3 - Possíveis resultados de um teste de hipóteses.....	21
Tabela 3.4 - Valores de $H$ para diferentes gráficos de controle utilizando um comprimento médio da sequência sob controle igual a 200 ( $ARL = 200$ ).....	31
Tabela 4.1 - Representação dos valores simulados.....	31
Tabela 4.2 - Representação das probabilidades dos alarmes falsos.....	38
Tabela 4.3 - Situações em que o processo estava fora de controle estatístico.....	39
Tabela 4.4 - Representação das probabilidades dos alarmes verdadeiros por subgrupo racional.....	41
Tabela 4.5 - Níveis dos fatores $A$ e $B$ para os cinco gráficos de controle estudados.....	44
Tabela 4.6 - Representação dos efeitos principais de $A$ e $B$ e da interação entre eles, associados às probabilidades dos alarmes falsos e verdadeiros.....	45
Tabela 5.1 - Estimativas dos efeitos principais $A$ e $B$ e da interação $AB$ para os gráficos de controle EWMA ( $\lambda$ e $k$ ), EWMASD ( $\lambda$ e $c$ ), EWMAMR ( $\lambda$ e $\alpha$ ), EWMS ( $\lambda$ e $\alpha$ ) e EWMSV ( $\lambda$ e $h^*$ ).....	52
Tabela 5.2 - Estimativas das médias das probabilidades dos alarmes falsos para os cinco tipos de gráficos de controle.....	54
Tabela 5.3 - Resultado do teste de Friedman para a probabilidade do alarme falso em função dos gráficos de controle.....	55
Tabela 5.4 - Estimativas da ordem do primeiro subgrupo racional que proporcionou $Pd \geq 0,90$ .....	60
Tabela 5.5 - Estimativas dos efeitos principais e da interação dupla, para cada deslocamento da média e tipo de gráfico de controle.....	61
Tabela 5.6 - Resultados do teste de Friedman para a probabilidade do alarme verdadeiro em função dos gráficos de controle para $\delta = 0,5$ ( $P_{valor} = 0,006$ ).....	62

Tabela 5.7 - Resultados do teste de Friedman para a probabilidade do alarme verdadeiro em função dos gráficos de controle para $\delta = 1$ ( $P_{valor} = 0,003$ ).....	62
Tabela 5.8 - Resultados do teste de Friedman para a probabilidade do alarme verdadeiro em função dos gráficos de controle para $\delta = 1,5$ ( $P_{valor} = 0,004$ ).....	63
Tabela 5.9 - Estimativas da ordem do primeiro subgrupo racional que proporcionou $Pd \geq 0,90$ .....	66
Tabela 5.10 - Estimativas dos efeitos principais e de interação dupla, para cada aumento de variabilidade e tipo de gráfico de controle.....	67
Tabela 5.11 - Resultados do teste de Friedman para a probabilidade do alarme verdadeiro em função dos gráficos de controle para $\varphi = 1,5$ ( $P_{valor} = 0,004$ ).....	68
Tabela 5.12 - Resultados do teste de Friedman para a probabilidade do alarme verdadeiro em função dos gráficos de controle para $\varphi = 2$ ( $P_{valor} = 0,019$ ).....	69
Tabela 5.13 - Resultados do teste de Friedman para a probabilidade do alarme verdadeiro em função dos gráficos de controle para $\varphi = 2,5$ ( $P_{valor} = 0,015$ ).....	69
Tabela 5.14 - Estimativas da ordem do primeiro subgrupo racional que proporcionou $Pd \geq 0,90$ .....	73
Tabela 5.15 - Estimativas dos efeitos principais e da interação dupla, para cada combinação de deslocamento da média e aumento da variabilidade e tipo de gráfico de controle.....	74
Tabela 5.16 - Estimativas das medianas para cada deslocamento da média e aumento da variabilidade e tipo de gráfico de controle.....	75
Tabela 5.17 - Resultados do teste de Friedman com as somas dos postos (SP) e classificações em grupos.....	76

## LISTA DE SIGLAS E SÍMBOLOS

$am_i$	Amplitude móvel para o subgrupo racional $i$
$ARL$	Comprimento médio da sequência
$ARL_0$	Comprimento médio da sequência para um processo sob controle estatístico
$ARL_1$	Comprimento médio da sequência para um processo fora de controle estatístico
$c$	Constante do gráfico EWMASD
$d_2$	Constante do gráfico de controle EWMAMR e R
$d_3$	Constante do gráfico de controle EWMAMR e R
$D_3$	Constante do gráfico de controle AM
$D_4$	Constante do gráfico de controle AM
$\hat{e}$	Estimativa do efeito
$EQM$	Erro Quadrático Médio
$EQM_i$	Estatística plotada no gráfico de controle EWMS
EWMA	Gráfico de controle da média móvel ponderada exponencialmente
EWMASD	Gráfico de controle do erro quadrático médio móvel ponderado exponencialmente
EWMAMR	Gráfico de controle da amplitude móvel média móvel ponderada exponencialmente
EWMS	Gráfico de controle do quadrado médio ponderado exponencialmente
EWMSV	Gráfico de controle da variância amostral móvel ponderada exponencialmente
$H$	Limite superior de controle para o gráfico de controle EWMS
$h^*$	Intervalo de decisão padronizado para o gráfico de controle EWMS
$H_0$	Hipótese inicial
$H_1$	Hipótese alternativa

$i$	Ordem do subgrupo racional
$j$	Ordem da simulação
$k$	Constante para o gráfico de controle EWMA
$\lambda$	Peso atribuído ao histórico das observações
$LIC$	Limite inferior de controle
$LM$	Linha média
$LSC$	Limite superior de controle
$ME$	Margem de erro
$n$	Tamanho do subgrupo racional
$Pd$	Poder ou probabilidade do alarme verdadeiro
$Pd_i$	Poder no subgrupo racional $i$
$PSE$	Pseudo erro padrão
$R_i$	Amplitude do subgrupo racional $i$
$s_i$	Estatística plotada no gráfico de controle EWMSD
$s^2_i$	Estatística plotada no gráfico de controle EWMSV
$V_i$	Erro quadrático
$w_i$	Estatística plotada no gráfico de controle EWMAMR
$\chi^2_v$	Variável aleatória qui quadrado com $v$ graus de liberdade
$y_i$	Valor observado no subgrupo racional $i$
$z_{\alpha/2}$	Valor da variável $Z$
$\alpha$	Probabilidade do alarme falso
$\alpha_i$	Probabilidade do alarme falso no subgrupo racional $i$
$\hat{\alpha}_i$	Estimativa da probabilidade do alarme falso no subgrupo racional $i$
$\beta$	Probabilidade da falta de detecção
$\delta$	Taxa de deslocamento da média
$\varphi$	Taxa de aumento da variabilidade
$\mu_0$	Média sob controle estatístico
$\sigma_0$	Desvio padrão sob controle estatístico
$\sigma^2_i$	Variância para o subgrupo racional $i$

## RESUMO

BARBOSA, Rafael Botelho, M. Sc., Universidade Federal de Viçosa, dezembro de 2015. **Monitoramento da média e da variabilidade ponderadas exponencialmente por gráficos de controle univariados.** Orientador: José Ivo Ribeiro Júnior. Coorientadores: Ana Carolina Campana Nascimento e Antônio Policarpo Souza Carneiro.

Gráficos de controle são métodos utilizados no controle estatístico de processos (CEP), implantados nas situações em que o processo já se encontra sob controle estatístico e há necessidade de fazer com que a situação de estabilidade seja mantida. O presente trabalho analisou o desempenho de cinco tipos de gráficos de controle da ponderação exponencial, através da imposição de situações de deslocamento da média e, ou, do aumento da variabilidade, que são: média móvel ponderada exponencialmente (EWMA), erro quadrático médio móvel ponderado exponencialmente (EWMASD), amplitude móvel média móvel ponderada exponencialmente (EWMAMR), quadrado médio ponderado exponencialmente (EWMS) e variância amostral móvel ponderada exponencialmente (EWMSV). Foram geradas 1000 simulações, com 50 subgrupos racionais de tamanho  $n = 1$ , para cada combinação de média e variabilidade adotadas neste estudo. Cada gráfico de controle estudado possuiu dois fatores  $\{ A (\lambda) \text{ e } B [k \text{ (EWMA), } c \text{ (EWMASD), } \alpha \text{ (EWMAMR e EWMS) ou } h^* \text{ (EWMSV)}]\}$ , e foram escolhidos dois diferentes níveis para cada um deles. Os resultados foram interpretados através da utilização de diagramas de dispersão, de gráficos de Pareto para analisar os efeitos de cada fator e de testes de Tukey para comparação dos gráficos de controle. Para as situações em que o processo estava sob controle estatístico, foi adotado que os gráficos com bons desempenhos foram aqueles que apresentaram as probabilidades dos alarmes falsos inferiores ao valor 0,05, ou seja,  $\alpha \leq 0,05$ . Já para as situações de descontrole, foi considerado que os gráficos que possuíram probabilidades dos alarmes verdadeiros superiores a 0,90, ou seja,  $Pd \geq 0,90$ , obtiveram desempenho satisfatório. Para o alarme falso, os gráficos de controle que atenderam à exigência foram: EWMA, EWMASD, EWMAMR e EWMS. No caso em que somente a média encontrava-se fora de controle, os gráficos de controle que satisfizeram a condição imposta para o alarme verdadeiro foram: EWMA, EWMASD, EWMS e EWMSV. Quando a

variabilidade estava fora de controle, os gráficos que atenderam a exigência foram: EWMASD, EWMAMR, EWMS e EWMSV. Quando média e variabilidade estavam fora de controle, os gráficos que satisfizeram a exigência foram: EWMA, EWMASD, EWMAMR, EWMS e EWMSV. Como o gráfico de controle EWMSV não atendeu a exigência para a probabilidade do alarme falso, não foi recomendada a sua utilização. No entanto, alguns desses gráficos possuíram desempenhos superiores aos outros, logo, a recomendação para utilização dos gráficos foi que: para o monitoramento somente da média, os gráficos adequados foram EWMA, EWMASD e EWMS; para o monitoramento somente da variabilidade, recomendasse a utilização dos gráficos EWMASD, EWMAMR e EWMS; e para o monitoramento da média e variabilidade, os gráficos sugeridos são EWMA, EWMASD, EWMAMR e EWMS. Quanto à análise do efeito dos fatores pelo diagrama de Pareto, concluiu-se que, na grande maioria das situações analisadas, o fator  $B$  foi o único responsável por acarretar mudanças significativas na probabilidade do alarme falso ou verdadeiro, de acordo com as combinações dos termos que foram utilizadas.

## ABSTRACT

BARBOSA, Rafael Botelho, M. Sc., Universidade Federal de Viçosa, December, 2015. **Monitoring of media and variability exponentially weighted by univariate control charts.** Advisor: José Ivo Ribeiro Júnior. Co-Advisors: Ana Carolina Campana Nascimento and Antônio Policarpo Souza Carneiro.

Control charts are methods used in statistical process control (SPC), deployed in situations where the process is already under statistical control and no need to make the situation of stability is maintained. This study examined the performance of five types of exponential smoothing control charts, by imposing the average displacement situations and, or, the increased variability, which are weighted moving average exponentially (EWMA), exponentially weighted moving average squared deviation (EWMASD), exponentially weighted moving average moving range (EWMAMR), exponentially weighted mean squared (EWMS) and exponentially weighted moving sample variance (EWMSV). 1000 simulations were run with 50 rational subgroup of size  $n = 1$ , for each combination of mean and variability adopted in this study. Each control chart possessed studied two factors  $\{ A (\lambda) \text{ and } B [k \text{ (EWMA), } c \text{ (EWMASD), } \alpha \text{ (EWMAMR and EWMS) or } h^* \text{ (EWMSV)}]\}$ , and we chose two different levels for each of them. The results were interpreted using the dispersion diagrams, Pareto charts to analyze the effects of each factor and Tukey test for comparison of control charts. For situations where the process was in statistical control, was adopted the charts with good performances were those showing the probabilities of false alarms below the value 0,05, or  $\alpha \leq 0,05$ . As for the uncontrolled situations, it was considered that the graphs of true alarms probabilities possessed higher than 0,90, or  $Pd \geq 0,90$ , achieved satisfactory performance. For the false alarm, control charts that met the requirement were: EWMA, EWMASD, EWMAMR and EWMS. In the event that only the average found himself out of control, control charts that satisfy the condition imposed for the true alarm were: EWMA, EWMASD, EWMS and EWMSV. When the variability was out of control, the graphics that met the requirement were EWMASD, EWMAMR, EWMS and EWMSV. When average and variability were out of control, the graphics that met the requirement were: EWMA, EWMASD, EWMAMR, EWMS and EWMSV. As the EWMSV control

chart did not meet the requirement for the probability of false alarm, it was not recommended for use. However, some of these performance graphs possessed superior to others, so the recommendation is to use graphics that: for monitoring only the average, the recommended graphics are EWMA, EWMA<sub>SD</sub> and EWMS; for monitoring only the variability, it is recommended to use EWMA<sub>SD</sub>, EWMAMR and EWMS graphics; and to monitor the average and variability, the graphics are suggested EWMA, EWMA<sub>SD</sub>, EWMAMR and EWMS. The analysis of the effect of the factors by Pareto diagram, it was concluded that, in most situations analyzed, the factor *B* was solely responsible for cause significant changes in the probability of true or false alarm, according to the combinations of terms were used.



## 1. INTRODUÇÃO

Para Slack *et al.* (2009), as organizações que produzem bens e serviços de alta qualidade, geralmente possuem uma grande vantagem competitiva. A manutenção da qualidade garante a redução de custos, com menos retrabalhos, refugos, reclamações, além de gerar consumidores mais satisfeitos.

De acordo com Blödorn e Soares (2011), desde o início do século XXI, não se considera a qualidade como uma função isolada dentro das organizações e nem somente como diferencial de mercado, mas como uma questão de sobrevivência para as organizações. Dessa forma, é indiscutivelmente importante que as empresas tenham sistemas de controle de qualidade implantados, processos padronizados e que sejam adeptas da filosofia da melhoria contínua.

Dentre as ferramentas utilizadas para o monitoramento da qualidade, destacam-se os gráficos de controle. Idealizados por Shewhart no ano de 1924, estas ferramentas estatísticas são de simples criação e interpretação. Baseiam-se em um gráfico com três linhas, limite inferior de controle (LIC), linha média (LM) e limite superior de controle (LSC), para ajudarem no monitoramento tanto da média quanto da variabilidade de um determinado processo.

Segundo Costa *et al.* (2004), a eficácia de um gráfico de controle é medida pela rapidez com que ele detecta alterações nos processos. Através de uma rápida análise do gráfico, é possível notar que um determinado processo pode estar fora de controle estatístico, sob a atuação de causas ditas especiais. Essas causas são as grandes causadoras de defeitos nos produtos e devem ser eliminadas para que os processos sejam padronizados, sujeitos apenas às influências das causas aleatórias (comuns).

Os gráficos de controle de Shewhart, apesar de serem muito utilizados para o monitoramento da qualidade, possuem uma desvantagem quando comparados a outros tipos de gráficos, pois não são capazes de detectar pequenas alterações da média ou da variabilidade. Dessa forma, eles não são recomendados para aquelas organizações que necessitam de um rigoroso sistema de controle da qualidade.

Perante a necessidade de suprir as desvantagens dos gráficos de Shewhart, surgiram novos gráficos capazes de detectar pequenos desvios em torno de um valor de controle, garantindo assim um sistema de controle de qualidade mais rigoroso. Um deles utiliza as informações das amostras anteriores em função de pesos ponderados exponencialmente, logo, cada nova observação é construída levando-se em consideração a observação anterior.

Neubauer (1997) relata que o gráfico de controle da média móvel ponderada exponencialmente (EWMA) foi criado por Roberts no ano de 1959. Enquanto o gráfico de Shewhart considera apenas os valores atuais para a construção do ponto a ser plotado, o gráfico EWMA leva em consideração a observação imediatamente anterior, com um determinado peso. Esse gráfico garante o monitoramento da média tanto para amostras de tamanho único, como para amostras de tamanhos maiores ou iguais a dois.

De forma mais específica, o monitoramento da variabilidade pela ponderação exponencial se apresenta na literatura sob diferentes situações. Eyvazian *et al.* (2007) estudaram os seguintes gráficos de controle: amplitude móvel média móvel ponderada exponencialmente (EWMAMR), quadrado médio ponderado exponencialmente (EWMS) e variância amostral móvel ponderada exponencialmente (EWMSV). Huang *et al.* (2007) desenvolveram o gráfico de controle do erro quadrático médio móvel ponderado exponencialmente (EWMSD). Todos esses gráficos são utilizados para observações individuais, por subgrupo racional (pequenas amostras coletadas em intervalos de tempo).

Os gráficos de controle ponderados exponencialmente são recomendados para processos que necessitam de um rigoroso monitoramento de um determinado parâmetro, quando pequenas variações em torno de uma média e, ou, de um desvio padrão de controles devem ser detectadas, para que haja intervenção no processo.

## **2. OBJETIVOS**

### **2.1. Geral**

Analisar o desempenho dos gráficos de controle EWMA, EWMA<sub>SD</sub>, EWMA<sub>MR</sub>, EWMS e EWMSV, em relação à probabilidade do alarme falso ou verdadeiro, a partir do estabelecimento de diferentes valores aos termos ( $\lambda$ ,  $c$ ,  $k$ ,  $\alpha$  e  $h^*$ ) de cada gráfico e da imposição de diferentes situações em que o processo se encontre sob ou fora de controle estatístico.

### **2.2. Específicos**

Verificar o comportamento das probabilidades dos alarmes falsos e verdadeiros ao longo dos subgrupos racionais.

Analisar os efeitos dos dois termos estudados em cada gráfico de controle ( $\lambda$  e  $k$ ,  $\lambda$  e  $c$ ,  $\lambda$  e  $\alpha$  ou  $\lambda$  e  $h^*$ ). Além disso, calcular as probabilidades dos alarmes falsos e verdadeiros.

Comparar as probabilidades dos alarmes falsos e verdadeiros entre os diferentes gráficos de controle estudados.

## **3. REVISÃO DE LITERATURA**

### **3.1. Controle estatístico de processo**

De acordo com Costa *et al.* (2004), Shewhart buscou estudar a variabilidade dos processos e as suas explicações sobre o fato de ser impossível produzir itens exatamente iguais são aceitas até hoje. De acordo com ele, todo processo possui

uma parcela de variabilidade que é impossível de ser eliminada. Ela é chamada de variabilidade natural do processo, decorrente de causas aleatórias. No entanto, é possível que existam perturbações maiores nos processos, decorrentes de causas chamadas especiais. Essas devem ser eliminadas, pois são as causadoras de grande variabilidade nos processos. O CEP atua no sentido de eliminação das causas especiais, para que o processo seja considerado sob controle e, conseqüentemente, para que produza itens de qualidade.

Segundo Montgomery e Runger (2009), embora o CEP seja, aparentemente, uma coleção de ferramentas estatísticas utilizadas na resolução de problemas, para que haja uma eficiente utilização do mesmo, é necessário envolvimento gerencial e compromisso com o processo de melhoria da qualidade. A gerência é um modelo a ser seguido de caráter, e as outras pessoas da organização a utilizarão como um guia. O objetivo da melhoria da qualidade baseado no CEP é a melhoria contínua, em uma base semanal, quadrimestral e anual. O CEP não é um programa que deve ser aplicado em uma única vez, visando à resolução de um determinado problema, e depois abandonado. A melhoria da qualidade deve se tornar parte da cultura de uma determinada organização.

Slack *et al.* (2009) dizem que o CEP tem como objetivo checar um determinado produto ou serviço durante sua criação. Caso existam algumas suspeitas para acreditar que um processo está com algum problema, ele deve ser interrompido (onde for possível), para que os problemas possam ser detectados e corrigidos. O CEP busca fazer a identificação e correção antes que o processo produza itens defeituosos, pois estes produtos geram perdas para as empresas.

Conforme relatam Ribeiro e Caten (2012), o CEP é uma técnica utilizada durante a produção (online), que permite a redução da variabilidade na característica de qualidade de interesse, fazendo com que haja melhoria na produtividade, na confiabilidade e no custo do que está se produzindo.

Ribeiro e Caten (2012) dizem que o CEP é um sistema baseado na inspeção por amostragem. Seu objetivo é detectar a presença de causas especiais. Uma vez que essas causas forem identificadas, deve-se atuar no sentido de eliminação das mesmas, para que o processo volte a ser estável e capaz de atender à especificação.

De acordo com Silva (2014), os objetivos do CEP são: buscar a capacitação de processos, fazendo que os mesmos sejam capazes de atender às especificações dos projetos e dos clientes, e atuar no sentido de melhoria contínua. Com isso, os benefícios da utilização desse conjunto de ferramentas estatísticas são diversos, como por exemplo: redução de refugos e retrabalhos, identificação rápida de causas especiais que necessitam de correção, estabilização de processos e garantia da qualidade.

Silva (2014) afirma que o controle estatístico de processos (CEP), criado em 1924 por Walter Shewhart nos laboratórios da empresa Bell Telephone, teve seu início perante a necessidade de se desenvolver um método alternativo para substituir a inspeção completa de todas aquelas peças que eram montadas nos equipamentos das centrais telefônicas. Dessa forma, eram retiradas apenas algumas amostras para se tirar conclusões acerca da qualidade de todas.

Dentre as ferramentas estatísticas utilizados no CEP pode-se citar os histogramas, os fluxogramas, os gráficos de controle, os diagramas de causa e efeito, os diagramas de Pareto, as folhas de verificação e os gráficos de dispersão. Todas essas ferramentas são utilizadas para o monitoramento da qualidade.

### **3.2. Ciclos**

O ciclo PDCA foi idealizado na década de 20 também por Walter A. Shewhart e, no ano de 1950, passou a ser conhecido como ciclo de Deming, em homenagem a William E. Deming, que aplicou o método (PALADINI, 2008). É uma ferramenta constituída por quatro etapas, planejar (*plan*), fazer (*do*), checar (*check*) e agir (*act*) e tem por objetivo buscar a melhoria contínua dos processos, através do estabelecimento de metas e resoluções de problemas (Figura 3.1).

Conforme relatam Marshall *et al.* (2006), durante a etapa “planejar”, é importante definir os objetivos e as metas que se pretende alcançar. Na etapa “fazer” são realizados os treinamentos e os primeiros esforços no sentido de atingir as metas estabelecidas. Na etapa “checar”, é realizada uma conferência se aquilo que foi feito está de acordo com o que foi planejado. A etapa “agir”, é utilizada para a correção de problemas.



Figura 3.1 - Ciclo PDCA  
 Fonte: Oliveira (2010)

O ciclo DMAIC, semelhante ao PDCA, utiliza o conceito da metodologia Seis Sigma para realizar melhorias nos produtos, serviços e processos, para projetá-los e até mesmo reprojeta-los (AGUIAR, 2002). Este ciclo é constituído de cinco etapas: definir (*define*), medir (*measure*), analisar (*analyse*), melhorar (*improve*) e controlar (*control*). Essas fases visam o aprimoramento de processos e o treinamento de pessoas para alcançar as metas desejadas (Figura 3.2).

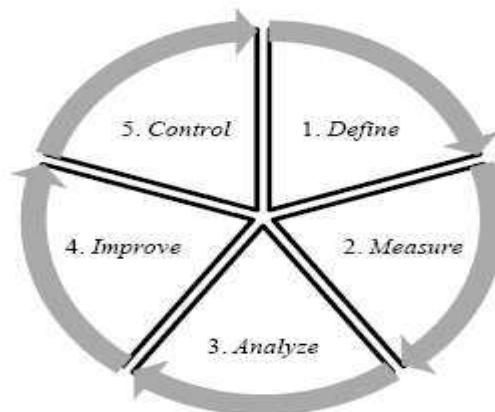


Figura 3.2 - Ciclo DMAIC  
 Fonte: Carvalho (2010)

Para Otaviano (2010), a primeira etapa, “*define*”, consiste em escolher o processo que deve ser analisado e melhorado, estabelecer alguns pré-requisitos e algumas metas a serem alcançadas. A etapa “*measure*” consiste em planejar a coleta

de dados e avaliar o sistema de medição a ser utilizado. Na etapa “*analyse*” busca-se identificar as principais causas dos problemas que foram encontrados. Uma ferramenta bastante útil nesta etapa é o diagrama de causa e efeito, que lista todas as possíveis causas especiais que podem estar atuando em um processo. Na etapa “*improve*” a ação acontece no sentido de se buscar soluções para os problemas encontrados, através do trabalho em equipe e do uso da criatividade. Caso o objetivo não seja atingido com a nova solução proposta, é necessário retornar à fase *measure* e fazer um aprofundamento dos passos até alcançar o objetivo desejado. Na etapa “*control*” é feito um controle no sentido da manutenção de tudo o que foi feito até o momento.

### **3.3. Gráficos de controle de Shewhart**

De acordo com Costa *et al.* (2004), caso os pontos plotados no gráfico possuam uma configuração aleatória em torno da linha média (LM), não há necessidade de intervenção no processo. Essa variação é devida a causas naturais ou aleatórias, intrínsecas aos processos, e nada se pode fazer para eliminá-las. No entanto, caso alguns pontos se situem fora dos limites de controle, há necessidade de se intervir no processo, pois o afastamento desses pontos em relação à LM é um forte indício de que existe alguma causa especial atuando sobre o processo. Resumidamente, diz-se que um processo está sob controle quando possuir apenas causas aleatórias e, fora de controle quando possuir causas aleatórias e especiais.

Costa *et al.* (2004) relatam que os processos devem ser continuamente monitorados, para encontrar possíveis causas especiais, que são capazes de aumentar a dispersão dos dados e deslocar a média em torno de um valor alvo. Assim que forem detectadas, deve-se fazer uma investigação das possíveis causas especiais que podem estar presentes e atuar no sentido de eliminação das mesmas. A ferramenta mais utilizada para monitorar processos e detectar a presença desses tipos de causas são os gráficos de controle.

Costa *et al.* (2004) afirmam que, para a construção dos gráficos de controle é necessário estimar o desvio padrão do processo e a média do mesmo (em alguns

casos). Esses parâmetros devem ser estimados durante aquele período que o processo era estável, ou seja, isento de causas especiais, pois essas são capazes de aumentar o desvio padrão e deslocar a média. Devido a isso, é aconselhável que se intervenha em alguns processos antes mesmo da construção dos gráficos de controle.

Costa *et al.* (2004) dizem que somente é possível monitorar um processo após conhecê-lo em detalhes. A primeira etapa, que antecede a própria construção dos gráficos de controle é a etapa de aprendizagem. Nela, busca-se conhecer os fatores que podem afetar a característica de qualidade em análise. Esta etapa é uma das mais importantes, pois é extremamente importante que se detecte todas as variáveis que podem influenciar o processo.

De acordo com Montgomery (2004), existe uma série de regras sensibilizantes para os gráficos de controle de Shewhart, que são: um ou mais pontos fora dos limites de controle; dois ou três pontos consecutivos fora dos limites de alerta dois-sigma; quatro ou cinco pontos consecutivos além dos limites um-sigma; uma sequência de oito pontos consecutivos de um mesmo lado da linha central; seis pontos em uma sequência sempre crescente ou decrescente; quinze pontos em sequência tanto acima quanto abaixo da linha central; quatorze pontos em sequência alternadamente para cima e para baixo; oito pontos em sequência de ambos os lados da linha central; um padrão não usual ou não aleatório nos dados; um ou mais pontos perto de um limite de alerta ou de controle.

Montgomery (2004) relata que é possível também a utilização de dois limites superiores de controle e de dois limites inferiores de controle. Os limites exteriores, que geralmente utilizam o valor de  $\kappa$  igual a três, são chamados limites de ação. Dessa forma, caso um ponto se situe fora desses limites, deve-se procurar as possíveis causas especiais e tomar ações corretivas, se forem necessárias. Já os limites interiores, usualmente distanciados a dois desvios padrão da linha média, são chamados de limites de alerta. Essa metodologia pode auxiliar ainda mais na prevenção de defeitos, visto que quando algumas observações se localizarem na região de alerta, a equipe técnica estará bastante atenta sobre as possíveis causas especiais que podem vir a aparecer.



De acordo com Montgomery (2004), ao se planejar um gráfico de controle deve-se levar em consideração o tamanho e a frequência da amostragem. Na maioria dos casos, amostras maiores e mais frequentes tornarão mais fáceis as detecções de pequenas mudanças nos processos. Dessa forma, antes de se escolher o tamanho e a frequência da amostra, deve-se ter em mente a magnitude da mudança que se quer detectar. Caso a mudança seja grande, deve-se utilizar amostras menores e com intervalos de tempos maiores, e vice-versa.

Conforme relatam Montgomery e Runger (2009), alguns benefícios destes gráficos são: melhoria da produtividade, devido à redução de perda e de retrabalho; prevenção de defeitos, visto que um processo sob controle estatístico está diretamente relacionado com a filosofia “faça certo na primeira vez”; prevenção de ajustes desnecessários, visto que apenas haverá intervenção no processo quando existirem causas especiais atuando; fornecimento de informações de diagnóstico, através de uma descrição do comportamento do processo; estimativa da capacidade de processos, pois a visualização dos mesmos permite-nos saber se um determinado processo conseguirá ou não atender à especificação.

Segundo Montgomery e Runger (2009), embora os gráficos de controle sejam ferramentas muito úteis para investigar as causas de variações nos processos, eles são mais efetivos quando atuam juntamente com outras ferramentas para resolver os problemas do CEP. O diagrama de Pareto auxilia na detecção das principais causas, chamadas causas vitais, que causam perturbações nos processos. Essas várias causas podem ser sugeridas por uma equipe técnica em uma simples reunião de *brainstorming*. Elas podem ser detalhadas em um diagrama de causa e efeito, que consiste em uma representação esquemática das causas potenciais de defeitos em produtos e suas inter-relações.

Montgomery e Runger (2009) dizem que as ferramentas idealizadas por Shewhart estão entre as mais efetivas no controle gerencial, sendo muito importantes no controle de custos e materiais. A tecnologia moderna computacional propiciou o uso dos gráficos de controle em todos os tipos de processos. As análises podem ser feitas em um microcomputador ou em um terminal de rede local em tempo real no próprio centro de trabalho.

Montgomery e Runger (2009) relatam que existe uma forte relação entre gráficos de controle e testes de hipóteses. Essencialmente, o gráfico de controle consiste em uma hipótese de que o processo está sob controle estatístico. Um ponto dentro dos limites de controle é semelhante a não rejeitar a hipótese de estabilidade do processo e, um ponto fora dos limites de controle, é equivalente a rejeitar a hipótese de que o processo está sob controle estatístico.

De acordo com Slack *et al.* (2009), buscar tendências também é uma importante função dos gráficos de controle. Caso elas indiquem que o processo está piorando com o tempo, então valerá à pena investigar o mesmo. Se a tendência está melhorando continuamente, ainda assim poderá valer à pena investigar o processo, para saber o que o está fazendo ficar melhor, e tentar manter esse padrão de melhorias.

Ribeiro Júnior (2013) afirma que os gráficos de controle, idealizados por Shewhart em 1924, são os principais métodos estatísticos utilizados para o monitoramento da média e da variabilidade de uma ou mais características de um determinado produto ou serviço. É importante o monitoramento contínuo dessas respostas, visto que os processos estáveis poderão se tornar instáveis, e, possivelmente, resultarem em pelo menos um item defeituoso com valor observado situado fora do limite de especificação.

Segundo Ribeiro Júnior (2013), os gráficos de controle consistem em uma representação das variações dos próprios valores de uma variável-resposta ou das estimativas de um estimador, relacionado a algum tipo de variação desses valores, ao longo do tempo. De forma sucinta, o gráfico é constituído de uma linha central ou linha média (LM) e dos limites inferior (LIC) e superior (LSC) de controle. Essas variações são ditas como aleatórias, quando estão restritas aos dois limites de controle. Portanto, um processo dito sob controle estatístico (processo estável, previsível) é aquele que apresenta todos os pontos localizados entre os limites de controle e distribuídos de maneira aleatória. Na Figura 3.3 é ilustrado um gráfico de controle obtido de um processo sob controle estatístico.

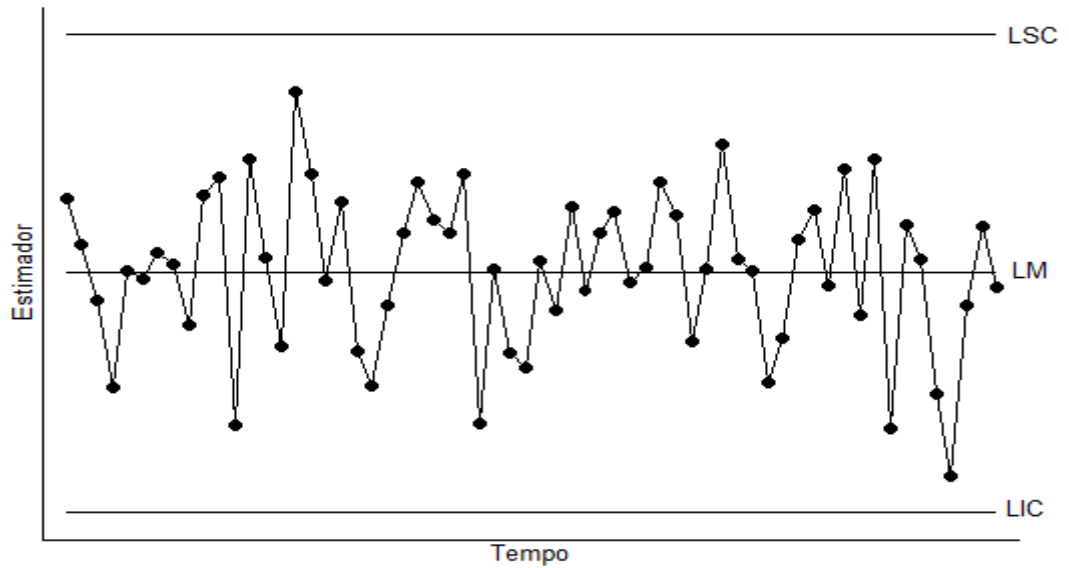


Figura 3.3 - Representação por gráfico de controle de um processo sob controle estatístico  
 Fonte: Ribeiro Júnior (2013)

De acordo com Ribeiro Júnior (2013), processos que estão fora de controle estatístico, chamados de processos instáveis, geram pelo menos uma observação localizada fora dos limites de controle. Nesse caso, é necessária uma intervenção no processo para a identificação e eliminação das respectivas causas especiais de variação. Na Figura 3.4 é ilustrado um gráfico de controle feito em função de um processo fora de controle estatístico.

Para Montgomery e Runger (2009), pode-se criar um modelo geral para os gráficos de controle de Shewhart. Para tanto, considere  $X$  uma estatística da amostra,  $\mu_X$  a média de  $X$  e  $\sigma_X$  o desvio padrão de  $X$ . Então, a linha média (LM) e os limites inferior (LIC) e superior de controle (LSC), afastados de  $\kappa$  desvios padrão de  $X$  se tornam:

$$\text{LIC} = \mu_X - \kappa\sigma_X$$

$$\text{LM} = \mu_X$$

$$\text{LSC} = \mu_X + \kappa\sigma_X$$

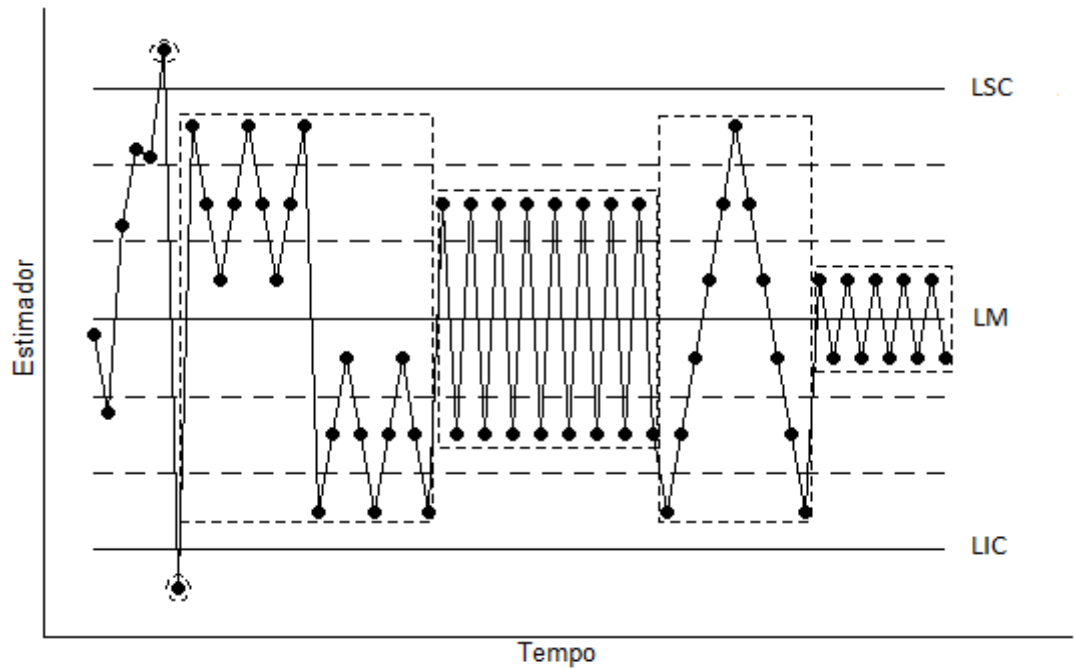


Figura 3.4 - Representação por gráfico de controle de um processo fora de controle estatístico  
 Fonte: Adaptado de Ribeiro Júnior (2013)

Esse modelo é aplicado para o monitoramento da média. Para o monitoramento da variabilidade, Shewhart criou três tipos de gráficos de controle: AM, R e S.

De acordo com Montgomery (2004), o gráfico de controle da amplitude móvel (AM) é utilizado para valores individuais, ou seja, sem repetições dentro de cada subgrupo racional. A estatística plotada e os limites de controle são:

$$AM_i = |X_i - X_{i-1}|$$

$$LIC = D_3 * \overline{AM}$$

$$LM = \overline{AM}$$

$$LSC = D_4 * \overline{AM}$$

$$\overline{AM} = \sum_{i=1}^n \frac{AM_i}{n}$$

$D_3$  e  $D_4$  são valores tabelados,  $X_i$  é o valor plotado e  $AM_i$  é a estatística plotada.

De acordo com Pozzobon (2001), o gráfico de controle de controle da amplitude (R) é utilizado para subgrupos racionais com repetições. A estatística plotada e os limites de controle são dados a seguir:

$$R_i = X_{i(\text{maior})} - X_{i(\text{menor})}$$

$$LIC = \bar{R} - 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} - 3d_3 \frac{\bar{R}}{d_2} = D_3 * \bar{R}$$

$$LM = \bar{R}$$

$$LSC = \bar{R} + 3\hat{\sigma}_R = \bar{R} + 3d_3 \frac{\bar{R}}{d_2} = D_4 * \bar{R}$$

$$AM\bar{M} = \sum_{i=1}^n \frac{AM_i}{n}$$

$D_3$ ,  $D_4$ ,  $d_2$  e  $d_3$  são valores tabelados e  $R_i$  é a estatística plotada.

De acordo com Pozzobon (2001), o gráfico de controle do desvio padrão amostral (S) também é utilizado para subgrupos racionais com repetições. A estatística plotada e os limites de controle são dados a seguir:

$$S_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2}{n-1}}$$

$$LIC = B_3 \bar{S}$$

$$LM = \bar{S}$$

$$LSC = B_4 \bar{S}$$

$$\bar{S} = \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{n}$$

$B_3$  e  $B_4$  são valores tabelados e  $S_i$  é a estatística plotada.

Costa *et al.* (2004) dizem que, antes da construção dos gráficos de controle é necessário identificar e eliminar as possíveis causas especiais que estão atuando no processo. Para a identificação das mesmas, uma ferramenta estatística bastante utilizada é o diagrama de causa e efeito ou diagrama de Ishikawa. Ela consiste em uma linha central apontando diretamente para o defeito em análise e seis ramificações saindo dessa linha, chamadas de causas primárias, que são: matéria-prima, mão de obra, meio ambiente, máquina, método e medição. Partindo dessas causas primárias, a equipe técnica envolvida no processo irá detectar todas as possíveis causas secundárias dentro de cada causa primária.

### **3.4. Gráficos de controle ponderados exponencialmente**

Os gráficos de controle de Shewhart, apesar de serem de fácil construção e interpretação, possuem a desvantagem de não conseguirem detectar pequenas diferenças na média ou no desvio padrão do processo. Ao se usar os gráficos de Shewhart nesses casos, existe um grande risco de considerar que o processo está sob controle, quando na verdade não está.

Para aumentar a sensibilidade de detecção das causas especiais sem aumentar a chance de alarme falso, Roberts, em 1959, criou o gráfico de controle da média móvel ponderada exponencialmente (EWMA), para o monitoramento da média. No caso do monitoramento da variabilidade existem outros tipos de gráficos, como por exemplo: EWMSD (erro quadrático médio móvel ponderado exponencialmente), EWMAMR (amplitude móvel média móvel ponderada exponencialmente), EWMS

(quadrado médio ponderado exponencialmente) e EWMSV (variância amostral móvel ponderada exponencialmente).

Neubauer (1997) relata que, enquanto os gráficos de controle de Shewhart utilizam apenas os valores imediatos para as construções dos gráficos, os da ponderação exponencial (Tabela 3.1) utilizam, também, os anteriores. Depois de multiplicado por um fator de peso, o valor em análise é adicionado à soma de todas as medidas.

Tabela 3.1 – Características de alguns gráficos de controle ponderados exponencialmente

Gráfico de Controle	Tamanho do Subgrupo Racional	Estatística Monitorada	Criação
EWMA	$n \geq 1$	Média	Roberts (1959)
EWMSD	$n = 1$	Variância	Huang <i>et al.</i> (2012)
EWMAVR	$n = 1$	Amplitude Móvel	Ng e Case (1989)
EWMS	$n = 1$	Erro Quadrático Médio	Wortham e Ringer (1971)
EWMSV	$n = 1$	Variância	Eyvazian <i>et al.</i> (2007)

### 3.4.1. EWMA

Costa *et al.* (2004) afirmam que o gráfico de controle da média móvel ponderada exponencialmente (EWMA) é uma opção para os gráficos de controle de Shewhart da medida individual e da média, caso o objetivo seja detectar pequenos desvios na média de um processo. Em casos em que é necessário detectar deslocamentos menores do que um desvio padrão e meio, recomenda-se utilizar o gráfico EWMA. O gráfico de controle EWMA pode ser utilizado para observações individuais ou não. Logo, o tamanho do subgrupo racional deve ser maior ou igual a um.

De acordo com Costa *et al.* (2004), para valores pequenos de  $\lambda$ , o gráfico EWMA detecta pequenos desajustes com maior rapidez. Os valores pequenos de  $\lambda$  fazem com que os dados históricos (observações anteriores àquela que está em análise) tenham grande peso no cálculo de  $W_i$ . E, de maneira inversa, os maiores

valores de  $\lambda$  fazem com que a última observação, aquela que está sendo analisada, tenha grande peso no cálculo de  $W_i$ . Para o caso em que  $\lambda = 1$ , o gráfico EWMA se reduz ao gráfico de Shewhart, pois os dados históricos deixam de ter influência no cálculo de  $W_i$ . Já no caso em que  $\lambda = 0$ , o peso da última observação é nulo e o peso seria apenas do histórico. Nesse caso, ter-se-ia  $W_i = W_0 = \mu_0$ . Consequentemente, não haveria necessidade de se monitorar o processo. Devido a essas constatações é que se recomenda a utilização de  $\lambda$  no intervalo  $0 < \lambda \leq 1$ .

O estimador plotado na construção do gráfico de controle EWMA é obtido através da expressão:

$$W_i = \lambda X_i + (1 - \lambda)W_{i-1}$$

Costa *et al.* (2004) afirmam que os limites de controle para cada subgrupo racional e a linha média, dado  $n = 1$ , são dados pelas expressões:

$$LIC_i = \mu_0 - k\sigma_0 \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right) [1 - (1-\lambda)^{2i}]}$$

$$LM = \mu_0$$

$$LSC_i = \mu_0 + k\sigma_0 \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right) [1 - (1-\lambda)^{2i}]}$$

Em que  $\mu_0$  é a média do processo sob controle,  $\sigma_0$  é o desvio padrão do processo sob controle,  $k$  é o coeficiente de abertura dos limites de controle e  $i$  é a ordem do subgrupo racional.

Segundo Costa *et al.* (2004), à medida que o subgrupo racional  $i$  aumenta a quantidade  $[1 - (1 - \lambda)^{2i}]$  tende para a unidade. Assim, para subgrupos racionais maiores, os limites de controle tenderão para as seguintes expressões:



$$LIC = \mu_0 - k\sigma_0 \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}$$

$$LSC = \mu_0 + k\sigma_0 \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}$$

Segundo Montgomery e Runger (2009), os limites de controle são colocados a três desvios padrão em torno da média da estatística plotada  $W$  ( $k = 3$ ).

Cada observação tem seu peso ponderado pelo termo  $\lambda$ . O valor inicial  $w_0$  equivale a  $\mu_0$ , sendo que a soma dos pesos é igual a 1 (MONTGOMERY e RUNGER, 2009).

De acordo com Montgomery e Runger (2009), o valor de  $\lambda$  é geralmente escolhido a partir da faixa de valores  $0,1 < \lambda < 0,5$ . Uma escolha comum é  $\lambda = 0,2$ . Menores valores para  $\lambda$  fornecem mais sensibilidade para pequenas mudanças e maiores valores para essa constante ajustam melhor o gráfico para mudanças maiores.

O gráfico de controle EWMA pode ser aplicado para medidas individuais como para medidas com mais de uma observação por subgrupo racional (MONTGOMERY e RUNGER, 2009). Para os casos em que existem  $n$  repetições dentro de cada subgrupo racional ( $n \geq 2$ ), os limites de controle e a linha média são dados pelas expressões:

$$LIC_i = \mu_0 - \frac{k\sigma_0}{\sqrt{n}} \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right) [1 - (1-\lambda)^{2i}]}$$

$$LM = \mu_0$$

$$LSC_i = \mu_0 + \frac{k\sigma_0}{\sqrt{n}} \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right) [1 - (1-\lambda)^{2i}]}$$

Para Slack *et al.* (2009), não é possível dizer com absoluta certeza que um processo com configuração aleatória esteja sob controle estatístico e que um processo que possua pontos fora dos limites de controle esteja fora de controle estatístico. Existe uma chance, na grande maioria das vezes bastante pequena, de um processo estar sob controle e ser considerado como fora de controle. Essa probabilidade é conhecida como probabilidade do alarme falso ou do erro tipo I, representada pela letra  $\alpha$ . De maneira semelhante, existe uma chance de um processo estar fora de controle e ser considerado como sob controle. Essa probabilidade é a do erro tipo II, representado por  $\beta$ .

Santos *et al.* (2010) relatam que, a obtenção dos pontos a serem plotados no gráfico EWMA considera um termo que controla os pesos, dado por  $0 < \lambda \leq 1$ , e o estimador de interesse denotado por  $X_i$ . O gráfico EWMA consiste em uma representação gráfica do estimador *versus* o número da amostra ou do subgrupo racional. A linha média ou central e os limites de controle são construídos sob a suposição de normalidade. Baixos valores de  $\lambda$  fazem com que o gráfico detecte, de maneira rápida, pequenas mudanças na média do processo. Dependendo do valor selecionado para  $\lambda$ , é possível mostrar que o gráfico de controle EWMA é mais poderoso que o gráfico de controle de Shewhart para a detecção de pequenas diferenças na média do processo.

Ribeiro Júnior (2013) também estabelece uma recomendação, no mesmo sentido daquela de Montgomery e Runger (2009), para a utilização dos valores de  $\lambda$  em diferentes situações.

Segundo Alves (2003), o comprimento médio da sequência (ARL) representa o número médio de amostras necessárias para que seja detectada uma mudança, após a mesma já ter ocorrido no processo, ou seja, quantas amostras serão necessárias para que o gráfico sinalize que o processo está fora de controle. Porém, este sinal pode ser tanto um alarme falso quanto um alarme verdadeiro. Para o gráfico de controle emitir esse sinal é preciso que o tempo seja levado em consideração. Caso o processo esteja sob controle estatístico, o interesse é que este tempo seja aumentado o máximo possível, para que a taxa de alarmes falsos seja reduzida. No caso dos processos fora de controle estatístico, o tempo deverá ser curto, para que a mudança seja detectada rapidamente.

Para Albarracin (2014), a estatística  $ARL_0$  é basicamente o número médio de observações que devem ser plotadas no gráfico antes de se emitir um sinal fora de controle, quando o processo está sob controle estatístico. Por outro lado, o  $ARL_1$  consiste no número médio de observações necessárias para emitir um sinal fora de controle, quando o processo não está sob controle estatístico.

As expressões a seguir ilustram os cálculos do  $ARL_0$  e  $ARL_1$ :

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha}$$

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta} = \frac{1}{Poder}$$

O  $\alpha$  equivale à probabilidade do erro tipo I, ou seja, à probabilidade de exibição de um alarme, chamado de falso, quando o processo está sob controle estatístico. Já o  $\beta$  equivale à probabilidade do erro tipo II, que é a probabilidade de não se emitir um alarme, quando o processo está fora de controle. Neste último caso, não ocorreu um alarme quando ele deveria ter ocorrido, para sinalizar as anormalidades no processo.

De acordo com Montgomery (2004), na maioria das vezes, pode-se observar que os valores de  $\lambda$  no intervalo  $0,05 \leq \lambda \leq 0,25$  funcionam bem na prática, sendo que os valores de  $\lambda = 0,05$ ,  $\lambda = 0,10$  e  $\lambda = 0,20$  são as escolhas mais frequentes. Uma regra bastante comum é utilizar menores valores de  $\lambda$  para detectar menores mudanças nos processos. Pode-se observar na Tabela 3.2 que, caso o aumento no desvio padrão seja  $k = 3$  (os usuais três sigmas), o gráfico terá melhor desempenho para os maiores valores de  $\lambda$ .

Conforme relata Montgomery (2004), existem vários estudos teóricos sobre o ARL do gráfico EWMA. Os estudos de Crowder (1987 a 1989) e Lucas e Saccucci (1990) fornecem tabelas ou gráficos para os valores do ARL em função de diferentes valores de  $\lambda$  e  $k$ . Na Tabela 3.2 são ilustrados os desempenhos do ARL para várias combinações de  $\lambda$  e  $k$ .

Tabela 3.2 –  $ARL$  para diversos esquemas de EWMA com  $ARL_0 = 500$

Mudança na média (múltiplo de $\sigma$ )	$k = \pm 2,998$ $\lambda = 0,25$	$k = \pm 2,962$ $\lambda = 0,20$	$k = \pm 2,814$ $\lambda = 0,10$	$k = \pm 2,615$ $\lambda = 0,05$
0	500	500	500	500
0,25	170	150	106	84,1
0,50	48,2	41,8	31,3	28,8
0,75	20,1	18,2	15,9	16,4
1,00	11,1	10,5	10,3	11,4
1,50	5,5	5,5	6,1	7,1
2,00	3,6	3,7	4,4	5,2
2,50	2,7	2,9	3,4	4,2
3,00	2,3	2,4	2,9	3,5
4,00	1,7	1,9	2,2	2,7

Fonte: Adaptado de Lucas e Saccucci (1990)

Montgomery (2004) diz que o procedimento mais adequado deveria ser a escolha das especificações dos ARLs sob controle e fora de controle estatístico e, como também, da magnitude da mudança no processo (múltiplo de  $\sigma$ ), para que, após isso, possa ser feito a melhor seleção da combinação entre  $k$  e  $\lambda$ , que fornecesse o desempenho do ARL desejado.

O ARL pode ser utilizado para verificar o desempenho de um gráfico de controle. Caso um processo esteja sob controle estatístico, os valores mais indicados para o comprimento médio da sequência são os maiores possíveis, pois o objetivo é interromper o processo no momento mais tarde possível. No entanto, se um processo estiver fora de controle, deve-se escolher aqueles gráficos de controle que possuem os menores valores para o comprimento médio da sequência, para que a presença de um sinal e a interrupção no processo aconteça o quanto antes.

Os erros tipo I e tipo II também podem ser utilizados para se analisar o desempenho dos gráficos de controle. O primeiro consiste em rejeitar uma hipótese verdadeira e, o segundo, em aceitar uma hipótese falsa. Na Tabela 3.3 são ilustradas as possíveis situações que podem acontecer.

Tabela 3.3 - Possíveis resultados de um teste de hipóteses

Hipótese $H_0$	Decisão			
	Aceitar $H_0$	Probabilidade	Rejeitar $H_0$	Probabilidade
<b>Verdadeira</b>	Decisão correta	$1 - \alpha$	Erro tipo I	$\alpha$
<b>Falsa</b>	Erro tipo II	$\beta$	Decisão correta	$1 - \beta$

Fonte: Costa *et al.* (2004)

Os melhores gráficos de controle serão aqueles que apresentarem o menor valor para  $\alpha$  e para  $\beta$ . Além disso, como a expressão  $1 - \beta$  também é conhecida como poder de um teste estatístico, recomenda-se buscar gráficos de controle que possuam alto poder, ou seja, alta probabilidade do alarme verdadeiro.

Costa *et al.* (2004) afirmam que a consequência prática do erro tipo I é a intervenção no processo quando o mesmo está isento de causas especiais, o que acarreta custo de interrupção de mão de obra e de interrupção do processo. E, a consequência do erro tipo II é a não intervenção no processo na hora certa, quando o processo possui causas especiais. No último caso, pode haver produtos defeituosos e que não serão capazes de atender à especificação, e, com isso, serão descartados, gerando perdas para a empresa.

Para o caso do monitoramento da estatística  $X$  igual à média, pode-se utilizar as expressões seguintes para os cálculos de  $\alpha$  e  $\beta$ :

$$\alpha = P(X > LSC \text{ ou } X < LIC \mid \mu = \mu_0)$$

$$\beta = P(LIC \leq X \leq LSC \mid \mu \neq \mu_0)$$

O gráfico EWMA funciona bem para pequenas mudanças. No entanto, não reage tão bem a mudanças maiores, ao contrário dos gráficos de controle de Shewhart (MONTGOMERY, 2004).

### 3.4.2. EWMASD

O gráfico de controle EWMASD (*Exponentially Weighted Moving Average Squared Deviation* ou Erro Quadrático Médio Móvel Ponderado Exponencialmente), proposto por Huang *et al.* (2012), é utilizado para o monitoramento da variabilidade dos processos no caso de subgrupos racionais com tamanhos iguais a um (observações individuais).

De acordo com Huang *et al.* (2012), o desempenho do gráfico de controle EWMASD sob mudanças contínuas na variabilidade, foi estudado por Domangue e Patch (1991) e MacGregor e Harris (1993). No entanto, a forma estrutural de uma causa especial é geralmente desconhecida na prática. Esse tipo de causa pode levar a variabilidade do processo à deriva. Os desvios nos processos são geralmente atribuídos a desgastes de máquinas e ferramentas, ou mesmo a causas humanas. Algumas formas de se reduzir a variabilidade dos processos ocorrem através da utilização de melhores materiais, da melhoria das habilidades do operador ou mesmo da manutenção de máquinas e ferramentas.

Dado  $V_i = (Y_i - \mu_0)^2$  o erro quadrático do subgrupo racional  $i$ , note que  $Y_i$ , a variável aleatória a ser monitorada, é normalmente distribuída com média  $\mu_0$  e variância  $\sigma^2_i$ . Assim, a estatística  $\frac{V_i}{\sigma^2_i}$  segue uma distribuição qui-quadrado com um grau de liberdade, pois a cada tempo  $i$  uma observação individual é retirada. Consequentemente, o tamanho do subgrupo racional é igual a um (HUANG *et al.*, 2012).

Os valores a serem plotados no gráfico EWMASD devem ser obtidos de acordo com a utilização da seguinte expressão:

$$s_i = \max [\sigma^2_0; (1 - \lambda)s_{i-1} + \lambda v_i]$$

Em que:  $v_i = (y_i - \mu_0)^2$ ;  $y_i$  é o valor observado de  $Y$  no subgrupo racional  $i$  e  $\lambda \in (0,1]$  é uma constante de suavização.

Para Huang *et al.* (2012), o valor inicial  $s_i$  é geralmente  $s_0 = \sigma_0^2$ , sendo  $\sigma_0^2$  a variância do processo sob controle. Observe que o gráfico de controle EWMSD redefine o gráfico de controle para  $\sigma_0^2$  sempre que  $s_i$  for menor que  $\sigma_0^2$ . Um sinal é disparado quando  $s_i$  excede o limite  $h$  (limite superior de controle). Sendo excedido, é um indicativo de que podem existir causas especiais atuando no processo.

$$LSC = h = \sigma_0^2 + c \sqrt{\frac{2\lambda}{2-\lambda}} \sigma_0^2$$

Em que  $c$  é uma constante multiplicativa selecionada para se obter o desempenho desejado sob controle.

Sheu *et al.* (2009) criaram um gráfico de controle para o monitoramento da variabilidade que é bastante semelhante ao gráfico de controle EWMSD. Segundo os autores, a estatística plotada e o limite superior de controle são dados por:

$$V_i = (1 - \lambda) \max(V_{i-1}, \sigma_0^2) + \lambda(X_i - \mu_0)^2, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

$$LSC = \sigma_0^2 + L_v \sigma_0^2 \sqrt{\frac{2\lambda}{2-\lambda}}$$

Em que  $x_i$  é o valor simulado,  $v_0 = \sigma_0^2$ ,  $L_v$  é uma constante com mesmo significado de  $k$ .

### 3.4.3. EWMAMR

O gráfico de controle EWMAMR (*Exponentially Weighted Moving Average Moving Range* ou Amplitude Móvel Média Móvel Ponderada Exponencialmente), proposto por Ng e Case, em 1989, é capaz de monitorar a variabilidade de processos nos casos em que as amostras são de tamanhos iguais a um ( $n=1$ ) por subgrupo racional, conforme relatado por Eyvazian *et al.* (2007).

As observações a serem plotadas no gráfico EWMAMR devem ser transformadas através da expressão a seguir:

$$w_i = \lambda am_i + (1 - \lambda)w_{i-1}$$

Em que o valor inicial para a estatística  $W_i$  deve ser  $w_i = w_0 = \mu_{AM} = d_2 \sigma_0$ . Os valores  $am_i$ , da amplitude móvel, são dados por  $am_i = |y_i - y_{i-1}|$ , e os valores  $y_i$  são os valores observados da variável aleatória de interesse. Além disso, o valor  $\lambda$  é chamado de peso do subgrupo racional ( $0 < \lambda \leq 1$ ) e  $d_2$  é uma constante tabelada em função do comprimento da amplitude móvel.

Após a esquematização dos pontos no gráfico, deve-se construir os limites de controle. Para esse tipo de gráfico, é necessário conhecer os valores  $f_5$  e  $f_6$ , dados pelas seguintes fórmulas:

$$f_5 = 1 - z_{1-\alpha/2} \frac{d_3}{d_2} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}$$

$$f_6 = 1 + z_{1-\alpha/2} \frac{d_3}{d_2} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}}$$



As constantes  $d_2$  e  $d_3$  possuem os valores 1,128 e 0,853, respectivamente, de acordo com Ng e Case (1989), citados por Eyvazian *et al.* (2007). O valor  $z_{1-\alpha/2}$  é o valor da variável aleatória normal padronizada que deixa uma probabilidade de  $1 - \alpha/2$  na cauda à esquerda. Os limites de controle e a linha média do gráfico são mostrados a seguir:

$$LIC = f_5 \mu_{AM}$$

$$LM = \mu_{AM}$$

$$LSC = f_6 \mu_{AM}$$

Ng e Case (1989), citados por Eyvazian *et al.* (2007), tabularam diferentes valores  $f_5$  e  $f_6$  como fatores de pesos para os limites de controle. Eles mostraram que o gráfico de controle EWMAMR possui desempenho melhor do que o respectivo e tradicional gráfico de Shewhart da amplitude móvel, em detectar pequenas e moderadas mudanças na variabilidade do processo.

Shamma e Amin (1993) desenvolveram um gráfico de controle para o monitoramento da variabilidade que é bastante semelhante ao gráfico de controle EWMAMR. De acordo com os autores, a estatística plotada e o limite superior de controle são dados por:

$$A_i = \lambda Z_i^2 + (1 - \lambda) A_{i-1}$$

$$LSC = 1 + L \sqrt{\left( \frac{2\lambda}{2 - \lambda} \right)}$$

Shamma e Amin (1993) relatam que  $Z_i^2$  é uma função perda, cujo valor depende da escolha do pesquisador,  $\lambda$  é uma constante de suavização,  $L$  é definido de acordo com as condições impostas pelo pesquisador e  $A_0 = 1$ .

### 3.4.4. EWMS

O gráfico de controle EWMS (*Exponentially Weighted Mean Squared* ou Quadrado Médio Ponderado Exponencialmente), utilizado para o monitoramento da variabilidade e da média de processos, foi sugerido por Wortham e Ringer (1971) e desenvolvido por MacGregor e Harris (1993), conforme citados por Eyvazian *et al.* (2007) e Montgomery (2004). O gráfico de controle EWMS é utilizado para observações individuais ( $n=1$ ) por subgrupo racional.

O erro quadrático médio (EQM) de um estimador  $\hat{\theta}$  é a esperança da diferença entre ele e o parâmetro  $\theta$ , ao quadrado, como segue:

$$EWM(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$$

A expressão anterior pode ser reescrita por:

$$EQM(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta} - E(\hat{\theta})]^2 + [\theta - E(\hat{\theta})]^2$$

Portanto, conclui-se que o EQM pode ser reescrito por:

$$EQM(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta}) + (Viés)^2$$

O viés nada mais é do que a distância entre a média de um estimador e o parâmetro.

Pode-se dizer que o EQM aborda duas parcelas. Uma devida à variabilidade e a outra devida à diferença entre os valores reais e estimados. Com isso, pode-se dizer que o gráfico de controle EWMS pode ser utilizado para o monitoramento

tanto da média (relacionada ao viés) quanto da variabilidade (relacionada à variância).

As observações individuais de  $Y_i$  devem ser independentes e identicamente distribuídas de acordo com a distribuição normal com média  $\mu_0$  e variância  $\sigma_0^2$  (EYVAZIAN *et al.*, 2007). A estatística a ser plotada no gráfico EWMS é expressa por:

$$EQM_i = (1 - \lambda)EQM_{i-1} + \lambda(Y_i - \mu_0)^2$$

Nesse caso, o multiplicador  $\lambda$  ( $0 < \lambda \leq 1$ ) é o termo de suavização, que pode ajustar a exponencial descontando as observações passadas.  $EQM_0$  é um estimador do erro quadrático médio, geralmente vindo de observações históricas estáveis (EYVAZIAN *et al.*, 2007).

Box (1954), citado por Eyvazian *et al.* (2007), mostrou que  $\frac{EQM_i}{\sigma_0^2}$  é a soma ponderada de variáveis aleatórias qui-quadrado e provou que esta estatística é aproximadamente distribuída como  $\frac{\chi^2_{\nu'}}{\nu'}$ , em que  $\nu'$  é o número de graus de liberdade, que depende da constante de suavização  $\lambda$ .

MacGregor e Harris (1993), também citados por Eyvazian *et al.* (2007), mostraram que  $\nu'$  é assintoticamente dado por:  $\frac{\lambda}{2 - \lambda}$ .

Portanto,  $\frac{EQM_i}{\sigma_0^2}$  segue, aproximadamente, distribuição qui-quadrado  $\chi^2_{\nu}$  com  $\nu = \frac{2 - \lambda}{\lambda}$  graus de liberdade.

Os limites de controle para monitorar  $\frac{EQM_i}{\sigma_0^2}$  podem ser encontrados pelas seguintes expressões (EYVAZIAN *et al.*, 2007):

$$LIC = \frac{\chi^2_{v,\alpha/2}}{v}$$

$$LSC = \frac{\chi^2_{v,1-\alpha/2}}{v}$$

Portanto, para monitorar o  $EQM_i$ , tem-se a linha média e os limites de controle dados pelas seguintes expressões:

$$LIC = \sigma^2_0 \frac{\chi^2_{v,\alpha/2}}{v}$$

$$LM = \sigma^2_0$$

$$LSC = \sigma^2_0 \frac{\chi^2_{v,1-\alpha/2}}{v}$$

Em que  $\chi^2_{v,\alpha/2}$  e  $\chi^2_{v,1-\alpha/2}$  são os valores da distribuição qui-quadrado com  $v$  graus de liberdade, que deixam as probabilidades  $\alpha/2$  e  $1-\alpha/2$  na cauda à esquerda, respectivamente.

Para Eyvazian *et al.* (2007), como é bastante importante a detecção de pequenos decréscimos ou aumentos no desvio padrão do processo, os limites superior e inferior de controle costumam ser criados usando-se os limites com  $100(1-\alpha/2)\%$  e  $100(\alpha/2)\%$  de confiança, respectivamente, para a distribuição qui-quadrado.

Montgomery (2004) utiliza esse gráfico, plotando-se a raiz do erro quadrático médio para se fazer o monitoramento da variabilidade de processos. Dessa forma, a estatística plotada e os limites de controle, considerando-se a probabilidade  $\alpha/2$  nas extremidades inferior e superior, são:

$$\sqrt{EQM_i} = \sqrt{(1-\lambda)EQM_{i-1} + \lambda(Y_i - \mu_0)^2}$$

$$LIC = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi^2_{v, \alpha/2}}{v}}$$

$$LM = \sigma_0$$

$$LSC = \sigma_0 \sqrt{\frac{\chi^2_{v, 1-\alpha/2}}{v}}$$

### 3.4.5. EWMSV

Para Eyvazian *et al.* (2007), o gráfico de controle EWMSV (*Exponentially Weighted Moving Sample Variance* ou Variância Amostral Móvel Ponderada Exponencialmente) é utilizado para o monitoramento da variabilidade de processos. Nesse gráfico, a variância amostral de  $i$  observações individuais é transformada na forma móvel ponderada exponencialmente. O gráfico de controle EWMSV é também utilizado para observações individuais por subgrupo racional.

Segundo Eyvazian *et al.* (2007), suponha que as observações individuais sejam independentes e identicamente distribuídas como variável aleatória normal com média  $\mu_0$  e variância  $\sigma_0^2$ . A estimativa  $s^2_i$ , que é a variância amostral das observações individuais até a amostra  $i$ , é o valor a ser plotado no gráfico de controle EWMSV.

$$s^2_i = \sum_{j=1}^i \frac{(y_j - \bar{y}_i)^2}{i-1}$$

Eyvazian *et al.* (2007) afirmam que  $s^2_i$  pode ser reescrito por:

$$s^2_i = \left(1 - \frac{1}{i-1}\right) s^2_{i-1} + \frac{(y_i - \bar{y}_i)^2}{i-1} + (\bar{y}_{i-1} - \bar{y}_i)^2$$

Substituindo  $\frac{1}{i-1}$  por  $\lambda$ , a expressão anterior pode ser reescrita por (EYVAZIAN *et al.*, 2007):

$$s^2_i = (1 - \lambda)s^2_{i-1} + \lambda(y_i - \bar{y}_i)^2 + (\bar{y}_{i-1} - \bar{y}_i)^2$$

Conforme relatam Eyvazian *et al.* (2007),  $\bar{y}_{i-1}$  e  $\bar{y}_i$  são as médias amostrais para as  $i-1$  e  $i$  últimas observações e o multiplicador  $\lambda$  ( $0 < \lambda \leq 1$ ) é chamado de constante de suavização. Os valores iniciais  $\bar{y}_0$  e  $s^2_0$  são as estimativas da média  $\mu_0$  e da variância  $\sigma_0^2$ , respectivamente. Tais valores  $\bar{y}_0$  e  $s^2_0$  também podem ser substituídos pela média  $\mu_0$  e a variância  $\sigma_0^2$  de controles, respectivamente.

Eyvazian *et al.* (2007) sugerem a construção de apenas o limite superior de controle ( $H$  ou intervalo de decisão). Como a variabilidade plotada no gráfico EWMSV, é sempre maior ou igual a zero, não faz sentido a construção de um limite inferior de controle menor do que zero. O limite superior de controle é dado por:

$$LSC = H = h^* \sigma_0$$

Em que  $h^*$  é o intervalo de decisão padronizado.

Dessa forma, caso o valor  $s^2_i$  supere o valor  $H$ , a conclusão é de que o processo pode estar fora de controle, e deve ser investigado.

O valor  $H$  está diretamente relacionado com o tamanho médio da sequência utilizado ( $ARL$ ) e com a constante de suavização  $\lambda$ . Na Tabela 3.4 são ilustrados os diferentes valores de  $H$  para os valores de  $ARL$  e  $\lambda$ . Ela tem a utilidade de servir para as construções do limite de superior de controle dos gráficos EWMAMR, EWMS e EWMSV.

Tabela 3.4 - Valores de  $H$  para diferentes gráficos de controle utilizando um comprimento médio da sequência sob controle igual a 200 ( $ARL_0 = 200$ )

	$\lambda$							
	0,05	0,1	0,15	0,2	0,3	0,4	0,5	0,7
EWMS	1,455	1,845	2,19	2,58	3,21	3,85	4,2794	5,818
EWMAMR	1,435	1,66	1,811	2,033	2,354	2,62	2,87	3,32
EWMSV	1,650	2,005	2,332	2,652	3,277	3,88	4,498	5,764

Fonte: Adaptado de Eyvazian *et al.* (2007)

## 4. MATERIAL E MÉTODOS

### 4.1. Simulação de dados

Para estudar o desempenho, em termos das probabilidades dos alarmes falsos e verdadeiros, dos gráficos de controle EWMA, EWMSD, EWMAMR, EWMS e EWMSV foram geradas 1000 simulações de 50 subgrupos racionais com observações individuais ( $n=1$ ) de uma variável aleatória normal padronizada ( $\mu_0 = 0$  e  $\sigma_0 = 1$ ). Logo, o processo foi considerado sob controle estatístico.

O modelo da simulação dos  $y_{ij}$ , da variável aleatória  $Y$ , no subgrupo racional  $i$  e simulação  $j$ , com  $i = 1, 2, 3, \dots, 50$  e  $j = 1, 2, 3, \dots, 1000$ , está mostrado na Tabela 4.1. Foram 1000 repetições das construções dos gráficos de controle, de cada planejamento dos termos utilizados em cada tipo de gráfico de controle.

Tabela 4.1 – Representação dos valores simulados

Subgrupo Racional	Simulação				
	1	2	3	...	1000
1	$y_{11}$	$y_{12}$	$y_{13}$	...	$y_{11000}$
2	$y_{21}$	$y_{22}$	$y_{23}$	...	$y_{21000}$
3	$y_{31}$	$y_{32}$	$y_{33}$	...	$y_{31000}$
...	...	...	...	...	...
50	$y_{501}$	$y_{502}$	$y_{503}$	...	$y_{501000}$

## 4.2. Gráficos de controle

### 4.2.1. EWMA

O gráfico de controle EWMA foi construído a partir de quatro combinações entre os valores de  $\lambda$  (0,1 e 0,3) e  $k$  (2,5 e 3) e sendo a estimativa plotada, a linha média e os limites de controle dados por:

$$w_i = \lambda y_i + (1 - \lambda)w_{i-1}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, 50, \text{ com } w_0 = 0 \text{ e } y_i = \sum_{j=1}^{1000} \frac{y_{ij}}{1000}$$

$$LIC_i = -k \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2 - \lambda}\right) [1 - (1 - \lambda)^{2i}]}$$

$$LM = 0$$

$$LSC_i = k \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2 - \lambda}\right) [1 - (1 - \lambda)^{2i}]}$$

De acordo com Rosa (2012), os maiores valores de  $\lambda$  são utilizados para detectar maiores deslocamentos na média de controle, e os menores valores desse termo são utilizados quando se quer detectar pequenos deslocamentos na média de controle. Rosa (2012) considerou  $\lambda = 0,2$  com um valor de referência para  $\lambda$ . Logo, recomenda-se a utilização de valores maiores que esse para se detectar grandes deslocamentos na média de controle, e valores menores do que essa referência para se detectar deslocamentos menores. Devido a isso, resolveu-se adotar os valores de  $\lambda$  iguais a 0,1 e 0,3.

Segundo Rosa (2012), o termo  $k$  faz referência ao número de desvios padrão do limite de controle, que é utilizado para conter a variação aleatória. É bastante comum se adotar o valor igual a 3. Porém, é aceitável a utilização de outros valores de  $k$ . Para os valores de  $k$  iguais a 3, 2 e 1 considera-se que 99,73%, 95,45% e



68,27%, respectivamente, dos valores observados estarão dentro do intervalo compreendido pelos  $LIC$  e  $LSC$ , sob causas aleatórias de variação e baseando-se na distribuição de probabilidade normal. De modo a minimizar a probabilidade do alarme falso e maximizar a probabilidade do alarme verdadeiro, resolveu-se adotar os valores de  $k$  iguais a 2,5 e 3.

#### 4.2.2. EWMA<sub>SD</sub>

O gráfico de controle EWMA<sub>SD</sub> utilizou as seguintes combinações de  $\lambda$  (0,1 e 0,3) e  $c$  (2,5 e 3), sendo a estimativa plotada e o limite superior de controle dados por:

$$s_i = \max [1; (1 - \lambda)s_{i-1} + \lambda y_i^2], \text{ para } i = 1, 2, \dots, 50 \text{ e } s_0 = 1$$

$$LSC = 1 + c \sqrt{\frac{2\lambda}{2 - \lambda}}$$

Para Sheu *et al.* (2009), a estatística plotada e o limite superior de controle são:

$$V_i = (1 - \lambda) \max(V_{i-1}, 1) + \lambda (X_i)^2$$

$$LSC = 1 + L_v \sqrt{\frac{2\lambda}{2 - \lambda}}$$

Os termos  $c$  e  $L_v$  são bastante semelhantes ao termo  $k$ , ou seja, também fazem referência ao número de desvios padrão dos limites de controle, que são utilizados para conter a variação aleatória. Desse modo, resolveu-se adotar os mesmos valores de  $c$ ,  $L_v$  e  $k$ .

### 4.2.3. EWMAMR

O gráfico de controle EWMAMR utilizou as seguintes combinações de  $\lambda$  (0,1 e 0,3) e  $\alpha$  (0,0027 e 0,0124), sendo a estimativa plotada, a linha média e os limites de controle dados por:

$$w_i = \lambda am_i + (1 - \lambda)w_{i-1}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, 50 \text{ e } w_0 = 1,128$$

$$LIC = \left( 1 - z_{1-\alpha/2} \frac{0,853}{1,128} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \right) 1,128$$

$$LM = 1,128$$

$$LSC = \left( 1 + z_{1-\alpha/2} \frac{0,853}{1,128} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda}} \right) 1,128$$

Em que:

$$z_{1-\alpha/2} = 3, \text{ para } \alpha_1 = 0,0027,$$

$$z_{1-\alpha/2} = 2,5, \text{ para } \alpha_2 = 0,0124,$$

$$am_i = |y_i - y_{i-1}|.$$

Pode-se observar que  $z_{1-\alpha/2}$  é o fator de abertura do limite de controle, sendo assim, bastante semelhante ao termo  $k$ . Devido a isso, resolveu-se adotar os valores de  $z_{1-\alpha/2}$  iguais a 2,5 e 3. Para que sejam obtidos tais valores é necessária a utilização dos seguintes valores de  $\alpha$ : 0,0124 e 0,0027, respectivamente.

Para Shamma e Amin (1993), a estatística plotada e o limite superior de controle são dados por:

$$A_i = \lambda Z_i^2 + (1 - \lambda)A_{i-1}$$

$$LSC = 1 + L \sqrt{\left(\frac{2\lambda}{2 - \lambda}\right)}$$

#### 4.2.4. EWMS

O gráfico de controle EWMS possui as seguintes combinações de  $\lambda$  (0,1 e 0,3) e  $\alpha$  (0,0027 e 0,0124), sendo a estimativa plotada, a linha média e os limites de controle dados por:

$$eqm_i = (1 - \lambda)eqm_{i-1} + \lambda y_i^2, \text{ para } i = 1, 2, \dots, 50 \text{ e } eqm_0 = 1$$

$$LIC = \frac{\chi^2_{v, \alpha/2}}{v}, \text{ para } v = \frac{2 - \lambda}{\lambda} \text{ graus de liberdade}$$

$$LM = 1$$

$$LSC = \frac{\chi^2_{v, 1-\alpha/2}}{v}, \text{ para } v = \frac{2 - \lambda}{\lambda} \text{ graus de liberdade}$$

Em que:

$$\chi^2_{v, \alpha/2} = 5,6413 \text{ e } \chi^2_{v, 1-\alpha/2} = 42,871, \text{ para } \alpha_1 = 0,0027 \text{ e } \lambda_1 = 0,1,$$

$$\chi^2_{v, \alpha/2} = 0,3561 \text{ e } \chi^2_{v, 1-\alpha/2} = 21,11, \text{ para } \alpha_1 = 0,0027 \text{ e } \lambda_2 = 0,3,$$

$$\chi^2_{v, \alpha/2} = 7,0754 \text{ e } \chi^2_{v, 1-\alpha/2} = 37,8505, \text{ para } \alpha_2 = 0,0124 \text{ e } \lambda_1 = 0,1,$$

$$\chi^2_{v, \alpha/2} = 0,6318 \text{ e } \chi^2_{v, 1-\alpha/2} = 17,4297, \text{ para } \alpha_2 = 0,0124 \text{ e } \lambda_2 = 0,3.$$

#### 4.2.5. EWMSV

O gráfico de controle EWMSV possuiu as seguintes combinações de  $\lambda$  (0,1 e 0,3) e  $h^*$  (3 e 6), sendo a estimativa plotada e o limite superior de controle dados por:

$$s^2_i = (1 - \lambda)s^2_{i-1} + \lambda(y_i - \bar{y}_i)^2 + (\bar{y}_{i-1} - \bar{y}_i)^2, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, 50, s^2_0 = 1 \text{ e } \bar{y}_0 = 0$$

$$LSC = h^*$$

Montgomery (2004) recomenda  $h^* = 4$  ou  $h^* = 5$  para o monitoramento de processos com  $\delta = 1,0$ , utilizando  $k = 0,5$ . Souza *et al.* (2008), para obter uma baixa probabilidade do alarme falso e uma alta probabilidade do alarme verdadeiro (acima de 90%), recomendaram:  $n = 1$ ,  $k = 0,5$  e  $h^* = 3$ , para  $\delta \geq 1$  e  $n = 1$ ,  $k = 0,5$  e  $h^* = 4$ , para  $0 \leq \delta < 1$ . Gonçalves (2008) afirma que os valores mais usuais para  $h^*$  se encontram entre 3 e 6. Dessa forma, resolveu-se adotar neste estudo os valores de  $h^* = 3$  e  $h^* = 6$ .

#### 4.3. Processo sob controle estatístico

De acordo com a população de valores obtidos do processo sob controle estatístico ( $\mu_0 = 0$  e  $\sigma_0 = 1$ ), qualquer ponto plotado nos gráficos de controle EWMA, EWMASD, EWMAMR, EWMS e EWMSV, situado fora dos limites de controle, foi considerado um alarme falso.

Portanto, a estimativa da probabilidade do alarme falso, em cada subgrupo racional e em cada gráfico de controle construído, separadamente, foi obtida por:

$$\hat{\alpha}_i = \frac{NPFC_{0i}}{1000}, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, 50$$

Em que:

$NPFC_{0i}$ : número de pontos fora de controle em um processo que não provocou alterações na média e no desvio padrão devido a causas especiais, no subgrupo racional  $i$ .

$\hat{\alpha}_i$ : estimativa da probabilidade do alarme falso no subgrupo racional  $i$ .

De modo geral, a estimativa da probabilidade do alarme falso, em cada gráfico de controle construído, separadamente, foi dada por:

$$\hat{\alpha} = \frac{NPFC_0}{50 * 1000}$$

Em que:

$NPFC_0$ : número de pontos fora de controle em um processo sob controle estatístico.

$\hat{\alpha}$ : estimativa da média da probabilidade do alarme falso para os 50 subgrupos racionais.

Para a determinação dos  $NPFC_{0i}$  e  $NPFC_0$ , os valores observados  $y_{ij}$  foram transformados em valores binários  $x_{ij}$ . Caso represente um ponto sob controle, tem-se  $x_{ij} = 0$ . Caso seja um ponto fora de controle estatístico, tem-se  $x_{ij} = 1$ . Desse modo,  $NPFC_{0i}$  e  $NPFC_0$  (Tabela 4.2), foram obtidos, respectivamente, por:

$$NPFC_{0i} = \sum_{j=1}^{1000} x_{ij}, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, 50$$

$$NPFC_0 = \sum_{i=1}^{50} \sum_{j=1}^{1000} x_{ij}$$

Em que:

$$x_{ij} = 0, \text{ se } LIC < \hat{\theta}_{ij} < LSC ;$$

$$x_{ij} = 1, \text{ se } \hat{\theta}_{ij} \leq LIC \text{ ou se } \hat{\theta}_{ij} \geq LSC ;$$

$\hat{\theta}_{ij}$  = estimativa da estatística que é plotada no gráfico de controle, referente ao subgrupo racional  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, 50$ ) na simulação  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, 1000$ ).

Tabela 4.2 – Representação das probabilidades dos alarmes falsos por subgrupo racional

Subgrupo Racional	Simulação					$NPFC_{0i}$	$\hat{\alpha}_i$
	1	2	3	...	1000		
1	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	...	$x_{11000}$	$NPFC_{01}$	$\hat{\alpha}_1$
2	$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$	...	$x_{21000}$	$NPFC_{02}$	$\hat{\alpha}_2$
3	$x_{31}$	$x_{32}$	$x_{33}$	...	$x_{31000}$	$NPFC_{03}$	$\hat{\alpha}_3$
...	...	...	...	...	...	...	...
50	$x_{501}$	$x_{502}$	$x_{503}$	...	$x_{501000}$	$NPFC_{050}$	$\hat{\alpha}_{50}$
						$NPFC_0$	$\hat{\alpha}$

No total, foram estimadas as probabilidades dos alarmes falsos para quatro diferentes combinações dos gráficos de controle EWMA, EWMSD, EWMAMR, EWMS e EWMSV. Ao todo foram construídos 20 gráficos de controle para o caso em que o processo estava sob controle estatístico.

De acordo com Souza *et al.* (2008), um gráfico de controle bem planejado possui baixa probabilidade do alarme falso ( $\alpha \leq 0,05$ ). Esse valor de referência pode ser transformado para o  $ARL_0$  ( $ARL_0 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0,05} = 20$ ). Logo, neste estudo, os gráficos de controle estudados que possuírem probabilidades dos alarmes falsos inferiores a 0,05 atenderam à primeira exigência imposta.

#### 4.4. Processo fora de controle estatístico

Para obter a estimativa da probabilidade do alarme verdadeiro ( $P\hat{d}$ ), é necessário que o processo esteja sob a ação de causas especiais, que provocam o deslocamento da média e, ou, a alteração do desvio padrão.

Neste caso, foram criados quinze conjuntos de valores oriundos de um processo fora de controle estatístico, de acordo com as seguintes combinações entre o deslocamento da média de controle ( $\mu_0 = 0$ ), em número de desvios padrão ( $\delta$ ) e a taxa de aumento ( $\varphi$ ) do desvio padrão de controle ( $\sigma_0 = 1$ ), conforme apresentados na Tabela 4.3.

Tabela 4.3 – Situações em que o processo estava fora de controle estatístico

Situação	Média	Desvio padrão	$\delta$	$\varphi$
1	Fora de controle	Sob controle	0,5	1
2	Fora de controle	Sob controle	1	1
3	Fora de controle	Sob controle	1,5	1
4	Sob controle	Fora de controle	0	1,5
5	Sob controle	Fora de controle	0	2
6	Sob controle	Fora de controle	0	2,5
7	Fora de controle	Fora de controle	0,5	1,5
8	Fora de controle	Fora de controle	0,5	2
9	Fora de controle	Fora de controle	0,5	2,5
10	Fora de controle	Fora de controle	1	1,5
11	Fora de controle	Fora de controle	1	2
12	Fora de controle	Fora de controle	1	2,5
13	Fora de controle	Fora de controle	1,5	1,5
14	Fora de controle	Fora de controle	1,5	2
15	Fora de controle	Fora de controle	1,5	2,5

Deste modo, os processos fora de controle estatístico apresentaram média e, ou, desvio padrão fora de controles, dados, respectivamente por:

$$\mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma_0 = \delta$$

$$\sigma_1 = \varphi\sigma_0 = \varphi$$

Portanto, a estimativa da probabilidade do alarme verdadeiro, em cada subgrupo racional e em cada gráfico de controle construído, separadamente, com os valores oriundos do deslocamento da média e, ou, do aumento de variabilidade, e com a linha média e os limites de controle obtidos do processo sob controle estatístico, foi obtida por:

$$Pd_i = \frac{NPFC_{1i}}{1000}, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, 50$$

Em que:

$NPFC_{1i}$  : número de pontos fora de controle estatístico em um processo que provocou alterações na média e, ou, no desvio padrão por causas especiais, no subgrupo racional  $i$ .

$Pd_i$  : estimativa da probabilidade do alarme verdadeiro no subgrupo racional  $i$ .

De modo geral, a estimativa da probabilidade do alarme verdadeiro, em cada gráfico de controle construído, separadamente, foi dada por:

$$Pd = \frac{NPFC_1}{50 \times 1000}$$

Em que:

$NPFC_1$  : número de pontos fora de controle em um processo fora controle estatístico.

$Pd$  : estimativa da média da probabilidade do alarme verdadeiro para os 50 subgrupos racionais.



Para a determinação dos  $NPFC_{1i}$  e  $NPFC_1$ , os valores observados  $y_{ij}$  foram, do mesmo modo, transformados para valores binários  $x_{ij}$ . Caso representasse um ponto sob controle, receberia zero. Caso fosse um ponto fora de controle estatístico, receberia um. Desse modo,  $NPFC_{1i}$  e  $NPFC_1$  (Tabela 4.4), foram obtidos, respectivamente, por:

$$NPFC_{1i} = \sum_{j=1}^{1000} x_{ij}, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, 50$$

$$NPFC_1 = \sum_{i=1}^{50} \sum_{j=1}^{1000} x_{ij}$$

Em que:

$$x_{ij} = 0, \text{ se } LIC < \hat{\theta}_{ij} < LSC ;$$

$$x_{ij} = 1, \text{ se } \hat{\theta}_{ij} \leq LIC \text{ ou se } \hat{\theta}_{ij} \geq LSC ;$$

$\hat{\theta}_{ij}$  = estimativa da estatística plotada no gráfico de controle, referente ao subgrupo racional  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, 50$ ) na simulação  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, 1000$ ).

Tabela 4.4 – Representação das probabilidades dos alarmes verdadeiros por subgrupo racional

Subgrupo Racional	Simulação					$NPFC_{1i}$	$P\hat{d}_i$
	1	2	3	...	1000		
1	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	...	$x_{11000}$	$NPFC_{11}$	$P\hat{d}_1$
2	$x_{21}$	$x_{22}$	$x_{23}$	...	$x_{21000}$	$NPFC_{12}$	$P\hat{d}_2$
3	$x_{31}$	$x_{32}$	$x_{33}$	...	$x_{31000}$	$NPFC_{13}$	$P\hat{d}_3$
...	...	...	...	...	...	...	...
50	$x_{501}$	$x_{502}$	$x_{503}$	...	$x_{501000}$	$NPFC_{150}$	$P\hat{d}_{50}$
						$NPFC_1$	$P\hat{d}$

Para criar cada conjunto de valores em cada processo fora de controle estatístico, foram realizadas novas simulações, de acordo com a distribuição normal de probabilidades, com os seguintes parâmetros:  $\mu_1 = \delta$  e  $\sigma_1 = \varphi$ .

De acordo com a Tabela 4.1 e com as variações de cada termo dos gráficos de controle, foram gerados 300 gráficos de controle diferentes para o caso em que o processo estava fora de controle estatístico (15 tipos de combinações entre  $\delta$  e  $\varphi$ , combinados com quatro variações nos termos dos gráficos de controle da ponderação exponencial e com cinco tipos de gráficos de controle).

Para as construções dos 300.000 gráficos de controle (decorrentes das 1.000 simulações), a partir dos valores simulados para os 15 processos fora de controle estatístico e gráficos EWMA, EWMSD, EWMAMR, EWMS e EWMSV, foram utilizados os mesmos parâmetros  $\mu_0$  e  $\sigma_0$ , para as obtenções da mesma linha média ( $LM$ ) e dos mesmos limites de controle ( $LIC$  e  $LSC$ ), utilizados para as construções dos gráficos de controle, a partir dos valores simulados para o processo sob controle estatístico. Desse modo, a diferença foi devida apenas às estimativas plotadas. No primeiro caso, estimativas obtidas de processos sob controle estatístico. Já no segundo caso, oriundas de processos fora de controle estatístico.

De acordo com Souza *et al.* (2008), um gráfico de controle bem planejado possui alta probabilidade do alarme verdadeiro ( $Pd \geq 0,90$ ). Esse valor de referência pode ser transformado para o  $ARL_1$  ( $ARL_1 = \frac{1}{Pd} = \frac{1}{0,90} = 1,1$ ). Logo, neste estudo, os gráficos de controle estudados que possuíam probabilidades dos alarmes verdadeiros superiores a 0,90 atenderam à segunda exigência imposta.

#### 4.5. Análises estatísticas

As estimativas gerais  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{Pd}$  foram comparadas com os valores de referência, dados por, respectivamente,  $\alpha \leq 0,05$  e  $Pd \geq 0,90$ . Dessa forma, os melhores gráficos de controle foram aqueles que possuíam os indicadores de desempenho que satisfizeram às duas desigualdades.

Do mesmo modo, para cada um dos 16 processos estudados (um sob controle e 15 fora de controle estatístico), foram construídos diagramas de dispersão de  $\hat{\alpha}_i$  ou  $P\hat{d}_i$  em função da ordem  $i$  (1,2,3,...,50) do subgrupo racional.

#### 4.5.1. Efeito da ordem do subgrupo racional

Os diagramas de dispersão foram construídos com o objetivo de visualizar o comportamento das estimativas das probabilidades dos alarmes falsos ( $\hat{\alpha}_i$ ) e verdadeiros ( $P\hat{d}_i$ ), para cada um dos 16 processos estudados, em cada um dos cinco tipos de gráficos de controle (EWMA, EWMSD, EWMAMR, EWMS e EWMSV), em função da ordem  $i$  (1,2,3,...,50) dos subgrupos racionais. Além disso, possibilitou mostrar se as estimativas das probabilidades dos alarmes falsos não superaram a probabilidade máxima permitida de 0,05 e se as estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros superaram a meta de 0,90.

#### 4.5.2. Efeitos dos termos dos gráficos de controle

Para Melo (2007), buscando métodos formais para a análise de planos envolvendo estruturas fatoriais de tratamentos em casos não replicados, Lenth (1989) apresentou uma metodologia relativamente simples que pode ser apresentada de forma gráfica e consiste em obter uma estimativa para o erro-padrão. O método de Lenth (1989) também baseou-se no princípio da esparsidade dos efeitos.

Lenth (1989) demonstrou que o Pseudo Erro Padrão ( $PSE$ ) é uma boa medida para se estimar o desvio padrão aleatório presente na análise fatorial e também, conseqüentemente, para estimar a Margem de Erro ( $ME$ ).

De acordo com Melo (2007), sejam  $c_1, c_2, \dots, c_m$  as estimativas correspondentes aos efeitos de interesse. Sabendo-se que os  $c_j$  são independentes de uma variável aleatória normal, tem-se que:

$$S_0 = 1,5 * \text{mediana} | c_j |$$

$$PSE = 1,5 * \text{mediana}_{|c_j| < 2,5S_0} | c_j |$$

$$ME = t_{(0,975,n)} * PSE$$

Em que  $t_{(0,975,n)}$  é o quantil da distribuição  $t$  com 95% de confiança e com  $n$  graus de liberdade,  $ME$  é a margem de erro e  $PSE$  é o pseudo erro padrão.

De acordo com o método de Lenth (1989), quando um valor, em módulo, superar o valor da margem de erro ( $ME$ ), significa que este efeito foi significativo (RAMM, 2007).

Para a realização do método de Lenth (1989) (Tabela 4.5), adotou-se o termo  $\lambda$  como primeiro fator ( $A$ ) para todos os gráficos de controle. Já o segundo fator ( $B$ ) foi representado pelos termos  $k$  (EWMA),  $c$  (EWMASD),  $\alpha$  (EWMAMR e EWMS) e  $h^*$  (EWMSV).

Tabela 4.5 – Níveis dos fatores  $A$  e  $B$  para os cinco gráficos de controle estudados

	$A$		$B$	
	$a_1$	$a_2$	$b_1$	$b_2$
EWMA	$\lambda = 0,1$	$\lambda = 0,3$	$k = 2,5$	$k = 3$
EWMASD	$\lambda = 0,1$	$\lambda = 0,3$	$c = 2,5$	$c = 3$
EWMAMR	$\lambda = 0,1$	$\lambda = 0,3$	$\alpha = 0,0027$	$\alpha = 0,0124$
EWMS	$\lambda = 0,1$	$\lambda = 0,3$	$\alpha = 0,0027$	$\alpha = 0,0124$
EWMSV	$\lambda = 0,1$	$\lambda = 0,3$	$h^* = 3$	$h^* = 6$

Neste estudo, adotou-se o nível de significância de  $\alpha = 0,15$ . O motivo da adoção de  $\alpha = 0,15$  é que, como trabalhou-se apenas com dois níveis por fator, é recomendável a utilização de um nível de significância menos sensível.

Portanto, para cada tipo de gráfico de controle, foram estimados e testados os efeitos principais de  $A$  e  $B$  e o da interação dupla entre eles, em relação às estimativas das probabilidades dos alarmes falsos e verdadeiros, obtidas em função dos 50 subgrupos racionais. Portanto, as médias das probabilidades dos alarmes falsos e verdadeiros foram obtidas a partir dos alarmes ocorridos em todas as simulações e subgrupos racionais, em cada tipo de gráfico de controle (Tabela 4.6).

Tabela 4.6 – Representação dos efeitos principais de  $A$  e  $B$  e da interação entre eles, associados às probabilidades dos alarmes falsos e verdadeiros

Efeito	Alarme Falso	Alarme Verdadeiro
$\hat{e}_A$	$\hat{\alpha}_{a_2} - \hat{\alpha}_{a_1}$	$P\hat{d}_{a_2} - P\hat{d}_{a_1}$
$\hat{e}_B$	$\hat{\alpha}_{b_2} - \hat{\alpha}_{b_1}$	$P\hat{d}_{b_2} - P\hat{d}_{b_1}$
$\hat{e}_{AB}$	$\frac{(\hat{\alpha}_{a_2b_2} + \hat{\alpha}_{a_1b_1}) - (\hat{\alpha}_{a_2b_1} + \hat{\alpha}_{a_1b_2})}{2}$	$\frac{(P\hat{d}_{a_2b_2} + P\hat{d}_{a_1b_1}) - (P\hat{d}_{a_2b_1} + P\hat{d}_{a_1b_2})}{2}$

$\hat{\alpha}_{a_2}$  e  $\hat{\alpha}_{a_1}$ : estimativas das probabilidades dos alarmes falsos para os níveis alto e baixo do primeiro fator, respectivamente.

$\hat{\alpha}_{b_2}$  e  $\hat{\alpha}_{b_1}$ : estimativas das probabilidades do alarmes falsos para os níveis alto e baixo do segundo fator, respectivamente.

$P\hat{d}_{a_2}$  e  $P\hat{d}_{a_1}$ : estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros para os níveis alto e baixo do primeiro fator, respectivamente.

$P\hat{d}_{b_2}$  e  $P\hat{d}_{b_1}$ : estimativas das probabilidade dos alarmes verdadeiros para os níveis alto e baixo do segundo fator, respectivamente.

Após as estimativas dos efeitos, aplicou-se o método de Lenth (1989) para testá-los, de acordo com as seguintes hipóteses de nulidade, relacionadas para ambas as probabilidades dos alarmes falsos e verdadeiros:

$$H_{01} : e_A = 0;$$

$$H_{02} : e_B = 0;$$

$$H_{03} : e_{AB} = 0.$$

Para apresentar os resultados, foram construídos os gráficos de Pareto para os efeitos de  $A$ ,  $B$  e da interação  $AB$ , com o valor da  $ME$ , para cada tipo de gráfico de controle, separadamente.

#### 4.5.3. Comparação entre os gráficos de controle

Procedeu-se à realização do teste de Friedman (teste não paramétrico) para as comparações das médias das estimativas das probabilidades dos alarmes falsos e verdadeiros, para os cinco tipos de gráficos de controle, a 5% de significância. O motivo da realização do teste de Friedman é que não houve homogeneidade de variâncias entre os tratamentos, representados pelos gráficos de controle (EWMA, EWMASD, EWMAMR, EWMS e EWMSV), logo não foi atendida a pressuposição “homogeneidade de variâncias”, dos testes paramétricos. O primeiro fator ( $\lambda$ ) foi chamado de  $A$  e o segundo ( $k$ ,  $c$ ,  $\alpha$  ou  $h^*$ ) foi chamado de  $B$ .

O teste de Friedman calcula a soma dos postos, a mediana de cada tratamento, bem como o  $P_{valor}$ . Caso o  $P_{valor}$  seja inferior ao  $\alpha = 0,05$  (adotado), conclui-se que existe pelo menos um tratamento que difere dos demais. Caso  $P_{valor}$  seja superior ao  $\alpha = 0,05$ , conclui-se que os tratamentos são iguais entre si. Nos casos em que há significância, a classificação é feita da seguinte forma:

$$\text{Se } |R_i - R_j| \geq \Delta_{ij}, R_i \text{ e } R_j \text{ são diferentes entre si.}$$

Se  $|R_i - R_j| < \Delta_{ij}$ ,  $R_i$  e  $R_j$  são iguais entre si.

Em que:  $R_i$  é soma dos postos de  $i$ ,  $R_j$  é soma dos postos de  $j$  e  $\Delta_{ij}$  é a diferença mínima significativa.

As simulações e as análises estatísticas foram realizadas no software R (versão 3.1.2, 2014). Já as construções dos gráficos, no Microsoft Excel 2010.

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 5.1. Processo sob controle estatístico

#### 5.1.1. Efeito da ordem do subgrupo racional

Na Figura 5.1 são ilustrados os diagramas de dispersão para as estimativas das probabilidades dos alarmes falsos em função da ordem do subgrupo racional, para os cinco tipos de gráficos de controle. O valor máximo estabelecido para todos os gráficos foi de 0,05, que foi a probabilidade máxima permitida do alarme falso.

Para o gráfico EWMA, analisando o termo  $k$  e de acordo com Souza *et al.* (2004), a probabilidade do alarme falso diminui exponencialmente em função do aumento de  $k$ . O motivo dessa relação é que  $k$  é o fator de abertura do gráfico de controle, e quanto maior for o seu valor, menor será a quantidade de alarmes falsos a ser exibida. Os resultados expostos na Figura 5.1, para o gráfico EWMA, foram condizentes com o que foi exposto, pois os alarmes falsos gerados por  $k_2$  foram nitidamente inferiores àqueles oriundos de  $k_1$ .

Para o gráfico mencionado anteriormente, a probabilidade do alarme falso não foi influenciada pela ordem do subgrupo racional. Além disso, em nenhuma das combinações o valor máximo para a probabilidade do alarme falso, de 0,05, foi superado. Logo, o gráfico de controle EWMA foi eficiente de acordo com os termos utilizados para  $\lambda$  e  $k$  (Figura 5.1).

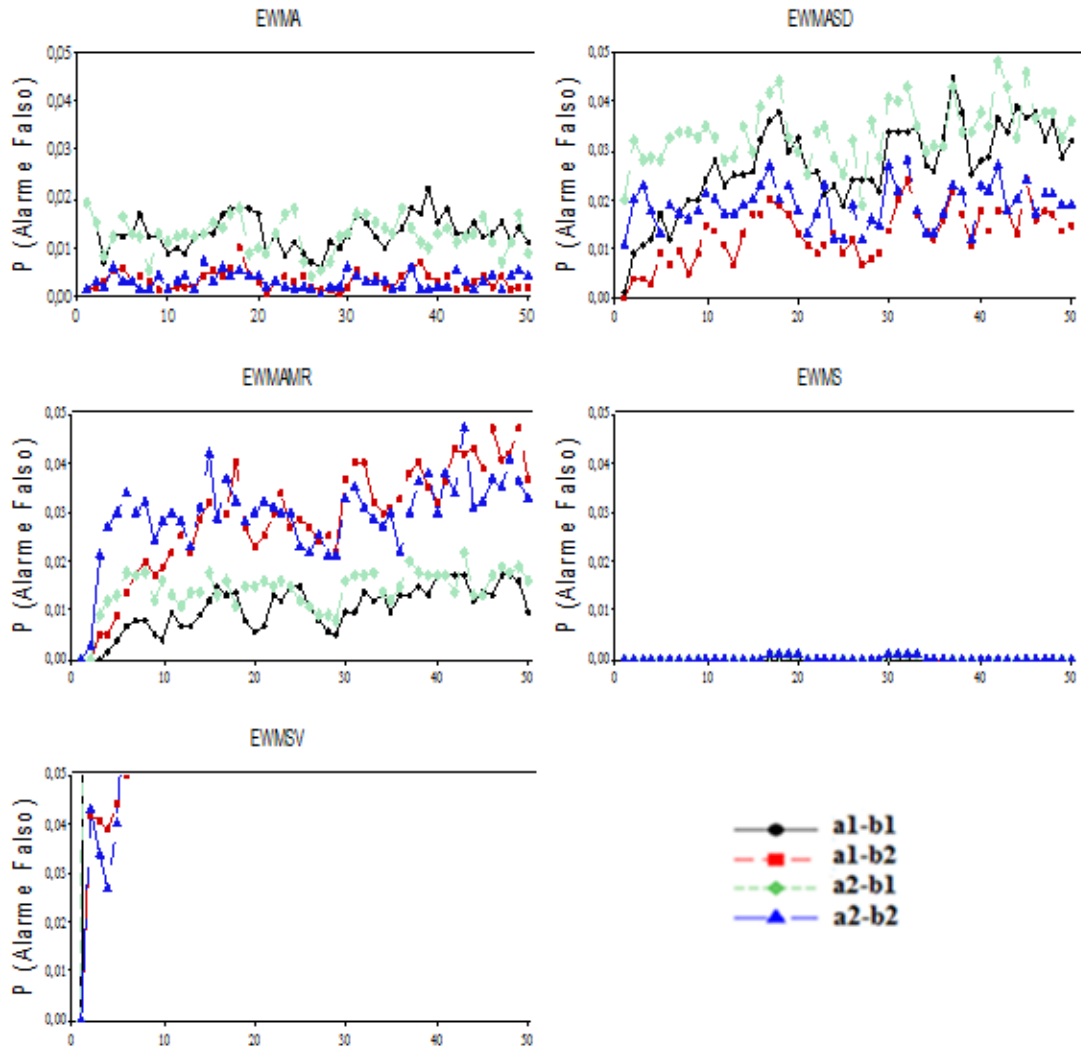


Figura 5.1 – Estimativas das probabilidades dos alarmes falsos em função da ordem do subgrupo racional, de acordo com as combinações dos níveis dos fatores  $A$  e  $B$  para os gráficos de controle EWMA ( $\lambda_1 = 0,1$  e  $k_1 = 2,5$ ,  $\lambda_1 = 0,1$  e  $k_2 = 3$ ,  $\lambda_2 = 0,3$  e  $k_1 = 2,5$  e  $\lambda_2 = 0,3$  e  $k_2 = 3$ ), EWMSD ( $\lambda_1 = 0,1$  e  $c_1 = 2,5$ ,  $\lambda_1 = 0,1$  e  $c_2 = 3$ ,  $\lambda_2 = 0,3$  e  $c_1 = 2,5$  e  $\lambda_2 = 0,3$  e  $c_2 = 3$ ), EWMAMR ( $\lambda_1 = 0,1$  e  $\alpha_1 = 0,0027$ ,  $\lambda_1 = 0,1$  e  $\alpha_2 = 0,0124$ ,  $\lambda_2 = 0,3$  e  $\alpha_1 = 0,0027$  e  $\lambda_2 = 0,3$  e  $\alpha_2 = 0,0124$ ), EWMS ( $\lambda_1 = 0,1$  e  $\alpha_1 = 0,0027$ ,  $\lambda_1 = 0,1$  e  $\alpha_2 = 0,0124$ ,  $\lambda_2 = 0,3$  e  $\alpha_1 = 0,0027$  e  $\lambda_2 = 0,3$  e  $\alpha_2 = 0,0124$ ) e EWMSV ( $\lambda_1 = 0,1$  e  $h_1^* = 3$ ,  $\lambda_1 = 0,1$  e  $h_2^* = 6$ ,  $\lambda_2 = 0,3$  e  $h_1^* = 3$  e  $\lambda_2 = 0,3$  e  $h_2^* = 6$ )

Para o gráfico de controle EWMSD, o termo  $c$  é o fator de abertura dos limites de controle. Sendo assim, esperava-se que o maior valor de  $c$  gerasse uma menor taxa de alarmes falsos. Os resultados apontados na Figura 5.1 estão de acordo com essa afirmação, pois a utilização de  $c_2$  gerou uma menor média na probabilidade dos alarmes falsos.



Sheu *et al.* (2009), que estudaram um gráfico de controle semelhante ao EWMA<sub>SD</sub>, encontraram  $ARL_0 = 370,03$  ( $\alpha = 0,27\%$ ), para  $\lambda = 0,1$ ,  $L_v = 3$ ,  $\mu_0 = 0$  e  $\sigma_0 = 1$ . No presente trabalho, foi encontrado  $ARL_0 = 76,34$  ( $\alpha = 1,31\%$ ), com a utilização de  $\lambda = 0,1$ ,  $c = 3$ ,  $\mu_0 = 0$  e  $\sigma_0 = 1$ . Ambos os resultados atenderam à exigência imposta para a probabilidade do alarme falso.

A probabilidade do alarme falso para o gráfico EWMA<sub>SD</sub> apresentou um ligeiro aumento em função do aumento da ordem do subgrupo racional, e, para todas as combinações testadas, o valor de referência 0,05 não foi superado. Dessa forma, concluiu-se que o gráfico de controle atendeu à exigência para o alarme falso.

No gráfico de controle EWMAMR, o termo  $\alpha$  possui uma relação inversa com a amplitude dos limites de controle. Logo, esperava-se que o maior valor de  $\alpha$  gerasse limites de controle mais estreitos, fazendo com que existisse uma maior quantidade de alarmes falsos. Os resultados apontados na Figura 5.1 estão de acordo com essa afirmação, pois a utilização de  $\alpha_2$  gerou mais alarmes falsos.

A estimativa da probabilidade do alarme falso para o gráfico em análise também apresentou um pequeno aumento em função do aumento da ordem do subgrupo racional, que foi mais expressivo ao longo dos primeiros subgrupos racionais e, principalmente, para os gráficos de controle com as seguintes combinações:  $\lambda_1 = 0,1$  e  $\alpha_2 = 0,0124$  e  $\lambda_2 = 0,3$  e  $\alpha_2 = 0,0124$ . Porém, nenhuma das estimativas superou 0,05. Sendo assim, o gráfico de controle EWMAMR, nas combinações dos termos testadas, apresentou um bom desempenho ( $\alpha \leq 0,05$ ), quando construído com até 50 subgrupos racionais (Figura 5.1).

Shamma e Amin (1993), que desenvolveram um gráfico semelhante ao EWMAMR, encontraram  $ARL_0 = 250,01$  ( $\alpha = 0,4\%$ ), com a utilização de  $\lambda = 0,1$  e  $L = 2,7764$ ,  $\mu_0 = 0$  e  $\sigma_0 = 1$ . Para o presente trabalho, encontrou-se  $ARL_0 = 34,84$  ( $\alpha = 2,87\%$ ), com a utilização de  $\lambda_1 = 0,1$ ,  $\alpha_2 = 0,0124$ ,  $\mu_0 = 0$  e  $\sigma_0 = 1$ . Ambos atenderam à exigência para a probabilidade do alarme falso.

Para o gráfico de controle EWMS, as probabilidades dos alarmes falsos foram extremamente baixas. Além disso, percebeu-se que a probabilidade do alarme

falso não dependeu da ordem do subgrupo racional, oscilando de maneira aleatória para as diferentes combinações de  $\lambda$  e  $\alpha$ . Como os valores encontrados satisfizeram à condição de  $\alpha \leq 0,05$ , e foram bastante inferiores a esse limite superior, concluiu-se que o gráfico de controle EWMS possuiu um excelente desempenho de acordo com os termos analisados (Figura 5.1).

Huwang *et al.* (2010) obtiveram  $ARL_0 = 86,65$  ( $\alpha = 11,54\%$ ), com a utilização de  $\lambda = 0,1$ ,  $\alpha = 0,05$ ,  $\delta = 0$  e  $\varphi = 1$ . Memar e Niaki (2010) obtiveram  $ARL_0 = 363,4$  ( $\alpha = 0,28\%$ ), com  $\lambda = 0,1$ ,  $\alpha = 0,05$ ,  $\mu_0 = 0$  e  $\sigma_0 = 1$ . Yeh *et al.* (2010) conseguiram o resultado de  $ARL_0 = 370$  ( $\alpha = 0,27\%$ ), com a utilização de  $\lambda = 0,1$ ,  $\alpha = 0,05$ ,  $\mu_0 = 5$  e  $\sigma_0 = 1$  ( $\mu_0 = 5$  e  $\sigma_0 = 1$  é a situação sob controle adotada pelos autores). Neste estudo, usando-se os mesmos valores dos termos, foi encontrado  $ARL_0 = 3333,33$  ( $\alpha = 0,03\%$ ). Apenas o estudo de Huwang *et al.* (2010) não atendeu à exigência para a probabilidade do alarme falso. No entanto, analisando-se os demais estudos, concluiu-se que o gráfico de controle EWMS é eficiente segundo os termos testados.

Em se tratando do gráfico de controle EWMSV, o termo  $h^*$  é o fator de abertura para os limites de controle, logo o valor  $h^*_2$  (maior valor) deveria ser capaz de gerar uma menor taxa de alarmes falsos. Os resultados expostos na Figura 5.1 comprovaram essa afirmação.

Para esse gráfico, notou-se que a probabilidade do alarme falso superou rapidamente o valor meta de 0,05, caracterizando-se por um crescimento acentuado nos primeiros subgrupos, cuja taxa de aumento foi decrescendo ao longo dos demais. Não foi possível verificar com clareza se a probabilidade do alarme falso variou conforme a ordem do subgrupo racional. A probabilidade do alarme falso para a grande maioria dos subgrupos racionais superou a probabilidade máxima aceitável de 0,05. Sendo assim, como a exigência não foi atendida, o gráfico de controle EWMSV não foi adequado de acordo com os níveis dos termos testados.

De uma maneira geral, concluiu-se que o alarme falso possuiu uma fraca relação com a ordem do subgrupo racional. Essa constatação já era esperada, visto que a tendência é que os gráficos de controle demorem a exibir alarmes falsos.

Sendo assim, os pontos plotados tendem a ficar mais próximos entre si, fazendo com que a ponderação não apresente tendência de crescimento ou decréscimo.

Em síntese, quando o processo encontrava-se sob controle estatístico, existiram quatro tipos de gráficos de controle que possuíram bons desempenhos e que podem ser recomendados: EWMA, EWMSD, EWMAMR e EWMS.

### 5.1.2. Efeitos dos termos dos gráficos de controle

A Figura 5.2 e a Tabela 5.1 ilustraram a aplicação do método de Lenth (1989) para cada um dos cinco tipos de gráficos de controle, mostrando quais efeitos dos termos foram significativos, ou seja, que provocaram diferenças significativas nas probabilidades dos alarmes falsos ao se mudar do nível baixo (menor valor) para o nível alto (maior valor), dos fatores  $A$  e  $B$ , respectivamente. Para isso, foi considerada a existência da interação entre os dois fatores.

Na Figura 5.2, o limite máximo permitido para os efeitos ( $ME$ ) está representado por uma linha contínua. Sendo assim, os efeitos significativos foram aqueles que superarem, em módulo, o valor do  $ME$ .

Para o gráfico de controle EWMA, observou-se que o termo  $k(B)$  foi o único significativo, visto que o módulo do seu efeito (-0,0098) foi superior à  $ME$  (0,0019). Sendo assim, houve uma diferença significativa entre os dois níveis do termo  $k$ , no que se refere à probabilidade do alarme falso. Como o efeito foi negativo, o aumento do valor de  $k$  provocou uma diminuição em  $\alpha$  ( $\hat{\alpha}_{k=2,5} = 0,0128$  e  $\hat{\alpha}_{k=3} = 0,0030$ ). Essa diminuição de  $\alpha$  em função do aumento de  $k$  ocorreu independentemente do termo  $\lambda(B)$ , e sem a sua significância.

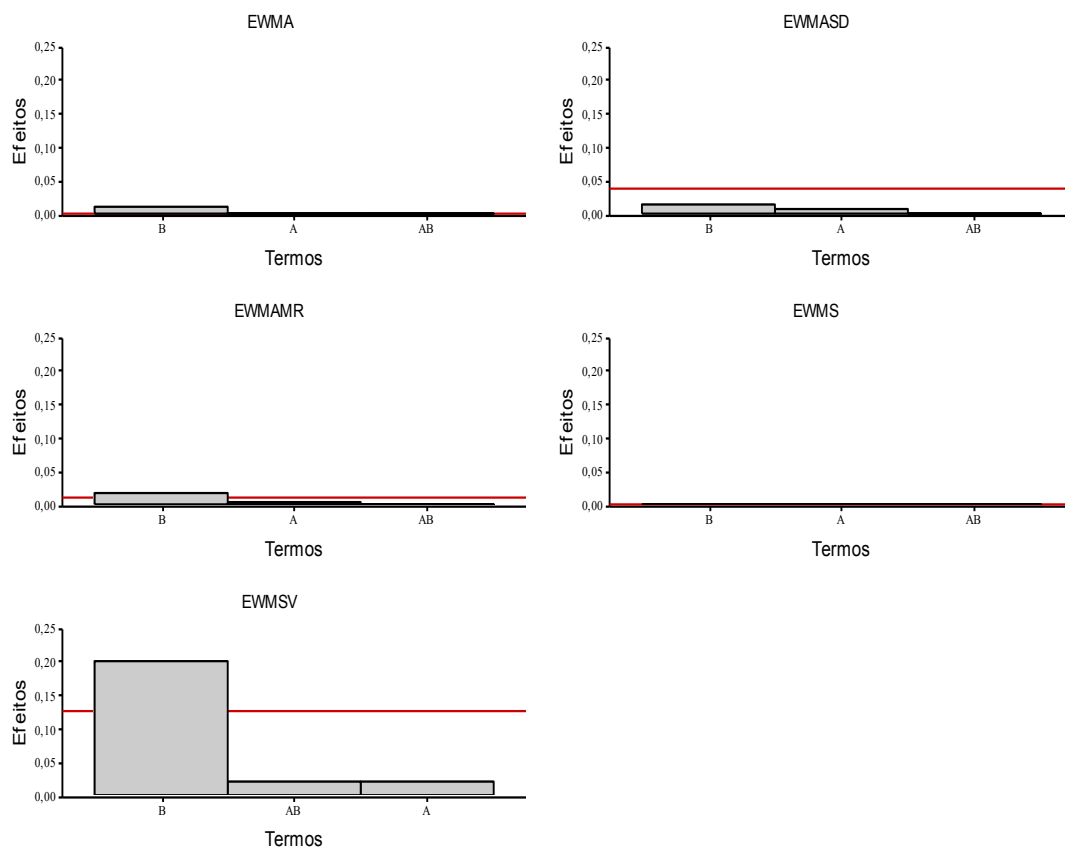


Figura 5.2 – Estimativas absolutas dos efeitos principais  $A$  e  $B$  e da interação  $AB$  para os gráficos de controle EWMA ( $\lambda$  e  $k$ ), EWMASD ( $\lambda$  e  $c$ ), EWMAMR ( $\lambda$  e  $\alpha$ ), EWMS ( $\lambda$  e  $\alpha$ ) e EWMSV ( $\lambda$  e  $h^*$ )

A Tabela 5.1 ilustra, numericamente, todas as estimativas dos efeitos de  $A$ ,  $B$ ,  $AB$ , bem como os valores do  $PSE$  e do  $ME$ .

Tabela 5.1 – Estimativas dos efeitos principais  $A$  e  $B$ , da interação  $AB$ , do  $PSE$  e  $ME$  para os gráficos de controle EWMA ( $\lambda$  e  $k$ ), EWMASD ( $\lambda$  e  $c$ ), EWMAMR ( $\lambda$  e  $\alpha$ ), EWMS ( $\lambda$  e  $\alpha$ ) e EWMSV ( $\lambda$  e  $h^*$ )

Gráfico	Efeito			$PSE$	$ME$
	$A$	$B$	$AB$		
EWMA	-0,0004	-0,0098*	0,0002	0,0005	0,0019
EWMASD	0,0065	-0,0145	-0,0007	0,0097	0,0430
EWMAMR	0,0024	0,0168*	-0,0015	0,0029	0,0122
EWMS	0,0001	0,0001	-0,0001	0,0002	0,0006
EWMSV	0,0189	-0,2031*	0,0219	0,0307	0,1278

\* Significativo pelo método de Lenth (1989) ( $P < 0,15$ )

Em se tratando do gráfico EWMA<sub>SD</sub>, a probabilidade do alarme falso não foi alterada pelas variações dos seus dois termos ( $\lambda$  e  $c$ ) e nem pela interação entre eles. Nesse caso, pode-se dizer que este gráfico provocou a seguinte média da probabilidade do alarme falso:  $\hat{\alpha} = 0,0032$ .

No caso do gráfico de controle EWMA<sub>MR</sub>, percebeu-se que o termo  $\alpha(B)$  foi o único significativo, visto que o módulo do seu efeito (0,0168) foi superior à  $ME(0,0122)$ . Como o efeito foi positivo, o aumento do valor de  $\alpha$  provocou um aumento da probabilidade do alarme falso. Por outro lado, o termo  $\lambda(A)$  e a interação entre os dois termos, não influenciaram nesta probabilidade. Nesse caso, tem-se que:  $\hat{\alpha}_{\alpha=0,0027} = 0,0124$  e  $\hat{\alpha}_{\alpha=0,0124} = 0,0292$ .

No que tange o gráfico de controle EWMA<sub>S</sub>, nem os termos  $\lambda$  e  $\alpha$  nem a interação entre eles alteraram a probabilidade do alarme falso. Nesse caso, pode-se concluir que  $\hat{\alpha} = 0,0002$ .

Para o gráfico de controle EWMA<sub>SV</sub>, observou-se que apenas o termo  $h^*(B)$  foi significativo, visto que o módulo do seu efeito (-0,2031) foi superior à  $ME(0,1278)$ . Dessa forma, houve diferença significativa entre os dois níveis do termo  $h^*$ , em relação à probabilidade do alarme falso. Como o efeito foi negativo, o aumento do valor de  $h^*$  provocou uma diminuição em  $\alpha$ . Para os casos de  $\lambda(A)$  e da interação entre  $\lambda$  e  $h^*$  os efeitos não foram significativos. Nesse caso, tem-se que:  $\alpha_{h^*=3} = 0,5819$  e  $\alpha_{h^*=6} = 0,3789$ .

Em síntese, pode-se concluir que o fator  $\lambda(A)$  não foi capaz de provocar alterações significativas na probabilidade do alarme falso ao se mudar do valor  $\lambda_1 = 0,1$  para  $\lambda_2 = 0,3$ , em nenhum dos cinco tipos de gráficos de controle analisados. Já o fator  $B$  foi capaz de provocar alterações significativas na probabilidade do alarme falso ( $\alpha$ ) para os gráficos de controle EWMA, EWMA<sub>MR</sub> e EWMA<sub>SV</sub>. Dessa forma, a escolha do nível do fator  $B$ , ao se planejar a construção dos referidos gráficos de controle, deve merecer atenção especial.

### 5.1.3. Comparação dos gráficos de controle

Na Tabela 5.2 são ilustradas as estimativas das médias das probabilidades dos alarmes falsos, obtidas mediante a análise dos 50 subgrupos racionais, para os cinco tipos de gráficos de controle. Nela, o bloco 1 representa a combinação de  $a_1$  com  $b_1$ , o bloco 2 representa  $a_1$  com  $b_2$ , o bloco 3 está ligado à combinação entre  $a_2$  e  $b_1$ , e o bloco 4 refere-se à combinação entre  $a_2$  e  $b_2$ .

Tabela 5.2 – Estimativas das médias das probabilidades dos alarmes falsos para os cinco tipos de gráficos de controle

GC	Bloco	$\hat{\alpha}$
EWMA	1	0,0131
EWMA	2	0,0031
EWMA	3	0,0125
EWMA	4	0,0029
EWMSD	1	0,0270
EWMSD	2	0,0131
EWMSD	3	0,0340
EWMSD	4	0,0189
EWMAMR	1	0,0104
EWMAMR	2	0,0287
EWMAMR	3	0,0143
EWMAMR	4	0,0296
EWMS	1	0,0000
EWMS	2	0,0002
EWMS	3	0,0002
EWMS	4	0,0002
EWMSV	1	0,5834
EWMSV	2	0,3584
EWMSV	3	0,5804
EWMSV	4	0,3993

Foi realizado um teste de Friedman, com  $\alpha = 5\%$ , com o intuito de verificar se existiram diferenças significativas nas médias entre os gráficos de controle.

O  $P_{valor}$  encontrado pelo teste de Friedman foi de 0,007. Como esse valor foi inferior ao  $\alpha = 5\% = 0,05$ , concluiu-se que existiu pelo menos um grupo que diferiu

dos demais. Sendo assim, foi necessário calcular a diferença mínima significativa  $\Delta_{ij}$ , para fazer a classificação dos tratamentos (gráficos de controle).

$$\Delta_{ij} = Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{rt(t+1)}{6}} = 1,96 \sqrt{\frac{4 * 5(5+1)}{6}} = 8,7654 .$$

Dessa forma, caso a diferença entre a soma dos postos de dois tratamentos superasse a  $\Delta_{ij}$ , concluiria-se que existia diferença significativa entre os tratamentos analisados.

A tabela 5.3 ilustra os resultados obtidos pelo teste de Friedman, bem como a comparação feita entre os gráficos de controle.

Tabela 5.3 – Resultado do teste de Friedman para a probabilidade do alarme falso em função dos gráficos de controle

GC	Soma dos postos	Mediana	Classificação
EWMA	9,0	0,0070	B C
EWMSD	14,0	0,0230	A B
EWMAMR	13,0	0,0204	A B
EWMS	4,0	-0,0007	C
EWMSV	20,0	0,4882	A

Soma dos postos com a mesma letra não diferem entre si pelo teste de Friedman ( $P > 0,05$ )

O gráfico de controle EWMSV forneceu a maior mediana da probabilidade do alarme falso (0,4804). Dessa forma, concluiu-se que o gráfico de controle EWMSV não foi eficiente quando planejado com os valores estudados. Para os gráficos EWMA, EWMSD e EWMAMR foram obtidos valores intermediários para as medianas. E, para o gráfico EWMS, foi obtido o menor valor da mediana. Como o gráfico EWMSV não apresentou probabilidades dos alarmes falsos inferiores a 0,05, ele foi o único que não foi recomendado.

## 5.2. Processo fora de controle estatístico

Para analisar os processos fora de controle estatístico, foi feita uma divisão de acordo com o descontrole em três classes: deslocamento da média ( $\delta = 0,5$ ; 1 e 1,5 e  $\varphi = 1$ ), aumento da variabilidade ( $\delta = 0$  e  $\varphi = 1,5$ ; 2 e 2,5) e deslocamento da média e aumento da variabilidade, simultaneamente ( $\delta = 0,5$ ; 1 e 1,5 e  $\varphi = 1,5$ ; 2 e 2,5).

### 5.2.1. Deslocamento da média

#### 5.2.1.1. Efeito da ordem do subgrupo racional

Para a análise da probabilidade do alarme verdadeiro em função da ordem do subgrupo racional, foram construídos gráficos de dispersão apenas para a combinação  $\mu = 1,5$  ( $\delta = 1,5$ ) e  $\sigma_0 = 1$ , que foi a situação mais discrepante em relação ao processo sob controle estatístico ( $\delta = 0$  e  $\varphi = 1$ ).

De acordo com Rosa (2012), os maiores valores de  $\lambda$  são utilizados quando se deseja detectar maiores diferenças na média de controle. Caso o objetivo seja detectar menores diferenças, recomenda-se a utilização dos menores valores de  $\lambda$ . Essa afirmação pode ser confirmada através da visualização da Figura 5.3, dado que o deslocamento da média de  $1,5 \sigma_0$  foi considerado como um pequeno deslocamento, conforme relata Costa *et al.* (2004). Logo, o menor valor de  $\lambda$  ( $\lambda_1$ ) foi capaz de gerar maiores probabilidades dos alarmes verdadeiros, quando comparado a  $\lambda_2$ .



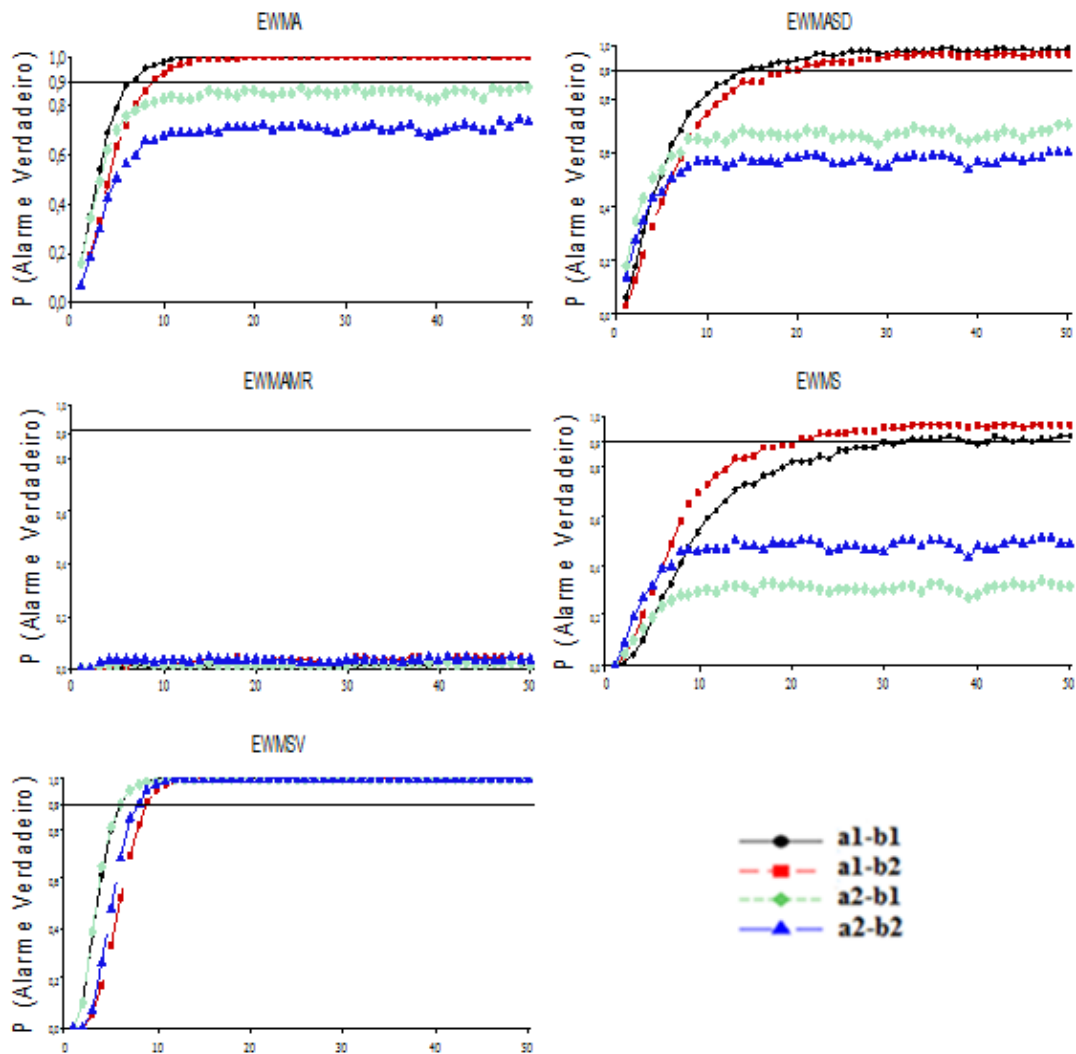


Figura 5.3 – Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros em função da ordem do subgrupo racional, de acordo com as combinações dos níveis dos fatores  $A$  e  $B$  para os gráficos de controle EWMA ( $\lambda_1 = 0,1$  e  $k_1 = 2,5$ ,  $\lambda_1 = 0,1$  e  $k_2 = 3$ ,  $\lambda_2 = 0,3$  e  $k_1 = 2,5$  e  $\lambda_2 = 0,3$  e  $k_2 = 3$ ), EWMASD ( $\lambda_1 = 0,1$  e  $c_1 = 2,5$ ,  $\lambda_1 = 0,1$  e  $c_2 = 3$ ,  $\lambda_2 = 0,3$  e  $c_1 = 2,5$  e  $\lambda_2 = 0,3$  e  $c_2 = 3$ ), EWMAMR ( $\lambda_1 = 0,1$  e  $\alpha_1 = 0,0027$ ,  $\lambda_1 = 0,1$  e  $\alpha_2 = 0,0124$ ,  $\lambda_2 = 0,3$  e  $\alpha_1 = 0,0027$  e  $\lambda_2 = 0,3$  e  $\alpha_2 = 0,0124$ ), EWMS ( $\lambda_1 = 0,1$  e  $\alpha_1 = 0,0027$ ,  $\lambda_1 = 0,1$  e  $\alpha_2 = 0,0124$ ,  $\lambda_2 = 0,3$  e  $\alpha_1 = 0,0027$  e  $\lambda_2 = 0,3$  e  $\alpha_2 = 0,0124$ ) e EWMSV ( $\lambda_1 = 0,1$  e  $h_1^* = 3$ ,  $\lambda_1 = 0,1$  e  $h_2^* = 6$ ,  $\lambda_2 = 0,3$  e  $h_1^* = 3$  e  $\lambda_2 = 0,3$  e  $h_2^* = 6$ )

Para o gráfico EWMA, observou-se que apenas duas combinações de  $\lambda$  e  $k$  ( $\lambda_1 = 0,1$  com  $k_1 = 2,5$  e com  $k_2 = 3$ ) proporcionaram probabilidades dos alarmes verdadeiros superiores a 0,90, mediante a análise dos 50 primeiros subgrupos racionais. Dessa forma, ao se utilizar  $\lambda_2 = 0,3$ , com 50 subgrupos racionais, independente do termo  $k$ , a condição da probabilidade do alarme verdadeiro, já enunciada, não foi atendida (Figura 5.3).

O gráfico de controle EWMASD possuiu apenas duas combinações de  $\lambda$  e  $c$  ( $\lambda_1 = 0,1$  com  $c_1 = 2,5$  e com  $c_2 = 3$ ) que geraram probabilidades dos alarmes verdadeiros superiores a 0,90, para os primeiros 50 subgrupos racionais. Assim, se for utilizado  $\lambda_2$ , com 50 subgrupos racionais, independente do termo  $c$ , a condição da probabilidade do alarme verdadeiro também não será atendida (Figura 5.3).

Sheu *et al.* (2009) encontraram  $ARL_1 = 7,68$  ( $Pd = 13,02\%$ ), para o gráfico EWMASD, com a utilização de  $\lambda = 0,1$ ,  $L_v = 3$ ,  $\delta = 1,5$  e  $\varphi = 1$ . No presente estudo, com  $\lambda = 0,1$ ,  $c = 3$ ,  $\delta = 1,5$  e  $\varphi = 1$ , foi encontrado  $ARL_1 = 1,2$  ( $Pd = 83,31\%$ ). Neste caso, a estatística plotada e sugerida por Huang *et al.* (2012) e também, avaliada neste trabalho, foi mais eficiente que aquela apresentada por Sheu *et al.* (2009).

Já para o gráfico de controle EWMAMR, a probabilidade do alarme verdadeiro foi bastante inferior ao valor alvo de 0,90, para todas as combinações testadas e para todos os 50 subgrupos racionais. Assim, esse gráfico não foi adequado para monitorar a média, com as combinações planejadas.

Shamma e Amin (1993) encontraram  $ARL_1 = 6,29$  ( $Pd = 15,89\%$ ), com a utilização de  $\lambda = 0,1$ ,  $L = 2,7764$ ,  $\mu_0 = 1,5$  e  $\sigma_0 = 1$ . Para o presente trabalho, encontrou-se  $ARL_1 = 34,84$  ( $Pd = 2,87\%$ ), com a utilização de  $\lambda_1 = 0,1$ ,  $\alpha_2 = 0,0124$ ,  $\mu_0 = 1,5$  e  $\sigma_0 = 1$ . Ambos não atenderam à exigência estabelecida ( $ARL_1 \leq 1,1$  ou  $Pd \geq 0,90$ ).

Para o gráfico de controle EWMS, existiram apenas duas combinações de  $\lambda$  e  $\alpha$  ( $\lambda_1$  com  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ ) que forneceram probabilidades dos alarmes verdadeiros superiores ao valor 0,90. Porém, somente a partir dos subgrupos racionais de ordens intermediárias é que a condição imposta foi atendida.

Memar e Niaki (2010) encontraram  $ARL_1 = 7,1$  ( $Pd = 14,08\%$ ), com  $\lambda = 0,1$ ,  $\alpha = 0,05$ ,  $\delta = 1,5$  e  $\varphi = 1$  para o gráfico de controle EWMS. Neste estudo, foi encontrado  $ARL_1 = 1,15$  ( $Pd = 86,79\%$ ), com os mesmos valores dos termos testados. As diferenças de valores estão relacionadas a possíveis utilizações de diferentes quantidades de subgrupos racionais. Sendo assim, pode-se concluir que a

quantidade de subgrupos racionais utilizada no presente estudo foi mais adequada do que aquela que foi escolhida por Memar e Niaki (2010). De todo modo, o gráfico de controle EWMS não se apresentou com poder satisfatório.

O gráfico de controle EWMSV foi o que apresentou o melhor desempenho, quando se analisou a média, mediante todas as combinações utilizadas. Em média, no 8º subgrupo racional, a probabilidade do alarme verdadeiro já superou a meta de 0,90. Porém, a sua recomendação é inviabilizada pelas altas frequências dos alarmes falsos (Figura 5.1).

Em síntese, concluiu-se que o alarme verdadeiro possuiu uma forte relação com a ordem do subgrupo racional. Essa observação já era esperada, pois a tendência é que os gráficos de controle exibam alarmes verdadeiros já nos primeiros subgrupos racionais, o que faz com que os valores da ponderação exponencial possuam uma tendência de crescimento.

Na Tabela 5.4 é ilustrada a ordem do primeiro subgrupo racional que apresentou probabilidade do alarme verdadeiro superior a 0,90, que foi o mínimo estabelecido como aceitável. No entanto, algumas combinações dos termos utilizados não apresentaram, em nenhum dos 50 subgrupos racionais adotados, probabilidade do alarme verdadeiro com estimativa superior a 0,90.

De acordo com Werkema (1995), na prática, é aconselhável se utilizar 25 subgrupos racionais para as construções dos gráficos de controle. Em detrimento disso, e, analisando a Tabela 5.4, pode-se concluir que existiram pouquíssimas situações de gráficos de controle e deslocamentos da média que forneceram o primeiro alarme verdadeiro antes do subgrupo racional de ordem 25.

Como o processo encontrava-se fora de controle estatístico, esperava-se que existisse uma sinalização, através do alarme verdadeiro, o quanto antes, para haver uma intervenção mais rápida no processo, evitando assim a possível produção de itens defeituosos (fora da especificação estabelecida).

Tabela 5.4 – Estimativas da ordem do primeiro subgrupo racional que proporcionou  $Pd \geq 0,90$

GC	A	B	$\delta$		
			0,5	1	1,5
EWMA	$\lambda_1 = 0,1$	$k_1 = 2,5$	> 50	21	7
	$\lambda_1 = 0,1$	$k_2 = 3$	> 50	33	9
	$\lambda_2 = 0,3$	$k_1 = 2,5$	> 50	> 50	> 50
	$\lambda_2 = 0,3$	$k_2 = 3$	> 50	> 50	> 50
EWMASD	$\lambda_1 = 0,1$	$c_1 = 2,5$	> 50	> 50	14
	$\lambda_1 = 0,1$	$c_2 = 3$	> 50	> 50	19
	$\lambda_2 = 0,3$	$c_1 = 2,5$	> 50	> 50	> 50
	$\lambda_2 = 0,3$	$c_2 = 3$	> 50	> 50	> 50
EWMAMR	$\lambda_1 = 0,1$	$\alpha_1 = 0,0027$	> 50	> 50	> 50
	$\lambda_1 = 0,1$	$\alpha_2 = 0,0124$	> 50	> 50	> 50
	$\lambda_2 = 0,3$	$\alpha_1 = 0,0027$	> 50	> 50	> 50
	$\lambda_2 = 0,3$	$\alpha_2 = 0,0124$	> 50	> 50	> 50
EWMS	$\lambda_1 = 0,1$	$\alpha_1 = 0,0027$	> 50	> 50	33
	$\lambda_1 = 0,1$	$\alpha_2 = 0,0124$	> 50	> 50	21
	$\lambda_2 = 0,3$	$\alpha_1 = 0,0027$	> 50	> 50	> 50
	$\lambda_2 = 0,3$	$\alpha_2 = 0,0124$	> 50	> 50	> 50
EWMSV	$\lambda_1 = 0,1$	$h_1^* = 3$	24	10	7
	$\lambda_1 = 0,1$	$h_2^* = 6$	32	14	9
	$\lambda_2 = 0,3$	$h_1^* = 3$	24	10	6
	$\lambda_2 = 0,3$	$h_2^* = 6$	30	13	9

Mediante a combinação dos termos utilizados, o gráfico de controle EWMSV foi superior ao gráfico de controle EWMA quando o objetivo é a rápida detecção do deslocamento da média de processos. Os gráficos de controle EWMS e EWMASD apresentaram poucos sinais durante as avaliações das médias. Já o gráfico de controle EWMAMR não foi capaz de apresentar nem um sinal durante a análise dos primeiros 50 subgrupos racionais (Tabela 5.4).

Sendo assim, os gráficos de controle que parecem ser os mais promissores em função das probabilidades dos alarmes falsos e verdadeiros, para o monitoramento da média, são: EWMA ( $\lambda = 0,1$  e  $k = 2,5$  ou  $3$ ), EWMASD ( $\lambda = 0,1$  e  $c = 2,5$  ou  $3$ ) e EWMS ( $\lambda = 0,1$  e  $\alpha = 0,0027$  ou  $0,0124$ ). O gráfico EWMSV não foi recomendado devido à alta existência de alarmes falsos.

### 5.2.1.2. Efeitos dos termos dos gráficos de controle

De acordo com o método de Lenth (1989), estão apresentados na Tabela 5.5 os efeitos principais dos dois fatores e o da interação dupla entre eles sobre as probabilidades dos alarmes verdadeiros, para cada deslocamento da média e tipo de gráfico de controle, separadamente.

Nas situações em que a média encontrava-se fora de controle e a variabilidade estava sob controle, o único gráfico de controle que possuiu pelo menos um efeito significativo foi o EWMAMR. O fator *B* foi o único significativo, de acordo com as combinações dos termos *A* e *B* adotadas. Desse modo, para o gráfico de controle EWMAMR, pode-se concluir que o fator *B* foi capaz de provocar alterações significativas na probabilidade do alarme verdadeiro (*Pd*), quando ocorre uma mudança do nível  $b_1$  para o nível  $b_2$  (Tabela 5.6).

Tabela 5.5 – Estimativas dos efeitos principais e da interação dupla, para cada deslocamento da média e tipo de gráfico de controle

$\delta$	Efeito	EWMA	EWMSD	EWMAMR	EWMS	EWMSV
0,5	<i>A</i>	-0,1421	-0,0086	0,0024	-0,0094	0,0291
	<i>B</i>	-0,0943	-0,0314	0,0168*	0,0194	-0,1005
	<i>AxB</i>	0,0373	0,0054	-0,0015	-0,0041	0,0187
1	<i>A</i>	-0,4391	-0,1981	0,0024	-0,1801	0,017
	<i>B</i>	-0,1371	-0,0866	0,0168*	0,1022	-0,0539
	<i>AxB</i>	-0,0350	0,0176	-0,0015	-0,0310	0,0111
1,5	<i>A</i>	-0,1962	-0,2614	0,0024	-0,3991	0,0079
	<i>B</i>	-0,089	-0,0665	0,0168*	0,1205	-0,0389
	<i>AxB</i>	-0,0606	-0,0268	-0,0015	0,0385	0,0067

\* Significativo pelo método de Lenth (1989) ( $P < 0,15$ )

### 5.2.1.3. Comparação dos gráficos de controle

O  $P_{valor}$  encontrado pelo teste de Friedman foi significativo. Logo:

$$\Delta_{ij} = Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{rt(t+1)}{6}} = 1,96 \sqrt{\frac{4 * 5(5+1)}{6}} = 8,7654.$$

A Tabela 5.6 mostra o teste de Friedman e as comparações, para  $\delta = 0,5$ .

Tabela 5.6 – Resultados do teste de Friedman para a probabilidade do alarme verdadeiro em função dos gráficos de controle para  $\delta = 0,5$  ( $P_{valor} = 0,006$ )

GC	Soma dos postos	Mediana	Classificação
EWMA	15,0	0,1180	A
EWMASD	13,0	0,0617	A B
EWMAMR	6,0	0,0215	B
EWMS	6,0	0,0206	B
EWMSV	20,0	0,7481	A

Soma dos postos com a mesma letra não diferem entre si pelo teste de Friedman ( $P > 0,05$ )

A Tabela 5.7 mostra o teste de Friedman e as comparações, para  $\delta = 1$ .

Tabela 5.7 – Resultados do teste de Friedman para a probabilidade do alarme verdadeiro em função dos gráficos de controle para  $\delta = 1$  ( $P_{valor} = 0,003$ )

GC	Soma dos postos	Mediana	Classificação
EWMA	16,0	0,5513	A B
EWMASD	12,0	0,3044	A B C
EWMAMR	4,0	0,0113	C
EWMS	8,0	0,1695	B C
EWMSV	20,0	0,8619	A

Soma dos postos com a mesma letra não diferem entre si pelo teste de Friedman ( $P > 0,05$ )

A tabela 5.8 ilustra os resultados obtidos pelo teste de Friedman, bem como a comparação feita entre os gráficos de controle, para  $\delta = 1,5$ .

Tabela 5.8 – Resultados do teste de Friedman para a probabilidade do alarme verdadeiro em função dos gráficos de controle para  $\delta = 1,5$  ( $P_{valor} = 0,004$ )

GC	Soma dos postos	Mediana	Classificação
EWMA	18,0	0,8620	A
EWMASD	12,0	0,7548	A B
EWMAMR	4,0	0,0393	B
EWMS	8,0	0,6208	B
EWMSV	18,0	0,9360	A

Soma dos postos com a mesma letra não diferem entre si pelo teste de Friedman ( $P > 0,05$ )

Para os deslocamentos da média de  $\delta = 0,5$ ,  $\delta = 1$  e  $\delta = 1,5$  os melhores gráficos foram: EWMA, EWMASD, EWMS e EWMSV, pois possuíram as maiores médias para as probabilidades dos alarmes verdadeiros. O gráfico EWMAMR possuiu menor valor para a probabilidade do alarme verdadeiro, logo, foi pior.

Como já foi relatado que o gráfico de controle EWMSV não atendeu à exigência imposta para a probabilidade do alarme falso, concluiu-se pela sua não recomendação. Sendo assim, para processos que necessitam de rigorosos controles da média, os melhores gráficos de controle e, conseqüentemente, os recomendados, são EWMA, EWMASD e EWMS.

Em conformidade com essa recomendação, Montgomery (2004) sugere a utilização do gráfico de controle EWMA para o monitoramento da média.

## 5.2.2. Aumento da variabilidade

### 5.2.2.1. Efeito da ordem do subgrupo racional

Para a análise da probabilidade do alarme verdadeiro em função da ordem do subgrupo racional, foram construídos gráficos de dispersão (Figura 5.4) apenas para a combinação  $\delta = 0$  e  $\varphi = 2,5$ , que foi a situação mais discrepante do caso em que o processo encontrava-se sob controle estatístico ( $\delta = 0$  e  $\varphi = 1$ ).

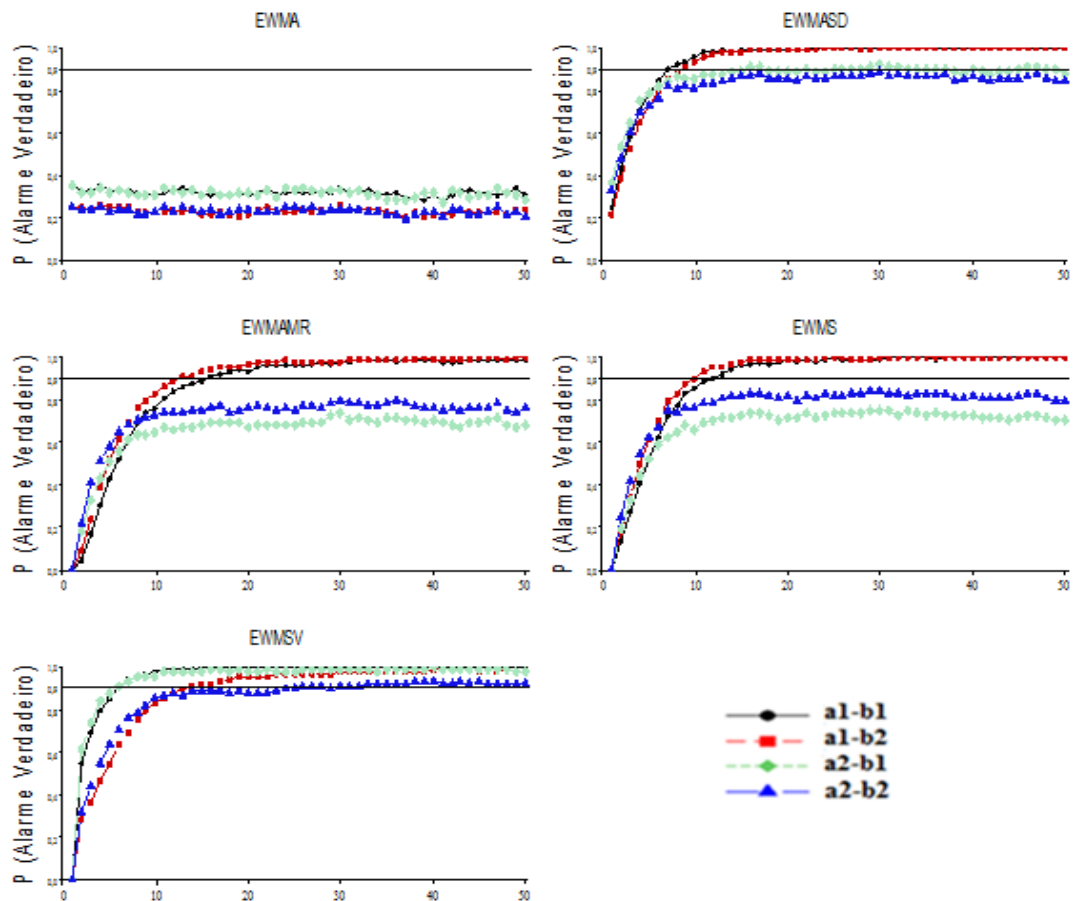


Figura 5.4 – Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros em função da ordem do subgrupo racional, de acordo com as combinações dos níveis dos fatores  $A$  e  $B$  para os gráficos de controle EWMA ( $\lambda_1 = 0,1$  e  $k_1 = 2,5$ ,  $\lambda_1 = 0,1$  e  $k_2 = 3$ ,  $\lambda_2 = 0,3$  e  $k_1 = 2,5$  e  $\lambda_2 = 0,3$  e  $k_2 = 3$ ), EWMSD ( $\lambda_1 = 0,1$  e  $c_1 = 2,5$ ,  $\lambda_1 = 0,1$  e  $c_2 = 3$ ,  $\lambda_2 = 0,3$  e  $c_1 = 2,5$  e  $\lambda_2 = 0,3$  e  $c_2 = 3$ ), EWMAMR ( $\lambda_1 = 0,1$  e  $\alpha_1 = 0,0027$ ,  $\lambda_1 = 0,1$  e  $\alpha_2 = 0,0124$ ,  $\lambda_2 = 0,3$  e  $\alpha_1 = 0,0027$  e  $\lambda_2 = 0,3$  e  $\alpha_2 = 0,0124$ ), EWMS ( $\lambda_1 = 0,1$  e  $\alpha_1 = 0,0027$ ,  $\lambda_1 = 0,1$  e  $\alpha_2 = 0,0124$ ,  $\lambda_2 = 0,3$  e  $\alpha_1 = 0,0027$  e  $\lambda_2 = 0,3$  e  $\alpha_2 = 0,0124$ ) e EWMSV ( $\lambda_1 = 0,1$  e  $h_1^* = 3$ ,  $\lambda_1 = 0,1$  e  $h_2^* = 6$ ,  $\lambda_2 = 0,3$  e  $h_1^* = 3$  e  $\lambda_2 = 0,3$  e  $h_2^* = 6$ )

Para o gráfico de controle EWMA, nenhuma das combinações utilizadas forneceu probabilidades dos alarmes verdadeiros superiores a 0,90. Dessa forma, sob as condições testadas, o gráfico EWMA não foi adequado para o monitoramento da variabilidade.

Já para o gráfico de controle EWMSD, houve apenas duas combinações de  $\lambda$  e  $c$  ( $\lambda_1$  com  $c_1$  e com  $c_2$ ) que geraram probabilidades dos alarmes verdadeiros superiores a 0,90, para 50 subgrupos racionais. Assim, se for utilizado  $\lambda_2$ , com até



50 subgrupos racionais, independente do fator  $c$ , a condição da probabilidade do alarme verdadeiro não será atendida.

Sheu *et al.* (2009), que estudaram o gráfico de controle EWMA<sub>SD</sub>, encontraram  $ARL_1 = 6,42$  ( $Pd = 24,04\%$ ), com a utilização de  $\lambda = 0,1$ ,  $L_v = 3$ ,  $\delta = 0$  e  $\varphi = 2$ . Neste estudo, utilizando-se  $\lambda = 0,1$ ,  $c = 3$ ,  $\delta = 0$  e  $\varphi = 2$ , encontrou-se um desempenho superior, com  $ARL_1 = 1,16$  ( $Pd = 86,31\%$ ).

O gráfico de controle EWMA<sub>MR</sub> apresentou apenas duas combinações de  $\lambda$  e  $c$  ( $\lambda_1$  com  $c_1$  e com  $c_2$ ) que forneceram probabilidades dos alarmes verdadeiros superiores a 0,90. Logo, o EWMA<sub>MR</sub> foi adequado para  $\lambda_1$ , mas não para  $\lambda_2$ .

Shamma e Amin (1993) encontraram  $ARL_1 = 5,56$  ( $Pd = 17,99\%$ ), com a utilização de  $\lambda = 0,1$ ,  $L = 2,7764$ ,  $\mu_0 = 0$  e  $\sigma_0 = 2$ . Para o presente trabalho, encontrou-se  $ARL_1 = 1,28$  ( $Pd = 77,83\%$ ), com a utilização de  $\lambda_1 = 0,1$ ,  $\alpha_2 = 0,0124$ ,  $\mu_0 = 0$  e  $\sigma_0 = 2$ .

O gráfico de controle EWMA<sub>S</sub> apresentou probabilidade do alarme verdadeiro superior ao valor 0,90 em duas combinações testadas ( $\lambda_1$  com  $\alpha_1$  e  $\lambda_1$  com  $\alpha_2$ ). Assim, o gráfico foi adequado para se monitorar a variabilidade ao se utilizar  $\lambda_1$ .

Huwang *et al.* (2010) obtiveram  $ARL_1 = 24,78$  ( $Pd = 40,36\%$ ), com a utilização de  $\lambda = 0,1$ ,  $\alpha = 0,05$ ,  $\delta = 0$  e  $\varphi = 1,5$ . Memar e Niaki (2010) encontraram  $ARL_1 = 6,4$  ( $Pd = 15,63\%$ ), com a utilização dos mesmos termos. Yeh *et al.* (2010) encontraram  $ARL_1 = 42,08$  ( $Pd = 2,38\%$ ), com a utilização dos mesmos valores. Já o resultado encontrado neste trabalho, com a utilização dos mesmos termos, foi de  $ARL_1 = 1,65$  ( $Pd = 60,67\%$ ). As diferenças de valores estão relacionadas a possíveis utilizações de diferentes quantidades de subgrupos racionais. Dessa forma, concluiu-se que a quantidade de subgrupos racionais utilizada para este estudo foi mais adequada do que aquelas dos demais autores citados.

O gráfico de controle EWMA<sub>SV</sub> forneceu probabilidades dos alarmes verdadeiros superiores a 0,90, para todas as combinações utilizadas. Assim, o

gráfico EWMSV foi um excelente gráfico de controle. Mas, como apresentou altas probabilidades para o alarme falso, não foi adequado.

A Tabela 5.9 ilustra a ordem do primeiro subgrupo racional que possuiu probabilidade do alarme verdadeiro superior a 0,90.

Tabela 5.9 – Estimativas da ordem do primeiro subgrupo racional que proporcionou  $Pd \geq 0,90$

GC	A	B	$\varphi$		
			1,5	2	2,5
EWMA	$\lambda_1 = 0,1$	$k_1 = 2,5$	> 50	> 50	> 50
	$\lambda_1 = 0,1$	$k_2 = 3$	> 50	> 50	> 50
	$\lambda_2 = 0,3$	$k_1 = 2,5$	> 50	> 50	> 50
	$\lambda_2 = 0,3$	$k_2 = 3$	> 50	> 50	> 50
EWMASD	$\lambda_1 = 0,1$	$c_1 = 2,5$	> 50	12	8
	$\lambda_1 = 0,1$	$c_2 = 3$	> 50	16	9
	$\lambda_2 = 0,3$	$c_1 = 2,5$	> 50	> 50	16
	$\lambda_2 = 0,3$	$c_2 = 3$	> 50	> 50	> 50
EWMAMR	$\lambda_1 = 0,1$	$\alpha_1 = 0,0027$	> 50	> 50	16
	$\lambda_1 = 0,1$	$\alpha_2 = 0,0124$	> 50	25	13
	$\lambda_2 = 0,3$	$\alpha_1 = 0,0027$	> 50	> 50	> 50
	$\lambda_2 = 0,3$	$\alpha_2 = 0,0124$	> 50	> 50	> 50
EWMS	$\lambda_1 = 0,1$	$\alpha_1 = 0,0027$	> 50	24	12
	$\lambda_1 = 0,1$	$\alpha_2 = 0,0124$	> 50	18	11
	$\lambda_2 = 0,3$	$\alpha_1 = 0,0027$	> 50	> 50	> 50
	$\lambda_2 = 0,3$	$\alpha_2 = 0,0124$	> 50	> 50	> 50
EWMSV	$\lambda_1 = 0,1$	$h_1^* = 3$	23	9	6
	$\lambda_1 = 0,1$	$h_2^* = 6$	> 50	> 50	14
	$\lambda_2 = 0,3$	$h_1^* = 3$	> 50	10	6
	$\lambda_2 = 0,3$	$h_2^* = 6$	> 50	> 50	24

Os melhores gráficos de controle para o monitoramento da variabilidade foram: EWMASD, EWMAMR e EWMS, com a utilização de  $\lambda_1$ . Já o gráfico de controle EWMA não exibiu nenhum sinal (alarme verdadeiro) durante os primeiros 50 subgrupos racionais. Logo, foi considerado ineficiente para o monitoramento da variabilidade, de acordo com os termos testados.

No que tange a relação da probabilidade do alarme verdadeiro com a ordem do subgrupo racional, concluiu-se, que existe uma grande tendência de aumento da probabilidade do alarme verdadeiro em função do aumento da ordem do subgrupo racional.

### 5.2.2.2. Efeitos dos termos dos gráficos de controle

De acordo com o método de Lenth (1989), estão apresentados na Tabela 5.10 os efeitos de  $A$ ,  $B$  e  $AxB$ , para cada aumento de variabilidade e gráfico de controle, separadamente.

Tabela 5.10 – Estimativas dos efeitos principais e de interação dupla, para cada aumento de variabilidade e tipo de gráfico de controle

$\varphi$	Efeito	EWMA	EWMSD	EWMAMR	EWMS	EWMSV
1,5	$A$	0,0001	-0,2400	-0,1785	-0,2418	-0,0200
	$B$	-0,0492*	-0,0796	0,0824	0,1048	-0,2309*
	$AxB$	-0,0004	0,0104	-0,013	-0,0206	-0,0303
2	$A$	0,0025	-0,2319*	-0,2718	-0,3380	-0,0313
	$B$	-0,0779*	-0,0479	0,0744	0,0884	-0,1683*
	$AxB$	-0,0003	-0,0205	0,0147	0,0340	0,0012
2,5	$A$	-0,0016	-0,0957	-0,1841	-0,1793	-0,0208
	$B$	-0,0863*	-0,0245	0,0475	0,0540	-0,0885
	$AxB$	0,0003	-0,0144	0,0223	0,0354	-0,0121

\* Significativo pelo método de Lenth (1989) ( $P < 0,15$ )

O fator  $A$  foi responsável por acarretar diferenças significativas apenas em um caso ( $\varphi = 2$ , para o gráfico de controle EWMSD). Em todas as demais ocasiões em que houve um fator significativo, esse fator foi o  $B$  (Tabela 5.10).

### 5.2.2.3. Comparação dos gráficos de controle

O  $P_{valor}$  do teste Friedman em todos os casos foi significativo. Logo, houve necessidade de se calcular o  $\Delta_{ij}$

$$\Delta_{ij} = Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{rt(t+1)}{6}} = 1,96 \sqrt{\frac{4*5(5+1)}{6}} = 8,7654 .$$

A tabela 5.11 ilustra os resultados obtidos pelo teste de Friedman, bem como a comparação feita entre os gráficos de controle, para  $\varphi = 1,5$ .

Tabela 5.11 – Resultados do teste de Friedman para a probabilidade do alarme verdadeiro em função dos gráficos de controle para  $\varphi = 1,5$  ( $P_{valor} = 0,004$ )

GC	Soma dos postos	Mediana	Classificação
EWMA	4,0	0,0737	C
EWMASD	16,0	0,4141	A B
EWMAMR	11,0	0,3039	B C
EWMS	9,0	0,2707	B C
EWMSV	20,0	0,7035	A

Soma dos postos com a mesma letra não diferem entre si pelo teste de Friedman ( $P > 0,05$ )

A tabela 5.12 ilustra os resultados obtidos pelo teste de Friedman, bem como a comparação feita entre os gráficos de controle, para  $\varphi = 2$ .

Tabela 5.12 – Resultados do teste de Friedman para a probabilidade do alarme verdadeiro em função dos gráficos de controle para  $\varphi = 2$  ( $P_{valor} = 0,019$ )

GC	Soma dos postos	Mediana	Classificação
EWMA	4,0	0,1850	B
EWMSD	17,0	0,7649	A
EWMAMR	10,0	0,6347	A B
EWMS	12,0	0,6724	A B
EWMSV	17,0	0,8447	A

Soma dos postos com a mesma letra não diferem entre si pelo teste de Friedman ( $P > 0,05$ )

A tabela 5.13 ilustra os resultados obtidos pelo teste de Friedman, bem como a comparação feita entre os gráficos de controle, para  $\varphi = 2,5$ .

Tabela 5.13 – Resultados do teste de Friedman para a probabilidade do alarme verdadeiro em função dos gráficos de controle para  $\varphi = 2,5$  ( $P_{valor} = 0,015$ )

GC	Soma dos postos	Mediana	Classificação
EWMA	4,0	0,2873	B
EWMSD	17,0	0,8965	A
EWMAMR	9,0	0,7993	A B
EWMS	13,0	0,8387	A
EWMSV	17,0	0,9121	A

Soma dos postos com a mesma letra não diferem entre si pelo teste de Friedman ( $P > 0,05$ )

De acordo com as Tabelas 5.11, 5.12 e 5.13, o único gráfico que apresentou desempenho inferior aos demais foi o EWMA. No entanto, o gráfico de controle EWMSV não foi recomendado devido à grande quantidade de alarmes falsos gerados. Sendo assim, os gráficos de controle recomendados foram: EWMSD, EWMAMR e EWMS.

### 5.2.3. Deslocamento da média e aumento da variabilidade

#### 5.2.3.1. Efeito da ordem do subgrupo racional

Para a análise da probabilidade do alarme verdadeiro em função da ordem do subgrupo racional, foram construídos gráficos de dispersão apenas para a combinação  $\delta = 1,5$  e  $\varphi = 2,5$  (situação mais discrepante de descontrole). A Figura 5.5 ilustra o diagrama de dispersão para essa situação.

Para o gráfico de controle EWMA, observou-se que apenas duas combinações de  $\lambda$  e  $k$  ( $\lambda_1 = 0,1$  com  $k_1 = 2,5$  e com  $k_2 = 3$ ) proporcionaram probabilidades dos alarmes verdadeiros superiores a 0,90, para os 50 primeiros subgrupos racionais. Assim, para  $\lambda_2 = 0,3$ , com 50 subgrupos racionais, independente de  $k$ , a condição da probabilidade do alarme verdadeiro não foi atendida (Figura 5.5).

Em se tratando do gráfico de controle EWMSD, observou-se que todas as combinações de  $\lambda$  e  $c$  proporcionaram probabilidades dos alarmes verdadeiros superiores a 0,90, para os primeiros 50 subgrupos racionais.

Sheu *et al.* (2009), que estudaram o gráfico de controle EWMSD, encontraram  $ARL_1 = 5,01$  ( $Pd = 19,96\%$ ), com a utilização de  $\lambda = 0,1$ ,  $L_v = 3$ ,  $\delta = 1$  e  $\varphi = 2$ . Para este estudo, com a utilização de  $\lambda = 0,1$ ,  $c = 3$ ,  $\delta = 1$  e  $\varphi = 2$ , foi encontrado  $ARL_1 = 1,10$  ( $Pd = 91,31\%$ ), e, portanto, com melhor desempenho.

De maneira semelhante ao gráfico de controle EWMA, para o gráfico EWMAMR, houve apenas duas combinações de  $\lambda$  e  $k$  ( $\lambda_1 = 0,1$  com  $k_1 = 2,5$  e com  $k_2 = 3$ ) que foram capazes de gerar probabilidades dos alarmes verdadeiros superiores ao valor 0,90, mediante a análise dos 50 primeiros subgrupos racionais.

Shamma e Amin (1993) encontraram  $ARL_1 = 3,54$  ( $Pd = 28,25\%$ ), com a utilização de  $\lambda = 0,1$ ,  $L = 2,7764$ ,  $\delta = 1,5$  e  $\varphi = 2$ . Para o presente trabalho,

encontrou-se  $ARL_1 = 1,28$  ( $Pd = 77,83\%$ ), com a utilização de  $\lambda_1 = 0,1$ ,  $\alpha_2 = 0,0124$ ,  $\delta = 1,5$  e  $\varphi = 2$ .

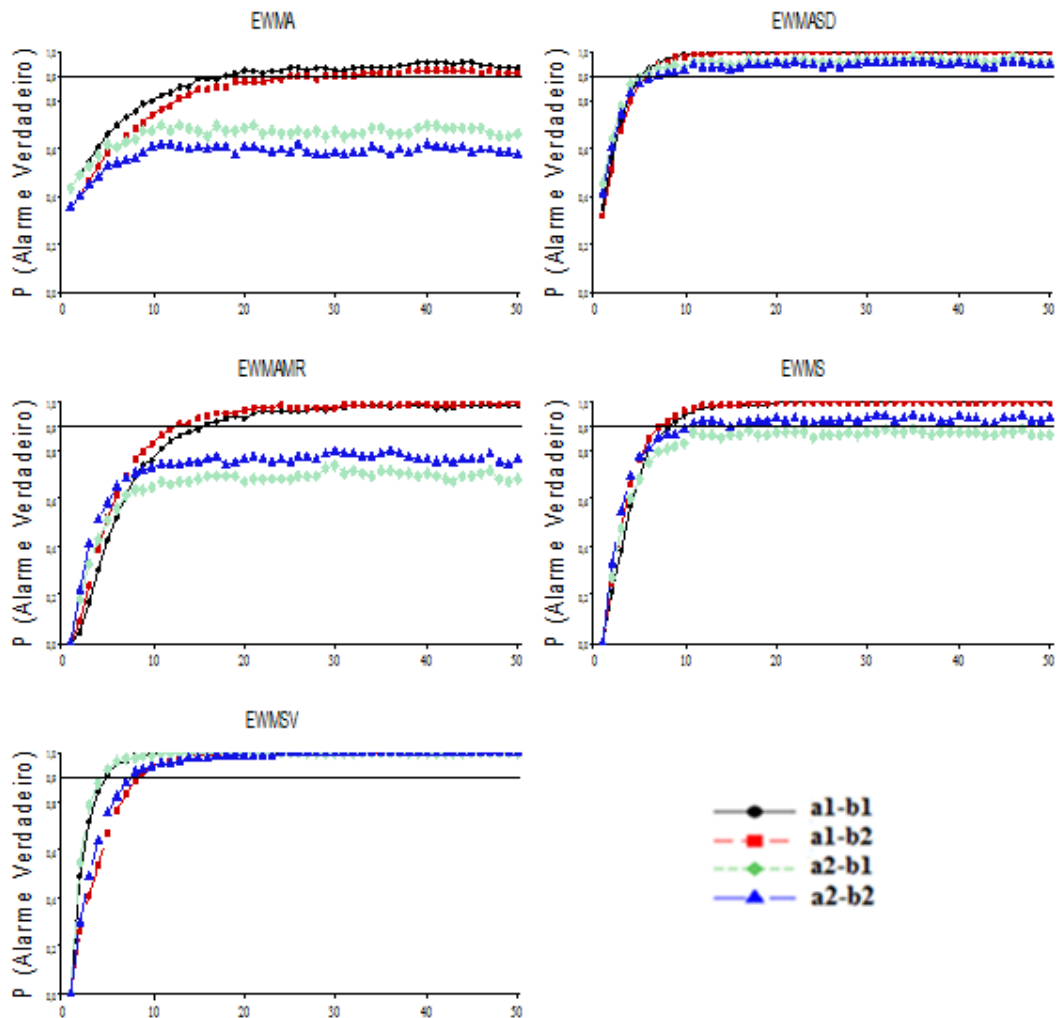


Figura 5.5 – Estimativas das probabilidades dos alarmes verdadeiros em função da ordem do subgrupo racional, de acordo com as combinações dos níveis dos fatores  $A$  e  $B$  para os gráficos de controle EWMA ( $\lambda_1 = 0,1$  e  $k_1 = 2,5$ ,  $\lambda_1 = 0,1$  e  $k_2 = 3$ ,  $\lambda_2 = 0,3$  e  $k_1 = 2,5$  e  $\lambda_2 = 0,3$  e  $k_2 = 3$ ), EWMSD ( $\lambda_1 = 0,1$  e  $c_1 = 2,5$ ,  $\lambda_1 = 0,1$  e  $c_2 = 3$ ,  $\lambda_2 = 0,3$  e  $c_1 = 2,5$  e  $\lambda_2 = 0,3$  e  $c_2 = 3$ ), EWMAMR ( $\lambda_1 = 0,1$  e  $\alpha_1 = 0,0027$ ,  $\lambda_1 = 0,1$  e  $\alpha_2 = 0,0124$ ,  $\lambda_2 = 0,3$  e  $\alpha_1 = 0,0027$  e  $\lambda_2 = 0,3$  e  $\alpha_2 = 0,0124$ ), EWMS ( $\lambda_1 = 0,1$  e  $\alpha_1 = 0,0027$ ,  $\lambda_1 = 0,1$  e  $\alpha_2 = 0,0124$ ,  $\lambda_2 = 0,3$  e  $\alpha_1 = 0,0027$  e  $\lambda_2 = 0,3$  e  $\alpha_2 = 0,0124$ ) e EWMSV ( $\lambda_1 = 0,1$  e  $h_1^* = 3$ ,  $\lambda_1 = 0,1$  e  $h_2^* = 6$ ,  $\lambda_2 = 0,3$  e  $h_1^* = 3$  e  $\lambda_2 = 0,3$  e  $h_2^* = 6$ )

No que tange o gráfico de controle EWMS, as probabilidades dos alarmes verdadeiros não foram superiores ao valor alvo de 0,90 somente para a combinação de  $\lambda_2$  com  $\alpha_1$ . Nas outras combinações testadas, esse gráfico foi adequado.

Memar e Niaki (2010) encontraram  $ARL_1 = 6,7$  ( $Pd = 14,93\%$ ), com a utilização de  $\lambda = 0,1$ ,  $\alpha = 0,05$ ,  $\delta = 1$  e  $\varphi = 2$ . Neste estudo, foi encontrado  $ARL_1 = 1,10$  ( $Pd = 91,31\%$ ), para os mesmos valores. As diferenças de valores estão relacionadas a possíveis utilizações de diferentes quantidades de subgrupos racionais. Logo, a quantidade de subgrupos racionais deste estudo foi mais adequada.

O gráfico EWMSV superou rapidamente a meta de 0,9. No entanto, como não atendeu à exigência para o alarme verdadeiro, foi inviabilizado.

No geral, houve uma forte relação da probabilidade do alarme verdadeiro com a ordem do subgrupo racional. A tendência foi de aumento de tal probabilidade em função da ordem do subgrupo racional.

Na Tabela 5.14 é ilustrada a ordem do primeiro subgrupo racional que forneceu probabilidade do alarme verdadeiro superior a 0,90.

Para o gráfico de controle EWMA, observou-se anteriormente que ele não deve ser utilizado somente para o monitoramento da variabilidade. Reforçando tal conclusão, observou-se na situação em que o deslocamento da média foi de  $\delta = 0,5$  e a variabilidade possuiu um aumento de  $\varphi = 2,5$ , não houve presença de alarmes verdadeiros. No entanto, ele foi recomendado para o monitoramento da média, pois foi capaz de gerar sinais para aquelas situações em que o deslocamento da média foi maior ( $\delta = 1,5$ ), independente do aumento da variabilidade.

Para o gráfico de controle EWMSD, como apresentou uma quantidade de alarmes verdadeiros satisfatória, concluiu-se que ele é recomendado para a situação de deslocamento contínuo da média e variabilidade.

O gráfico de controle EWMAMR foi eficiente para monitorar processos com deslocamento da média e aumento da variabilidade. Porém, há de se ressaltar que ele detectou apenas variações na média, não fazendo o mesmo para a variabilidade.



Tabela 5.14 – Estimativas da ordem do primeiro subgrupo racional que proporcionou  $Pd \geq 0,90$

GC	A	B	$\delta$								
			0,5			1			1,5		
			$\varphi$								
			1,5	2	2,5	1,5	2	2,5	1,5	2	2,5
EWMA	$\lambda_1 = 0,1$	$k_1 = 2,5$	>50	>50	>50	42	>50	>50	9	14	19
	$\lambda_1 = 0,1$	$k_2 = 3$	>50	>50	>50	>50	>50	>50	12	18	26
	$\lambda_2 = 0,3$	$k_1 = 2,5$	>50	>50	>50	>50	>50	>50	>50	>50	>50
	$\lambda_2 = 0,3$	$k_2 = 3$	>50	>50	>50	>50	>50	>50	>50	>50	>50
EWMASD	$\lambda_1 = 0,1$	$c_1 = 2,5$	>50	11	7	18	9	7	9	7	6
	$\lambda_1 = 0,1$	$c_2 = 3$	>50	14	8	26	11	7	10	8	6
	$\lambda_2 = 0,3$	$c_1 = 2,5$	>50	>50	16	>50	>50	9	>50	11	6
	$\lambda_2 = 0,3$	$c_2 = 3$	>50	>50	>50	>50	>50	17	>50	22	8
EWMAMR	$\lambda_1 = 0,1$	$\alpha_1 = 0,0027$	>50	>50	16	>50	>50	16	>50	>50	16
	$\lambda_1 = 0,1$	$\alpha_2 = 0,0124$	>50	25	13	>50	25	13	>50	25	13
	$\lambda_2 = 0,3$	$\alpha_1 = 0,0027$	>50	>50	>50	>50	>50	>50	>50	>50	>50
	$\lambda_2 = 0,3$	$\alpha_2 = 0,0124$	>50	>50	>50	>50	>50	>50	>50	>50	>50
EWMS	$\lambda_1 = 0,1$	$\alpha_1 = 0,0027$	>50	19	11	>50	15	10	14	11	9
	$\lambda_1 = 0,1$	$\alpha_2 = 0,0124$	>50	15	10	27	12	9	13	9	7
	$\lambda_2 = 0,3$	$\alpha_1 = 0,0027$	>50	>50	>50	>50	>50	>50	>50	>50	>50
	$\lambda_2 = 0,3$	$\alpha_2 = 0,0124$	>50	>50	>50	>50	>50	>50	>50	>50	11
EWMSV	$\lambda_1 = 0,1$	$h_1^* = 3$	15	8	6	9	7	6	6	6	5
	$\lambda_1 = 0,1$	$h_2^* = 6$	32	22	13	15	14	11	10	10	9
	$\lambda_2 = 0,3$	$h_1^* = 3$	17	8	6	9	6	5	6	6	5
	$\lambda_2 = 0,3$	$h_2^* = 6$	34	31	14	14	15	10	9	9	8

O gráfico de controle EWMS foi adequado para os casos de deslocamento da média e aumento da variabilidade, devido à alta quantidade de alarmes verdadeiros.

Já o gráfico de controle EWMSV, como não atendeu à exigência máxima para o alarme falso (0,05), sua utilização foi inviabilizada.

Assim, os gráficos de controle EWMA, EWMASD, EWMAMR e EMWS foram recomendados para o monitoramento simultâneo da média e da variabilidade.

### 5.2.3.2. Efeitos dos termos dos gráficos de controle

De acordo com o método de Lenth (1989), estão apresentados na Tabela 5.15 os efeitos principais dos dois fatores e o da interação dupla sobre as probabilidades dos alarmes verdadeiros, para cada combinação do deslocamento da média e do aumento da variabilidade e tipo de gráfico de controle, separadamente.

Tabela 5.15 – Estimativas dos efeitos principais e da interação dupla, para cada combinação de deslocamento da média e aumento da variabilidade e tipo de gráfico de controle

$\delta$	$\varphi$	Efeito	EWMA	EWMASD	EWMAMR	EWMS	EWMSV
0,5	1,5	A	-0,1345	-0,2745	-0,1785	-0,2962	0,0005
	1,5	B	-0,0966	-0,0779	0,0824	0,1117	-0,1367*
	1,5	AxB	0,0169	0,0036	-0,0130	-0,0142	0,0195
	2	A	-0,0999	-0,2114*	-0,2718	-0,3207	-0,0113
	2	B	-0,0927	-0,0436	0,0744	0,0830	-0,1191*
	2	AxB	0,0062	-0,0204	0,0147	0,0385	0,0029
	2,5	A	-0,0787	-0,0878	-0,1841	-0,1668	-0,0086
	2,5	B	-0,0902	-0,0222	0,0475	0,0515	-0,0716*
	2,5	AxB	0,0009	-0,0127	0,0223	0,0338	-0,0033
1	1,5	A	-0,3293	-0,2761*	-0,1785	-0,3646	0,0096
	1,5	B	-0,1108	-0,0607	0,0824	0,1037	-0,0633*
	1,5	AxB	-0,0155	-0,0147	-0,0130	0,0189	0,0090
	2	A	-0,2529	-0,1549	-0,2718	-0,2597	0,0047
	2	B	-0,0936	-0,0338	0,0744	0,0695	-0,0664*
	2	AxB	-0,0061	-0,0191	0,0147	0,0415	0,0044
	2,5	A	-0,2002	-0,0635	-0,1841	-0,1310	0,0024
	2,5	B	-0,0816	-0,0181	0,0475	0,0436	-0,0478*
	2,5	AxB	-0,0081	-0,0105	0,0223	0,0302	0,0005
1,5	1,5	A	-0,2399	-0,1590	-0,1785	-0,2773	0,0059
	1,5	B	-0,0741	-0,0373	0,0824	0,0808	-0,0390*
	1,5	AxB	-0,0418	-0,0201	-0,0130	0,0480	0,0051
	2	A	-0,2473	-0,0834	-0,2718	-0,1657	0,0060
	2	B	-0,0666	-0,0225	0,0744	0,0521	-0,0412*
	2	AxB	-0,0270	-0,0136	0,0147	0,0356	0,0034
	2,5	A	-0,2317	-0,0364	-0,1841	-0,0831	0,0047
	2,5	B	-0,0614	-0,0120	0,0475	0,0329	-0,0340*
	2,5	AxB	-0,0193	-0,0064	0,0223	0,0224	0,0016

\* Significativo pelo método de Lenth (1989) ( $P < 0,15$ )

### 5.2.3.3. Comparação dos gráficos de controle

O  $P_{valor}$  do teste de Friedman foi significativo. A diferença mínima significativa foi de:  $\Delta_{ij} = Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{rt(t+1)}{6}} = 1,96 \sqrt{\frac{4 * 5(5+1)}{6}} = 8,7654$ .

A tabela 5.16 ilustra as medianas para todos os deslocamentos de média e aumentos de variabilidade, para cada tipo de gráfico de controle.

Tabela 5.16 – Estimativas das medianas para cada deslocamento da média e aumento da variabilidade e tipo de gráfico de controle

FV	Medianas		
	$\delta = 0,5$		
	$\varphi = 1,5 (P = 0,004)$	$\varphi = 2 (P = 0,007)$	$\varphi = 2,5 (P = 0,007)$
EWMA	0,2287	0,3096	0,3714
EWMSD	0,5008	0,7926	0,9056
EWMAMR	0,3055	0,6383	0,7970
EWMS	0,3493	0,7078	0,8489
EWMSV	0,8110	0,8836	0,9239
FV	$\delta = 1$		
	$\varphi = 1,5 (P = 0,004)$	$\varphi = 2 (P = 0,009)$	$\varphi = 2,5 (P = 0,007)$
	EWMA	0,5596	0,5454
EWMSD	0,6864	0,8384	0,9193
EWMAMR	0,3127	0,6242	0,7842
EWMS	0,5605	0,7622	0,8628
EWMSV	0,8946	0,9078	0,9328
FV	$\delta = 1,5$		
	$\varphi = 1,5 (P = 0,008)$	$\varphi = 2 (P = 0,007)$	$\varphi = 2,5 (P = 0,009)$
	EWMA	0,8126	0,7719
EWMSD	0,8453	0,9040	0,9422
EWMAMR	0,3204	0,6277	0,7808
EWMS	0,7605	0,8423	0,8948
EWMSV	0,9319	0,9349	0,9437

A tabela 5.17 ilustra todas as somas dos postos para todos os deslocamentos de média e aumentos de variabilidade, bem como as classificações em grupos.

Tabela 5.17 – Resultados do teste de Friedman com as somas dos postos (SP) e classificações em grupos

FV	$\delta = 0,5$					
	$\varphi = 1,5$		$\varphi = 2$		$\varphi = 2,5$	
	SP	Grupo	SP	Grupo	SP	Grupo
EWMA	6,0	C	4,0	C	4,0	C
EWMSD	16,0	A B	17,0	A	17,0	A
EWMAMR	8,0	B C	8,0	B C	8,0	B C
EWMS	10,0	B C	13,0	A B	13,0	A B
EWMSV	20,0	A	18,0	A	18,0	A
FV	$\delta = 1$					
	$\varphi = 1,5$		$\varphi = 2$		$\varphi = 2,5$	
	SP	Grupo	SP	Grupo	SP	Grupo
EWMA	10,0	B C	5,0	B	4,0	C
EWMSD	16,0	A B	17,0	A	18,0	A
EWMAMR	4,0	C	7,0	B	8,0	B C
EWMS	10,0	B C	13,0	A B	13,0	A B
EWMSV	20,0	A	18,0	A	17,0	A
FV	$\delta = 1,5$					
	$\varphi = 1,5$		$\varphi = 2$		$\varphi = 2,5$	
	SP	Grupo	SP	Grupo	SP	Grupo
EWMA	12,0	A B C	8,0	B C	6,0	B
EWMSD	16,0	A B	18,0	A	18,0	A
EWMAMR	4,0	C	4,0	C	6,0	B
EWMS	9,0	B C	13,0	A B	13,0	A B
EWMSV	19,0	A	17,0	A	17,0	A

Somas dos postos (SP) com a mesma letra não diferem entre si pelo teste de Friedman ( $P > 0,05$ )

O gráfico de controle EWMA possuiu bons desempenhos nos casos em que houve aumentos da média. Sendo assim, ele foi adequado para o monitoramento conjunto da média e variabilidade.

Já para o gráfico de controle EWMSD, o desempenho foi muito bom para praticamente todas as situações de deslocamento da média e aumento da variabilidade. Logo, foi recomendado para essas situações.

O gráfico de controle EWMAMR possuiu desempenho mediano para todas as combinações entre os parâmetros  $\delta$  e  $\varphi$ . Dessa forma, foi recomendando para o monitoramento conjunto da média e variabilidade.

Para o gráfico de controle EWMS, o desempenho na geração de alarmes verdadeiros foi considerado bom ou regular para todas as combinações dos termos analisados. Sendo assim, foi adequado para o monitoramento da média e da variabilidade conjuntamente.

Já o gráfico de controle EWMSV, também apresentou um excelente desempenho para todas as combinações dos termos  $\delta$  e  $\varphi$ . Mas, como não satisfaz a condição para os alarmes falsos, ele não foi recomendado para o monitoramento da média e da variabilidade.

## 6. CONCLUSÕES

Quanto ao comportamento das probabilidades dos alarmes falsos e verdadeiros, concluiu-se que houve, respectivamente, pequena e grande tendência de aumento das referidas probabilidades em função do aumento da ordem do subgrupo racional.

De acordo com a análise dos efeitos dos fatores pelo diagrama de Pareto, o fator  $B$  ( $k$  (EWMA),  $c$  (EWMSD),  $\alpha$  (EWMAMR e EWMS) ou  $h^*$  (EWMSV)) foi o mais importante em acarretar mudanças significativas nas probabilidades dos alarmes falsos ou verdadeiros, de acordo com as combinações dos termos que foram utilizadas. O fator  $A$  ( $\lambda$ ) causou diferenças significativas em tais probabilidades em raras situações. Portanto, deve-se dar prioridade à escolha correta do nível do fator  $B$  ao se planejar a construção dos gráficos de controle que foram expostos.

No que tange a comparação das probabilidades dos alarmes falsos e verdadeiros entre os diferentes tipos de gráficos de controle, tem-se a seguinte recomendação: para o monitoramento da média, sugere-se os gráficos EWMA, EWMSD e EWMS; para o monitoramento da variabilidade, recomenda-se a utilização dos gráficos EWMSD, EWMAMR e EWMS; e para o monitoramento conjunto da média e variabilidade, indica-se a utilização dos gráficos EWMA, EWMSD, EWMAMR e EWMS. O gráfico de controle EWMSV não foi recomendado para nenhuma situação devido ao fato de que ele não atendeu à exigência imposta para a probabilidade do alarme falso ( $\alpha \leq 0,05$ ).

Essas recomendações estão parcialmente de acordo com o que a literatura recomenda. Montgomery (2004) relata que o gráfico de controle EWMA é utilizado apenas para o monitoramento da média, no entanto, neste estudo, ele foi recomendado para o monitoramento da média e da média e variabilidade simultâneos. Huang *et al.* (2012) afirmam que o gráfico de controle EWMSD é utilizado apenas para o monitoramento da variabilidade, no entanto, neste trabalho, foi sugerido para o monitoramento da média, para o monitoramento da variabilidade e para o monitoramento simultâneo da média e variabilidade. Eyvazian *et al.* (2007) dizem que os gráficos de controle EWMAMR e EWMSV são utilizados apenas para o monitoramento da variabilidade e o gráfico EWMS utilizado para o monitoramento da média e/ou da variabilidade. No entanto, os resultados encontrados neste trabalho mostram que: o gráfico EWMAMR pode ser utilizado para o monitoramento da variabilidade e da média e variabilidade simultâneos; o gráfico EWMS pode ser utilizado para o monitoramento da média, da variabilidade, e da média e variabilidade simultâneos; o gráfico EWMSV não foi recomendado de acordo com os termos que foram testados. Por fim, para se ter uma visão melhor sobre o gráfico de controle EWMSV, sugere-se, para trabalhos futuros, a utilização de diferentes valores aos termos desse gráfico.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALBARRACIN, O. Y. E. *Monitoramento das séries de contagem por meio de gráficos de controle*. 2014. 120f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de São Paulo, São Paulo, 2014.

AGUIAR, S. *Integração das Ferramentas da Qualidade ao PDCA e ao Programa Seis Sigma*. Editora de Desenvolvimento Gerencial. Belo Horizonte, 2002.

ALVES, C. C. *Gráficos de Controle CUSUM: um Enfoque Dinâmico para a Análise Estatística de Processos*. Florianópolis, 2013. 134 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina, 2013.

BLÖDORN, M.; SOARES, M. *Qualidade: Uma Questão de Sobrevivência para as Organizações*. Universidade Federal de Pelotas: Pelotas, 2011.

BOX, G. E. P. *Some theorems on quadratic forms applied in the study of analysis of variance problems, I: effect of inequality of variance in the one-way classification*. Ann Math Stat 25: 290-302, 1954.

CARVALHO, J. L. A. *Reengenharia de Processos na Indústria Farmacêutica*. Lisboa, 2010. 231 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia e Gestão Industrial) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia e Gestão Industrial, Universidade Nova de Lisboa, 2010.

COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI, L. C. R. *Controle Estatístico de Qualidade*. Atlas: São Paulo, 2004.

DOMANGUE, R.; PATCH, S. C. *Some Omnibus Exponentially Weighted Moving Average Statistical Process Monitoring Schemes*. Technometrics, Milwaukee, v. 33, n. 3, p. 299-313, ago./out. 1991.

EYVAZIAN, S.; NAINI, S. G. J.; VAGHEFI, A. *Monitoring Process Variability Using Exponentially Weighted Moving Sample Variance Control Charts*. London: Springer, 2007.

- GAN, F. F. *An Optimal Design of EWMA Control Charts Based on Median Run Length*. Journal of Statistical Computation and Simulation, 45, 169–184, 1993.
- GONÇALVES, T. C. *Metodologias Alternativas aos Gráficos de Controle na Caracterização de Processos Univariados*. Viçosa, 2008. 81 p. Dissertação (Mestrado em Estatística Aplicada e Biometria) – Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria, Universidade Federal de Viçosa, 2008.
- HUANG, W.; SHU, L.; JIANG, W. *Evaluation of Exponentially Weighted Moving Variance Control Chart to Linear Drifts*. Macao: Elsevier, 2012.
- HUWANG, L.; WANG, Y-H. T.; YEH, A. B.; CHEN, Z-S. J. *On The Exponentially Weighted Moving Variance*. Institute of Statistics National Tsing Hua University: Taiwan, 2009.
- LENTH, R. V. *Quick and easy analysis of unreplicated factorials*. Technometrics, v.31, p. 469-473, 1989.
- LUCAS, J. M.; SACCUCCI, M. S. *Response to the Discussion of Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancements*. Technometrics, v.32, pp.27-30, 1990.
- MACGREGOR, J. F.; HARRIS, T. J. *The Exponentially Weighted Variance*. Journal of Quality Technology, v.25, n.2, p. 160-67, 1993.
- MARSHALL, I. Jr. *Gestão da Qualidade*. 8 ed. Rio de Janeiro – RJ Editora FGV., 2006. 195 p.
- MELO, G. H. N. *Métodos de Lenth para Análise de Planos Strip-Block com Estruturas Fatoriais  $2^k$  Não Replicadas*. Recife, 2007. 89 p. Dissertação (Mestrado em Estatística Aplicada), Universidade Federal de Pernambuco, 2007.
- MEMAR, A. O.; NIAKI, S. T. A. *The Max EWMAMS Control Chart for Joint Monitoring of Process Mean and Variance with Individual Observations*. Quality and Reliability Engineering International, 2010.



MONTGOMERY, D. C. *Introdução ao Controle Estatístico da Qualidade*. 4 ed. Tradução Ana Maria Lima de Farias e Vera Regina Lima de Farias e Flores. Rio de Janeiro: LTC, 2004.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. *Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros*. 4 ed. Tradução Verônica Calado, LTC: Rio de Janeiro, 2009.

NEUBAUER, A. S. *The EWMA Control Chart: Properties and Comparison with Other Quality-Control Procedures by Computer Simulation*. Clinical Chemistry, Vol. 43, p. 594-601: Munich, 1997.

NG, C. H.; CASE, K. E. *Development and Evaluation of Control Charts Using Exponentially Weighted Moving Averages*. Journal of Quality Technology, 1989.

OLIVEIRA, O. J. *Gestão da Qualidade: tópicos avançados*. 1 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

OTAVIANO, A. H. C. O. *O Uso da Metodologia DMAIC para a Implementação de Conceitos de Produção Enxuta*. São Carlos, 2010. 82 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia de Produção) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2010.

PALADINI, E. P. *Gestão Estratégica da Qualidade: princípios, métodos e processos*. São Paulo: Atlas, 2008.

POZZOBON, E. M. P.; *Aplicação do Controle Estatístico do Processo*. 2001. 130f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria. 2001.

RAMM, A. J. *Procedimentos de Calibração e Otimização Estrutural para um Gabinete de Refrigerador*. Florianópolis, 2007. 197 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), Universidade Federal de Santa Catarina, 2007.

RIBEIRO JÚNIOR, J. I. *Métodos Estatísticos Aplicados ao Controle da Qualidade*. Editora UFV: Viçosa, 2013.

RIBEIRO, J. L. D.; CATEN, C. S. T. *Controle Estatístico do Processo*. 2012. 172 f. Monografia (Pós Graduação em Engenharia) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, 2012.

- ROSA, L. M. F. *Probabilidade do Alarme Falso no Gráfico de Controle EWMA para o Monitoramento de Processo Autocorrelacionado*. Viçosa, 2012. 57 p. Dissertação (Mestrado em Estatística Aplicada e Biometria) – Programa de Pós-Graduação em Estatística Aplicada e Biometria, Universidade Federal de Viçosa, 2012.
- SANTOS, L. A. R.; CONDE, F. C.; SALVADOR, M. A.; RAMOS, A. M.; SANTOS, L. S. F. C.; LUCIO, P. S. *Controle Estatístico de Qualidade para Processos Climatológicos Autocorrelacionados*. Programa de Pós-Graduação em Ciências Climáticas, Universidade Federal do Rio Grande do Norte: Natal, 2010.
- SHAMMA, S. E.; AMIN, R. W. *An EWMA Quality Control Procedure for Jointly Monitoring Mean and Variance*. International Journal of Quality & Reliability Management: University of Florida, USA, 1993.
- SHEU, S-H.; TAI, S-H.; HSIEH, Y-T.; LIN, T-C. *Monitoring Process Mean and Variability with Generally Weighted Moving Average Control Charts*. Computers & Industrial Engineering, 2009.
- SILVA, A. R. *Controle Estatístico do Processo*. Instituto de Educação Tecnológica: São Paulo, 2014.
- SLACK, N.; CHAMBERS, S.; JOHNSTON, R. *Administração da Produção*. Atlas: São Paulo, 2009.
- SOUZA, L. M.; RIBEIRO JÚNIOR, J. I. S.; REIS, G. M.; IDE, M. S. *Eficiência dos Gráficos de Controle Xbarra, Ewma e Cusum*. Revista Eletrônica Produção & Engenharia, 2008.
- WERKEMA, M. C. C. *Ferramentas estatísticas básicas para o gerenciamento de processos*. Belo Horizonte: Fundação Christiano Ottoni, Escola de Engenharia da UFMG, 1995.
- WORTHAM, A. M.; RINGER, L. J. *Control Via Exponentially Smoothing*. Transportation and Logistic Review, 1971.

YEH, A. B.; HUWANG, L.; MCGRATH, R. N.; ZHANG, Z. *On Monitoring Process Variance with Individual Observations*. Quality and Reliability Engineering International, 2010.